



دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده برق و کامپیوتر

عنوان سمینار و زمینه اصلی:

سینماتیک و کنترل ربات چهارپره

استاد درس:

دکتر پالهنک

دانشجو:

داریوش حسن پور

هوش مصنوعی (۹۳۰۸۱۶۴)

## ۱ - چکیده

ربات چهارپره همانطور که از نامش پیداست به رباتی گفته می‌شود که چهار پروانه ثابت بر آن سوار شده تشکیل یافته است. ربات چهارپره به تازگی به یکی از زمینه‌های تحقیقاتی پرطرفدار و چالش‌برانگیز تبدیل شده است. که این گزارش به مطالعه‌ی سینماتیک و کنترل ربات چهارپره می‌پردازد.

## فهرست مطالب

۱ - چکیده.....	۲
۲ - مقدمه.....	۴
۳ - معرفی ساختاری ربات چهارپره.....	۴
۱ - چرخش پروانه ها.....	۴
۲ - نحوه‌ی حرکت.....	۴
۳ - محدودیت های ساختاری.....	۵
۴ - تعریف چهارچوب ربات چهارپره.....	۶
۵ - مدل کردن موتورها.....	۶
۶ - سینماتیک ربات چهارپره.....	۷
۷ - دینامیک چهارپره.....	۹
۸ - کنترل چهارپره.....	۱۰
۹ - منابع.....	۱۱

## فهرست اشکال

- شکل ۱: نوع چرخش پره‌های چهارپره از نوع H ..... ۴
- شکل ۲: نوع چرخش پره‌های چهارپره از نوع N ..... ۴
- شکل ۳: حرکت در راستای محور X ربات ..... ۵
- شکل ۴: حرکت عمودی (اوج گرفتن عمودی) ..... ۵
- شکل ۵: دوران (درجا) حول محور Z ربات ..... ۵
- شکل ۶: حرکت در راستای محور Y ربات ..... ۵
- شکل ۷: چهارچوب‌های جهانی و محلی برای تحلیل سینماتیک ربات چهارپره و همچنین سمت چرخش‌های هریک از موتورها ..... ۶
- شکل ۸: همگرایی سرعت موتور به سرعت مورد نظر (۱۰۰۰۰ دور در دقیقه) با شروع از حالت سکون ..... ۷
- شکل ۹: شمای کنترل‌کننده‌های ربات چهارپره و نحوه‌ی ارتباط آن‌ها ..... ۱۱
- شکل ۱۰: کنترل‌کننده‌ی X برای ربات چهارپره ..... ۱۱

## فهرست روابط

- رابطه ۱: رابطه‌ی بین نیروی پसार و سرعت زاویه‌ای پره‌ها و طول بازوی ربات چهارپره ..... ۶
- رابطه ۲: رابطه‌ی بین نیروی موتورها و سرعت زاویه‌ای پره‌ها و طول بازوی ربات چهارپره ..... ۶
- رابطه ۳: رابطه‌ی بین نیروی شتاب ربات و سرعت زاویه‌ای پره‌ها و طول بازوی ربات چهارپره ..... ۶
- رابطه ۴: نیروی عمودی اعمال شده به سیستم توسط موتور  $\dot{\theta}_m$  ..... ۶
- رابطه ۵: نیروی گشتاور اعمال شده به سیستم توسط موتور  $\dot{\theta}_m$  ..... ۶
- رابطه ۶: رابطه‌ی کنترل‌ی سرعت زاویه‌ای لحظه‌ای با سرعت زاویه‌ای ..... ۷
- رابطه ۷: با انتگرال‌گیری از رابطه ۶ رابطه‌ی سرعت موتور در هر لحظه بدست می‌آید ..... ۷
- رابطه ۸: ماتریس تبدیل از چهارچوب جهانی (A) به چهارچوب محلی (B) ربات ..... ۷
- رابطه ۹: سرعت زاویه‌ای ربات ..... ۷
- رابطه ۱۰: سرعت زاویه‌ای ربات در راستای هریک از ۳ جهت اصلی ..... ۸
- رابطه ۱۱: شتاب مرکز جرم ربات چهارپره ..... ۸
- رابطه ۱۲: رابطه‌ی شتاب زاویه‌ای ربات در راستای هریک از محورهای چهارچوب محلی خود ..... ۸
- رابطه ۱۳: بازنویسی رابطه ۱۲ ..... ۸
- رابطه ۱۴ تا ۱۹ ..... ۹
- مجموعه روابط ۲۰ تا ۲۱ ..... ۱۰
- رابطه ۲۲: کنترل PID برای ربات چهارپره ..... ۱۰

