



# گزارش تکلیف پیاده‌سازی الگوریتم

## Back Propagation

داریوش حسن‌پور آده

۹۳۰۸۱۶۴

### ۱ مقدمه

در این تکلیف هدف درک عمیق‌تر الگوریتم انتشار-به-عقب<sup>۱</sup> از طریق پیاده‌سازی آن و اعمال الگوریتم پیاده‌سازی شده برای تشخیص اعداد دست‌نویس مجموعه داده‌ی MNIST می‌باشد. داده‌های آموزشی MNIST شامل ۶۰,۰۰۰ قطعه عکس از اعداد دست‌نویس برچسب خورده می‌باشد. ترکیبی که برای آموزش شبکه‌ی عصبی در نظر گرفته شده است، ساختار ۳ لایه‌ای  $۷۸۴ \times ۱۰۰ \times ۱۰$  برای یادگیری در نظر گرفته شده است که دارای ۷۸۴ عدد داده‌ی ورودی و ۱۰۰ نورون در لایه‌ی مخفی و ۱۰ نورون در لایه‌ی خروجی شبکه می‌باشد.

### ۲ برنامه‌ی نوشته شده

برنامه به زبان C++ در محیط لینوکس نوشته شده است، که داده‌های آموزشی و تست ذخیره شده به فرمت متلب را از پوشه‌ی داده‌ها می‌خواند. برای راحتی کار ابتدا داده‌های MNIST را به در متلب بارگذاری کردم و سپس با توجه به اندیس‌های داده‌های ارزیابی<sup>۲</sup> داده‌های اولیه را به دو دسته‌ی داده‌های آموزشی و داده‌های ارزیابی تقسیم کرده و سپس داده‌های ارزیابی را به انتهای داده‌های آموزشی اضافه کرده و در نهایت داده‌ها را در یک فایل به فرمت متلب ذخیره سازی کردم. از آنجایی که داده‌های ارزیابی در انتهای داده‌های آموزشی اضافه

---

<sup>۱</sup> Back Propagation

<sup>۲</sup> Evaluation Set

شده‌اند داده‌های آموزشی که تعدادشان ۵۰,۰۰۰ عدد و داده‌های ارزیابی به تعداد ۱۰,۰۰۰ عدد به راحتی قابل جداسازی می‌باشد. برای داده‌های تست نیز همین روند اجرا می‌شود، یعنی داده‌ها در متلب بارگذاری می‌شود و سپس در فایل‌ی ذخیره می‌شود.

بعد از آماده و ذخیره‌سازی داده‌های آموزشی و تست، داده‌های ذخیره شده به فرمت متلب از فایل‌های مربوطه خوانده می‌شود و بعد از نگاشت ساختمان داده‌ی داده‌های خوانده شده به ساختمان داده‌ای که برنامه‌ی نوشته شده با آن سازگار می‌باشد شبکه‌ی عصبی با ساختار گفته شده در قسمت قبل ساخته شده و مقدار دهی اولیه می‌شود. سپس داده‌های آموزشی بسته به نوع آموزش دسته‌ای<sup>۳</sup> یا برخط<sup>۴</sup> به ازای هریک از قسمت‌های آمده در تکلیف آموزش، ارزیابی و تست می‌گردد. در مورد قطع زود هنگام آموزش، آموزش شبکه در ۲ صورت زودتر از موعد مقرر (حداکثر تعداد دوره<sup>۵</sup>) قطع می‌شود. اولی در صورتی که بیش از ۵ دوره پشت سرهم درصد دقت شبکه بروی داده‌های ارزیابی کاهش پیدا کند؛ و دومی در صورتی که میانگین مقادیر MSE خروجی‌های شبکه در داده‌های ارزیابی کمتر از ۰.۰۱ شود.

## ۱.۲ وابستگی‌های برنامه

در مورد وابستگی‌های<sup>۶</sup> برنامه‌ی نوشته شده، برنامه از کتابخانه‌ی معروف Boost نسخه‌ی ۱.۵۴ برای استفاده‌های عمومی و از کتابخانه‌ی Matio نسخه‌ی ۱.۵.۲ برای بارگذاری داده‌های ذخیره شده به فرمت متلب استفاده می‌شود. از آنجایی که برای آموزش شبکه‌های عصبی عملیات مبتنی بر ماتریس‌ها ساده‌ترین راه برای پیاده‌سازی می‌باشد از کتابخانه‌ی Eigen نسخه‌ی ۳.۲.۷ برای کاربردهای ماتریسی و جبرخطی استفاده شده است. دو کتابخانه‌ی اول باید در سیستم عامل نصب و قابل دسترسی برای کامپایلر باشد ولی در مورد کتابخانه‌ی سوم به صورت جاسازی شده<sup>۷</sup> همراه کدها آمده است. برنامه توسط کامپایلر g++ نسخه‌ی ۴.۸.۴ کامپایل شده و نیز برای راحتی کامپایل کردن برنامه از ابزار CMake نسخه‌ی ۲.۸.۱۲.۲ استفاده شده است که هر دوی این‌ها باید در سیستم نصب باشد. همچنین جهت مدیریت نسخه‌ی برنامه<sup>۸</sup> از ابزار Git نسخه‌ی ۲.۶.۳ استفاده شده است، که البته داشتن ابزار مدیریت نسخه برای کامپایل برنامه مورد نیاز نیست و صرفاً جهت توسعه‌ی برنامه مورد استفاده قرار گرفته است.

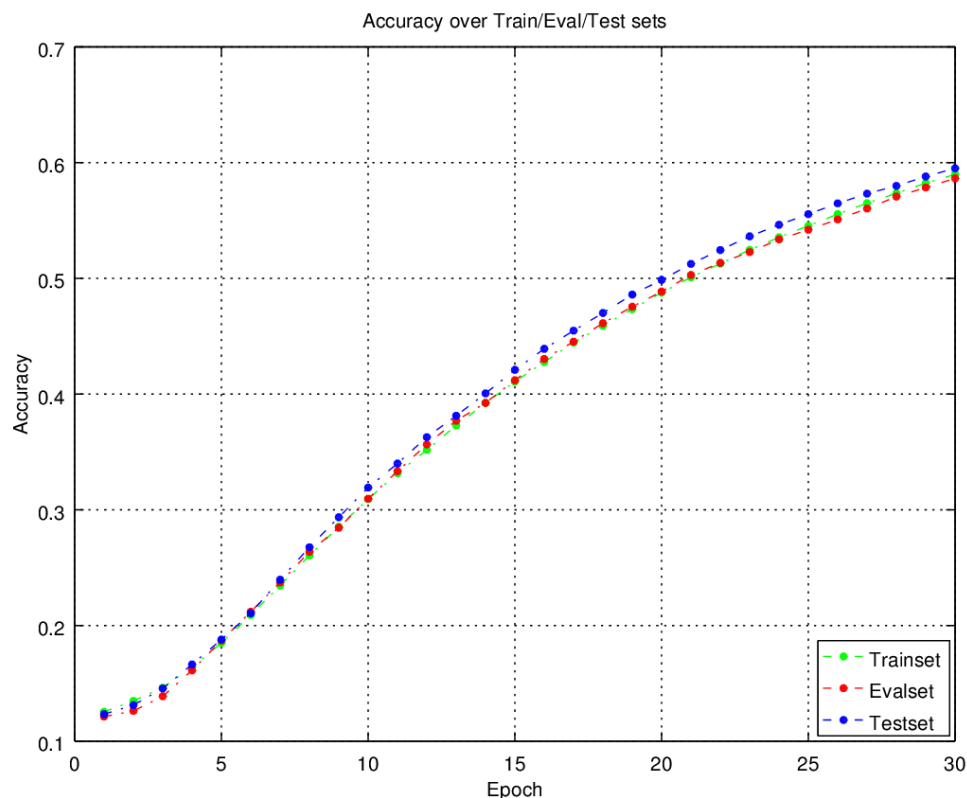
---

Batch<sup>۳</sup>  
Online<sup>۴</sup>  
Epoch<sup>۵</sup>  
Dependency<sup>۶</sup>  
Embedded<sup>۷</sup>  
Control Version<sup>۸</sup>

