

目录	1
----	---

目录

1 问题 1	2
2 问题 2 (重要!!)	3
3 问题 3	4
4 问题 4	4
5 问题 5	5
6 问题 6	6
7 问题 7	8

期末题目

202011010101 物理 2001 孙陶庵

2023 年 5 月 22 日

1 问题 1

题目： G_1, G_2 都是 \mathbb{C}^n 中的全纯域，若有在 $f: G_1 \rightarrow \mathbb{C}^n$ 全纯映射，请证明：

$G_1 \cap f^{-1}(G_2)$ 也是全纯的

ANS:

为了证明 $G_1 \cap f^{-1}(G_2)$ 是全纯的，我们需要验证它满足全纯域的定义，即对于域中的每个点，存在一个邻域内的全纯函数。

设 z_0 是 $G_1 \cap f^{-1}(G_2)$ 中的任意点。由于 $z_0 \in G_1$ 且 f 是 G_1 到 \mathbb{C}^n 的全纯映射，因此存在 G_1 中 z_0 的一个邻域 U_1 ，在该邻域上 f 是全纯的。

另一方面，由于 $z_0 \in f^{-1}(G_2)$ ，即 $f(z_0) \in G_2$ ，因此存在 G_2 中 $f(z_0)$ 的一个邻域 U_2 。

我们考虑 $U_1 \cap f^{-1}(U_2)$ ，由于 U_1 和 U_2 都是开集， $U_1 \cap f^{-1}(U_2)$ 也是开集。另外，由于 f 是全纯映射， $U_1 \cap f^{-1}(U_2)$ 中的每个点也是 f 的全纯性的继承者。

现在我们证明 $U_1 \cap f^{-1}(U_2) \subseteq G_1 \cap f^{-1}(G_2)$ ，即 $U_1 \cap f^{-1}(U_2)$ 中的每个点都属于 $G_1 \cap f^{-1}(G_2)$ 。

对于任意的 $z \in U_1 \cap f^{-1}(U_2)$ ，我们有 $f(z) \in U_2$ 且 $z \in U_1$ 。由于 $f(z) \in U_2$ ，而 $U_2 \subseteq G_2$ ，所以 $f(z) \in G_2$ 。另一方面，由于 $z \in U_1$ ，而 $U_1 \subseteq G_1$ ，所以 $z \in G_1$ 。

综上所述,我们证明了 $U_1 \cap f^{-1}(U_2) \subseteq G_1 \cap f^{-1}(G_2)$ 。由于 $U_1 \cap f^{-1}(U_2)$ 是 $G_1 \cap f^{-1}(G_2)$ 的开子集, 并且其中的每个点都有邻域内的全纯函数, 因此 $G_1 \cap f^{-1}(G_2)$ 也是全纯的。

因此, 我们证明了 $G_1 \cap f^{-1}(G_2)$ 是全纯域。

2 问题 2 (重要!!)

$D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < C\} \subset \mathbb{C}$ 中的圆盘, $z \in D$ 可为全纯函数的 xxx 证明: $D \setminus z$ 是连通的
ANS:

要证明 $D \setminus z$ 是连通的, 我们可以使用反证法。假设存在 $D \setminus z$ 的一个分离集, 即存在两个开集 U_1 和 U_2 , 满足以下条件:

1. $U_1 \cup U_2 = D \setminus z$;
2. $U_1 \cap U_2 = \emptyset$;
3. U_1 和 U_2 都非空。

我们将证明这种情况是不可能的, 即不存在这样的分离集。

考虑 D 中的任意一点 p , 根据 D 的定义, 我们有 $|p| < C$ 。因此, 对于任意 $p \in D \setminus z$, 我们可以选择足够小的半径 r , 使得以 p 为圆心、 r 为半径的圆盘 $B(p, r)$ 完全包含在 D 中。这是因为我们可以选择 r 满足 $0 < r < \min(C - |p|, \epsilon)$, 其中 ϵ 是一个正数, 使得 $B(p, r)$ 不与 C 上的任何点相交。

现在考虑 U_1 和 U_2 。根据 $U_1 \cup U_2 = D \setminus z$, 我们知道 U_1 和 U_2 的并集覆盖了 $D \setminus z$ 中的所有点。由于 $D \setminus z$ 中的每个点都可以找到一个包含它的圆盘, 我们可以断言至少有一个圆盘完全包含在 U_1 或 U_2 中。

假设 $B(p_1, r_1) \subset U_1$, 其中 $p_1 \in D \setminus z$ 。我们可以选择另一个点 p_2 , 使得 $B(p_2, r_2) \subset U_2$, 其中 $p_2 \in D \setminus z$ 且 $p_2 \neq p_1$ 。由于 $D \setminus z$ 是连通的, 我们可以选择适当的路径从 p_1 到 p_2 , 并在路径上选择一个点 p_3 。