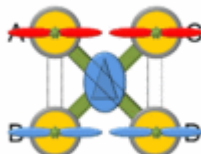
## ۲ - مقدمه

ربات چهارپره همانطور که از نامش پیداست به رباتی گفته می‌شود که چهار پروانه ثابت بر آن سوار شده تشکیل یافته است. ربات چهارپره به تازگی به یکی از زمینه‌های تحقیقاتی پرطرفدار و چالش برانگیز تبدیل شده است. که برای حفظ تعادل هر جفت پروانه در خلاف جهت یکدیگر دوران می‌کنند و ریز کنترل گر آن جهت چرخش را تنظیم می‌کند. با کم و زیاد کردن سرعت چرخش پروانه‌ها، نیروی گشتاور تغییر کرده و حرکت، فرود یا اوج گرفتن آن را کنترل می‌گردد. در بخش ۳ این نوشتار در مورد معرفی ساختاری ربات چهارپره بحث می‌شود، در بخش ۴ چهارچوب‌های مختصاتی را تعریف میکنیم و در بخش ۵ موتورهای ربات را مدل کرده و در مورد سینماتیک و دینامیک ربات را به ترتیب در بخش‌های ۶ و ۷ این نوشتار ارائه می‌دهیم و در انتها با توصیف نحوه‌ی کنترل ربات چهارپره در بخش ۸ به این گزارش پایان می‌دهیم.

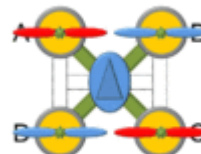
## ۳ - معرفی ساختاری ربات چهارپره

### ۱ - چرخش پروانه‌ها

پروانه‌ها جهت اینکه نیروی گشتاور یکدیگر را خنثی کنند و تعادل چهارپره را حفظ نمایند به دو شکل می‌توانند گردش کنند. بشکل H و N (شکل ۱ و شکل ۲) که معمول ترین نوع چرخش پروانه‌ها در چهارپره‌های ساخته شده به شکل H میباشد.