## ۳ نتایج قسمت‌ها

### ۱.۳ قسمت الف

در این قسمت ما با در نظر گرفتن مقدار گام ۰.۴ به تعداد حداکثر ۳۰ دوره داده‌های آموزشی را به شبکه به صورت دسته‌ای خوراندیم، و در نهایت دقت ۵۹.۵۱٪ را روی داده‌های تست بدست آوردیم. توجه شود که این مقدار از آنچه که در کتاب آمده کمتر است زیرا اول اینکه در کتاب داده‌ها به صورت دسته‌های کوچک<sup>۹</sup> با اندازه های ۱۰ به شبکه خورانده است پس در نتیجه سریع‌تر به مقدار هدف همگرا شده است. دوم اینکه همان‌طور که میدانیم آموزش داده‌ها به صورت دسته‌ای باعث می‌شود که شبکه با ملایمت<sup>۱۰</sup> بیشتری به سمت کمینه‌ی محلی پیش برود بنابراین برای اینکه این شبکه دقت بالایی برسد باید تعداد دوره‌ی بیشتری آموزش می‌دید<sup>۱۱</sup>. نمودار دقت بروی داده‌های ارزیابی در طی آموزش در شکل ۱ آمده است. که دقت بروی داده‌های ارزیابی از ۱۲.۱۳٪ شروع شده و در نهایت بعد از ۳۰ دوره به دقت ۵۸.۶۴٪ رسیده است؛ همان‌طور که در شکل ۱ نیز مشاهده می‌کنیم دقت به صورت ملایم افزایش یافته و افت و خیزی در میزان دقت در هر دوره مشاهده نمی‌شود (برعکس آنچه که در آموزش به شیوه‌ی برخط مشاهده می‌شود).



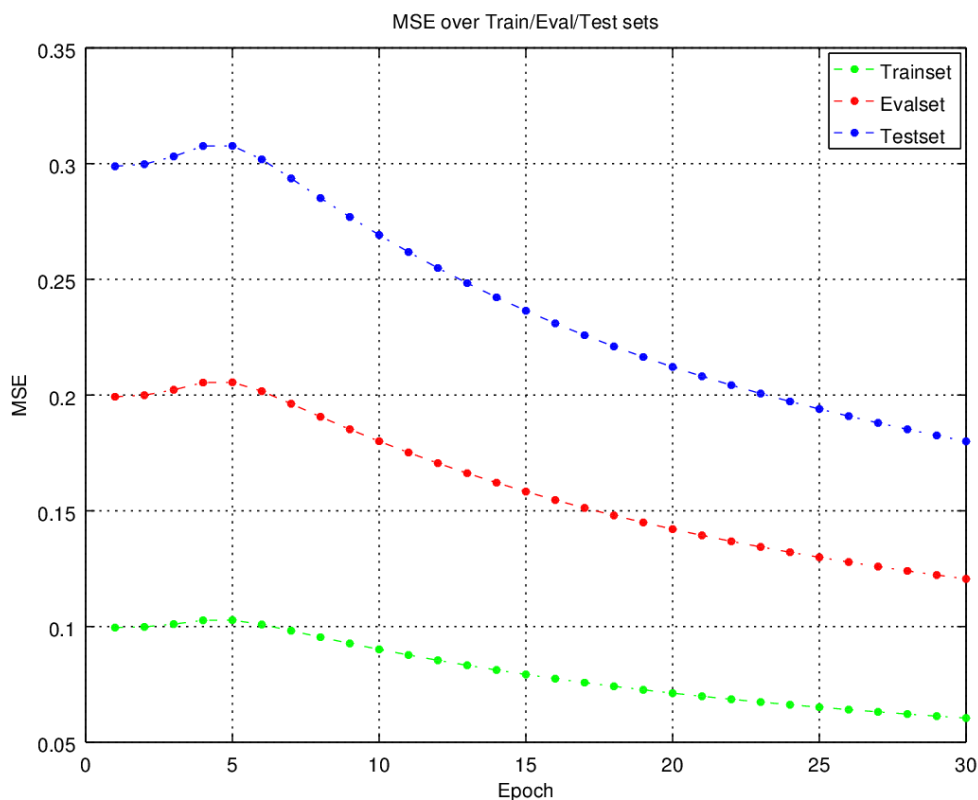
شکل ۱: مقدار دقت بروی داده‌های آموزشی، ارزیابی و تست در دوره‌های مختلف برای قسمت الف

<sup>۹</sup> Mini-Batch

<sup>۱۰</sup> Smooth

<sup>۱۱</sup> برای آموزش به صورت دسته‌ای که به دقت ۵۹٪ برسد، نزدیک به ۶ ساعت آموزش نیاز داشت!!

نمودار مقادیر  $MSE$  خروجی‌های شبکه در داده‌های آموزشی، ارزیاب و تست در شکل ۲ آمده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود مقادیر  $MSE$  کلیه‌ی خروجی‌ها تقریباً با یک روند یکنواخت در طی دوره‌های مختلف کاهش پیدا می‌کند.<sup>۱۲</sup>

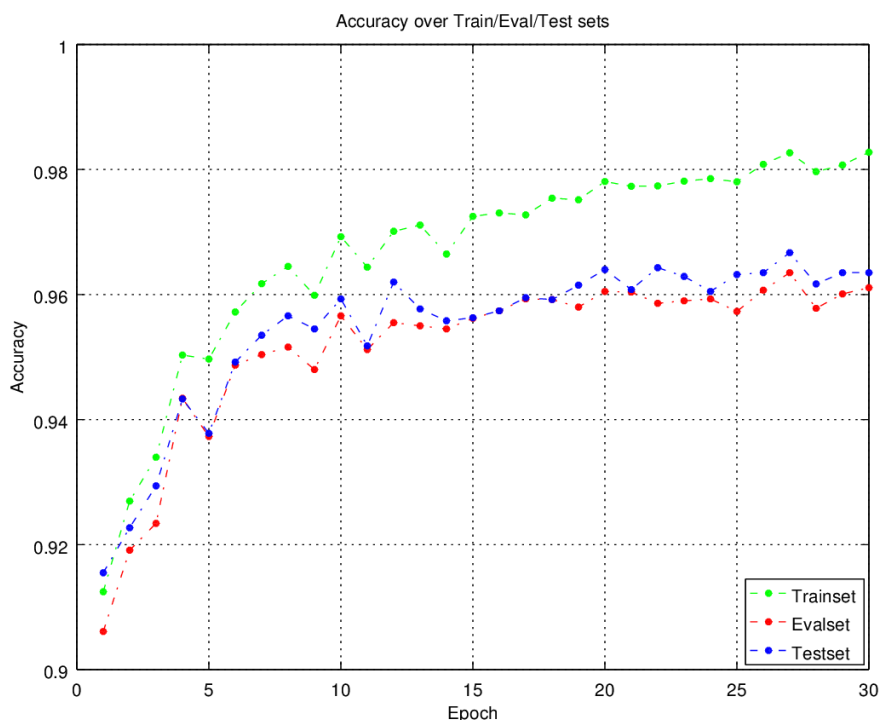


شکل ۲: مقدار میانگین  $MSE$  خروجی‌های شبکه بر روی داده‌های آموزشی، ارزیاب و تست در دوره‌های مختلف برای قسمت الف

## ۴ قسمت ب

در این قسمت با در نظر گرفتن مقدار گام ۰.۳ به صورت برخط به آموزش داده‌ها پرداختیم که در نهایت به دقت ۹۶.۳۵٪ با حداکثر تعداد ۳۰ دوره بر روی داده‌های تست رسیدیم که اختلاف زیادی با آنچه که در قسمت اول مشاهده کردیم دارد. نمودار دقت و میزان  $MSE$  در شکل‌های ۳ و ۴ آمده‌اند. در صورت مقایسه ی شکل ۳ با شکل ۱ به وضوح مشاهده می‌شود که دقت در یادگیری برخط افت‌وخیز زیادی نسبت به یادگیری دسته‌ای دارد ولی در تعداد دوره‌ی یکسان دقت بالایی نسبت به یادگیری دسته‌ای دارد. همچنین با مقایسه‌ی شکل ۴ و ۲ مشاهده می‌شود که برخلاف یادگیری دسته‌ای که مقادیر  $MSE$  خروجی‌های آن یکنواخت کاهش می‌یابد ولی در یادگیری برخط مقادیر  $MSE$  افت‌وخیز زیادی دارد.

