目录

期末题目

202011010101 物理 2001 孙陶庵

2023 年 5 月 27 日

1 问题 1

题目：G_1, G_2 都是 $\mathbb{C}^n$ 中的全纯域，若有在 $f : G_1 \to \mathbb{C}^n$ 全纯映射，请证明：$G_1 \cap f^{-1}(G_2)$ 也是全纯的

ANS:

为了证明 $G_1 \cap f^{-1}(G_2)$ 是全纯的，我们需要验证它满足全纯域的定义，即对于域中的每个点，存在一个邻域内的全纯函数。

设 z_0 是 $G_1 \cap f^{-1}(G_2)$ 中的任意点。由于 $z_0 \in G_1$ 且 f 是 G_1 到 $\mathbb{C}^n$ 的全纯映射，因此存在 G_1 中 z_0 的一个邻域 U_1，在该邻域上 f 是全纯的。

另一方面，由于 $z_0 \in f^{-1}(G_2)$，即 $f(z_0) \in G_2$，因此存在 G_2 中 $f(z_0)$ 的一个邻域 U_2。

我们考虑 $U_1 \cap f^{-1}(U_2)$，由于 U_1 和 U_2 都是开集，$U_1 \cap f^{-1}(U_2)$ 也是开集。另外，由于 f 是全纯映射，$U_1 \cap f^{-1}(U_2)$ 中的每个点也是 f 的全纯性的继承者。

现在我们证明 $U_1 \cap f^{-1}(U_2) \subseteq G_1 \cap f^{-1}(G_2)$，即 $U_1 \cap f^{-1}(U_2)$ 中的每个点都属于 $G_1 \cap f^{-1}(G_2)$。

对于任意的 $z \in U_1 \cap f^{-1}(U_2)$，我们有 $f(z) \in U_2$ 且 $z \in U_1$。由于 $f(z) \in U_2$，而 $U_2 \subseteq G_2$，所以 $f(z) \in G_2$。另一方面，由于 $z \in U_1$，而 $U_1 \subseteq G_1$，所以 $z \in G_1$。

综上所述,我们证明了 $U_1 \cap f^{-1}(U_2) \subseteq G_1 \cap f^{-1}(G_2)$。由于 $U_1 \cap f^{-1}(U_2)$ 是 $G_1 \cap f^{-1}(G_2)$ 的开子集，并且其中的每个点都有邻域内的全纯函数，因此 $G_1 \cap f^{-1}(G_2)$ 也是全纯的。

因此，我们证明了 $G_1 \cap f^{-1}(G_2)$ 是全纯域。

2 问题 2（重要!!）

$D = z \in \mathbb{C}||z|C| \subset \mathbb{C}$ 中的圆盘，$z \subset D$ 可为全纯函数的 xxxx 证明：$D \backslash z$ 是连通的

ANS:

要证明 $D \setminus z$ 是连通的，我们可以使用反证法。假设存在 $D \setminus z$ 的一个分离集，即存在两个开集 U_1 和 U_2，满足以下条件：

1.$U_1 \cup U_2 = D \setminus z$；

2.$U_1 \cap U_2 = \varnothing$；

3.U_1 和 U_2 都非空。

我们将证明这种情况是不可能的，即不存在这样的分离集。

考虑 D 中的任意一点 p，根据 D 的定义，我们有 $|p| < C$。因此，对于任意 $p \in D \setminus z$，我们可以选择足够小的半径 r，使得以 p 为圆心、r 为半径的圆盘 $B(p, r)$ 完全包含在 D 中。这是因为我们可以选择 r 满足 $0 < r < \min(C - |p|, \epsilon)$，其中 ϵ 是一个正数，使得 $B(p, r)$ 不与 C 上的任何点相交。

现在考虑 U_1 和 U_2。根据 $U_1 \cup U_2 = D \setminus z$，我们知道 U_1 和 U_2 的并集覆盖了 $D \setminus z$ 中的所有点。由于 $D \setminus z$ 中的每个点都可以找到一个包含它的圆盘，我们可以断言至少有一个圆盘完全包含在 U_1 或 U_2 中。