现在考虑 $B(p_3, r_3)$, 其中 r_3 足够小, 使得 $B(p_3, r_3)$ 不与 C 上的任何点相交。由于

$B(p_3, r_3)$ 与 $B(p_1, r_1)$ 和 $B(p_2, r_2)$ 有交点 (例如, 路径上的点), 根据连通性, $B(p_3, r_3)$ 必须完全包含在 U_1 或 U_2 中。

然而, 这与我们的选择相矛盾, 因为 $p_3 \notin U_1$ 且 $p_3 \notin U_2$ 。因此, 我们得出结论: 不存在这样的分离集 U_1 和 U_2

3 问题 3

题目: 设 $T : H_1 \rightarrow H_2$ 为无界算子, 如果 y 垂直于 $Ran(T)$ 则 $y \in Dom(T^*)$ 且 $T^*y=0$. 若 T 是闭算子且 $Dom(T^*)$ 稠密, 则 $x \perp \overline{Ran(T)}$ 可知 $x \in \overline{Ran(T^*)}$

4 问题 4

令 M 为半正定的 m 阶方阵, 若 $F = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ 是全纯函数, 请证明:

$FM^t\bar{F}$ 是多重次调和函数

ANS:

要证明 $FM^t\bar{F}$ 是多重次调和函数, 我们需要验证它满足多重次调和方程的性质。

首先, 我们注意到 $F = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ 是全纯函数, 因此每个 f_i 都是全纯函数。根据全纯函数的性质, f_i 的共轭 \bar{f}_i 也是全纯函数。

接下来, 考虑 $FM^t\bar{F}$ 。我们将其写为分量形式:

$$FM^t\bar{F} = \left(\sum_{k=1}^m f_k M^t \bar{f}_1, \sum_{k=1}^m f_k M^t \bar{f}_2, \dots, \sum_{k=1}^m f_k M^t \bar{f}_m \right)$$

现在我们验证 $FM^t\bar{F}$ 满足多重次调和方程。

对于每个分量 $\sum_{k=1}^m f_k M^t \bar{f}_i$, 我们需要验证它满足拉普拉斯方程 $\Delta(\sum_{k=1}^m f_k M^t \bar{f}_i) = 0$ 。

由于 Δ 是一个微分算子, 我们可以将其作用于每个分量上:

$$\Delta\left(\sum_{k=1}^m f_k M^k \bar{f}_i\right) = \sum_{k=1}^m \Delta(f_k M^k \bar{f}_i)$$

由于 f_k 和 \bar{f}_i 都是全纯函数，它们满足全纯函数的拉普拉斯方程 $\Delta f_k = 0$ 。此外，矩阵 M 是半正定的，因此 M^t 也是半正定的。因此，我们有 $M^t \Delta \bar{f}_i = 0$ 。

综上所述，我们得到：

$$\Delta\left(\sum_{k=1}^m f_k M^k \bar{f}_i\right) = \sum_{k=1}^m \Delta(f_k M^k \bar{f}_i) = \sum_{k=1}^m f_k M^k \Delta \bar{f}_i = 0$$

因此， $FM^t\bar{F}$ 满足多重次调和方程，即 $FM^t\bar{F}$ 是多重次调和函数。

因此，我们证明了 $FM^t\bar{F}$ 是多重次调和函数。

5 问题 5

题目：请证明： f 是 $D \subset \mathbb{C}^n$ 上的全纯函数 $a \in f(D)$ ，则 $f^{-1}(a)$ 不包含在任何 D 的紧子集中

ANS:

为了证明 $f^{-1}(a)$ 不包含在任何 D 的紧子集中，我们可以使用反证法。假设存在 D 的一个紧子集 K ，使得 $f^{-1}(a)$ 包含在 K 中。

由于 f 是从 D 到 \mathbb{C}^n 的全纯函数，根据连续映射的性质， $f(K)$ 是 \mathbb{C}^n 中的一个紧集。因为 $a \in f(D)$ ，所以 $a \in f(K)$ 。由于 a 是 $f(K)$ 中的一个点，根据紧集的定义，我们可以选择一个足够小的 $\epsilon > 0$ ，使得 $B(a, \epsilon)$ 完全包含在 $f(K)$ 中，其中 $B(a, \epsilon)$ 表示以 a 为中心、半径为 ϵ 的开球。

现在考虑 $f^{-1}(B(a, \epsilon))$ ，即原点 a 的原像的 ϵ -邻域。由于 $f^{-1}(a) \subseteq f^{-1}(B(a, \epsilon))$ ，所以 $f^{-1}(B(a, \epsilon))$ 至少包含 $f^{-1}(a)$ 。

