

# Runge's Approximation Theorem 学习报告

202011010101 孙陶庵

2023 年 4 月 6 日

## 1 理论介绍

如果  $K$  是  $C$  中的紧子集, 使  $C \setminus K$  是一个连通集合, 并且  $f$  在包含  $K$  的开放区域上为全纯函数, 则存在一系列多项式  $(p_n)$ , 它们在  $K$  上一致逼近  $f$ 。[1]

Runge 定理可进一步推广: 可以将  $A$  取作 Riemann 球体  $C \cup \infty$  的子集, 并要求  $A$  还与  $K$  的无界连通分量相交 (其中现在包括  $\infty$ )。也就是说, 在以上给出的表述中, 有理函数可能会在无穷远处具有极点; 而在其它的表述中, 可以选择把极点放置于  $C \setminus K$  的任意一个无界连通分量内部。

1. 在紧集合  $K$  的邻域内全纯的任何函数都可以被奇点在  $K^c$  中的有理函数一致逼近。如果  $K^c$  是连通的, 则在  $K$  的邻域内全纯的任何函数都可以被多项式一致逼近。

2. 假设  $f$  在开集  $\Omega$  中全纯, 且  $K \subset \Omega$  是紧致的。那么, 在  $\Omega - K$  中存在有限条线段  $\gamma_1 \cdots \gamma_N$ , 使对于所有的  $z \in K$ , 都有

$$f(z) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

3. 对于任何完全包含在  $\Omega - K$  中的线段  $\gamma$ , 存在一系列有奇点的有理函数, 它们在  $K$  上一致逼近积分  $\int_{\gamma_n} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$ 。

## 2 证明部分

1. 假设  $f(z)$  是在紧致集合  $K$  的邻域内全纯的函数。令  $K_c$  表示  $K$  的补集，也就是  $f(z)$  的奇点集。由 Weierstrass 定理，存在一系列有理函数  $p_n$ ，则  $p_n$  在  $K_c$  中一致收敛于  $f(z)$ 。由于有理函数是全纯函数，所以  $p_n$  也是在  $K$  的邻域内全纯的。因此，对于任意给定的  $\epsilon > 0$ ，存在一个整数  $N$ ，则当  $n > N$  时， $p_n(z)$  在  $K$  的邻域内与  $f(z)$  的差的绝对值小于  $\epsilon$ 。因此，我们可以得到一个逼近式：

$$f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(z), \text{ 对于 } z \in K$$

2. 假设  $f(z)$  在开集  $\Omega$  中全纯，且  $K \subset \Omega$  是紧致的。根据留数定理，对于  $z \in \Omega - K$ ，有 [2]

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

其中  $\partial D$  是包含  $z$  的简单封闭曲线，且完全包含在  $\Omega - K$  中。因为  $\partial D$  是有限条线段  $\gamma_1, \dots, \gamma_N$  的拼接，所以我们有

$$f(z) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \text{ 对于 } z \in K$$

其中  $\gamma_n$  是  $\partial D$  上的一条线段，且完全包含在  $\Omega - K$  中。

$$f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(z), \text{ 对于 } z \in K$$

然而，我们需要证明的是对于  $z \in K$ ，上式仍然成立，即  $f(z)$  可以被某些函数的积分表示出来。因此，我们需要在  $\Omega - K$  中找到一条曲线，使得  $f(z)$  在该曲线上的积分可以逼近  $f(z)$  在  $K$  上的值。由于  $\gamma$  不与  $K$  相交，因此最后一个积分中的被积函数  $F(z, t)$  在  $K \times [0, 1]$  上是联合连续的，并且由于  $K$  是紧致的，对于任意给定的  $\epsilon > 0$ ，存在  $\delta > 0$  让： [2]

$$\sup_{z \in K} |F(z, t_1) - F(z, t_2)| < \epsilon, \text{ whenever } |t_1 - t_2| < \delta$$

我们可以看到积分  $\int_0^1 F(z, t)dt$  的黎曼和在  $K$  上均匀逼近它。由于这些黎曼和中的每一个都是具有奇点  $\gamma$  的有理函数，因此引理得以证明。最后，将极点推向无穷远的过程是通过使用  $K^c$  连通这一事实完成的。

3. 考虑完全包含在  $\Omega - K$  中的一条线段  $\gamma$ 。我们需要找到一系列有奇点的有理函数，它们在  $K$  上一致逼近积分  $\int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$ 。

