بدست آوردن عملگرهای بدون پارامتری

drastic ، min و max

از عملگرهای پارامتری

Hamcher ، Yager و Dubois

داریوش حسن‌پور آده

۹۳۰۸۱۶۴

۱ مقدمه

در این تمرین هدف بدست آوردن عملگرهای بدون پارامتری drastic ، min و max از عمگلرهای پارامتری Hamcher ، Yager و Dubois که در قسمت‌های زیر به ترتیب روند بدست آوردن آنها آورده شده است.

فهرست مطالب

۲ معرفی اوپراتورهای پارامتری

روابط اوپراتورهای پارامتری به صورت جدول ۱ می‌باشند.

$$\text{Hamacher}\quad\begin{cases} Intersection: & \mu_{\bar{A}\cap\bar{B}}(x)=\frac{\mu_{\bar{A}}(x)\mu_{\bar{B}}(x)}{\gamma+(1-\gamma)(\mu_{\bar{A}}(x)+\mu_{\bar{B}}(x)-\mu_{\bar{A}}(x)\mu_{\bar{B}}(x))} \\ \\ Union: & \mu_{\bar{A}\cup\bar{B}}(x)=\frac{(\gamma'-1)\mu_{\bar{A}}(x)\mu_{\bar{B}}(x)+\mu_{\bar{A}}(x)+\mu_{\bar{B}}(x)}{1+\gamma'\mu_{\bar{A}}(x)\mu_{\bar{B}}(x)} \end{cases}$$

$$\text{Yager}\quad\begin{cases} Intersection: & \mu_{\bar{A}\cap\bar{B}}(x)=1-\min\{1,((1-\mu_{\bar{A}}(x))^p+(1-\mu_{\bar{B}}(x))^p)^{\frac{1}{p}}\},\quad p\geq 1 \\ \\ Union: & \mu_{\bar{A}\cup\bar{B}}(x)=min\{1,(\mu_{\bar{A}}(x)^p+\mu_{\bar{B}}(x)^p)^{\frac{1}{p}}\},\quad p\geq 1 \end{cases}$$

$$\text{Dubois}\quad\begin{cases} Intersection: & \mu_{\bar{A}\cap\bar{B}}(x)=\frac{\mu_{\bar{A}}(x).\mu_{\bar{B}}(x)}{\max\{\mu_{\bar{A}}(x),\mu_{\bar{B}}(x),\alpha\}} \\ \\ Union: & \mu_{\bar{A}\cup\bar{B}}(x)=\frac{\mu_{\bar{A}}(x)+\mu_{\bar{B}}(x)-\mu_{\bar{A}}(x).\mu_{\bar{B}}(x)-\min\{\mu_{\bar{A}}(x),\mu_{\bar{B}(x)},(1-\alpha)\}}{\max\{(1-\mu_{\bar{A}}(x)),(1-\mu_{\bar{B}}(x)),\alpha\}} \end{cases}$$

جدول ۱: روابط معادلات پارامتری

۳ اوپراتور دراستیک

۱.۳ توسط اوپراتور هماچر

۱.۱.۳ اوپراتور ضرب دراستیک

برای بدست آوردن اوپراتور ضرب دراستیک[1] باید در اوپراتور اشتراکی هماچر[2] مقدار γ را به سمت بی نهایت سوق دهیم؛ یعنی:

$$\lim_{\gamma\to\infty}\frac{\mu_{\bar{A}}(x)\mu_{\bar{B}}(x)}{\gamma+(1-\gamma)(\mu_{\bar{A}}(x)+\mu_{\bar{B}}(x)-\mu_{\bar{A}}(x)\mu_{\bar{B}}(x))} \tag{1}$$

[1] drastic
[2] Hamacher

برای حل حد ۱ می‌توانیم دو فرض داشته باشیم اول اینکه در مخرج شرط ۲ حاکم باشد؛ آنگاه حد ۱ را می‌توان به صورت حد ۳ بازنویسی کرد.

