Homework 0:Nobel Laureates Related to Lasers

2023 年 2 月 27 日

1 Nobel prizes in Physics

弱全纯函数（weakly holomorphic function）是指在模形式理论中的一类函数，它们并不是全纯函数，但是在某些特定的条件下可以被视为是全纯函数的一种“推广”。

具体来说，对于一个离散子群 $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$，定义上半平面 $\mathcal{H}$ 上的函数 f，如果 f 满足以下条件：

在 $\mathcal{H}$ 上的每个 $\gamma \in \Gamma$ 变换下，f 变换成一个相差常数因子的函数，即 $f|k\gamma = (c\gamma z + d_\gamma)^k f$，其中 k 是一个自然数，$c_\gamma, d_\gamma \in \mathbb{C}$，且 $c_\gamma d_\gamma^{-1}$ 为 γ 的行列式值；

f 在每个 $z \in \mathbb{Q}$ 处有一个“极点”，即存在一个正整数 N，使得 $(z - z_0)^N f(z)$ 在 z_0 处有一个可去奇点，其中 z_0 是一个有理数。

那么我们称 f 是 Γ 关于权为 k 的弱全纯模形式（weakly holomorphic modular form）。通常情况下，弱全纯模形式被视为全纯模形式的一种“推广”，因为它们在某些重要的数学应用中也扮演着重要的角色。

2 Nobel prizes in Physics

在热平衡状态下，空腔中的自发辐射和受激辐射的功率密度之比为：

$\frac{W_s}{W_j} = \frac{g_1}{g_0} \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)$

其中，W_s 是自发辐射功率密度，W_j 是受激辐射功率密度，g_1 和 g_0 分别是激发态和基态的统计权重，ν 是辐射频率，h 是普朗克常数，k 是玻尔兹曼常数，T 是温度。

对于可见光的波长 $\lambda = 0.5\ \mu\text{m}$，相应的频率 ν 可以通过光速和波长的关系求得：

$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3\times10^8\ \text{m/s}}{0.5\times10^{-6}\ \text{m}} = 6\times10^{14}\ \text{Hz}$

根据普朗克公式，辐射功率密度 W 和辐射频率 ν 的关系为：

$W(\nu) = \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)-1}$

将波长 λ 对应的频率 ν 带入上式，得到该波长下的辐射功率密度为：

$W(\lambda) = \frac{2hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right)-1}$

因此，可见光波长为 $0.5\ \mu\text{m}$ 的自发辐射功率密度为：

$W_s(\lambda) = \frac{2hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right)-1}$

对于受激辐射功率密度，需要知道空腔内的受激辐射数密度 $n(\nu)$，即相同频率下的光子数密度。在热平衡状态下，$n(\nu)$ 与 $W(\nu)$ 的比值为：

$\frac{n(\nu)}{W(\nu)} = \frac{1}{h\nu/kT}$

因此，受激辐射功率密度为：将自发辐射和受激辐射的功率密度代入比值公式中，得到：

$\frac{W_s}{W_j} = \frac{g_1}{g_0} \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) = \frac{g_1}{g_0} \exp\left(-\frac{hc}{\lambda kT}\right)$

其中，g_1 和 g_0 分别为激发态和基态的统计权重，需要根据具体系统来确定。对于热平衡的黑体辐射，所有的能级都被充分激发，g_1 和 g_0 均为简并度，即：

$g_1 = g_0 = \frac{8\pi V}{h^3}\left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{3/2}$

其中，V 是空腔体积，m 是辐射粒子的质量。

将数值代入比值公式中，得到：

$\frac{W_s}{W_j} = \exp\left(-\frac{hc}{\lambda kT}\right) = \exp\left(-\frac{6.626\times10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}\times3\times10^8\ \text{m/s}}{0.5\times10^{-6}\ \text{m}\times1.38\times10^{-23}\ \text{J/K}\times1500\ \text{K}}\right) \approx 4.82\times10^{-11}$

因此，可见光波长为 $0.5\ \mu\text{m}$ 的自发辐射功率密度与受激辐射功率密度之比约为

4.82×10^{-11}。

3　3

考虑一个具有面积A的平面区域，其法线方向为$\mathbf{n}$，表面上的任意一点与法线的夹角为θ，如下图所示：

假设该表面是一个完美的余弦辐射体，其辐射出射度为M_λ，单位为$W/(m^2 \cdot sr \cdot nm)$。我们需要推导出它的表达式。

首先考虑一个单位面积上的辐射能量。由基本电磁理论可知，一个振荡频率为ν、振幅为E的电磁波在介质中的能流密度为：其中，ϵ_0是真空介电常数，c是光速。

根据辐射出射度的定义，单位面积上在某一频率范围内沿某一方向辐射的能量为：

= cos dE=M λ cos θ dA d λ dt 其中，$d\lambda$是波长的微元，dt是时间的微元。这里将dA乘以$\cos\theta$是因为辐射方向与表面法线的夹角为θ，只有与该方向垂直的电磁波才能被视为真正的辐射。