由于 K 是紧集，它是有界的。因此，我们可以选择一个足够大的正数 R ，使得 $K \subseteq B(0, R)$ ，其中 $B(0, R)$ 表示以原点为中心、半径为 R 的开球。

现在我们来考虑 $K' = K \cap B(0, R)$ ，即将 K 与 $B(0, R)$ 取交集后得到的集合。 K' 是一个紧子集，因为它是一个有界闭集的交集。

由于 f 是从 D 到 \mathbb{C}^n 的全纯函数，根据全纯函数的性质，它在紧子集 K' 上是有界的。也就是说，存在一个正数 M ，使得对于任意 $z \in K'$ ，有 $|f(z)| \leq M$ 。

现在我们考虑 $f(K')$ ，它是一个有界闭集的连续映射，因此它也是一个有界闭集。因此， $f(K')$ 是一个紧集。

然而，根据我们之前的选择， $B(a, \epsilon)$ 是 $f(K)$ 的一个真子集，而 $f(K') \subseteq f(K)$ 。这与 $f(K')$ 是一个紧集相矛盾，因为真子集不可能是紧集。

因此，我们得出矛盾，假设不成立。即， $f^{-1}(a)$ 不包含在任何 D 的紧子集中。

因此，我们证明了如果 f 是 $D \subset \mathbb{C}^n$ 上的全纯函数， $a \in f(D)$ ，那么 $f^{-1}(a)$ 不包含在任何 D 的紧子集中。

6 问题 6

题目：设 $D := \Delta(0, 1) \subset \mathbb{C}^2$ 中的多重圆盘，取 $a \subseteq D$ 且设有聚点但是 $\forall a \in bD$ 都是 a_j 的聚点，定义 $u(z) = \sigma_j \frac{1}{j^2} \log |z - a_j|/2$ ANS:

根据问题描述，我们有一个多重圆盘 $D = \Delta(0, 1) \subset \mathbb{C}^2$ ，其中包含一些点 a_j ，并且这些点具有一个聚点 a 。我们定义函数 $u(z) = \sum_j \sigma_j \frac{1}{j^2} \log \left(\frac{|z - a_j|}{2} \right)$ ，其中 σ_j 是任意的复数。

我们的目标是证明 $u(z)$ 是 D 中的次调和函数。首先，我们需要证明对于任意的 $z \in D$ ， $u(z)$ 满足亚调和性质，即 $\Delta u(z) \geq 0$ ，其中 Δ 是 Laplace 算子。

计算 $\Delta u(z)$ 的步骤如下：

首先，我们注意到对于任意的 j ，函数 $\log \left(\frac{|z - a_j|}{2} \right)$ 是 z 的次调和函数。这是因为 $\log \left(\frac{|z - a_j|}{2} \right)$ 是实部的调和函数，而调和函数的实部是次调和的。

由次调和函数的线性组合仍然是次调和函数，我们可以得到 $u(z)$ 也是次调和函数。

接下来,我们需要证明 $\Delta u(z) \geq 0$ 。为此,我们计算 $\Delta u(z)$ 的实部部分,即 $\operatorname{Re}(\Delta u(z))$ 。

由于 Δ 是 Laplace 算子,对于任意的次调和函数 $u(z)$,我们有 $\operatorname{Re}(\Delta u(z)) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, 其中 $z = x + iy$ 。

计算 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 和 $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 的结果如下:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_j \sigma_j \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{j^2} \log \left(\frac{|z - a_j|}{2} \right) \right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sum_j \sigma_j \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{j^2} \log \left(\frac{|z - a_j|}{2} \right) \right)$$

对于每个 j , 我们有:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{j^2} \log \left(\frac{|z - a_j|}{2} \right) \right) = -\frac{1}{j^2} \frac{x - a_{jx}}{|z - a_j|^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{j^2} \log \left(\frac{|z - a_j|}{2} \right) \right) = \frac{1}{j^2} \frac{y - a_{jy}}{|z - a_j|^2}$$

其中 $a_j = a_{jx} + ia_{jy}$ 是 a_j 的实部和虚部。

将以上结果代入 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 和 $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 的表达式中, 我们得到:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\sum_j \frac{\sigma_j}{j^2} \frac{x - a_{jx}}{|z - a_j|^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\sum_j \frac{\sigma_j}{j^2} \frac{y - a_{jy}}{|z - a_j|^2}$$

将 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 和 $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 相加, 我们得到:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\sum_j \frac{\sigma_j}{j^2} \left(\frac{x - a_{jx}}{|z - a_j|^2} + \frac{y - a_{jy}}{|z - a_j|^2} \right)$$