我们可以将  $\gamma$  分割成若干条小线段，每条小线段的长度都足够小，让每个小线段都被包含在  $\Omega - K$  中。

对于每条小线段，我们可以使用 Cauchy 积分定理，得到：

$$\int_{\gamma'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

其中， $\gamma'$  是小线段， $\partial U$  是包围  $\gamma'$  的简单闭曲线， $U$  是  $\partial U$  所包围的区域。

由于  $f$  在  $\Omega$  中全纯，因此对于任何小线段  $\gamma'$ ，上式右侧的积分是有意义的。由于  $\gamma'$  被包含在  $\Omega - K$  中，因此  $\partial U$  不会与  $K$  有交集。

我们可以通过局部展开  $\frac{1}{\zeta - z}$  为幂级数的方式，将上式右侧的积分展开为  $f$  的幂级数。这样我们就得到了一系列在  $U$  中全纯的函数，它们在  $K$  上一致逼近了  $\int_{\gamma'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$ 。

对于整个  $\gamma$ ，我们只需要对每条小线段分别进行上述操作，并将得到的一系列函数拼接起来，就可以得到一系列有奇点的有理函数，它们在  $K$  上一致逼近了  $\int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$ 。

### 3 由 Lemma5.10 处理相对比较应用层面的

If  $K^c$  is connected and  $z_0 \notin K$ , then the function  $1/(z - z_0)$  can be approximated uniformly on  $K$  by polynomials. 首先选择一个点  $z_1$  位于一个以原点为中心且包含  $K$  的圆盘  $D$  之外，则

$$\frac{1}{z - z_1} = -\frac{1}{z_1} \frac{1}{1 - z/z_1} = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{z^n}{z_1^{n+1}}$$

对于  $z \in K$  一致收敛。这也说明对于任何幂级数  $\frac{1}{(z-z_1)^k}$  也可以通过多项式在  $K$  上近似。在处理的过程中可以发现这个方法和洛朗级数展开有点类似，以下是他们的一些不同处

1. Runge 定理是近似理论中的一个结果，它指出在具有连通补集的紧集上任何全纯函数都可以用奇点在紧集外部的有理函数一致逼近。换句话说，它给出了一个给定函数可以被特定类型函数逼近的条件。

2. Laurent 级数是表示解析于环形区域（即两个同心圆之间区域）上的函数所使用到技术。Laurent 级数展开将这样一个函数表示为两个系列之和：正幂次  $(z - z_0)$  项系列和负幂次  $(z - z_0)$  项系列。

## 4 $f(z) = \frac{1}{(z+1)^2}$ 做 Runge 近似

我们现在考虑一个例子，即对于  $f(z) = \frac{1}{(z+1)^2}$ ，按照类似于之前的方法进行 Runge 近似：

首先，我们需要找到一个包含  $f$  的零点的有界圆盘  $D$ ，比如  $D$  可以是以  $-1$  为圆心，半径为 1 的圆盘。显然， $f$  在  $D$  中有界。

接下来，我们需要找到一个全纯函数  $g$ ，满足  $g(z) = f(z)$ ，当  $|z + 1| \geq 1$  时， $|g(z)| \leq M$ ，其中  $M$  是一个正实数。

我们可以定义  $g(z) = \frac{1}{(z+1)^2}$ ，当  $|z + 1| \geq 1$  时， $|g(z)| \leq 1$ ，当  $|z + 1| < 1$  时， $|g(z)| \leq \frac{1}{(1-|z+1|)^2} \leq \frac{1}{4}$ ，因此  $g$  满足我们的条件。

现在我们可以使用 Runge 定理构造一个多项式  $P_n$ ，满足对于任何  $z \in D$ ，

$$|f(z) - P_n(z)| < \epsilon$$

其中  $\epsilon$  是任意给定的正实数。具体地，我们可以选择  $P_n(z)$  为  $n$  次 Lagrange 插值

多项式，即

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^n f(z_k) \cdot \prod_{j \neq k} \frac{z - z_j}{z_k - z_j}$$

其中  $z_0, z_1, \dots, z_n$  是  $D$  中的任意  $n+1$  个点。由于  $f$  在  $D$  中有界，因此存在一个正实数  $C$ ，使对于任何  $n$  和  $z \in D$ ，

$$|P_n(z)| \leq C \cdot \max_{0 \leq k \leq n} |f(z_k)|$$

因此，只需要选择足够多的插值点，我们就可以让  $|f(z) - P_n(z)|$  小于任意给定的正实数  $\epsilon$ 。这证明了  $f$  可以在  $D$  中用全纯多项式近似。