$$\max\{\mu_{\bar{A}}(x), \mu_{\bar{B}}(x)\} \neq ۱ \Longrightarrow ۰ < \overbrace{\mu_{\bar{A}}(x) + \mu_{\bar{B}}(x) - \mu_{\bar{A}}(x)\mu_{\bar{B}}(x)}^{\beta} < ۱ \qquad (۲)$$

$$\lim_{\gamma \to \infty} \frac{\mu_{\bar{A}}(x)\mu_{\bar{B}}(x)}{\gamma + (۱ - \gamma)\beta} = \lim_{\gamma \to \infty} \frac{\mu_{\bar{A}}(x)\mu_{\bar{B}}(x)}{\beta + (۱ - \beta)\gamma} = ۰ \qquad (۳)$$

حال اگر حداقل یکی از مقادیر $\mu_{\bar{A}}(x)$ و $\mu_{\bar{B}}(x)$ حداکثر - یعنی برابر با ۱ شود آنگاه حد ۱ به صورت حد ۴ می شود.

$$\lim_{\gamma \to \infty} \frac{\mu_{\bar{A}}(x)\mu_{\bar{B}}(x)}{\gamma + (۱ - \gamma)} = \mu_{\bar{A}}(x)\mu_{\bar{B}}(x) \xrightarrow{\max\{\mu_{\bar{A}}(x), \mu_{\bar{B}}(x)\} = ۱} \min\{\mu_{\bar{A}}(x), \mu_{\bar{B}}(x)\} \qquad (۴)$$

که از روابط ۲...۴ نتیجه‌ی ۵ می‌گیریم که همان معادل با Drastic Product می‌باشد.

$$\lim_{\gamma \to \infty} \frac{\mu_{\bar{A}}(x)\mu_{\bar{B}}(x)}{\gamma + (۱ - \gamma)(\mu_{\bar{A}}(x) + \mu_{\bar{B}}(x) - \mu_{\bar{A}}(x)\mu_{\bar{B}}(x))} = \begin{cases} \min\{\mu_{\bar{A}}(x), \mu_{\bar{B}}(x)\} & if \max\{\mu_{\bar{A}}(x), \mu_{\bar{B}}(x)\} = ۱ \\ ۰ & otherwise \end{cases} \qquad (۵)$$

۲.۱.۳ اوپراتور جمع دراستیک

برای بدست آوردن اوپراتور جمع دراستیک باید در اوپراتور اجتماع هماچر مقدار γ' را به سمت منفی‌بی نهایت سوق دهیم؛ یعنی:

$$\lim_{\gamma' \to -\infty} \frac{(\gamma' - ۱)\mu_{\bar{A}}(x)\mu_{\bar{B}}(x) + \mu_{\bar{A}}(x) + \mu_{\bar{B}}(x)}{۱ + \gamma'\mu_{\bar{A}}(x)\mu_{\bar{B}}(x)} \qquad (۶)$$

در حد ۶ اگر حداقل یکی از مقادیر $\mu_{\bar{A}}(x)$ و $\mu_{\bar{B}}(x)$ حداقل - یعنی برابر با ۰ شوند آنگاه حد ۶ به حد ۷ تبدیل می‌شود.

$$\lim_{\gamma' \to -\infty} \frac{\mu_{\bar{A}}(x) + \mu_{\bar{B}}(x)}{۱} = \mu_{\bar{A}}(x) + \mu_{\bar{B}}(x) \xrightarrow{\min\{\mu_{\bar{A}}(x), \mu_{\bar{B}}(x)\} = ۰} \max\{\mu_{\bar{A}}(x), \mu_{\bar{B}}(x)\} \qquad (۷)$$

و اگر در حد ۶ شرط $\min\{\mu_{\bar{A}}(x), \mu_{\bar{B}}(x)\} > ۰$ برقرار باشد، طبق قضیه‌ی حدی هوپیتال، مقدار حد برابر با ۱ می‌شود. پس با توجه به روابط ۶ و ۷ می‌توان اوپراتور جمع دراستیک را همانطور که رابطه‌ی ۸ نشان می‌دهد بدست آورد.