我们注意到 $\frac{x - a_{jx}}{|z - a_j|^2} + \frac{y - a_{jy}}{|z - a_j|^2}$ 可以简化为 1, 因为 $x - a_{jx} + y - a_{jy} = x + y -$

$(a_{jx} + a_{jy}) = x + y - \operatorname{Re}(a_j) = x + y - \operatorname{Re}(a)$, 而 a 是 a_j 的聚点, 所以 $x + y - \operatorname{Re}(a) \geq 1$ 。

因此, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 变为:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\sum_j \frac{\sigma_j}{j^2}$$

由于 σ_j 是任意的复数, $\sum_j \frac{\sigma_j}{j^2}$ 的实部可以为任意值。然而, 注意到我们有 $\sum_j \frac{\sigma_j}{j^2} \log \left(\frac{|z - a_j|}{2} \right) = u(z)$, 因此 $\sum_j \frac{\sigma_j}{j^2}$ 的实部必须为非负值, 即 $\operatorname{Re} \left(\sum_j \frac{\sigma_j}{j^2} \right) \geq 0$ 。

综上所述, 我们得出结论: $u(z)$ 是 D 中的次调和函数, 即 $\Delta u(z) \geq 0$, 其中 Δ 是 Laplace 算子。

因此, 我们证明了函数 $u(z) = \sum_j \sigma_j \frac{1}{j^2} \log \left(\frac{|z - a_j|}{2} \right)$ 是 D 中的次调和函数。

7 问题 7

题目: 令 $\Omega = (z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z| < 1, |w| < \exp(-u(z))$, 请证明 Ω 是拟凸的

ANS:

要证明 Ω 是拟凸的, 我们需要证明对于任意的 $z_1, z_2 \in \Omega$ 以及 $t \in [0, 1]$, 都有 $tz_1 + (1-t)z_2 \in \Omega$ 。

设 $z_1 = (z'_1, w'_1)$ 和 $z_2 = (z'_2, w'_2)$, 其中 $z'_1 = (z_1, w_1)$ 和 $z'_2 = (z_2, w_2)$ 。根据 Ω 的定义, 我们有 $|z_1| < 1$ 、 $|z_2| < 1$ 和 $|w_1| < \exp(-u(z_1))$ 、 $|w_2| < \exp(-u(z_2))$ 。

考虑 $tz'_1 + (1-t)z'_2 = (tz_1 + (1-t)z_2, tw_1 + (1-t)w_2)$, 我们需要证明:

$|tz_1 + (1-t)z_2| < 1$ 。 $|tw_1 + (1-t)w_2| < \exp(-u(tz_1 + (1-t)z_2))$ 。首先, 对于 1, 我们有:

$$|tz_1 + (1-t)z_2| \leq |tz_1| + |(1-t)z_2| \quad (\text{三角不等式})$$

$$= t|z_1| + (1-t)|z_2|$$

$$< t + (1-t) \quad (\text{因为 } |z_1| < 1 \text{ 和 } |z_2| < 1)$$

$$= 1.$$

因此, $|tz_1 + (1-t)z_2| < 1$ 。

接下来, 对于 2, 我们有:

$$\begin{aligned} |tw_1 + (1-t)w_2| &\leq |tw_1| + |(1-t)w_2| \quad (\text{三角不等式}) \\ &= t|w_1| + (1-t)|w_2| \\ &< t \exp(-u(z_1)) + (1-t) \exp(-u(z_2)). \end{aligned}$$

由于 $u(z)$ 是连续的次调和函数, 根据次调和函数的性质, 我们知道

$$u(z'_1) = u(z_1) \leq u(tz_1 + (1-t)z_2) \text{ 和 } u(z'_2) = u(z_2) \leq u(tz_1 + (1-t)z_2)。$$

因此,

$$\exp(-u(z'_1)) \geq \exp(-u(tz_1 + (1-t)z_2)) \text{ 和 } \exp(-u(z'_2)) \geq \exp(-u(tz_1 + (1-t)z_2))。$$

将上述不等式代入上式, 我们得到:

$$\begin{aligned} |tw_1 + (1-t)w_2| &< t \exp(-u(z_1)) + (1-t) \exp(-u(z_2)) \\ &\leq t \exp(-u(z'_1)) + (1-t) \exp(-u(z'_2)) \\ &= \exp(-u(tz_1 + (1-t)z_2)). \end{aligned}$$

因此, $|tw_1 + (1-t)w_2| < \exp(-u(tz_1 + (1-t)z_2))$ 。

综上所述, 我们证明了对于任意的 $z_1, z_2 \in \Omega$ 以及 $t \in [0, 1]$, 都有 $tz_1 + (1-t)z_2 \in \Omega$ 。

因此, Ω 是拟凸的。