假设 $B(p_1, r_1) \subset U_1$，其中 $p_1 \in D \setminus z$。我们可以选择另一个点 p_2，使得 $B(p_2, r_2) \subset U_2$，其中 $p_2 \in D \setminus z$ 且 $p_2 \neq p_1$。由于 $D \setminus z$ 是连通的，我们可以选择适当的路径从 p_1 到 p_2，并在路径上选择一个点 p_3。

现在考虑 $B(p_3, r_3)$，其中 r_3 足够小，使得 $B(p_3, r_3)$ 不与 C 上的任何点相交。由于

$B(p_3, r_3)$ 与 $B(p_1, r_1)$ 和 $B(p_2, r_2)$ 有交点（例如，路径上的点），根据连通性，$B(p_3, r_3)$ 必须完全包含在 U_1 或 U_2 中。

然而，这与我们的选择相矛盾，因为 $p_3 \notin U_1$ 且 $p_3 \notin U_2$。因此，我们得出结论：不存在这样的分离集 U_1 和 U_2

3 问题 3

题目：设 $T : H_1 \to H_2$ 为无界算子，如果 y 垂直于 $Ran(T)$ 则 $y \in Dom(T^*)$ 且 T*y=0. 若 T 是闭算子且 $Dom(T^*)$ 稠密，则 $x \perp k_r T$ 可知 $x \in \overline{Ran(T^*)}$ ANS:
根据题目给出的条件：

1. 如果 y 垂直于 $Ran(T)$，则 $y \in Dom(T^*)$ 且 $T^*y = 0$。2. T 是闭算子且 $Dom(T^*)$ 稠密。3. 我们需要证明如果 $x \perp \ker(T)$，则 $x \in \overline{\mathrm{Ran}(T^\wedge)}$，即 x 与 $T^\wedge$ 的每个元素都正交。

设 $z \in Dom(T^*)$，我们有 $T^*z \in H_2$。由于 $x \perp \ker(T)$，我们知道对于任意的 $t \in \mathbb{C}$，有 $\langle x, Tk(t)\rangle = 0$。

考虑内积 $\langle x, T^z\rangle$，根据 $T^\wedge$ 的定义，我们有：

$$\langle x, T^z\rangle = \langle Tx, z\rangle \quad (\text{定义 } T^\wedge)$$

$$= \langle T(k(1)x), z\rangle \quad (\text{由于 } k(1)x = x)$$

$$= \langle x, T^\wedge(k(1)z)\rangle \quad (\text{定义 } T^\wedge)$$

$$= \langle x, T^\wedge(z) \rangle \quad (\text{由于 } k(1)z = z)$$

因此，$\langle x, T^z \rangle = \langle x, T^\wedge(z) \rangle$。

由于 $\langle x, T^z \rangle = \langle x, T^\wedge(z) \rangle$ 对于所有 $z \in Dom(T^*)$ 成立，我们可以推断 $x \perp T^z$ 对于所有 $z \in Dom(T^*)$ 成立。

由于 $Dom(T^*)$ 稠密且 $x \perp T^z$ 对于所有 $z \in Dom(T^*)$ 成立，我们可以将 x 延拓为 $x' \in \overline{Dom(T^*)}$，且 $x' \perp T^{z'}$ 对于所有 $z' \in \overline{Dom(T^*)}$ 成立。

因此，根据内积空间的性质，我们可以得出 $x' \in \overline{\mathrm{Ran}(T^*)}$。

因此，如果 $x \perp \ker(T)$，则 $x \in \overline{\mathrm{Ran}(T^*)}$，即 x 与 T^* 的每个元素都正交。

4 问题 4

令 M 为半正定的 m 阶方阵，若 $F = (f_1, f_2, ..., f_m)$ 是全纯函数，请证明：

$FM^t\bar{F}$ 是多重次调和函数

ANS:

要证明 $FM^t\bar{F}$ 是多重次调和函数，我们需要验证它满足多重次调和方程的性质。

首先，我们注意到 $F = (f_1, f_2, ..., f_m)$ 是全纯函数，因此每个 f_i 都是全纯函数。根据全纯函数的性质，f_i 的共轭 $\bar{f}_i$ 也是全纯函数。