<sup>۱۲</sup> جدول مقادیر  $MSE$  خروجی‌ها همراه کدهای برنامه آمده است.

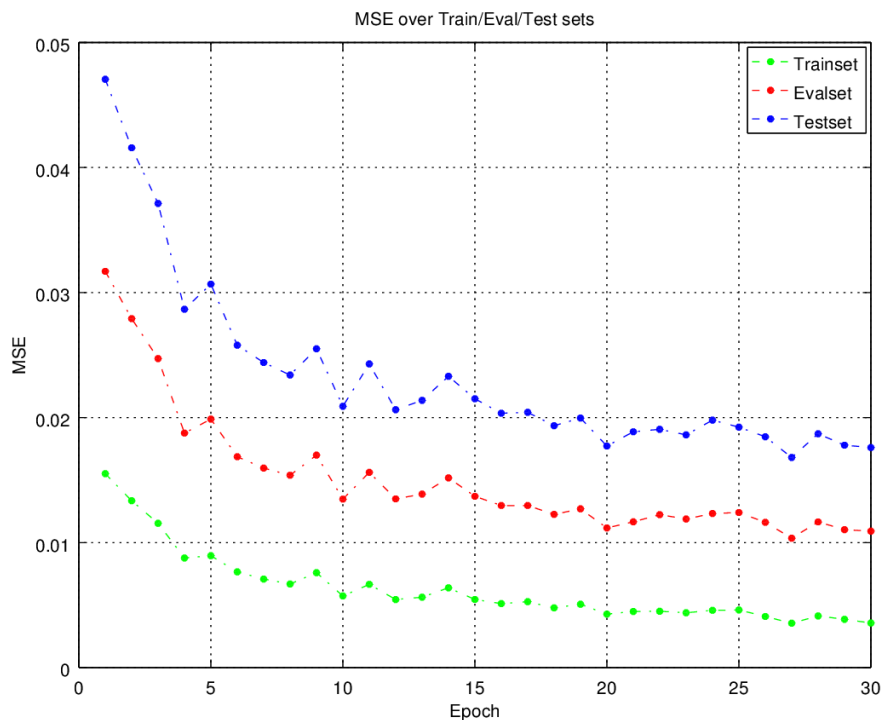


شکل ۳: مقدار دقت بروی داده‌های آموزشی، ارزیاب و تست در دوره‌های مختلف برای قسمت ب

با اینکه دقت یادگیری به روش برخط بهتر از یادگیری به روش دسته‌ای می‌باشد ولی این روش همانند روش یادگیری دسته‌ای هیچ‌یک از معیارها توقف زود هنگام گفته شده در قسمت‌های گذشته را ارضا نکرده و بعد از گذران حداکثر تعداد دوره (۳۰ عدد) به پایان مهلت یادگیری خود رسیده است. برای مقایسه‌ی اثر یادگیری برخط اختلاف دقت و مقادیر  $MSE$  بدست آمده‌ی قسمت الف را با این قسمت بدست آورده که در شکل‌های ۵ و ۶ آمده است. همان‌طور که در شکل ۵ مشاهده می‌شود در کلیه‌ی دوره‌ها میزان دقت شبکه‌ای که به صورت برخط یادگرفته بیشتر بصورت چشم‌گیری بیشتر از دقت شبکه‌ای است که با یادگیری دسته‌ای آموزش دیده است ولی به مرور زمان یادگیری دسته‌ای به صورت یکنواخت اختلاف دقتش را با یادگیری برخط کاهش داده ولی در یک طول دوره‌ی یکسان یادگیری برخط بوضوح دقت بهتری را ارائه داده است. همچنین در مورد اختلاف مقادیر  $MSE$  همیشه یادگیری برخط مقدار  $MSE$  کمتری نسبت به یادگیری دسته‌ای داشته ولی به مرور زمان همزمان با افزایش دقت یادگیری دسته‌ای میزان اختلاف  $MSE$  کاهش یافته است.

ولی از طرف دیگر زمان یادگیری، یادگیری برخط تقریباً ۲ برابر یادگیری دسته‌ای می‌باشد<sup>۱۳</sup> و علت این امر این است که به ازای هر داده‌ی آموزشی (۵۰,۰۰۰ عدد) یک بار باید تمامی وزن‌های شبکه (به تعداد ۷۸۴,۰۰۰ عدد) بروزرسانی شود که به ازای یک دوره تقریباً  $3.92e+10$  وزن بروزرسانی شده است در حالی که در یادگیری دسته‌ای در هر دوره فقط ۷۸۴,۰۰۰ وزن بروزرسانی شده است و این یعنی  $\frac{1}{50,000}$  برابر بروزرسانی کمتر!!

<sup>۱۳</sup> تقریباً زمان یادگیری برخط به ازای ۳۰ دوره نزدیک به ۱۵ ساعت شد!!

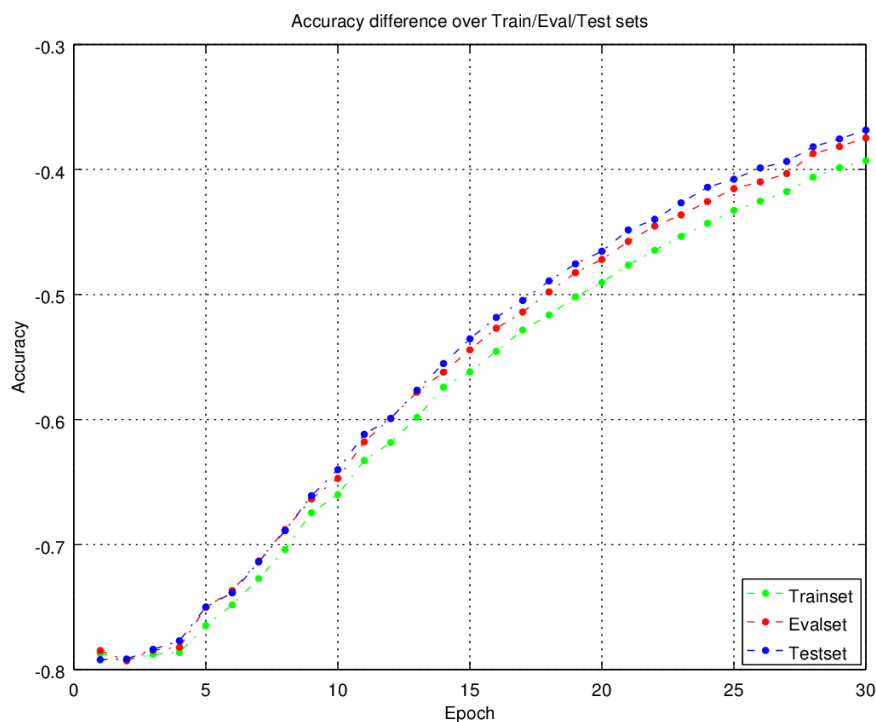


شکل ۴: مقدار میانگین MSE خروجی‌های شبکه بر روی داده‌های آموزشی، ارزیابی و تست در دوره‌های مختلف برای قسمت ب

## ۵ قسمت ج

در این قسمت با در نظر گرفتن مقدار مومنتم ۰.۲ و مقدار گام ۰.۴ (مثل قسمت الف) به صورت دسته ای داده‌های آموزشی را به شبکه دادیم دقت این قسمت بر روی داده‌های تست ۵۴.۳٪ می‌باشد که مقدار دقت کمتر از آنچه که در الف بدست آمده است دارا می‌باشد، که چون در این قسمت نیز از نحوه‌ی آموزش دسته ای استفاده شده، علت پایین بودن نسبی دقت در این قسمت مشابه قسمت الف می‌باشد. همچنین مشابه قسمت الف شبکه را بعد از هر دوره با داده‌های ارزیابی آزمودیم که میزان دقت و مقادیر  $MSE$  خروجی‌های آن در شکل های ۷ و ۸ آمده است.

