目录

202011010101 物理 2001 孙陶庵

2023 年 5 月 18 日

1 引言

量子物理中的 WKB（Wentzel-Kramers-Brillouin）近似是一种强大的工具，用于解决薛定谔方程的近似解。它在描述均匀介质中的量子现象和波动行为方面具有广泛的应用。然而，许多实际系统，如非均匀等离子体，具有空间上的变化性质，导致了更为复杂的物理行为。在这种情况下，我们需要将 WKB 近似扩展到非均匀介质，以更准确地描述系统的性质和行为。

非均匀等离子体作为一种重要的物质状态，在激光等离子体物理和实验室天体物理中扮演着关键的角色。它们在实验室中通过激光和高能粒子束的相互作用中产生，并在宇宙中存在于星际介质和恒星大气等环境中。然而，由于等离子体密度、温度和电场等物理量在空间上的变化，非均匀等离子体的性质和行为比均匀介质更为复杂和多样化。

在这篇论文中，我们将探索 WKB 近似在非均匀等离子体中的应用。首先，我们将回顾 WKB 近似的基本原理和推导过程，以及其在均匀介质中的应用。然后在激光等离子体中，我们将探讨 WKB 近似在分析波模式、自聚焦效应和光束传输中的应用。

2 WKB 近似的基本原理

WKB（Wenzel，Kramers, Brillouin）方法是得到一维定态 Schrödinger 方程的近似解的一种技术，其基本思想同样可应用于许多其他形式的微分方程和三维 Schrödinger

方程的径向部分，其最基本的核心思想主要是：首先波函数以指数函数的形式重新表达，再将这指数函数代入 Schrödinger 方程，展开指数函数的参数为 $\hbar$ 的幂级数，$\hbar$ 同次幂的项目一一对应，会得到一组方程，处理后，就会得到波函数的近似。

2.1 基本思想

中间省略了很多步骤,详细过程参见各大量子力学课本 [1] 对于一维定态 Schrödinger 方程：

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\psi(x)+V(x)\psi(x)=E\psi(x)$$

将其重写为：

$$-\hbar^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\psi(x)=p^2\psi(x)$$

其中 $p(x)\equiv\sqrt{2m[E-V(x)]}$，此时假设 $E>V(x)$，因此 p 为实数，此为经典区域，所以现在假设波函数的形式为另外一个函数 ϕ 的指数，$\psi(x)=e^{\phi(x)/\hbar}$。将其代回原方程可以得到

$$\frac{d\psi}{dx}=\left(A^{\cdot}+iA\phi^{\cdot}\right)e^{i\phi}$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}=\left[A'+2iA\phi'+iA\phi'-A\left(\phi'\right)^2\right]e^{i\phi}$$

代回原式可得：

$$A^{'}+2iA^{'}\phi+iA\phi^{'}-A\left(\phi^{'}\right)^2=-\frac{p^2}{\hbar^2}A$$

这等价于两个实数方程，且一个实部一个虚部：

$$A^{*}-A\left(\phi^{\cdot}\right)^2=-\frac{p^2}{\hbar^2}A$$

$$2A\phi'+A\phi'=0$$

第二个方程很容易解出：

$$A^2\phi^2 = C^2$$

式中 C 为（实）常数。一般来说第一个方程很难求解　所以需要近似：我们假定振幅 A 的变化非常缓慢，因此 A'' 项可忽略，在此情况下，我们只剩下：

$$\phi(x) = \pm\int p(x)\mathrm{dx}$$

可以得出：

$$\psi(x) \approx \frac{C_\pm}{\sqrt{p(x)}} e^{\frac{i}{\hbar}\pm\int p(x)\mathrm{d}x}$$

接着，在势阱内部，我们有：

$$\psi(x) \cong \frac{1}{\sqrt{p(x)}}\left[C_+e^{i\phi(x)} + C_-e^{-i\phi(x)}\right]$$

其中

$$\phi(x) = \frac{1}{\hbar}\int_0^x p(x')\mathrm{dx}'$$

现在考虑边界条件 $\psi(x=0)=0$ 和 $\psi(x=a)=0$，所以 $C_2=0$，所以

$$\phi(a) = n\pi \quad (n = 1, 2, 3, ...)$$

最后，系统满足量子化规则：

$$\int_{x_1}^{x_2} p(x)dx = (n-1/2)\pi\hbar, \qquad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

