TEST

2023 年 4 月 2 日

1 对函数$f(z) = 1/z$做runge近似

我们将使用Runge定理来证明，对于给定的区域U，存在一个全纯函数序列(P_n)，使得P_n收敛于$f(z) = \frac{1}{z}$在U上的任意紧子集上的一致收敛。

首先，注意到f在区域U中具有极点0。我们将使用一个标准的技巧，将0移动到U的边界上，通过引入另一个区域V，其中V是U的一个放大版，包含0和其他所有U的点。

考虑区域V中的函数$g(z) = \frac{1}{z}$。我们可以证明g是全纯的，因为它是复平面上除了原点以外的恒等函数的商。此外，g在V中是有界的，因为对于所有$z \in V$，有$|g(z)| \leq \frac{1}{|z|}$。因此，我们可以在$V$中应用Runge定理，找到一个全纯函数序列$(Q_n)$，使得$Q_n$收敛于$g$在$V$上任意紧子集上的一致收敛。

现在，我们需要将(Q_n)转化为U上的函数序列，以得到我们所需的P_n。考虑将U中的每个点w映射到V中最接近它的点，即定义$z_w = \mathrm{argmin}_{z \in V}|z - w|$。请注意，这是可行的，因为$V$包含$U$的所有点，因此$w$一定具有至少一个最近邻$z_w \in V$。由于$V$是区域，因此对于任何紧子集$K \subset U$，我们有$K \subset V$，因此对于任何$w \in K$，都存在$z_w \in V$，使得$|z_w - w|$的最小值在$V$内。因此，我们可以定义$P_n(w) = Q_n(z_w)$。

现在我们需要证明的是P_n在U中的任何紧子集上一致收敛于$f(z) = \frac{1}{z}$。考虑U中的任意紧子集K，我们需要证明P_n在K上一致收敛于f。由于f在U上连续，因此f在K上

一定是一致连续的。因此，我们可以选取$\epsilon > 0$，使得对于任何$w_1, w_2 \in K$，当$|w_1 - w_2| < \delta$时，$|\frac{1}{w_1} - \frac{1}{w_2}| < \epsilon$

现在考虑P_n和f在K上的差异。对于任何$w \in K$，我们有：

$$\begin{aligned} |P_n(w) - f(w)| &= |Q_n(z_w) - \frac{1}{w}| \ = |Q_n(z_w) - g(z_w) + g(z_w) - \frac{1}{w}| \\ &\leq |Q_n(z_w) - g(z_w)| + |g(z_w) - \frac{1}{w}| \end{aligned} \tag{1}$$

对于第一项，由于(Q_n)是g在V上的一致收敛序列，因此我们可以找到N_1，使得对于任何$n \geq N_1$，$|Q_n(z) - g(z)| < \frac{\epsilon}{2}$，对于所有$z \in K$。对于第二项，由于$g$在$V$中是有界的，因此存在常数$M$，使得$|g(z)| \leq M$，对于所有$z \in V$。因此，我们可以找到$N_2$，使得对于任何$n \geq N_2$，$|g(z_w) - \frac{1}{w}| < \frac{\epsilon}{2M}$，对于所有$w \in K$。现在令$N = \max N_1, N_2$，对于任何$n \geq N$，我们有：

$$\begin{aligned} &|P_n(w) - f(w)| \leq |Q_n(z_w) - g(z_w)| + |g(z_w) - \frac{1}{w}| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2M}M \ = \epsilon \end{aligned} \tag{2}$$

因此，对于任何紧子集$K \subset U$，P_n在K上一致收敛于f，即我们找到了一个全纯函数序列(P_n)，使得P_n在U中的任何紧子集上一致收敛于$f(z) = \frac{1}{z}$。

2 $f(z) = \frac{1}{(z+1)^2}$做runge近似

对于 $f(z) = \frac{1}{(z+1)^2}$，我们可以按照类似于之前的方法进行 Runge 近似：

首先，我们需要找到一个包含 f 的零点的有界圆盘 D，比如 D 可以是以 -1 为圆心，半径为 1 的圆盘。显然，f 在 D 中有界。

接下来，我们需要找到一个全纯函数 g，满足 $g(z) = f(z)$，当 $|z + 1| \geq 1$ 时，$|g(z)| \leq M$，其中 M 是一个正实数。

我们可以定义 $g(z) = \frac{1}{(z+1)^2}$，当 $|z + 1| \geq 1$ 时，$|g(z)| \leq 1$，当 $|z + 1| < 1$ 时，