برای مقایسه‌ی اثر استفاده‌ی مومنتم در قسمت الف تکلیف اختلاف دقت و مقادیر  $MSE$  بدست آمده ی قسمت الف را با این قسمت بدست آورده که در شکل‌های ۹ و ۱۰ آمده است. همان‌طور که در شکل ۹ مشاهده می‌شود در ۵-۶ دوره‌ی اول میزان دقت بدست آمده در آموزش با استفاده از مومنتم بیشتر از آموزش بدون استفاده از مومنتم می‌باشد ولی بعد از چند دوره دقت شبکه‌ای که از مومنتم استفاده نکرده است (قسمت الف) بیشتر است - که این بخاطر خاصیت اینرسی‌ای است که روش مومنتم دارد و باعث می‌شود وزن در مقابل تغییرات دروهای مقاومت بیشتری از خود نشان دهند.

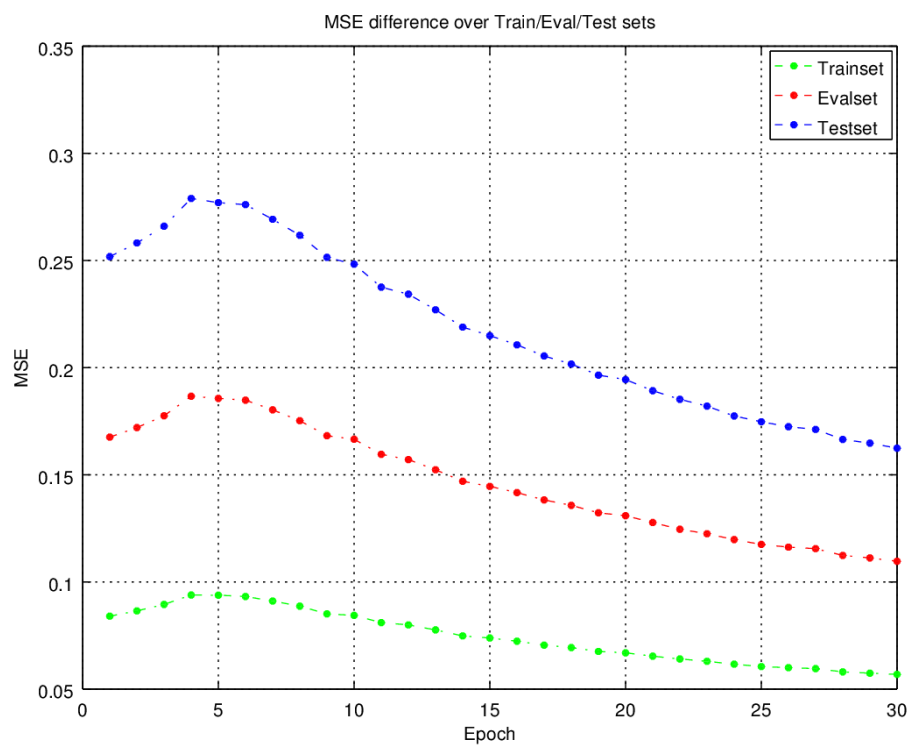


شکل ۵: مقدار اختلاف دقت قسمت الف و قسمت ب بروی داده‌های آموزشی، ارزیابی و تست در دوره‌های مختلف

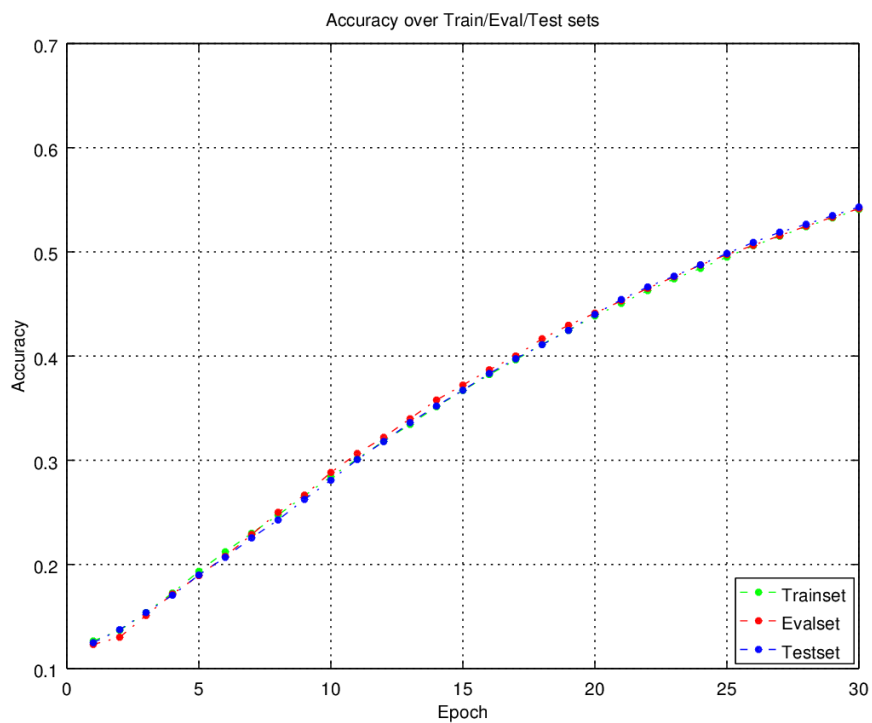
## ۶ قسمت د

در این قسمت با در نظر گرفتن مقدار منتظم‌سازی<sup>۱۴</sup> برابر با ۰.۱ و مقدار گام ۰.۴ (مثل قسمت الف) به صورت دسته‌ای داده‌های آموزشی را به شبکه دادیم دقت این قسمت بروی داده‌های تست ۶۲.۷۶٪ می‌باشد که از دقت نهایی قسمت الف به میزان چند درصدی بیشتر است، که چون در این قسمت نیز از نحوه‌ی آموزش دسته‌ای استفاده شده، علت پایین بودن نسبی دقت در این قسمت مشابه قسمت الف می‌باشد. همچنین مشابه قسمت الف شبکه را بعد از هر دوره با داده‌های ارزیابی آزمودیم که میزان دقت و مقادیر  $MSE$  خروجی‌های آن در شکل‌های ۱۱ و ۱۲ آمده است.