2.2　解释和物理意义

1. 隧穿效应：WKB 近似在描述隧穿效应（tunneling effect）方面非常有用。当粒子遇到势垒或势阱时，根据经典物理学，粒子应该被完全反射或完全传播。然而，量子力学中存在隧穿效应，使得一部分波函数能够穿透势垒或势阱。WKB 近似能够提供隧穿

概率的估计，从而解释一些实验现象，如 α 衰变和扫描隧道显微镜等。

2. 粒子轨道和量子态：WKB 近似还可以用于计算量子力学中的粒子轨道和量子态。在某些情况下，例如静电场中的粒子运动或氢原子的束缚态，WKB 近似可以提供近似的能级和波函数。

3.WKB 近似法能够在不需要精确求解的情况下，通过计算得到等离子体中波的传播方程，并得出物理运动的定性描述。WKB 近似法的优势在于它比其他精确方法更快和更简单，并且可以解决一些无法通过其他方法计算的难点问题。

3 WKB 近似在激光等离子体中的应用

接下来考虑在背景密度和磁场随位置但不随时间变化的情况下，略微不均匀的冷等离子体中的波传播，并且揭示等离子体中的波传播特性。

3.1 不均匀等离子体中波的传播机制

1. 折射：当波从一个介质传播到另一个介质时，波会受到折射现象的影响。在不均匀冷等离子体中，由于等离子体的密度或折射率分布不均匀，波在介质中传播时会遇到密度或折射率的变化。这会导致波的传播方向发生改变，遵循折射定律。折射现象在不均匀冷等离子体中是波传播的重要机制之一。

2. 衍射：衍射是波在通过障碍物或通过波前上的不规则结构时发生的现象。在不均匀冷等离子体中，波通过介质中的非均匀性分布时，会遇到空间上的不规则结构，如孔隙、缺陷或波动性变化。这些不规则结构会导致波的传播方向和强度的变化，产生衍射现象。

3.2 冷等离子体波、WKB 近似和射线追踪的应用

在冷等离子波笔记中，我们假设波的电磁场具有以下形式:

$$\delta\mathbf{E} = \tilde{\mathbf{E}} \exp(\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \mathrm{i}\omega t),$$

$$\delta\mathbf{B} = \tilde{\mathbf{B}} \exp(\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \mathrm{i}\omega t).$$

在非均匀的稳态等离子体中，我们不能简单地假设波函数是 $\exp(\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \mathrm{i}\omega t)$，而要考虑另一种形式，即

$$\delta\mathbf{E} = \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \exp(\mathrm{i}S(\mathbf{r}) - \mathrm{i}\omega t),$$

$$\delta\mathbf{B} = \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}) \exp(\mathrm{i}S(\mathbf{r}) - \mathrm{i}\omega t).$$

我们假设 S 为 eikonal 函数 [2] 并且系数 E 和 B 具有 L 量级的特征长度，

$$\frac{|\nabla S|}{S} \sim \frac{|\nabla\tilde{\mathbf{E}}|}{|\tilde{\mathbf{E}}|} \sim \frac{|\nabla\tilde{\mathbf{B}}|}{|\tilde{\mathbf{B}}|} \sim \frac{1}{L},$$

同时方程 S(r) 很大

$$S(\mathbf{r}) \sim kL \gg 1$$

，所以考虑

$$|\nabla S| \sim k \gg \frac{1}{L}$$

这样就可以重写冷等离子体方程，将 $\mathrm{i}k\tilde{\mathbf{E}}$ 变成 $\mathrm{i}\nabla S\tilde{\mathbf{E}} + \nabla\tilde{\mathbf{E}}$ 我们就可以得到：

$$\frac{c^2}{\omega^2}(\mathbf{k} - \mathrm{i}\nabla) \times [(\mathbf{k} - \mathrm{i}\nabla) \times \tilde{\mathbf{E}}] + \epsilon \cdot \tilde{\mathbf{E}} = 0,$$

其中 $K = \nabla S$

3.3 求得解析解

3.4

4 结论

参考文献

[1] D. J. Griffiths and D. F. Schroeter, *Introduction to Quantum Mechanics*, 3rd ed. Cambridge University Press, 2018.

[2] M. Detrixhe, F. Gibou, and C. Min, “A parallel fast sweeping method for the eikonal equation,” *Journal of Computational Physics*, vol. 237, pp. 46–55, 2013. [Online]. Available: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S002199911200722X