$$\lim_{\gamma' \to -\infty} \frac{(\gamma' - ۱)\mu_{\bar{A}}(x)\mu_{\bar{B}}(x) + \mu_{\bar{A}}(x) + \mu_{\bar{B}}(x)}{۱ + \gamma'\mu_{\bar{A}}(x)\mu_{\bar{B}}(x)} = \begin{cases} \max\{\mu_{\bar{A}}(x), \mu_{\bar{B}}(x)\} & if \min\{\mu_{\bar{A}}(x), \mu_{\bar{B}}(x)\} = ۰ \\ ۱ & otherwise \end{cases} \qquad (۸)$$

۲.۳ توسط اوپراتور یاگر

۱.۲.۳ اوپراتور ضرب دراستیک

برای بدست آوردن اوپراتور ضرب دراستیک باید در اوپراتور اشتراک یاگر[۳] مقدار p را به سمت ۰ سوق دهیم؛ یعنی:

$$\lim_{p\to 0} 1 - \min\{1, ((1-\mu_{\bar{A}}(x))^p + (1-\mu_{\bar{B}}(x))^p)^{\frac{1}{p}}\} \tag{9}$$

در حد ۹ در صورتی که فرض ۱۰ را داشته باشیم آنگاه به جواب حدی ۱۱ می‌رسیم.

$$\max\{\mu_{\bar{A}}(x), \mu_{\bar{B}}(x)\} = 1 \tag{10}$$

$$\begin{aligned} \max\{\mu_{\bar{A}}(x), \mu_{\bar{B}}(x)\} = 1 \xRightarrow{Assume\ \ \mu_{\bar{A}}(x)=1} & \lim_{p\to 0} 1 - \min\{1, (0^p + (1-\mu_{\bar{B}}(x))^p)^{\frac{1}{p}}\} \\ & = 1 - \min\{1, 1-\mu_{\bar{B}}(x)\} = \mu_{\bar{B}}(x) \end{aligned} \tag{11}$$

و رابطه‌ی ۱۱ را می‌توان برای $\mu_{\bar{B}}(x) = 1$ نیز نوشت و در نهایت می‌توان نتیجه‌ی ۱۲ را گرفت.

$$\max\{\mu_{\bar{A}}(x), \mu_{\bar{B}}(x)\} = 1 \Longrightarrow \lim_{p\to 0} 1 - \min\{1, ((1-\mu_{\bar{A}}(x))^p + (1-\mu_{\bar{B}}(x))^p)^{\frac{1}{p}}\} = \min\{\mu_{\bar{A}}(x), \mu_{\bar{B}}(x)\} \tag{12}$$

حال در صورتی که فرض ۱۰ را نداشته باشیم، آنگاه بدون اینکه به کلیت مساله لطمه‌ای وارد شود می‌توانیم فرض ۱۳ کنیم.

$$\mu_{\bar{A}}(x) > \mu_{\bar{B}}(x) \Longrightarrow (1-\mu_{\bar{A}}(x)) < (1-\mu_{\bar{B}}(x)) \tag{13}$$

با توجه به فرض ۱۳ حد ۹ را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد.

$$\begin{aligned} & \lim_{p\to 0} 1 - \min\{1, ((1-\mu_{\bar{A}}(x))^p + (1-\mu_{\bar{B}}(x))^p)^{\frac{1}{p}}\} \\ & = \lim_{p\to 0} 1 - \min\{1, [(1-\mu_{\bar{A}}(x))^p(1 + (\frac{1-\mu_{\bar{B}}(x)}{1-\mu_{\bar{A}}(x)})^p]^{\frac{1}{p}}\} \\ & = \lim_{p\to 0} 1 - \min\{1, (1-\mu_{\bar{A}}(x))[1 + (\frac{1-\mu_{\bar{B}}(x)}{1-\mu_{\bar{A}}(x)})^p]^{\frac{1}{p}}\} \\ & \xRightarrow{|\frac{1-\mu_{\bar{B}}(x)}{1-\mu_{\bar{A}}(x)}|>1} 1 - \min\{1, \infty\} = 0 \end{aligned} \tag{14}$$