<sup>۱۴</sup> Regularization

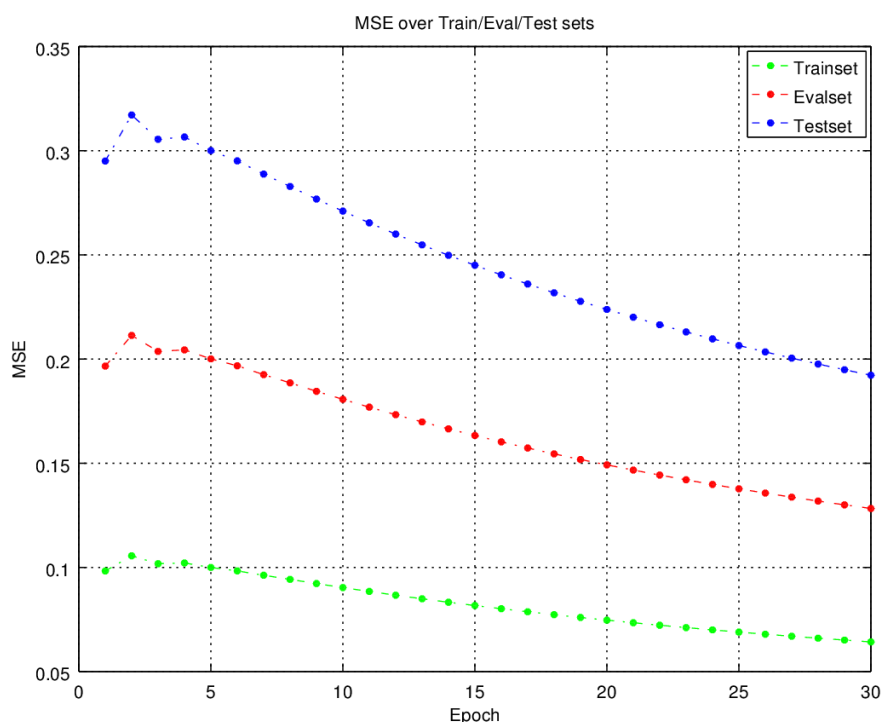


شکل ۶: مقدار اختلاف مقادیر MSE قسمت الف و قسمت ب بروی داده‌های آموزشی، ارزیابی و تست در دوره‌های مختلف



شکل ۷: مقدار دقت بروی داده‌های آموزشی، ارزیابی و تست در دوره‌های مختلف برای قسمت ج



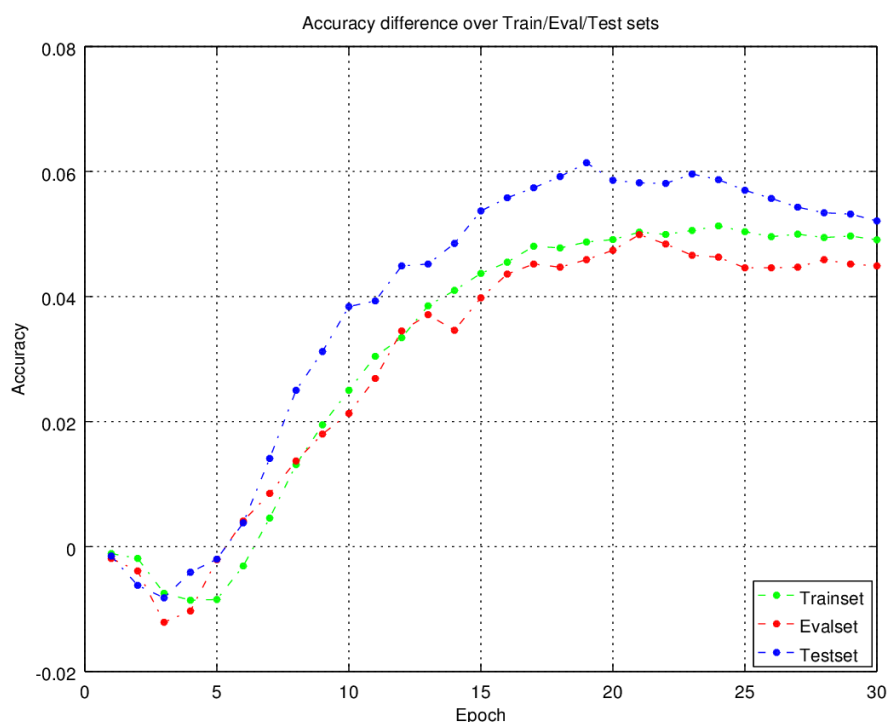


شکل ۸: مقدار میانگین MSE خروجی‌های شبکه بروی داده‌های آموزشی، ارزیابی و تست در دوره‌های مختلف برای قسمت ج

برای مقایسه‌ی اثر استفاده‌ی منتظم‌سازی در قسمت الف تکلیف اختلاف دقت و مقادیر  $MSE$  بدست آمده ی قسمت الف را با این قسمت بدست آورده که در شکل‌های ۱۳ و ۱۴ آمده است. همان‌طور که در شکل ۱۳ مشاهده می‌شود در ابتدای کار (دوره‌ی ۱۲-۱۵) میزان دقت قسمت الف بیشتر بوده ولی بعد از این قسمت دقت قسمت د چند درصدی بیشتر از قسمت الف می‌شود (همین مساله برای اختلاف مقادیر  $MSE$  نیز برقرار است).

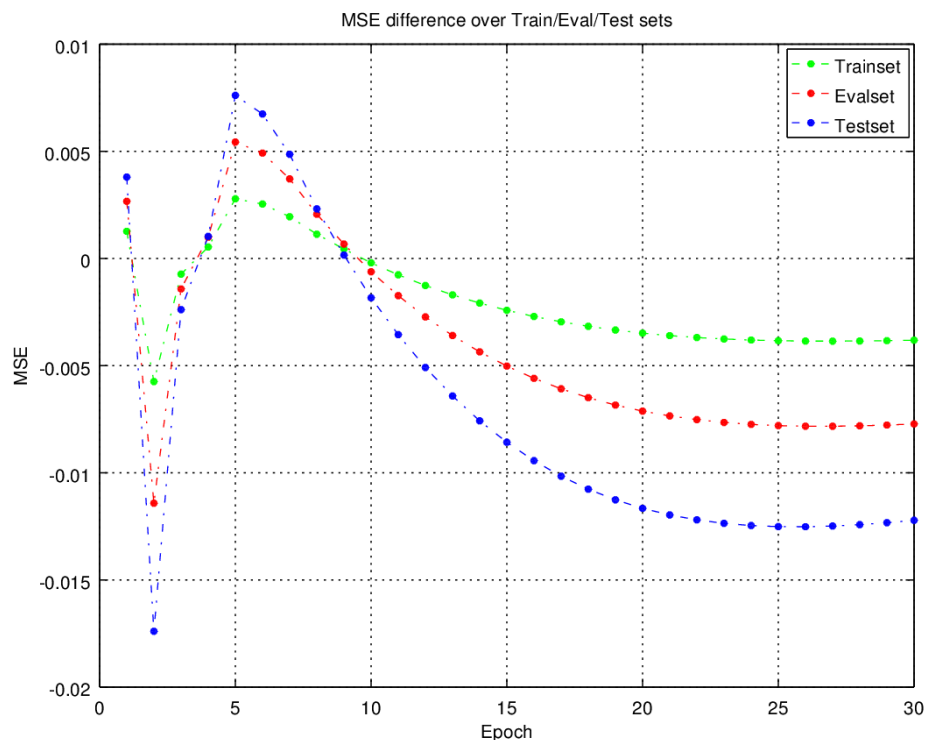
## ۷ قسمت آخر (نمره اضافی)

بنده بروی داده‌های ورودی (داده‌های مربوط عکس‌های - نه برچسب‌ها) عملیات کاهش بعد  $PCA$  زدم ابعاد داده‌های عکس‌ها را از ۷۸۴ به ۱۰۰ بعد کاهش دادم و سپس با شبکه‌ای با ساختار  $10 \times 100 \times 1000$  داده‌ها را آموزش دادم. در این حالت چون تعداد ورودی‌های شبکه کاهش یافته می‌توان با تعداد نوروں کمتری در لایه‌ی مخفی الگوی داده‌ها را پوشش داد؛ که این کاهش بعد به کاهش حجم محاسباتی و برورسانی وزن می‌انجامد. این کاهش در ساختار این شبکه حدود ۸۷٪ از حجم محاسباتی‌ای که در شبکه‌ای که داده‌های اولیه را یاد می‌گرفت، صرف جویی شده که در نهایت موجود می‌شود در یک زمان محدود تعداد دوره‌ی بیشتری نسبت به شبکه‌ی پیشین طی کند و با در نظر گرفتن زمان یکسان دقت بیشتری بدست آورد. همچنین این کاهش بعد حدود ۸۳٪ از حجم حافظه‌ی مورد نیاز در مرحله قبل را نیز صرفه جویی کرده است.