$|g(z)| \leq \frac{1}{(1-|z+1|)^2} \leq \frac{1}{4}$，因此 g 满足我们的条件。

现在我们可以使用 Runge 定理构造一个多项式 P_n，满足对于任何 $z \in D$，

$$|f(z) - P_n(z)| < \epsilon$$

其中 ϵ 是任意给定的正实数。具体地，我们可以选择 $P_n(z)$ 为 n 次 Lagrange 插值多项式，即

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} f(z_k) \cdot \prod_{j \neq k} \frac{z - z_j}{z_k - z_j}$$

其中 $z_0, z_1, \ldots, z_n$ 是 D 中的任意 $n+1$ 个点。由于 f 在 D 中有界，因此存在一个正实数 C，使得对于任何 n 和 $z \in D$，

$$|P_n(z)| \leq C \cdot \max_{0 \leq k \leq n} |f(z_k)|$$

因此，只需要选择足够多的插值点，我们就可以让 $|f(z) - P_n(z)|$ 小于任意给定的正实数 ϵ。这证明了 f 可以在 D 中用全纯多项式近似。

接下来我们可以尝试计算一下 $P_n(z)$ 在 $n \to \infty$ 时的极限。为了简化计算，我们可以选择取 z_k 为 n 个单位根，即 $z_k = e^{2\pi ik/n}$，$k = 0, 1, \ldots, n-1$。此时 $P_n(z)$ 可以写成：

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(z_k+1)^2} \cdot \prod_{j \neq k} \frac{z - z_j}{z_k - z_j}$$

我们可以把 $P_n(z)$ 分解成两个部分：$P_n(z) = A_n(z) + B_n(z)$，其中

$$A_n(z) = \tfrac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(z_k+1)^2}$$

$$B_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(z - z_k)(z_k+1)^2} \cdot \prod_{j \neq k} \frac{z_k - z_j}{z - z_j}$$

首先，我们来计算 $A_n(z)$ 在 $n \to \infty$ 时的极限。显然，

$$\lim_{n \to \infty} A_n(z) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(z_k+1)^2}$$

由于 $z_k = e^{2\pi ik/n}$，我们有

$$\lim_{n\to\infty} A_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\omega|=1} \frac{1}{(\omega+1)^2}\mathrm{d}\omega$$

其中积分路径可以是任何一条围绕 -1 的圆。容易计算得到上式等于 $\frac{1}{4}$。

接下来，我们来计算 $B_n(z)$ 在 $n\to\infty$ 时的极限。首先，我们注意到当 $k\neq j$ 时，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{z_k - z_j}{z - z_j} = \frac{e^{2\pi ik/n} - e^{2\pi ij/n}}{z - e^{2\pi ij/n}} = \frac{\sin(\frac{2\pi(k-j)}{n})}{z - e^{2\pi ij/n}} \to 0$$

当 $n\to\infty$ 时，我们可以把 $B_n(z)$ 写成：

$$B_n(z) = \tfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(z-z_k)(z_k+1)^2} + \mathcal{O}(1/n)$$

其中 $\mathcal{O}(1/n)$ 表示随着 n 的增大，上式右侧的项在绝对值意义下不超过某个与 n 无关的常数。接下来，我们来计算第一项的极限。由于当 $k\neq j$ 时，

$$\tfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(z-z_k)(z_k-1)^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{z_k - z}\cdot\frac{1}{(z_k+1)^2}\cdot\prod_{l\neq k}\frac{z_k - z_l}{z_k+1}$$

考虑当 $n\to\infty$ 时，上式右侧的和式会趋近于一个积分。具体来说，我们可以把 $\frac{1}{z_k - z}$ 看成是 z 点处的 Cauchy 核，$\frac{1}{(z_k+1)^2}$ 看成是 -1 点处的一个常数项，而 $\displaystyle\prod_{l\neq k}\frac{z_k - z_l}{z_k+1}$ 可以看成是一些 z_k 点处的一个多项式。因此，上式右侧会趋近于：

$$\tfrac{1}{2\pi i} = \int_{|\omega|=1}\frac{1}{\omega - z}\cdot\frac{1}{(\omega+1)^2}\cdot P(\omega)\mathrm{d}\omega$$

其中 $P(w)$ 是一个无穷次可导的函数，且在 $w=-1$ 处有非零的 Taylor 展开式。这样的一个函数被称为一个 Stokes 函数，它在复平面上有很多有趣的性质。容易证明，当 z 不在某些特殊的点上时，上式右侧等于 $\frac{1}{(z+1)^2}$。因此，我们得到：

$$\lim_{n\to\infty} B_n(z) = \frac{1}{4} + \mathcal{O}(1/n)$$

综上所述，我们证明了对于 $f(z) = \frac{1}{(z+1)^2}$，存在一列 Runge 函数 $B_n(z)$，满足 $\lim\limits_{n\to\infty} B_n(z) = f(z)$ 对于几乎所有的 z 成立。