接下来，考虑 $FM^t\bar{F}$。我们将其写为分量形式：

$$FM^t\bar{F} = \left(\sum_{k=1}^{m} f_k M^t \bar{f}_1, \sum_{k=1}^{m} f_k M^t \bar{f}_2, ..., \sum_{k=1}^{m} f_k M^t \bar{f}_m \right)$$

现在我们验证 $FM^t\bar{F}$ 满足多重次调和方程。

对于每个分量 $\sum_{k=1}^{m} f_k M^t \bar{f}_i$，我们需要验证它满足拉普拉斯方程 $\Delta(\sum_{k=1}^{m} f_k M^t \bar{f}_i) = 0$。

由于 Δ 是一个微分算子，我们可以将其作用于每个分量上：

$$\Delta(\sum_{k=1}^{m} f_k M^k \bar{f}_i) = \sum_{k=1}^{m} \Delta(f_k M^t \bar{f}_i)$$

由于 f_k 和 $\bar{f}_i$ 都是全纯函数，它们满足全纯函数的拉普拉斯方程 $\Delta f_k = 0$。此外，矩阵 M 是半正定的，因此 M^t 也是半正定的。因此，我们有 $M^t \Delta \bar{f}_i = 0$。

综上所述，我们得到：

$$\Delta(\sum_{k=1}^{m} f_k M^t \bar{f}_i) = \sum_{k=1}^{n} \Delta(f_k M^t \bar{f}_i) = \sum_{k=1}^{m} f_k M^k \Delta \bar{f}_i = 0$$

因此，$FM^t\bar{F}$ 满足多重次调和方程，即 $FM^t\bar{F}$ 是多重次调和函数。

因此，我们证明了 $FM^t\bar{F}$ 是多重次调和函数。

5 问题 5

题目：请证明：f 是 $D \subset \mathbb{C}^n$ 上的全纯函数 $a \in f(D)$，则 $f^{-1}(a)$ 不包含在任何 D 的紧子集中

ANS:

为了证明 $f^{-1}(a)$ 不包含在任何 D 的紧子集中，我们可以使用反证法。假设存在 D 的一个紧子集 K，使得 $f^{-1}(a)$ 包含在 K 中。

由于 f 是从 D 到 $\mathbb{C}^n$ 的全纯函数，根据连续映射的性质，$f(K)$ 是 $\mathbb{C}^n$ 中的一个紧集。因为 $a \in f(D)$，所以 $a \in f(K)$。由于 a 是 $f(K)$ 中的一个点，根据紧集的定义，我们可以选择一个足够小的 $\epsilon > 0$，使得 $B(a, \epsilon)$ 完全包含在 $f(K)$ 中，其中 $B(a, \epsilon)$ 表示以 a 为中心、半径为 ϵ 的开球。

现在考虑 $f^{-1}(B(a, \epsilon))$，即原点 a 的原像的 ϵ-邻域。由于 $f^{-1}(a) \subseteq f^{-1}(B(a, \epsilon))$，所以 $f^{-1}(B(a, \epsilon))$ 至少包含 $f^{-1}(a)$。

由于 K 是紧集，它是有界的。因此，我们可以选择一个足够大的正数 R，使得 $K \subseteq B(0, R)$，其中 $B(0, R)$ 表示以原点为中心、半径为 R 的开球。

现在我们来看 $K' = K \cap B(0, R)$，即将 K 与 $B(0, R)$ 取交集后得到的集合。K' 是一个紧子集，因为它是一个有界闭集的交集。

由于 f 是从 D 到 $\mathbb{C}^n$ 的全纯函数，根据全纯函数的性质，它在紧子集 K' 上是有界的。也就是说，存在一个正数 M，使得对于任意 $z \in K'$，有 $|f(z)| \leq M$。

现在我们考虑 $f(K')$，它是一个有界闭集的连续映射，因此它也是一个有界闭集。因此，$f(K')$ 是一个紧集。

然而，根据我们之前的选择，$B(a, \epsilon)$ 是 $f(K)$ 的一个真子集，而 $f(K') \subseteq f(K)$。这与 $f(K')$ 是一个紧集相矛盾，因为真子集不可能是紧集。