شکل ۹: مقدار اختلاف دقت قسمت الف و قسمت ج بروی داده‌های آموزشی، ارزیاب و تست در دوره‌های مختلف

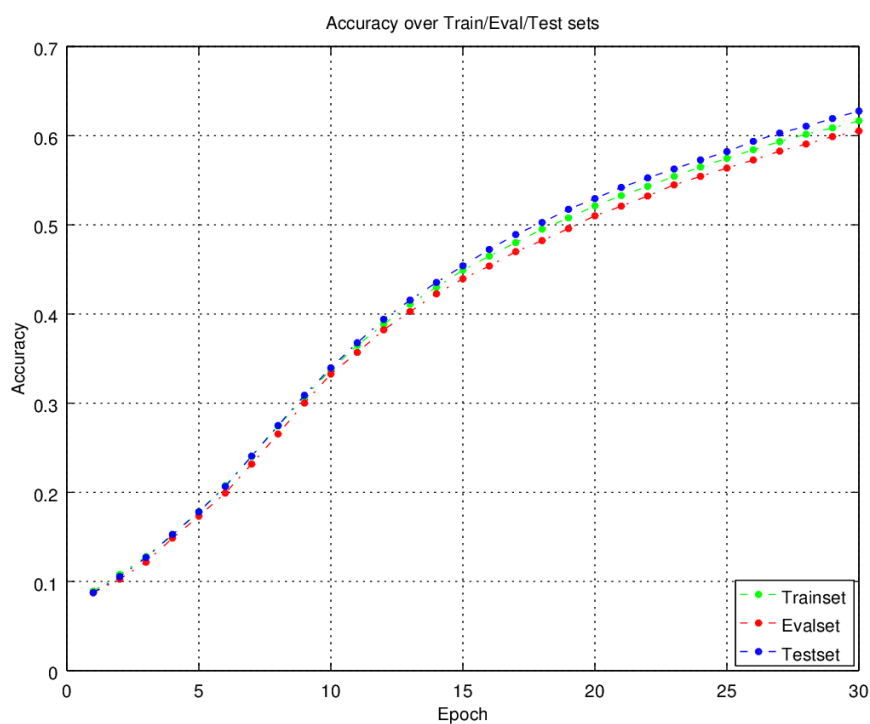
در آموزش این قسمت از روش دسته‌های کوچک<sup>۱۵</sup> با اندازه‌های ۱۰ تایی استفاده کردم که دقت و سرعت همگرایی را نسبت کلیه‌ی قسمت‌های فوق را بیشتر کرد و میزان دقت آن بروی داده‌های تست ۹۶.۷۹٪ بدست آمد. همان‌طور که قبلاً گفته شد کاهش سائز داده‌ها به کاهش وزن‌های شبکه کمک می‌کند و همچنین استفاده از روش دسته‌های کوچک بجای روش‌های یادگیری دسته‌ای و برخشی به میزان سرعت یادگیری و ملایم بودن دقت شبکه کمک میکند به‌طوری که آموزش قسمت الف که به دقتی در حدود ۵۹٪ برسد نزدیک ۶ ساعت زمان برد و در قسمت ب نیز برای اینکه به دقتی در حدود ۹۶.۳۵٪ داشت، به ۱۵ ساعت آموزش و ۳۰ دوره نیاز داشت در حالی که بعد از کاهش بعد و استفاده از روش یادگیری دسته‌های کوچک بعد از ۷ دوره که فقط در ۱۰ دقیقه انجام شد میزان میانگین مقادیر  $MSE$  به زیر ۰.۰۱ و دقت ۹۶.۷۹٪ را داشت که هم در زمان و هم در تعداد دوره‌ها و هم در دقت از کلیه‌ی نتایج قسمت‌های قبلی برتریت داشت. میزان دقت و مقادیر  $MSE$  شبکه بعد از استخراج ویژگی‌ها در اشکال ۱۵ و ۱۶ آمده است. در شکل ۱۷ میزان اختلاف دقت قسمت‌های الف با داده‌های کاهش بعد یافته و یادگیری به روش دسته‌های کوچک آمده است. همان‌طور که می‌بینیم اختلاف چشم گیری بین دقت‌های قسمت الف و این قسمت وجود دارد و سرعت اجرا ۴۰ برابر کمتر از سرعت اجرای شبکه بروی داده‌های آموزشی کاهش بعد یافته می‌باشد. همان‌طور که در شکل ۱۵ مشاهده می‌شود همانند قسمت الف جهش‌های ناگهانی در دقت در دوره‌های مختلف مشاهده نمی‌شود و دقت به صورت ملایم تغییر می‌کند. همین مساله برای شکل ۱۶ نیز مشاهده می‌شود که مقادیر  $MSE$  با ملایمت در طی زمان رو به کاهش‌اند. در شکل ۱۸ از بین دقت‌های قسمت‌های الف و ج و د، قسمت‌های الف و ب تقریباً با یک دقت شروع کردند و قسمت د کمترین دقت را در انتهای کار داشت ولی در نهایت قسمت د بعد از نزدیک به ۶ دوره دقتش و از بقیه بیشتر شد.



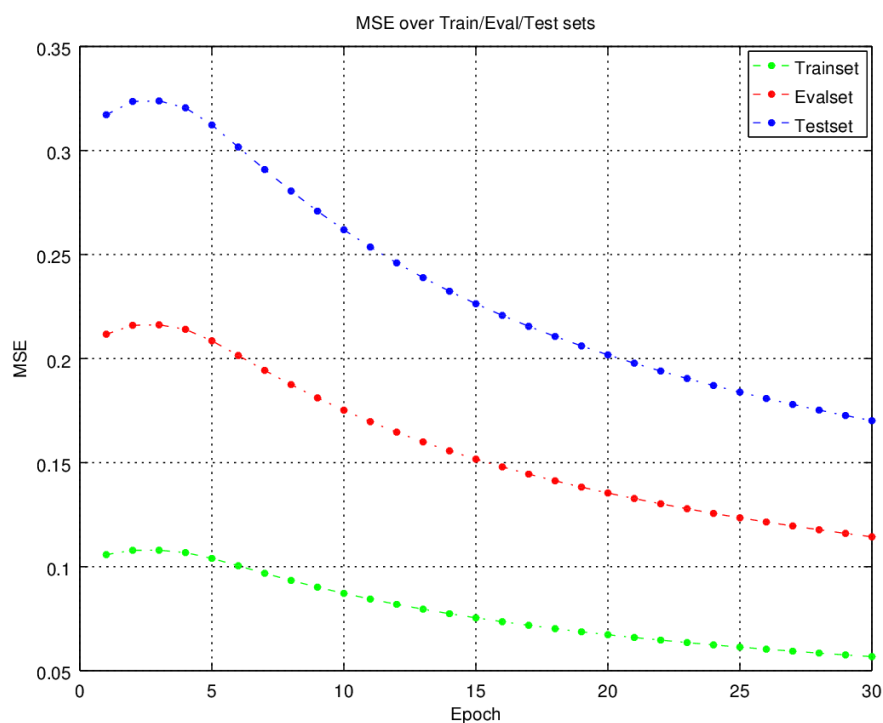
شکل ۱۰: مقدار اختلاف مقادیر MSE قسمت الف و قسمت ج بروی داده‌های آموزشی، ارزیابی و تست در دوره‌های مختلف