شکل ۲: نوع چرخش پره‌های چهارپره از نوع N

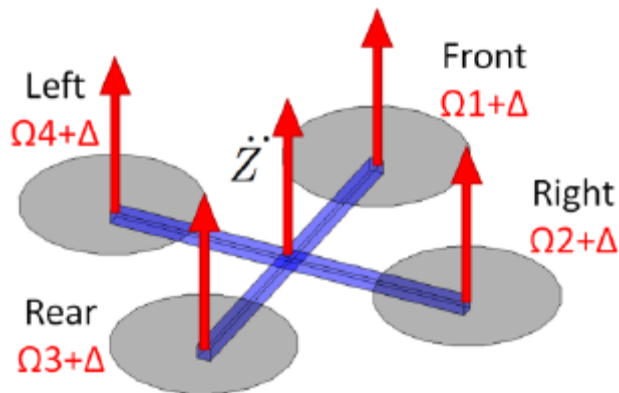


شکل ۱: نوع چرخش پره‌های چهارپره از نوع H

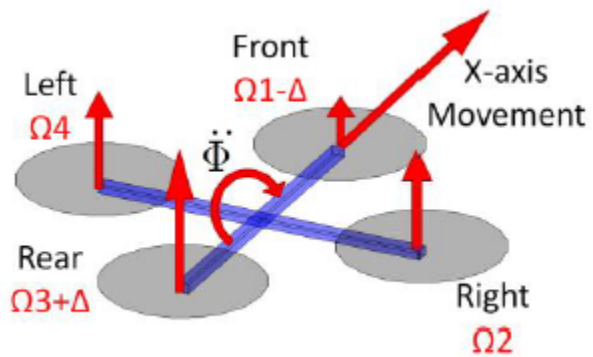
### ۲ - نحوه‌ی حرکت

نوع حرکت و سرعت حرکت ربات چهارپره توسط سرعت چرخش موتورهای آن تعیین میشود که در شکل‌های ۳ تا ۶ نوع حرکت آنها آمده است.

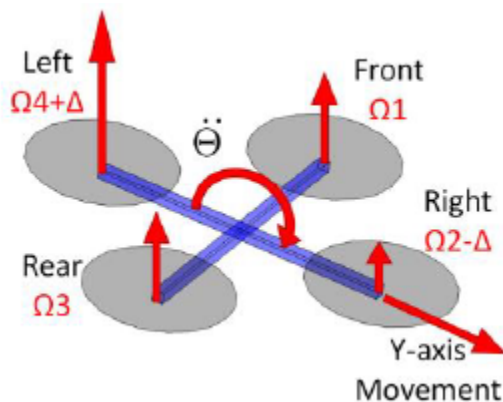
که در شکل ۳ با ثابت نگه داشتن سرعت پروانه‌های چپ و راست ربات و افزایش سرعت پروانه‌ی انتهایی ربات و همزمان با آن با کاهش سرعت پروانه‌ی جلویی ربات به یک میزان باعث میشود که ربات در راستای محور  $X$  خود به حرکت درآید و در شکل ۴ با اضافه کردن یک مقدار ثابت به سرعت همه‌ی پروانه‌ها باعث میشود ربات در راستای محور  $Z$  اوج بگیرد. در شکل ۵ با کاهش سرعت پروانه‌های چپ و راست و افزایش سرعت پروانه‌های جلو و عقب به یک میزان باعث میشود که ربات در حول محور  $Z$  در خلاف جهت عقربه‌های ساعت دوران درجا داشته باشد. و در شکل ۶ مشابه شکل ۳ با تغییر سرعت در پروانه‌های چپ و راست ربات باعث میشود ربات در راستای محور  $Y$  خود حرکت داشته باشد.



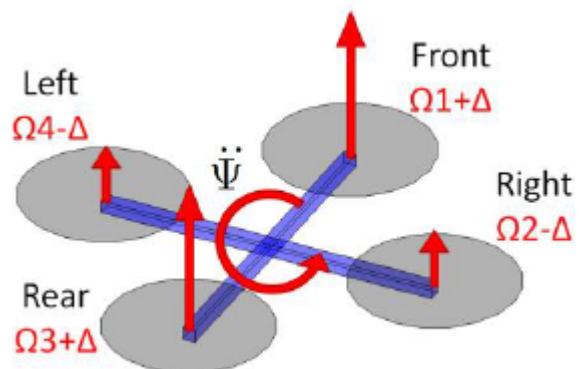
شکل ۴: حرکت عمودی (اوج گرفتن عمودی)



شکل ۳: حرکت در راستای محور X ربات



شکل ۶: حرکت در راستای محور Y ربات



شکل ۵: دوران (درجا) حول محور Z ربات

### ۳- محدودیت های ساختاری

چهارپره نیز همانند هر سازه‌ی مکانیکی دیگر دارای یک سری محدودیت‌های ساختاری می‌باشد که برای اینکه چهارپره قادر به پرواز و حفظ تعادل باشد باید هنگام ساخت این ربات آنها را در نظر بگیریم. برای یک ربات چهارپره ویژگی‌های زیر را تعریف می‌کنیم.

