目录

一维有限元方法求解常微分方程边值问题

202011010101 物理 2001 孙陶庵

2023 年 4 月 22 日

1 问题

使用一维有限元方法求解下列常微分方程边值问题：$\begin{cases} y'' - y + x = 0, & x \in [1,2] \\ y(1) = 1, y(2) = 3 \end{cases}$

2 方法推导

1. 离散化区间 [1,2]，选择有限元网格。可以选择等距节点网格，即将 [1,2] 等分为 n 个子区间，每个子区间内选择一个节点。这里选择 n=4，即将 [1,2] 等分为 4 个子区间，每个子区间内选择一个节点，得到节点序列 [1, 1.333, 1.667, 2]。

2. 根据所选有限元网格，建立有限元函数空间。由于是一维问题，可以采用线性元，即每个子区间内用一次多项式近似解。定义有限元函数空间为 $V_h = v_h | v_h(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \varphi_j(x), c_j \in R$，其中 $\varphi_j(x)$ 为基函数，可以选择线性插值函数。则有 $\varphi_1(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x-x_2}{x_1-x_2}, & x \in [x_1, x_2] \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} \frac{x-x_1}{x_2-x_1}, & x \in [x_1, x_2] \\ \frac{x_3-x}{x_3-x_2}, & x \in [x_2, x_3] \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$
\varphi_3(x)=\begin{cases}\frac{x-x_2}{x_3-x_2}, & x\in[x_2,x_3]\\ \frac{x_4-x}{x_4-x_3}, & x\in[x_3,x_4]\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}
$$

$$
\varphi_4(x)=\begin{cases}\frac{x-x_3}{x_4-x_3}, & x\in[x_3,x_4]\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}
$$

3. 将原方程转化为弱形式。对于任意 $v_h \in V_h$，将原方程两边乘 v_h，并在区间 [1,2] 上积分，得到 $\int_1^2 (y''-y+x)v_h dx = 0$。由于 v_h 是连续线性函数，可以将积分区间 [1,2] 上的积分转化为每个子区间内的积分，即 $\sum_{k=1}^{3}\int_{x_k}^{x_{k+1}}(y''-y+x)v_h dx = 0$。

4. 对于每个子区间 [k,k+1]，将 $y(x)$ 和 $v_h(x)$ 在该区间内分别用基函数展开，即 $y(x) = \sum_{j=1}^{2} y_j\varphi_j(x)$，$v_h(x) = \sum_{j=1}^{2} v_j\varphi_j(x)$。将 $y(x)$ 和 $v_h(x)$ 在每个子区间 [k,k+1] 内分别用基函数展开，即用基函数 $\varphi_j(x)$ 的线性组合来近似表示 $y(x)$ 和 $v_h(x)$。其中，y_j 和 v_j 是在子区间 [k,k+1] 内的系数，需要确定。因此，在每个子区间上，有 $y(x) = \sum_{j=1}^{2} y_j\varphi_j(x)$ 和 $v_h(x) = \sum_{j=1}^{2} v_j\varphi_j(x)$ 的展开形式。这里选择的是线性元，所以每个子区间内用一次多项式近似解，即选择两个节点作为基函数的控制点，也就是基函数在这两个点处取值为 1 和 0，其余点处线性插值。

3 问题