## ۸ نتیجه‌گیری و جمع‌بندی

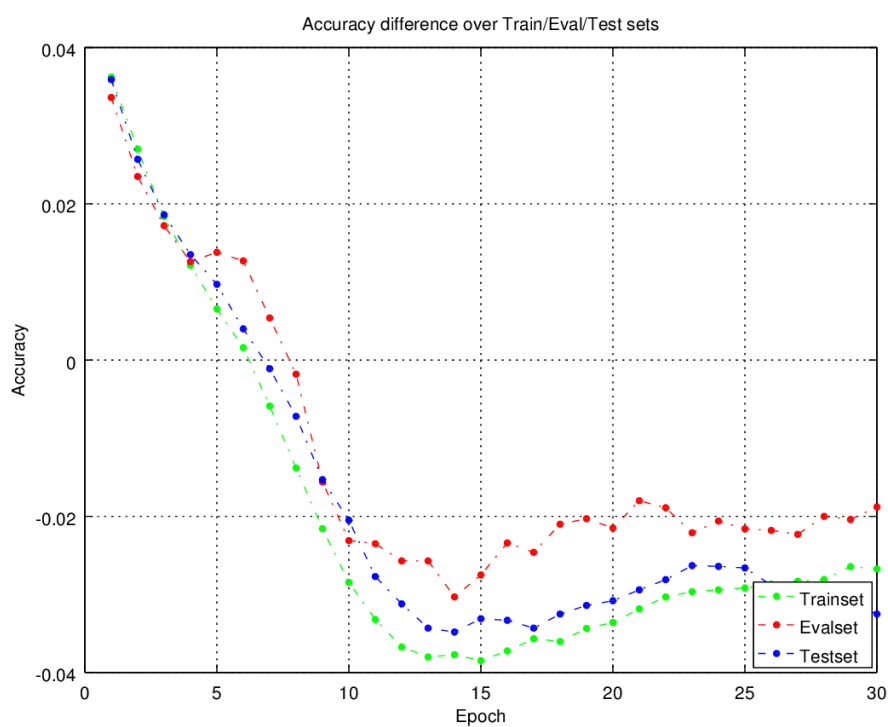
ما در این تکلیف به پیاده‌سازی الگوریتم انتشار-به-عقب پرداختیم و الگوریتم نوشته شده را بروی داده‌های *MNIST* اجرا کرده و آزمودیم. در قسمت‌های مختلف این گزارش به بررسی نتایج اجرای الگوریتم با شیوه‌های مختلف پرداختیم. همان‌طور که گفته شد دقت در یادگیری به صورت دسته‌ای دارای افت و خیز ناگهانی نمی‌باشد و در آزمایشات ما به صورت ملایم در طی دوره‌ها رو افزایش بود ولی میزان این افزایش بسیار کم بود بگونه‌ای که بعد از ۶ ساعت آموزش به دقتی در حدود ۵۹٪ رسید. در قسمت ب مشاهده کردیم که دارای دقت بیشتری نسبت به دیگر قسمت‌ها داشت ولی در طی ۳۰ دوره‌ی معین شده هیچ یک از شروط توقف زودهنگام خود را ارضا نکرد و مانند دیگر قسمت‌ها بعد ۳۰ دوره به آموزش خاتمه داد و همچنین نسبت به بقیه مدت زیادی برای آموزش نیاز داشت (نزدیک به ۱۵ ساعت!!) و از طرف دیگر افت و خیزهای زیادی در میزان دقتش در دوره‌های مختلف مشاهده می‌شد. در قسمت ج نیز مشاهده کردیم که استفاده‌ی مونتیم باعث اینرسی در بروزرسانی وزن‌ها شد در نتیجه دقتش در مقایسه با قسمت الف با ملایمت بیشتری افزایش یافت و در نهایت دقتی کمتر از قسمت الف بدست آورد. در قسمت ج نیز مشاهده کردیم که دقت بروی داده‌های ارزیابی و تست به مقداری جزئی بیشتر از قسمت الف شد. به عنوان ایده جهت افزایش دقت و سرعت همگرایی در قسمت آخر گزارش آمدیم داده‌ها را کاهش بعد دادیم و از ۷۸۴ بعد به ۱۰۰ بعد کاهش دادیم که این کاهش بعد به طرز چشم‌گیری در سرعت همگرایی و همچنین سرعت اجرای الگوریتم تاثیر گذاشت - حدود ۵۰ برابر سرعت اجرایی، ۶ برابر حافظه‌ی مصرفی و ۴ برابر سرعت همگرایی بهتر شدند.



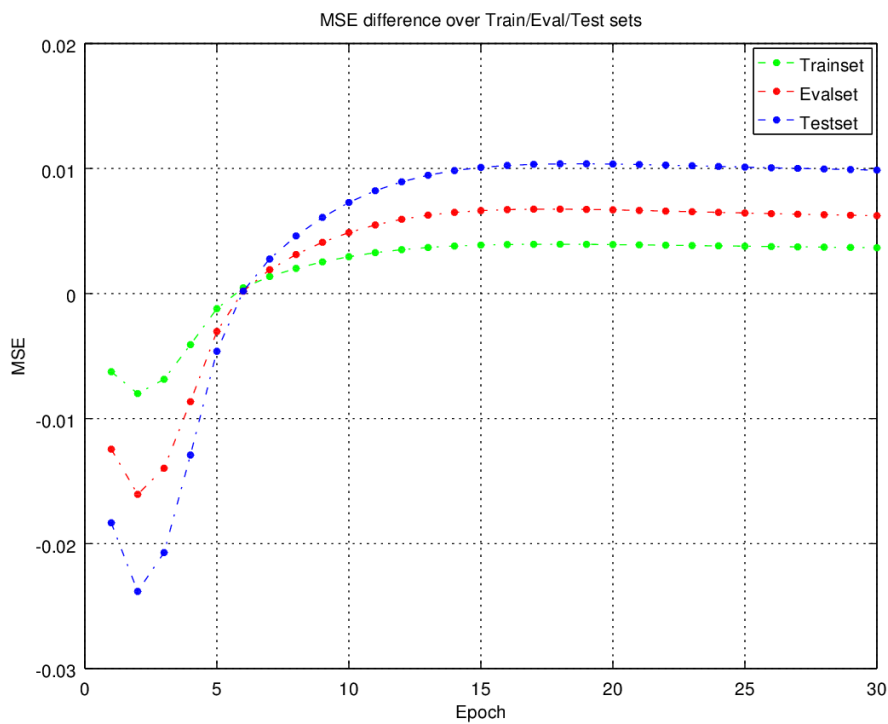
شکل ۱۱: مقدار دقت بروی داده‌های آموزشی، ارزیابی و تست در دوره‌های مختلف برای قسمت ج



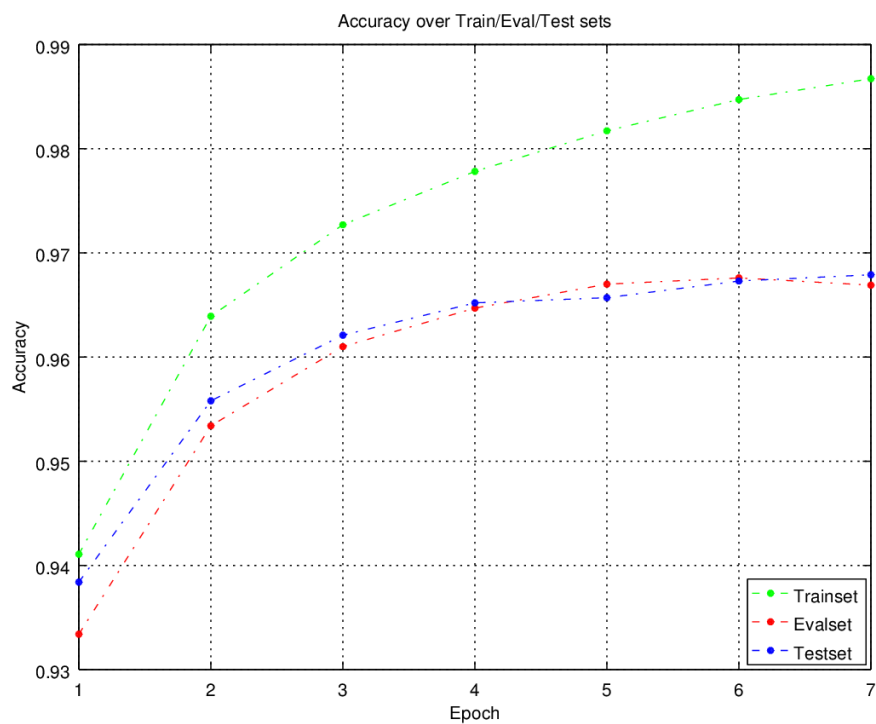
شکل ۱۲: مقدار میانگین MSE خروجی‌های شبکه بروی داده‌های آموزشی، ارزیابی و تست در دوره‌های مختلف برای قسمت ج