۱. اگر فاصله‌ی اتصال پره‌ها به اهرم تا محل تلاقی آنها را  $L$  بنامیم.
۲. اگر شعاع پره‌ها را  $R$  بنامیم آنگاه شعاع باید دارای تناسب خطی با  $L$  باشد.
۳. جرم چهارپره باید  $L^3$  باشد. گشتاور اینرسی  $L^5$  خواهد بود.
۴. اگر میانگین سرعت زاویه‌ای پره‌ها را  $\omega$  بنامیم.
۵. اگر نیروی تولید شده توسط موتورهای  $F$  بنامیم و همچنین نیروی پسار وارده بر مرکز تلاقی را  $D$  بنامیم.

$$D \sim \omega^2 L^4$$

رابطه ۱: رابطه‌ی بین نیروی پسا و سرعت زاویه‌ای پره ها و طول بازوی ربات چهارپره

$$F \sim \omega^2 L^4$$

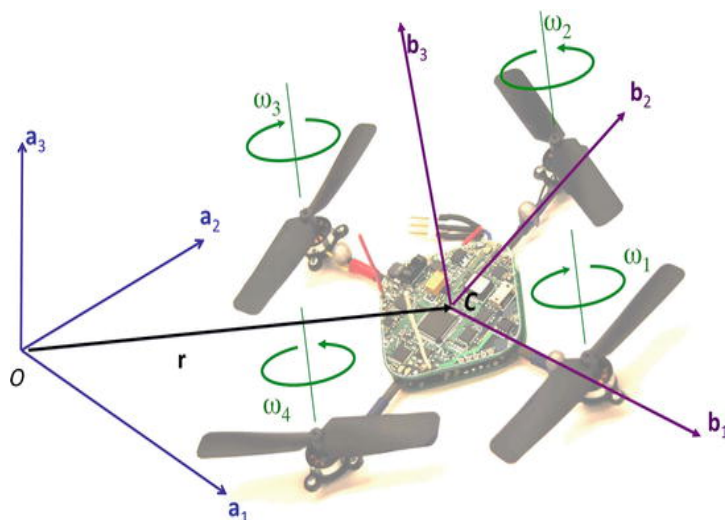
رابطه ۲: رابطه‌ی بین نیروی موتورها و سرعت زاویه‌ای پره ها و طول بازوی ربات چهارپره

$$a \sim \omega^2 L$$

رابطه ۳: رابطه‌ی بین نیروی شتاب ربات و سرعت زاویه‌ای پره ها و طول بازوی ربات چهارپره

## ۴ - تعریف چهارچوب ربات چهارپره

یکی از اولین مسائلی که برای تحلیل سینماتیک یک ربات نیاز داریم تعریف کنیم، تعریف چهارچوب‌های جهانی و محلی برای ربات می‌باشد. برای تحلیل سینماتیک ربات چهارپره چهارچوب‌های جهانی و محلی را به صورت آنچه که در شکل ۷ آمده است تعریف می‌کنیم.



شکل ۷: چهارچوب‌های جهانی و محلی برای تحلیل سینماتیک ربات چهارپره و همچنین سمت چرخش‌های هریک از موتورها (چهارپره‌ی نوع H)

## ۵ - مدل کردن موتورها

برای تحلیل سینماتیک ربات چهارپره نیاز داریم که ابتدا موتورهای ربات را مدل کنیم؛ اگر هریک از موتورها دارای سرعت زاویه این  $\omega_i$  باشند این موتورها نیروهای عمودی و گشتاور را به سیستم تحمیل می‌کنند که رابطه‌های نیروهای عمودی و گشتاور به ترتیب در رابطه ۴ و رابطه ۵ آمده است.