假设表面上存在一个微元dA_0，其法线方向为$\mathbf{n_0}$，与辐射方向的夹角为α。根据余弦定理可知：

其中，$\cos\beta = \cos\theta_0$，$\sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\theta_0}$，$\cos\gamma = \cos\phi_0 - \phi$，$\theta_0$和$\phi_0$是微元$dA_0$法线的天顶角和方位角，$\phi$是辐射方

接下来，我们需要将$d\Omega$用角度θ和$d\theta$表示出来。如下图所示，假设我们关注单位时间内，从立体角Ω内某一点P向外发射的能量，设该点与坐标系原点的距离为r。

显然，对于单位面积的投影面积ds，P点到该面积的距离为$r\cos\theta$。因此，该面积接收到的来自P点的辐射功率为：

$$dP = \frac{dE}{dt} \cdot ds = \frac{dE}{dt} \cdot r^2 \cos\theta d\Omega$$

其中，$d\Omega$表示单位面积在球面上对应的立体角元素，它与$d\theta$和$d\phi$相关，具体地：

$$d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$$

将$d\Omega$代入上式得：

$$dP = \frac{dE}{dt} \cdot r^2 \cos\theta \sin\theta d\theta d\phi$$

将dE代入上式得：

$$dP = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}\beta^2 \sin^2\theta \cos\theta d\theta d\phi$$

最终，我们得到了余弦辐射体的辐射出射度表达式：

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}\beta^2 \sin^2\theta \cos\theta$$

其中，β为辐射体的速度与光速的比值

4 11

朗伯辐射体是指一个均匀的热辐射表面，它的辐射出射度表达式为：

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{2\pi k_B^2 T^4}{h^3 c^2} \cos\theta$$

其中，dP为单位时间内辐射在Ω立体角内的功率，$d\Omega$为立体角元素，k_B为玻尔兹曼常数，T为表面的温度，h为普朗克常数，c为光速，θ为法向量与$\mathbf{n}$的夹角。

为了推导上述表达式，我们假设辐射体是均匀、各向同性的。考虑一个面积为A的小面元dS，该小面元在$\mathbf{n}$方向上的投影面积为$dS\cos\theta$。设辐射体在频率为ν到$\nu + d\nu$的

波段内辐射的平均能量密度为$u(\nu)$，则该小面元在单位时间内辐射出的功率为：

$$dP = AdS\cos\theta u(\nu)c$$

将普朗克黑体辐射公式代入上式，得到：

$$dP = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}}-1}AdS\cos\theta$$

根据能量守恒，辐射出的能量应等于该小面元吸收的能量。假设该小面元在频率为ν到$\nu + d\nu$的波段内吸收的平均能量密度为$u'(\nu)$，则有：

$$dP = AdS\cos\theta u'(\nu)c$$

将普朗克黑体辐射公式代入上式，得到：

$$dP = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}}-1}AdS\cos\theta$$

将两式相等，得到：

$$u(\nu) = u'(\nu)$$

因此，辐射体在所有方向上的辐射能量密度$u(\nu)$与吸收能量密度$u'(\nu)$相等，且与方向无关。将辐射能量密度代入辐射出射度表达式中，得到：

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{2\pi}{c}u(\nu)\cos\theta = \frac{2\pi k_B^2 T^4}{h^3 c^2}\cos\theta$$

其中，$u(\nu)$为普朗克黑体辐射公式中的辐

根据朗伯体的定义，表面每个微小立体角$d\Omega$上的辐射强度相等，即$I(\theta, \phi) = I_0$，其

中I_0为表面上某一点的辐射强度，因此有：

$$dI(\theta, \phi) = I_0 \cos\theta \cdot d\Omega = I_0 \cos\theta \cdot \sin\theta d\theta d\phi$$

其中$d\Omega$可以用$\sin\theta d\theta d\phi$表示，代入普朗克黑体辐射公式，有：

$$dE = \frac{h\nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \cdot \cos\theta \cdot \sin\theta d\theta d\phi d\nu A$$

对dE在球坐标系下进行积分，可得总辐射能量E：

$$E = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} \frac{h\nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \cdot \cos\theta \cdot \sin\theta d\theta d\phi d\nu A$$

化简并代入普朗克黑体辐射公式中的积分，有：

$$E = \frac{4\pi k^4}{c^2 h^3} \cdot T^4 \cdot A$$

将表面积A代入，得到表面单位面积上的辐射能量为：

$$j^* = E/A = \frac{4\pi k^4}{c^2 h^3} \cdot T^4$$

其中j^*即为朗伯辐射体的辐射出射度表达式。

根据定义，光通量F和光强度I之间的关系为：

$$F = K_m \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} V(\lambda) I(\lambda) d\lambda$$

其中，K_m为光通量系数，其值为683 lm/W，λ_1和λ_2分别为可见光的最短波长和最长波长，分别为400 nm和700 nm。

将已知条件代入上式，得到：

$$100 \text{ lm} = 683 \text{ lm/W} \cdot 0.50 \cdot I(0.510\mu\text{m}) \cdot 10^3 \text{ W/m}^2$$