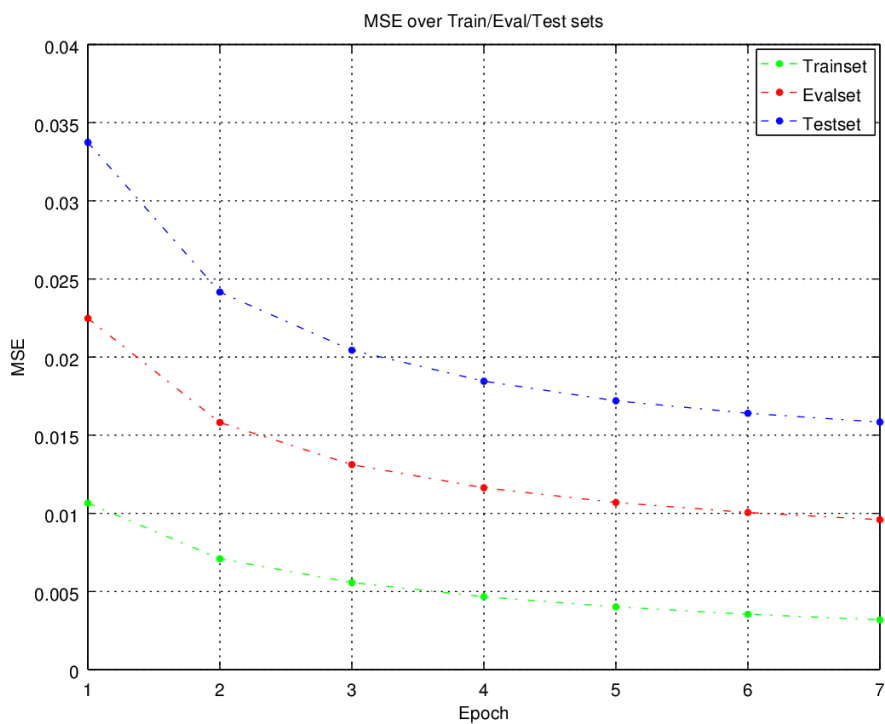
شکل ۱۳: مقدار اختلاف دقت قسمت الف و قسمت د بروی داده‌های آموزشی، ارزیابی و تست در دوره‌های مختلف



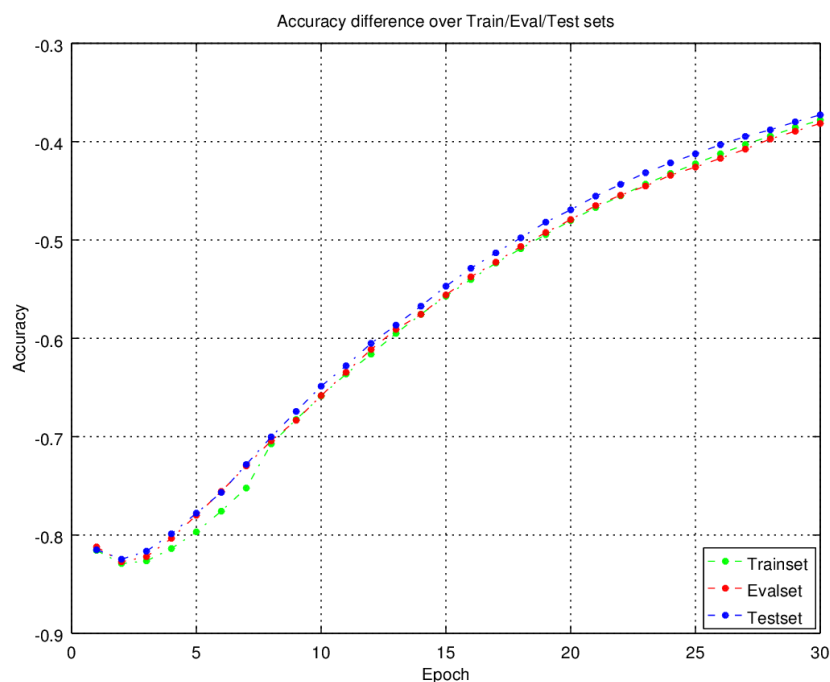
شکل ۱۴: مقدار اختلاف مقادیر MSE قسمت الف و قسمت د بروی داده‌های آموزشی، ارزیابی و تست در دوره‌های مختلف



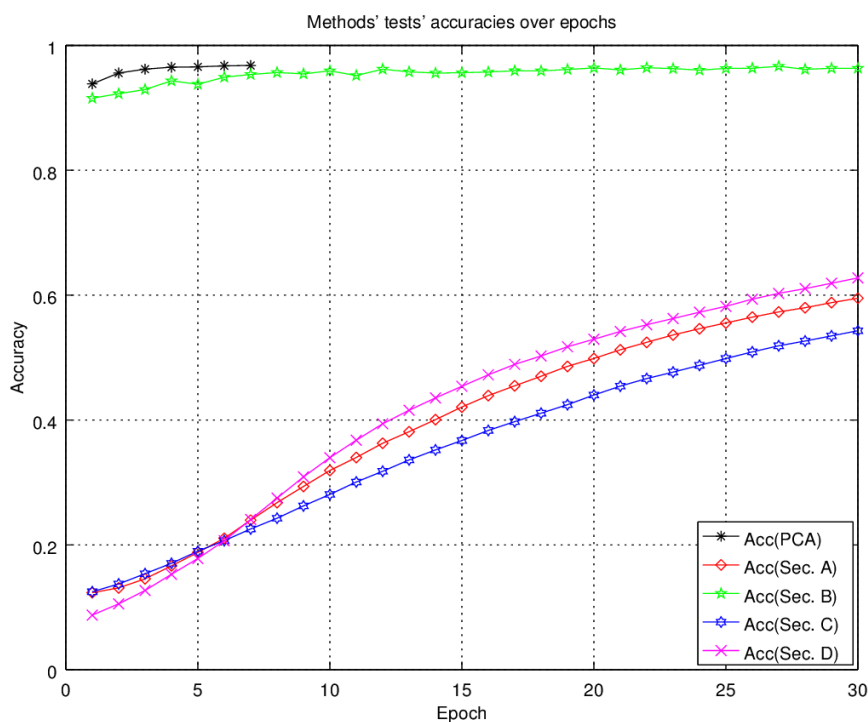
شکل ۱۵: مقدار دقت بروی داده‌های آموزشی، ارزیاب و تست در دوره‌های مختلف بعد از کاهش بعد



شکل ۱۶: مقدار میانگین MSE خروجی‌های شبکه بروی داده‌های آموزشی، ارزیاب و تست در دوره‌های مختلف بعد از کاهش بعد



شکل ۱۷: مقدار اختلاف دقت قسمت الف با دقت بدست آمده در شبکه‌ی آموزش دیده با استفاده از داده‌های کاهش بعد یافته در دوره‌های مختلف



شکل ۱۸: میزان دقت‌های قسمت مختلف در یک نگاه - همان‌طور که می‌بینیم شبکه‌ای که بروی داده‌های کاهش بعد آموزش دیده با تعداد دوره‌های کمتر به دقتی رسید قسمت ب که از بین قسمت‌های فوق حداکثر دقت را داشت در انتهای کار خود به آن دقت نرسید (چند صدم با هم اختلاف دارند!!) و زودتر از موعد خاتمه پیدا کرد.