目录

WKB 近似的介绍讲解以及它在不同领域的应用

202011010101 物理 2001 孙陶庵

2023 年 5 月 19 日

1 引言

量子物理中的 WKB（Wentzel-Kramers-Brillouin）近似是一种强大的工具，用于解决薛定谔方程的近似解。它在描述均匀介质中的量子现象和波动行为方面具有广泛的应用。然而，许多实际系统，如非均匀等离子体，具有空间上的变化性质，导致了更为复杂的物理行为。在这种情况下，我们需要将 WKB 近似扩展到非均匀介质，以更准确地描述系统的性质和行为。

非均匀等离子体作为一种重要的物质状态，在激光等离子体物理和实验室天体物理中扮演着关键的角色。它们在实验室中通过激光和高能粒子束的相互作用中产生，并在宇宙中存在于星际介质和恒星大气等环境中。然而，由于等离子体密度、温度和电场等物理量在空间上的变化，非均匀等离子体的性质和行为比均匀介质更为复杂和多样化。WKB 方法在等离子体物理中是非常有价值的解决方案，因为这个方法提供了一个直观的方式描述波的传播；通过一个局部色散关系定义的波，其幅度和相位以一种非常明显的方式与这种局部的特征相关

在这篇文章中，我们会讨论 WKB 近似在非均匀等离子体中的应用。首先，我们将回顾 WKB 近似的基本原理和推导过程。然后在激光等离子体中，我们将探讨 WKB 近似在分析波模式中的应用。

2 WKB 近似的基本原理

WKB（Wenzel，Kramers, Brillouin）方法是得到一维定态 Schrödinger 方程的近似解的一种技术，其基本思想同样可应用于许多其他形式的微分方程和三维 Schrödinger 方程的径向部分，其最基本的核心思想主要是：首先波函数以指数函数的形式重新表达，再将这指数函数代入 Schrödinger 方程，展开指数函数的参数为 $\hbar$ 的幂级数，$\hbar$ 同次幂的项目一一对应，会得到一组方程，处理后，就会得到波函数的近似。

2.1 基本思想

中间省略了很多步骤，详细过程参见各大量子力学课本 [1]，以及这篇文章皆有非常好的讲解 [2] 对于一维定态 Schrödinger 方程：

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\psi(x)+V(x)\psi(x)=E\psi(x)$$

将其重写为：

$$-\hbar^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\psi(x)=p^2\psi(x)$$

其中 $p(x)\equiv\sqrt{2m[E-V(x)]}$，此时假设 $E>V(x)$，因此 p 为实数，此为经典区域，所以现在假设波函数的形式为另外一个函数 ϕ 的指数，$\psi(x)=e^{\phi(x)/\hbar}$。将其代回原方程可以得到

$$\frac{d\psi}{dx}=\left(A^{\cdot}+iA\phi^{\cdot}\right)e^{i\phi}$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}=\left[A'+2iA\phi'+iA\phi'-A\left(\phi'\right)^2\right]e^{i\phi}$$

代回原式可得：

$$A^{'}+2iA^{'}\phi+iA\phi^{'}-A\left(\phi^{'}\right)^2=-\frac{p^2}{\hbar^2}A$$

这等价于两个实数方程，且一个实部一个虚部：

$$A^{*} - A\Big(\phi^{\cdot}\Big)^{2} = -\frac{p^{2}}{\hbar^{2}} A$$

$$2A\phi' + A\phi' = 0$$

第二个方程很容易解出：

$$A^{2}\phi^{2} = C^{2}$$

式中 C 为（实）常数。一般来说第一个方程很难求解 所以需要近似：我们假定振幅 A 的变化非常缓慢，因此 A'' 项可忽略，在此情况下，我们只剩下：

$$\phi(x) = \pm \int p(x)\mathrm{dx}$$

可以得出：

$$\psi(x) \approx \frac{C_{\pm}}{\sqrt{p(x)}} e^{\frac{i}{\hbar} \pm \int p(x)\mathrm{d}x}$$