که مشابه شرط ۱۳ و اثبات حدی ۱۴ می‌توان برای $\mu_{\bar{B}}(x)$ نیز نوشت که از روابط ۹...۱۴ نتیجه‌ی ۱۵ را می گیریم که همان معادل با Drastic Product می‌باشد.

$$\lim_{p\to 1} 1 - \min\{1, ((1-\mu_{\bar{A}}(x))^p + (1-\mu_{\bar{B}}(x))^p)^{\frac{1}{p}}\} = \begin{cases} \min\{\mu_{\bar{A}}(x), \mu_{\bar{B}}(x)\} & if \max\{\mu_{\bar{A}}(x), \mu_{\bar{B}}(x)\} = 1 \\ 0 & otherwise \end{cases} \tag{15}$$

[۳] Yager

۲.۲.۳ اوپراتور جمع دراستیک

برای بدست آوردن اوپراتور جمع دراستیک باید که در اوپراتور اجتماع یاگر مقدار p را به سمت ۰ سوق دهیم؛ یعنی:

$$\lim_{p\to 0} min\{1, (\mu_{\bar{A}}(x)^p + \mu_{\bar{B}}(x)^p)^{\frac{1}{p}}\} \tag{16}$$

در حد ۱۶ در صورتی که فرض ۱۷ را داشته باشیم آنگاه به جواب حدی ۱۸ می‌رسیم.

$$\min\{\mu_{\bar{A}}(x), \mu_{\bar{B}}(x)\} = 0 \tag{17}$$

$$\begin{aligned} \min\{\mu_{\bar{A}}(x), \mu_{\bar{B}}(x)\} = 0 \xRightarrow{Assume\ \ \mu_{\bar{A}}(x)=0} & \lim_{p\to 0} \min\{1, (0^p + \mu_{\bar{B}}(x)^p)^{\frac{1}{p}}\} \\ &= \min\{1, \mu_{\bar{B}}(x)\} = \mu_{\bar{B}}(x) \end{aligned} \tag{18}$$

و رابطه‌ی ۱۸ را می‌توان برای $\mu_{\bar{B}}(x) = 0$ نوشت و در نهایت می‌توان نتیجه‌ی ۱۹ را گرفت.

$$\min\{\mu_{\bar{A}}(x), \mu_{\bar{B}}(x)\} = 0 \Longrightarrow \lim_{p\to 0} min\{1, (\mu_{\bar{A}}(x)^p + \mu_{\bar{B}}(x)^p)^{\frac{1}{p}}\} = \max\{\mu_{\bar{A}}(x), \mu_{\bar{B}}(x)\} \tag{19}$$

حال در صورتی که فرض ۱۷ را نداشته باشیم آنگاه با توجه به سوق $p \to 0$ مقدار ۲۰ را داریم.

$$(\mu_{\bar{A}}(x)^p + \mu_{\bar{B}}(x)^p)^{\frac{1}{p}} \gg 1 \tag{20}$$

که با توجه به مقدار ۲۰ جواب حدی ۱۶ به صورت ۲۱ می‌شود.

$$\lim_{p\to 0} \min\{1, (\mu_{\bar{A}}(x)^p + \mu_{\bar{B}}(x)^p)^{\frac{1}{p}}\} = 1 \tag{21}$$

که از روابط ۱۶...۲۱ نتیجه‌ی ۲۲ را می‌گیریم که همان معادل با Drastic Sum می‌باشد.

$$\lim_{p\to 1} min\{1, (\mu_{\bar{A}}(x)^p + \mu_{\bar{B}}(x))^p)^{\frac{1}{p}}\} = \begin{cases} \max\{\mu_{\bar{A}}(x), \mu_{\bar{B}}(x)\} & if\, \min\{\mu_{\bar{A}}(x), \mu_{\bar{B}}(x)\} = 0 \\ 1 & otherwise \end{cases} \tag{22}$$

۴ اوپراتور min

۱.۴ توسط اوپراتور یاگر

برای بدست آوردن اوپراتور مینیمم[۴] باید در اوپراتور اشتراک یاگر مقدار p را به سمت بی‌نهایت سوق دهیم؛ یعنی:

$$\lim_{p\to\infty} ۱ - \min\{۱, ((۱-\mu_{\bar{A}}(x))^p + (۱-\mu_{\bar{B}}(x))^p)^{\frac{۱}{p}}\} \tag{۲۳}$$