因此，我们得出矛盾，假设不成立。即，$f^{-1}(a)$ 不包含在任何 D 的紧子集中。

因此，我们证明了如果 f 是 $D \subset \mathbb{C}^n$ 上的全纯函数，$a \in f(D)$，那么 $f^{-1}(a)$ 不包含在任何 D 的紧子集中。

6 问题 6

题目：设 $D := \Delta(0, 1) \subset \mathbb{C}^2$ 中的多重圆盘，取 $a \subseteq D$ 且设有聚点但是 $\forall a \in bD$ 都是 a_j 的聚点，定义 $u(z) = \sigma_j \dfrac{1}{j^2} \log |z - a_j|/2$ ANS:
根据问题描述，我们有一个多重圆盘 $D = \Delta(0, 1) \subset \mathbb{C}^2$，其中包含一些点 a_j，并且这些点具有一个聚点 a。我们定义函数 $u(z) = \sum_j \sigma_j \dfrac{1}{j^2} \log \left(\dfrac{|z - a_j|}{2} \right)$，其中 σ_j 是任意的复数。

我们的目标是证明 $u(z)$ 是 D 中的次调和函数。首先，我们需要证明对于任意的 $z \in D$，$u(z)$ 满足亚调和性质，即 $\Delta u(z) \geq 0$，其中 Δ 是 Laplace 算子。

计算 $\Delta u(z)$ 的步骤如下：

首先，我们注意到对于任意的 j，函数 $\log \left(\dfrac{|z - a_j|}{2} \right)$ 是 z 的次调和函数。这是因为 $\log \left(\dfrac{|z - a_j|}{2} \right)$ 是实部的调和函数，而调和函数的实部是次调和的。

由次调和函数的线性组合仍然是次调和函数，我们可以得到 $u(z)$ 也是次调和函数。

接下来，我们需要证明 $\Delta u(z) \geq 0$。为此，我们计算 $\Delta u(z)$ 的实部部分，即 $\mathrm{Re}(\Delta u(z))$。

由于 Δ 是 Laplace 算子，对于任意的次调和函数 $u(z)$，我们有 $\mathrm{Re}(\Delta u(z)) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$，其中 $z = x + iy$。

计算 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 和 $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 的结果如下：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_j \sigma_j \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{j^2} \log \left(\frac{|z - a_j|}{2} \right) \right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sum_j \sigma_j \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{j^2} \log \left(\frac{|z - a_j|}{2} \right) \right)$$

对于每个 j，我们有：

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{j^2} \log \left(\frac{|z - a_j|}{2} \right) \right) = -\frac{1}{j^2} \frac{x - a_j x}{|z - a_j|^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{j^2} \log \left(\frac{|z - a_j|}{2} \right) \right) = \frac{1}{j^2} \frac{y - a_j y}{|z - a_j|^2}$$

其中 $a_j = a_{jx} + i a_{jy}$ 是 a_j 的实部和虚部。

将以上结果代入 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 和 $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 的表达式中，我们得到：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\sum_j \frac{\sigma_j}{j^2} \frac{x - a_{jx}}{|z - a_j|^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\sum_j \frac{\sigma_j}{j^2} \frac{y - a_{jy}}{|z - a_j|^2}$$

将 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 和 $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 相加，我们得到：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\sum_j \frac{\sigma_j}{j^2} \left(\frac{x - a_{jx}}{|z - a_j|^2} + \frac{y - a_{jy}}{|z - a_j|^2} \right)$$

我们注意到 $\frac{x - a_{jx}}{|z - a_j|^2} + \frac{y - a_{jy}}{|z - a_j|^2}$ 可以简化为 1，因为 $x - a_{jx} + y - a_{jy} = x + y - (a_{jx} + a_{jy}) = x + y - \mathrm{Re}(a_j) = x + y - \mathrm{Re}(a)$，而 a 是 a_j 的聚点，所以 $x + y - \mathrm{Re}(a) \geq 1$。

因此，$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 变为：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\sum_j \frac{\sigma_j}{j^2}$$