接着，在势阱内部，我们有：

$$\psi\big(x\big) \cong \frac{1}{\sqrt{p(x)}}\Big[C_{+}e^{i\phi(x)} + C_{-}e^{-i\phi(x)}\Big]$$

其中

$$\phi(x) = \frac{1}{\hbar}\int_{0}^{x} p(x')\mathrm{dx}'$$

现在考虑边界条件 $\psi(x=0)=0$ 和 $\psi(x=a)=0$，所以 $C_2=0$，所以

$$\phi\big(a\big) = n\pi \quad \big(n = 1, 2, 3, ...\big)$$

最后，系统满足量子化规则：

$$\int_{x_1}^{x_2} p(x)dx = (n - 1/2)\pi\hbar, \qquad n = 1,\, 2,\, 3,\, \ldots$$

2.2 解释和物理意义

1. 上面讲的这些主要是 WKB 近似的基本定义（做法），这个方法不仅可以用来解决量子力学的问题，对于绝大部分类薛定谔方程（Schrodinger-like differential equation）都能够很好的求解

2.WKB 近似法能够在不需要精确求解的情况下，通过计算得到等离子体中波的传播方程，并得出物理运动的定性描述。WKB 近似法的优势在于它比其他精确方法更快和更简单，并且可以解决一些无法通过其他方法计算的难点问题。

3. 带有标量场的封闭弗里德曼宇宙的变形 Wheeler-DeWitt 方程的 WKB 解，并在隧道建议的背景下讨论了量子引力对充分膨胀概率的影响。[2]

3 WKB 近似在激光等离子体中的应用

WKB 近似描述波的传播较为直观，可以通过局域色散关系定义一个波的波数、群速度、振幅、相位等对于线性密度变化的等离子体，可以得到精确解，但 WKB 方法仍然有其局限性，即仅在缓慢的密度变化成立，但临界点不成立

3.1 非均匀等离子体中波的传播

一般来说等离子体非均匀密度问题需要数值计算，但是在特殊情况可以有解析解：

1. 密度分布缓变，$kL \gg 1$，使用 WKB 近似可以分析，不过在共振点时会失效 [3]

2. 密度分布剧变，$kL \ll 1$，即表面鞘场

3.1.1 过程介绍

我们接下来考虑下面形式的高频场：

$$E = E(\vec{x})\exp(-\mathrm{i}\omega \mathrm{t})$$

由波动方程 $\nabla^2 E - \nabla(\nabla \cdot E) = \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial J}{\partial t} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t}$ 和 $J = \frac{ie^2 n}{\omega}E = \sigma E$ ，$\varepsilon \equiv 1 + \frac{4\pi i\sigma}{\omega}$，可以得到

$$\nabla^2 E - \nabla(\nabla \cdot E) + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon E = 0$$

$$\nabla \times (\nabla \times B) = -\frac{-i\omega}{c}\nabla \times (\varepsilon E)$$

后者可以得到

$$\nabla^2 B + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon B + \frac{1}{\varepsilon}\nabla\varepsilon \times (\nabla \times B) = 0$$

电场的空间形式 $\exp(ik \cdot \vec{x})$ 可以给出色散关系:$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + k^2 c^2$ 接着我们假定等离子体的密度只在 Z 方向上有变化，对于线偏振激光电场 E 满足以下关系

$$\frac{d^2 E}{dz^2} + k^2(z)E = 0$$

$$k^2(z) = \frac{\omega^2 - \omega_p^2(z)}{c^2} = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon$$

并且假定等离子体密度对 Z 是缓变的，这样可以给出一个形式解

$$E(z) = E_0(z)\exp[\frac{i\omega}{c}\int \psi(z')dz']$$

因为这里 E_0, ψ 是缓变函数，将其带入波动方程会得到

$$E_0'' + \frac{2i\omega}{c}\psi E_0' - \frac{\omega^2}{c^2}\psi^2 E_0 + \frac{i\omega}{c}\psi' E_0 + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon E_0 = 0$$