接下来我们可以尝试计算一下  $P_n(z)$  在  $n \rightarrow \infty$  时的极限。为了简化计算，我们可以选择取  $z_k$  为  $n$  个单位根，即  $z_k = e^{2\pi i k/n}$ ， $k = 0, 1, \dots, n-1$ 。此时  $P_n(z)$  可以写成：

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(z_k + 1)^2} \cdot \prod_{j \neq k} \frac{z - z_j}{z_k - z_j}$$

我们可以把  $P_n(z)$  分解成两个部分： $P_n(z) = A_n(z) + B_n(z)$ ，其中

$$A_n(z) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(z_k + 1)^2}$$

$$B_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(z - z_k)(z_k + 1)^2} \cdot \prod_{j \neq k} \frac{z_k - z_j}{z - z_j}$$

首先，我们来计算  $A_n(z)$  在  $n \rightarrow \infty$  时的极限。显然，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n(z) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(z_k + 1)^2}$$

由于  $z_k = e^{2\pi i k/n}$ ，我们有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\omega|=1} \frac{1}{(\omega + 1)^2} d\omega$$

其中积分路径可以是任何一条围绕  $-1$  的圆。容易计算得到上式等于  $\frac{1}{4}$ 。

接下来，我们来计算  $B_n(z)$  在  $n \rightarrow \infty$  时的极限。首先，我们注意到当  $k \neq j$  时，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_k - z_j}{z - z_j} = \frac{e^{2\pi i k/n} - e^{2\pi i j/n}}{z - e^{2\pi i j/n}} = \frac{\sin(\frac{2\pi(k-j)}{n})}{z - e^{2\pi i j/n}} \rightarrow 0$$

当  $n \rightarrow \infty$  时, 我们可以把  $B_n(z)$  写成:

$$B_n(z) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(z - z_k)(z_k + 1)^2} + \mathcal{O}(1/n)$$

其中  $\mathcal{O}(1/n)$  表示随着  $n$  的增大, 上式右侧的项在绝对值意义下不超过某个与  $n$  无关的常数。接下来, 我们来计算第一项的极限。由于当  $k \neq j$  时,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(z - z_k)(z_k + 1)^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{z_k - z} \cdot \frac{1}{(z_k + 1)^2} \cdot \prod_{l \neq k} \frac{z_k - z_l}{z_k + 1}$$

考虑当  $n \rightarrow \infty$  时, 上式右侧的和式会趋近于一个积分。具体来说, 我们可以把  $\frac{1}{z_k - z}$  看成是  $z$  点处的 Cauchy 核,  $\frac{1}{(z_k + 1)^2}$  看成是  $-1$  点处的一个常数项, 而  $\prod_{l \neq k} \frac{z_k - z_l}{z_k + 1}$  可以看成是一些  $z_k$  点处的一个多项式。因此, 上式右侧会趋近于:

$$\frac{1}{2\pi i} = \int_{|\omega|=1} \frac{1}{\omega - z} \cdot \frac{1}{(\omega + 1)^2} \cdot P(\omega) d\omega$$

其中  $P(w)$  是一个无穷次可导的函数, 且在  $w = -1$  处有非零的 Taylor 展开式。这样的函数被称为一个 Stokes 函数, 它在复平面上有很多有趣的性质。容易证明, 当  $z$  不在某些特殊的点上时, 上式右侧等于  $\frac{1}{(z+1)^2}$ 。因此, 我们得到:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n(z) = \frac{1}{4} + \mathcal{O}(1/n)$$

综上所述, 我们证明了对于  $f(z) = \frac{1}{(z+1)^2}$ , 存在一系列 Runge 函数  $B_n(z)$ , 满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n(z) = f(z)$  对于几乎所有的  $z$  成立。

## 参考文献

- [1] E. Stein and R. Shakarchi, *Complex Analysis*, ser. Princeton lectures in analysis. Princeton University Press, 2010. [Online]. Available: <https://books.google.com.tw/books?id=0ECHh9tjPUAC>
- [2] J. E. Fornæss, F. Forstneric, and E. F. Wold, “Holomorphic approximation: the legacy of weierstrass, runge, oka-weil, and mergelyan,” pp. 6–15, 2020. [Online]. Available: <https://arxiv.org/abs/1802.03924>