解得波长为0.510μm的绿光的光强度为：

$$I(0.510\mu\text{m}) = \frac{100 \text{ lm}}{683 \text{ lm/W} \cdot 0.50 \cdot 10^3 \text{ W/m}^2} = 0.292 \text{ W/m}^2$$

将该光强度代入普朗克-爱因斯坦定理，可得该波长下单位面积的辐射能量为：

$$E = h\nu \cdot \frac{I(0.510\mu\text{m})}{c} = \frac{hc}{\lambda} \cdot I(0.510\mu\text{m}) = 2.246 \times 10^{-19} \text{ J/m}^2$$

因此，在1 min时间内，屏幕接受的辐射能量为：

$$E_{\text{total}} = E \cdot A \cdot t = 2.246 \times 10^{-19} \text{ J/m}^2 \cdot A \cdot 60 \text{ s}$$

其中，A为屏幕的面积。

根据普朗克-爱因斯坦关系$E = h\nu$，其中h为普朗克常数，ν为光子的频率。由于给定的是波长λ，可以使用$c = \lambda\nu$将其转换为频率ν，其中c为光速。因此，可以将$E = h\nu$重写为$E = \frac{hc}{\lambda}$。

题目中给出绿光波长为0.510μm，代入上式可得$E = \frac{hc}{\lambda} = 2.441 \times 10^{-19}$ J。题目中还给出绿光的光通量为100 lm，因此绿光的辐射照度$I(\lambda)$为$I(\lambda) = \frac{100 \text{ lm}}{\text{m}^2} = 100$ lx，其中$1 \text{ lx} = 1 \text{ lm/m}^2$。

根据辐射照度$I(\lambda)$的定义，可以得到在波长为λ的光的垂直入射面上的光辐射功率密度$P(\lambda)$为$P(\lambda) = I(\lambda)V(\lambda)$，其中$V(\lambda)$为视见函数。题目中给出绿光的视见函数为$V(0.510\mu\text{m}) = 0.50$。

因此，波长为0.510μm的绿光在垂直入射面上的光辐射功率密度$P(\lambda)$为$P(\lambda) = I(\lambda)V(\lambda) = 100 \text{ lx} \cdot 0.50 = 50 \text{ W/m}^2$。

最后，根据辐射能量密度的定义$E = P(\lambda) \cdot t$，其中t为时间，可以求出在1 min时间内屏幕接受的辐射能量为$E = P(\lambda) \cdot t = 50 \text{ W/m}^2 \cdot 60 \text{ s} = 3000 \text{ J/m}^2 = 3 \text{ mJ/m}^2$。

将波长为$0.510\mu m$的绿光的辐射能量密度代入可得$E = \frac{hc}{\lambda} \cdot I(0.510\mu\text{m}) = 2.246 \times 10^{-19} \text{ J/m}^2$。

$$u(\lambda, T) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1}$$

根据光的频率和波长之间的关系$f = c/\lambda$，其中c是光速，可以计算出相应的频率：

对于中心波长为$0.5\mu m$的光波，其频率为$f = c/\lambda = 3 \times 10^8 \text{m/s}/(0.5 \times 10^{-6}\text{m}) = 6 \times 10^{14}\text{Hz}$，而谱线宽度为$1nm$，因此其频率宽度可以通过以下公式计算：

$$\Delta f = \frac{\Delta\lambda}{\lambda^2} c = \frac{1 \times 10^{-9}\text{m}}{(0.5 \times 10^{-6}\text{m})^2} 3 \times 10^8\text{m/s} = 12 \times 10^{12}\text{Hz}$$

因此，中心波长为$0.5\mu m$、谱线宽度为$1nm$的光波的频率宽度为$12 \times 10^{12}\text{Hz}$。

对于中心波长为$1\mu m$的光波，其频率为$f = c/\lambda = 3 \times 10^8\text{m/s}/(1 \times 10^{-6}\text{m}) = 3 \times 10^{14}\text{Hz}$，而谱线宽度为$1nm$，因此其频率宽度可以通过以下公式计算：

$$\Delta f = \frac{\Delta\lambda}{\lambda^2} c = \frac{1 \times 10^{-9}\text{m}}{(1 \times 10^{-6}\text{m})^2} 3 \times 10^8\text{m/s} = 3 \times 10^{12}\text{Hz}$$

因此，中心波长为$1\mu m$、谱线宽度为$1nm$的光波的频率宽度为$3 \times 10^{12}\text{Hz}$。

对于中心波长为$10\mu m$的光波，其频率为$f = c/\lambda = 3 \times 10^8\text{m/s}/(10 \times 10^{-6}\text{m}) = 3 \times 10^{13}\text{Hz}$，而谱线宽度为$1nm$，因此其频率宽度可以通过以下公式计算：

$$\Delta f = \frac{\Delta\lambda}{\lambda^2} c = \frac{1 \times 10^{-9}\text{m}}{(10 \times 10^{-6}\text{m})^2} 3 \times 10^8\text{m/s} = 3 \times 10^{10}\text{Hz}$$

因此，中心波长为$10\mu m$、谱线宽度为$1nm$的光波的频率宽度为$3 \times 10^{10}\text{Hz}$。