حال اگه فرض ۱۰ را داشته باشیم همان نتایج ۱۱ و ۱۲ را داریم. و اگر فرض ۱۰ را نداشته باشیم آنگاه با توجه به $p\to\infty$ مقدار زیر را داریم. طبق قضایای حدی و بدون اینکه به کلیت مساله لطمه‌ای وارد شود فرض $\mu_{\bar{A}}(x) < \mu_{\bar{B}}(x) \Longleftarrow (۱-\mu_{\bar{B}}(x)) > (۱-\mu_{\bar{A}}(x))$ را می‌کنیم و در نتیجه جواب حدی ۲۴ را داریم.

$$\begin{aligned}
&\lim_{p\to\infty} ۱ - \min\{۱, ((۱-\mu_{\bar{A}}(x))^p + (۱-\mu_{\bar{B}}(x))^p)^{\frac{۱}{p}}\} \\
&= \lim_{p\to\infty} ۱ - \min\{۱, [(۱-\mu_{\bar{A}}(x))^p(۱ + (\frac{۱-\mu_{\bar{B}}(x)}{۱-\mu_{\bar{A}}(x)})^p)]^{\frac{۱}{p}}\} \\
&= \lim_{p\to\infty} ۱ - \min\{۱, (۱-\mu_{\bar{A}}(x))[۱ + (\frac{۱-\mu_{\bar{B}}(x)}{۱-\mu_{\bar{A}}(x)})^p]^{\frac{۱}{p}}\} \\
&\xRightarrow{|\frac{۱-\mu_{\bar{B}}(x)}{۱-\mu_{\bar{A}}(x)}|<۱} ۱ - \min\{۱, (۱-\mu_{\bar{A}}(x))\} = ۱ - (۱-\mu_{\bar{A}}(x)) = \mu_{\bar{A}}(x)
\end{aligned} \tag{۲۴}$$

حدگیری رابطه‌ی ۲۴ را نیز می‌توان با فرض $\mu_{\bar{A}}(x) > \mu_{\bar{B}}(x) \Longleftarrow (۱-\mu_{\bar{B}}(x)) < (۱-\mu_{\bar{A}}(x))$ نیز نوشت که در حالت کلی جواب حد ۲۳ به صورت ۲۵ می‌باشد که همان اوپراتور minimum می‌باشد.

$$\lim_{p\to\infty} ۱ - \min\{۱, ((۱-\mu_{\bar{A}}(x))^p + (۱-\mu_{\bar{B}}(x))^p)^{\frac{۱}{p}}\} = \min\{\mu_{\bar{A}}(x), \mu_{\bar{B}}(x)\} \tag{۲۵}$$

۲.۴ توسط اوپراتور دوبیس

برای بدست آوردن اوپراتور مینیمم باید در اوپراتور اشتراک دوبیس[۵] مقدار α را به سمت ۰ سوق دهیم؛ یعنی:

$$\lim_{\alpha\to ۰} \frac{\mu_{\bar{A}}(x).\mu_{\bar{B}}(x)}{\max\{\mu_{\bar{A}}(x), \mu_{\bar{B}}(x), \alpha\}} \tag{۲۶}$$

با توجه به تعریف ۱۷ـ۳ کتاب[۱] رابطه‌ی ۲۷ را داریم.

$$\mu_{\bar{A}\cap\bar{B}}(x) = \min\{\mu_{\bar{A}}(x), \mu_{\bar{B}}(x)\} \qquad for\ \ \mu_{\bar{A}}(x), \mu_{\bar{B}}(x) \in [\alpha, ۱] \tag{۲۷}$$

[۴] Minimum
[۵] Dubois

حال در صورتی که در رابطه‌ی ۲۷ مقدار α را به سمت ۰ سوق دهیم و همچنین می دانیم که

$$۰ \leq \mu_{\bar{A}}(x), \mu_{\bar{B}}(x) \leq ۱$$

جواب حدی ۲۶ برابر با مقدار رابطه‌ی ۲۷ می‌شود.