$$F_i = k_F \omega_i^2$$

رابطه ۴: نیروی عمودی اعمال شده به سیستم توسط موتور  $i$ ام

$$M_i = k_M \omega_i^2$$

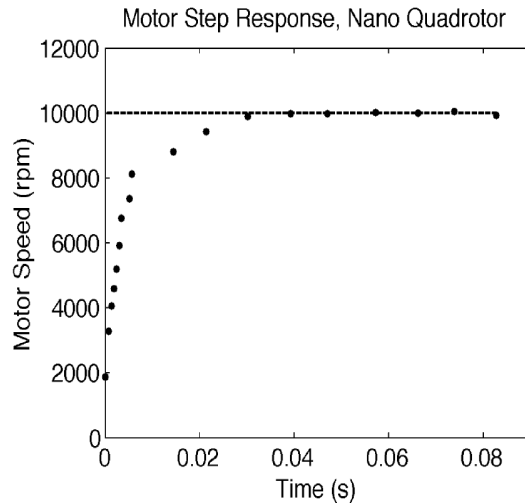
رابطه ۵: نیروی گشتاور اعمال شده به سیستم توسط موتور  $i$ ام

رابطه ی کنترلی سرعت زاویه ای لحظه ای با سرعت زاویه ای مورد نظر در رابطه ۶ آمده است. که  $k_M, k_m, k_F$  بصورت تجربی مشخص میشود.

$$\dot{\omega}_i = k_m(\omega_i^{des} - \omega_i)$$

رابطه ۶: رابطه ی کنترلی سرعت زاویه ای لحظه ای با سرعت زاویه ای

در شکل ۸ نحوی همگرایی سرعت موتور به سرعت مورد نظر (۱۰۰۰۰ دور در دقیقه) با شروع از حالت سکون را نشان میدهد که سرعت در هر لحظه را با انتگرال گیری از رابطه ۶ به رابطه ۷ میرسیم.



شکل ۸: همگرایی سرعت موتور به سرعت مورد نظر (۱۰۰۰۰ دور در دقیقه) با شروع از حالت سکون

$$\omega_i = \int k_m(\omega_i^{des} - \omega_i)dt = k_m(\omega_i^{des} - \omega_i)t + \omega_{t_0}$$

رابطه ۷: با انتگرال گیری از رابطه ۶ رابطه ی سرعت موتور در هر لحظه بدست می آید

## ۶ - سینماتیک ربات چهارپره

برای محاسبه ماتریس دوران برای نگاشت از چهارچوب جهانی به چهارچوب محلی و همچنین برای مدل کردن چهارپره در در چهارچوب جهانی از قاعده ی ZXY اویلر استفاده شده است. که ماتریس تبدیل از چهارچوب جهانی (A) به چهارچوب محلی (B) ربات توسط رابطه ۸ بدست می آید. که به ازای هر موقعیت  $\vec{U}$  در چهارچوب جهانی، مختصات آن موقعیت در چهارچوب محلی ربات توسط  $\vec{U}^A [R]_B$  بدست می آید.

$${}^A[R]_B = \begin{bmatrix} c\psi c\theta - s\phi s\psi s\theta & -c\phi s\psi & c\psi s\theta + c\theta s\phi s\psi \\ c\theta s\psi + c\psi s\phi s\theta & c\phi c\psi & s\psi s\theta - c\psi c\theta s\phi \\ -c\phi s\theta & s\phi & c\phi c\theta \end{bmatrix}$$

رابطه ۸: ماتریس تبدیل از چهارچوب جهانی (A) به چهارچوب محلی (B) ربات

سرعت زاویه ای ربات در چهارچوب بدنه از رابطه ۹ بدست می آید که  $p, q, r$  از طریق رابطه ۱۰ بدست می آیند.

$${}^A\omega_B = pb_1 + qb_2 + rb_3$$

رابطه ۹: سرعت زاویه ای ربات

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta & 0 & -c\phi s\theta \\ 0 & 1 & s\phi \\ s\theta & 0 & c\phi c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

رابطه ۱۰: سرعت زاویه‌ای ربات در راستای هریک از ۳ جهت اصلی

اگر ۲ را موقعیت مرکز جرم (C) چهارپره در چهارچوب جهانی بنامیم. نیروهای وارده به سیستم شامل

- نیروی جاذبه که در سمت  $-a_3$  وارد میشود.
  - نیروی اعمال شده از هر یک از موتورها  $F_i$  که در جهت  $b_3$  میباشند.
- که شتاب مرکز جرم چهارپره برابر رابطه ۱۱ خواهد بود.