方程有零阶和一阶解，对于零阶有 $\psi = \sqrt{\varepsilon(\omega, z)}$ 对于一阶有 $\frac{2i\omega}{c}\psi E_0 + \frac{i\omega\psi' E_0}{c} = 0$ 可以由此得到 $E_0(z) = \frac{cons\tan t}{\sqrt{\psi}}$ 最终获得 WKB 解:

$$E(z) = \frac{E_{FS}}{\varepsilon^{1/4}}\exp[\frac{i\omega}{c}\int \sqrt{\varepsilon(\omega, z')}dz']$$

1. 从能流守恒解释：
$\frac{\nu_g \mid E(z) \mid^2}{8\pi} = \frac{cE_{FS}^2}{8\pi}$, $\nu_g/c = \sqrt{\varepsilon(\omega, z)}$ 因此：$E(z) = \frac{E_{FS}}{\varepsilon^{1/4}}$ 与 WKB 结果吻合，也可写为磁场形式：$|B_0(z)| = B_{FS}\varepsilon^{1/4}$ 磁场振幅随激光向高密度传播降低

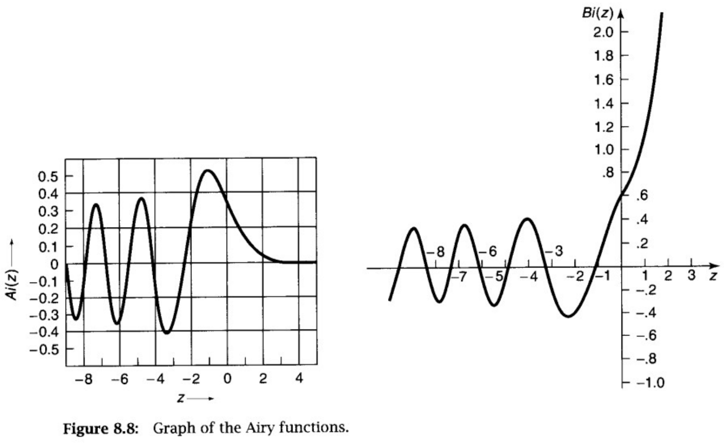

图 1: Airy Function

2. 讨论 WKB 的适用条件：

我们在前面的推导中假定：$E_0 << \frac{\omega}{c}\psi"E_0, \frac{\omega}{c}\psi E_0$ 从 $E(z) = \frac{E_{FS}}{\varepsilon^{1/4}}\mathbf{exp}[\frac{i\omega}{c}^{z}]\sqrt{\varepsilon(\omega, z')}dz'$ 可以得到 $\mathbf{k}(z) = \omega\psi/\mathbf{c}$，有：$E_0'' \ll k'E_0, kE_0'$ 因此可以知道 WKB 近似的适用条件：$\frac{\partial E_0}{\partial z} \ll kE_0$

3.2 波在固定密度梯度等离子体的解析解

我们接下来考虑一个线性密度的等离子体 $(n = n_{cr}z/L)$ 其中 $n_{cr} = m\omega^2/4\pi e^2$ [4] 可以得到 $\frac{\mathrm{d}^2E}{\mathrm{d}z^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{z}{L}\right)E = 0$. 我们令 $\eta = (\omega^2/c^2L)^{1/3}(z - L)$ 有 $\frac{\mathrm{d}^2E}{\mathrm{d}\eta^2} - \eta E = 0$. 这是艾里方程，其解称为艾里函数。因为艾里方程是一个二阶微分方程，所以有两个线性独立的艾里函数，Ai(z) 和 Bi(z)（见图）。

对波函数在转折点（E=V）处进行处理，“经典”区和“非经典”区在此处相接透过处理这个方程可以（过程略，详细可参见 [1] 的 8.3 THE CONNECTION FORMULAS）將 $E(z = 0)$ 表示為振幅為 E_{FS} 的入射波和具有相同振幅但相位偏移的反射波之和，即，

$$E(z = 0) = E_{\text{Fs}}\left[1 + \exp -i\left(\frac{4}{3}\frac{\omega L}{c} - \frac{\pi}{2}\right)\right],$$