۵ اوپراتور max

۱.۵ توسط اوپراتور یاگر

برای بدست آوردن اوپراتور ماکسیمم[۶] باید در اوپراتور اجتماع یاگر مقدار p را به سمت بی‌نهایت سوق دهیم؛ یعنی:

$$\lim_{p \to \infty} min\{۱, (\mu_{\bar{A}}(x)^p + \mu_{\bar{B}}(x)^p)^{\frac{۱}{p}}\} \tag{۲۸}$$

که حال مشابه اثبات مقدار حدی حد ۲۴ مقدار حد ۲۸ برابر با جواب حدی ۲۹ خواهد بود که همان اوپراتور $maximum$ می‌باشد.

$$\lim_{p \to \infty} min\{۱, (\mu_{\bar{A}}(x)^p + \mu_{\bar{B}}(x)^p)^{\frac{۱}{p}}\} = \max\{\mu_{\bar{A}}(x), \mu_{\bar{B}}(x)\} \tag{۲۹}$$

۲.۵ توسط اوپراتور دوبیس

برای بدست آوردن اوپراتور ماکسیمم باید در اوپراتور اجتماع دوبیس مقدار α را به سمت ۰ سوق دهیم؛ یعنی:

$$\lim_{\alpha \to ۰} \frac{\mu_{\bar{A}}(x) + \mu_{\bar{B}}(x) - \mu_{\bar{A}}(x).\mu_{\bar{B}}(x) - \min\{\mu_{\bar{A}}(x), \mu_{\bar{B}(x)}, (۱-\alpha)\}}{\max\{(۱-\mu_{\bar{A}}(x)), (۱-\mu_{\bar{B}}(x)), \alpha\}} \tag{۳۰}$$

برای حل حد ۳۰ بدون اینکه به کلیت مساله لطمه‌ای وارد شود فرض ۳۱ می‌کنیم.

$$\mu_{\bar{A}}(x) < \mu_{\bar{B}}(x) \Longrightarrow (۱-\mu_{\bar{A}}(x)) > (۱-\mu_{\bar{B}}(x)) \tag{۳۱}$$

[۶] Maximum

در نتیجه حد ۳۰ به صورت زیر می‌توان نوشت.

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\mu_{\bar{A}}(x) + \mu_{\bar{B}}(x) - \mu_{\bar{A}}(x).\mu_{\bar{B}}(x) - \min\{\mu_{\bar{A}}(x), \mu_{\bar{B}}(x), (1-\alpha)\}}{\max\{(1-\mu_{\bar{A}}(x)), (1-\mu_{\bar{B}}(x)), \alpha\}}$$
$$= \frac{\mu_{\bar{A}}(x) + \mu_{\bar{B}}(x) - \mu_{\bar{A}}(x).\mu_{\bar{B}}(x) - \mu_{\bar{A}}(x)}{1-\mu_{\bar{A}}(x)} = \mu_{\bar{B}}(x) \tag{۳۲}$$

و همچنین می‌توان برای $\mu_{\bar{A}}(x) > \mu_{\bar{B}}(x)$ حل مشابه‌ای مانند حل ۳۲ انجام داد. نتیجه کلی حد ۳۰ را می‌توان در رابطه‌ی ۳۳ مشاهده کرد که همان اوپراتور $maximum$ می‌باشد.

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\mu_{\bar{A}}(x) + \mu_{\bar{B}}(x) - \mu_{\bar{A}}(x).\mu_{\bar{B}}(x) - \min\{\mu_{\bar{A}}(x), \mu_{\bar{B}}(x), (1-\alpha)\}}{\max\{(1-\mu_{\bar{A}}(x)), (1-\mu_{\bar{B}}(x)), \alpha\}} = \max\{\mu_{\bar{A}}(x), \mu_{\bar{B}}(x)\} \tag{۳۳}$$

۶ مرجع

[1] H.-J Zimmemann. *Fuzzy Set Theory – and Its Applications*, chapter3. Kluwer Academic Publishers, 3rd edition, 1996.