$$m\ddot{r} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix} + {}^A R_B \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_1 + F_2 + F_3 + F_4 \end{bmatrix}$$

رابطه ۱۱: شتاب مرکز جرم ربات چهارپره

در رابطه ۱۱ هر یک از موتورها نیرویی عمود بر صفحه‌ی دوران تیغه‌ها تولید میکند. در جهت  $b_3$  که مجموع نیروهای اعمال شده به سیستم توسط موتورها در ماتریس تبدیل ضرب میشود تا حاصل جمع نیروهای موتورها در چهارچوب محلی بدست آید سپس با نیروی وارده توسط گرانج زمین جمع میشود. که طبق قانون  $F=ma$  مجموع نیروهای وارده بر سیستم برابر خواهد با شتاب سیستم ضرب در جرم سیستم؛ که در رابطه ۱۱ نشان داده شده است.

علاوه بر نیروهای عمودی، موتورها نیروی گشتاور نیز تولید میکنند جهت چرخش گرداننده‌های ۱ و ۳ در جهت  $b_3$  و گرداننده‌های ۲ و ۴ در جهت  $b_3$  چرخش میکنند. نیروی گشتاوری اعمال شده در بر چهارپره در خلاف جهت چرخش پره‌ها میباشد. در نتیجه جهت گشتاورهای  $M_3, M_1$  در جهت  $b_3$  و  $M_4, M_2$  در جهت  $-b_3$  میباشند. که شتاب زاویه‌ای ربات توسط رابطه ۱۲ به دست می‌آید که آنرا می‌توان به صورت رابطه ۱۳ نیز بازنویسی کرد.

$$I \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L(F_2 - F_4) \\ L(F_3 - F_1) \\ M_1 - M_2 + M_3 - M_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \times I \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

رابطه ۱۲: رابطه‌ی شتاب زاویه‌ای ربات در راستای هریک از محورهای چهارچوب محلی خود

$$I \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & L & 0 & -L \\ -L & 0 & L & 0 \\ \gamma & -\gamma & \gamma & -\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \times I \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

رابطه ۱۳: بازنویسی رابطه ۱۲؛ که  $\gamma = \frac{k_M}{k_F}$



## ۷- دینامیک چهارپره

مدل چهارپره، به طور عمده شامل معادلات غیر خطی آیرودینامیکی از چهارپره همراه با راهبری پویا میباشد. که مدل چهارپره به صورت زیر میباشد.

$$\ddot{X} = (s\psi s\phi + c\psi s\theta c\phi) \frac{U_1}{m}$$

رابطه ۱۴

$$\ddot{Y} = (-c\psi s\phi + s\psi s\theta c\phi) \frac{U_1}{m}$$

رابطه ۱۵

$$\ddot{Z} = -g + (c\theta c\phi) \frac{U_1}{m}$$

رابطه ۱۶

که در رابطه ۱۴، رابطه ۱۵ و رابطه ۱۶ نمادهای  $X, Y, Z$  موقعیت مرکز جرم در چهارچوب جهانی را نمایش میدهند.  $U_1$  ضرایب کنترلی/دینامیکی چهارپره میباشد. و  $m$  جرم چهارپره است.

$$\dot{p} = \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}} qr - \frac{U_2}{I_{xx}}$$

رابطه ۱۷

$$\dot{q} = \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}} pr - \frac{U_3}{I_{yy}}$$

رابطه ۱۸

$$\dot{r} = \frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}} pq - \frac{U_4}{I_{zz}}$$

رابطه ۱۹

در رابطه ۱۷، رابطه ۱۸ و رابطه ۱۹ نمادهای  $I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}$  گشتاورهای اینرسی در ۳ جهت چهارچوب محلی ربات میباشد. و همچنین  $U_2, U_3, U_4$  از دیگر ضرایب کنترلی/دینامیکی چهارپره میباشد. که دینامیکهای چهارپره با توجه به سرعت های پره ها به صورت زیر میباشد که در مجموعه روابط 20 آمده است. در مجموعه روابط 20 ضریب پسار و  $\Omega_i$  سرعت موتورهای میباشند. که  $U_i$  را میتوان صورت دستوره های کنترلی مورد استفاده قرار داد. که سینماتیک معکوس مجموعه روابط 20 به صورت متناظر در مجموعه روابط 21 آمده است.