由于 σ_j 是任意的复数，$\sum_j \frac{\sigma_j}{j^2}$ 的实部可以为任意值。然而，注意到我们有 $\sum_j \frac{\sigma_j}{j^2} \log\left(\frac{|z-a_j|}{2}\right) = u(z)$，因此 $\sum_j \frac{\sigma_j}{j^2}$ 的实部必须为非负值，即 $\mathrm{Re}\left(\sum_j \frac{\sigma_j}{j^2}\right) \geq 0$。

综上所述，我们得出结论：$u(z)$ 是 D 中的次调和函数，即 $\Delta u(z) \geq 0$，其中 Δ 是 Laplace 算子。

因此，我们证明了函数 $u(z) = \sum_j \sigma_j \frac{1}{j^2} \log\left(\frac{|z-a_j|}{2}\right)$ 是 D 中的次调和函数。

7 问题 7

题目：令 $\Omega = (z, w) \in \mathbb{C}^2 ||z| < 1, |w| < 1 \exp(-u(z))$，请证明 Ω 是拟凸的

ANS:

要证明 Ω 是拟凸的，我们需要证明对于任意的 $z_1, z_2 \in \Omega$ 以及 $t \in [0,1]$，都有 $tz_1 + (1-t)z_2 \in \Omega$。

设 $z_1 = (z'_1, w'_1)$ 和 $z_2 = (z'_2, w'_2)$，其中 $z'_1 = (z_1, w_1)$ 和 $z'_2 = (z_2, w_2)$。根据 Ω 的定义，我们有 $|z_1| < 1$、$|z_2| < 1$ 和 $|w_1| < \exp(-u(z_1))$、$|w_2| < \exp(-u(z_2))$。

考虑 $tz'_1 + (1-t)z'_2 = (tz_1 + (1-t)z_2, tw_1 + (1-t)w_2)$，我们需要证明：

$|tz_1 + (1-t)z_2| < 1$。$|tw_1 + (1-t)w_2| < \exp(-u(tz_1 + (1-t)z_2))$。首先，对于 1，我们有：

$$
\begin{aligned}
|tz_1 + (1-t)z_2| &\leq |tz_1| + |(1-t)z_2| \quad \text{(三角不等式)} \\
&= t|z_1| + (1-t)|z_2| \\
&< t + (1-t) \quad \text{(因为 } |z_1| < 1 \text{ 和 } |z_2| < 1\text{)} \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

因此，$|tz_1 + (1-t)z_2| < 1$。

接下来，对于 2，我们有：

$$
\begin{aligned}
|tw_1 + (1-t)w_2| &\leq |tw_1| + |(1-t)w_2| \quad (\text{三角不等式}) \\
&= t|w_1| + (1-t)|w_2| \\
&< t\exp(-u(z_1)) + (1-t)\exp(-u(z_2)).
\end{aligned}
$$

由于 $u(z)$ 是连续的次调和函数，根据次调和函数的性质，我们知道

$$u(z_1') = u(z_1) \leq u(tz_1 + (1-t)z_2) \text{ 和 } u(z_2') = u(z_2) \leq u(tz_1 + (1-t)z_2)\text{。}$$

因此，

$$\exp(-u(z_1')) \geq \exp(-u(tz_1 + (1-t)z_2)) \text{ 和 } \exp(-u(z_2')) \geq \exp(-u(tz_1 + (1-t)z_2))\text{。}$$

将上述不等式代入上式，我们得到：

$$
\begin{aligned}
|tw_1 + (1-t)w_2| &< t\exp(-u(z_1)) + (1-t)\exp(-u(z_2)) \\
&\leq t\exp(-u(z_1')) + (1-t)\exp(-u(z_2')) \\
&= \exp(-u(tz_1 + (1-t)z_2)).
\end{aligned}
$$

因此，$|tw_1 + (1-t)w_2| < \exp(-u(tz_1 + (1-t)z_2))$。

综上所述，我们证明了对于任意的 $z_1, z_2 \in \Omega$ 以及 $t \in [0,1]$，都有 $tz_1 + (1-t)z_2 \in \Omega$。

因此，Ω 是拟凸的。