这里 E_{FS} 是入射光波电场的自由空间的值，且 φ 只是一个相位因子且无法影响 $|E|$，因此，

$$E(\eta) = 2\sqrt{\pi}\left(\frac{\omega L}{c}\right)^{1/6} E_{\mathrm{FS}} e^{i\varphi} \mathbf{A}_i(\eta).$$

图中可以看出电场的振幅在 $\eta = 1$ 时可以达到最大值，即 $(z - L) = -(\omega^2/c^2 L)^{-1/3}$

$$\left|\frac{E_{\max}}{E_{\mathrm{FS}}}\right|^2 \simeq 3.6\left(\frac{\omega L}{c}\right)^{1/3}.$$

因为驻波的形成，E^2 的期望值增大四倍，这是因为介电函数变小和群速度变小。接着，可以基于 WKB 理论获得峰值电场幅度的类似膨胀。这里我们使用 $k = \sqrt{\epsilon}(\omega/c)$ 和 $|E| = E_{FS}/\epsilon^{1/4}$ 随着 ϵ 变小，波长变长。同样的，如果我们简单地减去 $\pi/2$ 以说明临界密度表面的反射，则入射波和反射波之间的相移由 WKB 解给出。即

$$\Psi = 2\frac{\omega}{c}\int_0^L \sqrt{\epsilon}\mathrm{d}z - \frac{\pi}{2} = \frac{4}{3}\frac{\omega L}{c} - \frac{\pi}{2}.$$

光波的磁场很容易从 E 的解中计算出来。注意到电矢量在 x 方向上并且波在 z 方向上传播，我们采用法拉第定律的 y 分量来获得

$$B = -\frac{ic}{\omega}\frac{\partial E}{\partial z}.$$

即

$$B(\eta) = -i2\sqrt{\pi}\left(\frac{c}{\omega L}\right)^{1/6} E_{\mathrm{FS}} e^{i\varphi} \mathrm{A}_i'(\eta),$$

这是一个非常棒的例子，不仅严格的按照 WKB 近似的步骤，并且非常合理的说明了波在等离子体中传播的问题。

4 结论

综上所述，WKB（Wentzel-Kramers-Brillouin）近似是一种强大的工具，用于解决量子力学中的薛定谔方程的近似解。在均匀介质中，WKB 近似已经得到广泛的应用，能够描述量子现象和波动行为。WKB 近似相对于其他精确的方法，WKB 近似更简单、更直观，并且可以解决一些难以通过其他方法计算的问题。然而，许多实际系统，特别是非

均匀等离子体，具有空间上的变化性质，会需要解决更为复杂的物理行为。通过 WKB 近似，我们可以得到非均匀等离子体中波的传播方程，并对物理运动进行定性描述。

并且，WKB 近似可以应用于解决类薛定谔的偏微分方程的近似解。将 WKB 近似扩展到非均匀介质，特别是在非均匀等离子体中的应用，可以更准确地描述系统的性质和行为。尽管 WKB 近似在一些情况下存在局限性，但它仍然是研究非均匀等离子体中波动行为的非常有用的方法。

参考文献

[1] D. J. Griffiths and D. F. Schroeter, *Introduction to Quantum Mechanics*, 3rd ed. Cambridge University Press, 2018.

[2] F. Lu, B. Lv, P. Wang, and H. Yang, “Wkb approximation for a deformed schrodinger-like equation and its applications to quasinormal modes of black holes and quantum cosmology,” *Nuclear Physics B*, vol. 937, pp. 502–532, 2018. [Online]. Available: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0550321318301597

[3] W. L. Kruer, *The physics of laser plasma interactions.* CRC Press, 2003, p. 32.

[4] ——, *The physics of laser plasma interactions.* CRC Press, 2003.