$$U_1 = b(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2)$$

$$U_2 = bL(-\Omega_2^2 + \Omega_4^2)$$

$$U_3 = bL(-\Omega_1^2 + \Omega_3^2)$$

$$U_4 = d(-\Omega_1^2 + \Omega_2^2 - \Omega_3^2 + \Omega_4^2)$$

مجموعه روابط ۲۰

$$\Omega_1 = \frac{U_1}{4b} - \frac{U_3}{2bL} - \frac{U_4}{4d}$$

$$\Omega_2 = \frac{U_1}{4b} - \frac{U_2}{2bL} + \frac{U_4}{4d}$$

$$\Omega_3 = \frac{U_1}{4b} + \frac{U_3}{2bL} - \frac{U_4}{4d}$$

$$\Omega_4 = \frac{U_1}{4b} + \frac{U_2}{2bL} + \frac{U_4}{4d}$$

مجموعه روابط ۲۱

## ۸ - کنترل چهارپره

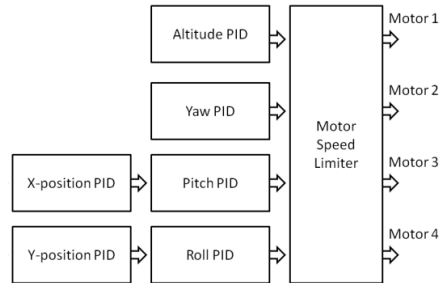
برای کنترل چهارپره از دستورهای کنترلی مطرح شده در دینامیک چهارپره استفاده میکنیم رابطه‌ی کنترلی PID دستورهای  $U_1, U_2, U_3, U_4$  در آمده است.

$$U_i = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau + K_d \frac{d}{dt} e(t)$$

رابطه ۲۲: کنترل PID برای ربات چهارپره

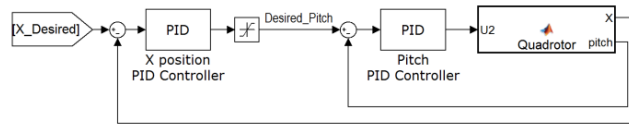
که  $e(t)$  میزان اختلافی که موقعیت هدف با موقعیت کنونی دارد است.

از آنجایی که ربات چهارپره ۶ درجه آزادی دارد - ۳ جهت اصلی چهارچوب‌ها و ۳ محور دوران - برای کنترل ربات چهارپره به ۶ عدد کنترل‌کننده‌ی PID نیاز داریم. در شکل ۹ شمای کلی این کنترل‌کننده‌ها و نحوی ارتباط آن‌ها را نشان داده شده است.



شکل ۹: شمای کنترل کننده‌های ربات چهارپره و نحوه‌ی ارتباط آن‌ها

که بطور مثال در کنترل کننده X برای ربات چهارپره آمده است.



شکل ۱۰: کنترل کننده ی X برای ربات چهارپره

## ۹ - منابع

- *Handbook of Unmanned Aerial Vehicles, Quadrotor Kinematics and Dynamics*, Caitlin Powers, Daniel Mellinger, Vijay Kumar, Aug. 2014, pp 307-328
- *Proceedings of the 9th International Symposium on Mechatronics and its Applications (ISMA13)*, Amman, Jordan, April 9-11, 2013
- *Intelligent Flight Control of an Autonomous Quadrotor*, Syed Ali Raza and Wail Gueaieb, January 1, 2010, chap. 12
- Andrew Gibiansky (2012, Nov. 23). *Quadcopter Dynamics And Simulation* Retrieved from <http://andrew.gibiansky.com/blog/physics/quadcopter-dynamics>