第五章 线性代数

一、行列式

重要公式与结论

（1）行列式按行（列）展开定理

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}=a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases}|A|, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$ 或 $a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\begin{cases}|A|, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$

即 $AA^*=A^*A=|A|E$

其中 $A^*=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn}\end{bmatrix}=(A_{ji})=(A_{ij})^T$

（2）设 A、B 为 n 阶方阵，则 $|AB|=|A||B|=|B||A|=|BA|$， 但 $|A\pm B|=|A|\pm|B|$ 不一定成立

（3）$|kA|=k^n|A|$, A 为 n 阶方阵，

（4）设 A 为 n 阶方阵，则 $|A^T|=|A|;|A^{-1}|=|A|^{-1}$（若 A 可逆）$|A^*|=|A|^{n-1}(n\geq 2)$

（5）$\begin{vmatrix}A & O\\ O & B\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A & C\\ O & B\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A & O\\ C & B\end{vmatrix}=|A||B|$，$A$、$B$ 为方阵， 但 $\begin{vmatrix}O & A_{m\times m}\\ B_{n\times n} & O\end{vmatrix}=(-1)^{mn}\cdot|A||B|$.

（6）范德蒙行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\leq j<i\leq n}(x_i-x_j)$$

（7）设 A 为 n 阶方阵，$\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是 A 的 n 个特征值，则 $|A|=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i$

二、矩阵

重要公式与结论

（1）A^T,A^{-1},A^* 三者之间的关系

1）$(A^T)^T,(AB)^T=B^TA^T,(kA)^T=kA^T,(A\pm B)^T=A^T\pm B^T$ 2）$(A^{-1})^{-1}=A,(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1},(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$

但 $(A\pm B)^{-1}=A^{-1}\pm B^{-1}$ 不一定成立。

3）$(A^*)^*=|A|^{n-2}A(n\geq 3),(AB)^*=B^*A^*,(kA)^*=k^{n-1}A^*(n\geq 2)$

但 $(A\pm B)^*=A^*\pm B^*$ 不一定成立

4）$(A^{-1})^T=(A^T)^{-1},(A^{-1})^*=(A^*)^{-1},(A^*)^T=(A^T)^*$

（2）有关 A^* 的结论

1） $AA^* = A^*A = |A|E$ 2） $|A^*| = |A|^{n-1}(n \ge 2), (kA)^* = k^{n-1}A^*, (A^*)^* = |A|^{n-2}A(n \ge 3)$

3）若 A 可逆，则 $A^* = |A|A^{-1}, (A^*)^{-1} = \frac{1}{|A|}A$

4）若 A 为 n 阶方阵，则 $r(A^*) = \begin{cases} n, r(A) = n; \\ 1, r(A) = n-1; \\ 0, r(A) < n-1 \end{cases}$

（3）有关 A^{-1} 的结论

A 可逆 $\Leftrightarrow AA^{-1} = E$；

$\Leftrightarrow |A| \ne 0$；

$\Leftrightarrow r(A) = n$；

$\Leftrightarrow A$ 可以表示为初等矩阵的乘积；

$\Leftrightarrow A$ 无零特征值；

$\Leftrightarrow Ax = 0$ 只有零解。

（4）分块求逆公式

$$\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & O \\ C & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} O & A \\ B & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{bmatrix}$$

这里 A, B 均为可逆方阵。

二、 向量

重要公式与结论

（1）有关向量组的线性相关性

1）部分相关，整体相关；整体无关，部分无关

2）①n 个 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关 $\Leftrightarrow |[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]| \ne 0$

n 个 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性相关 $\Leftrightarrow |[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]| = 0$

②$n+1$ 个 n 维向量线性相关。

③若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关，则添加分量后仍然线性无关；或一组向量线性相关，去掉某些分量后仍线性相关

3）设 $\mathrm{r}(A_{m\times n}) = \mathrm{r}$，则 A 的秩 $\mathrm{r}(A)$ 与 A 的行列向量组的线性相关性关系为：

①若 $\mathrm{r}(A_{m\times n}) = \mathrm{r} = m$，则 A 的行向量组线性无关。 ②若 $\mathrm{r}(A_{m\times n}) = \mathrm{r} < m$，则 A 的行向量组线性相关。

③若 $\mathrm{r}(A_{m\times n}) = \mathrm{r} = n$，则 A 的列向量组线性无关。 ④若 $\mathrm{r}(A_{m\times n}) = \mathrm{r} < n$，则 A 的列向量组线性相关。

（2）有关向量组的线性表示

1）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 至少有一个向量可以用其余向量线性表示。

2）若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$，$\beta$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ β 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 唯一线性表示。

3）β 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{r}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=\mathrm{r}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta)$

（3）有关矩阵的秩的结论：

1）秩 $\mathrm{r}(A)$ =行秩=列秩

2）$\mathrm{r}(A_{m\times n})\le\min(m,n)$；

3）$A\neq 0\Rightarrow r(A)\ge 1$；

4）$\mathrm{r}(A\pm B)\le \mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)$

5)初等变换不改变矩阵的秩

6）$\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)-n\le\mathrm{r}(AB)\le\min\{\mathrm{r}(A),\mathrm{r}(B)\}$，特别若 $AB=0$，则 $\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)\le n$

7）若 A^{-1} 存在 $\Rightarrow\mathrm{r}(AB)=\mathrm{r}(B)$　　若 B^{-1} 存在 $\Rightarrow\mathrm{r}(AB)=\mathrm{r}(A)$

若 $\mathrm{r}(A_{m\times n})=n\Rightarrow\mathrm{r}(AB)=\mathrm{r}(B)$　　若 $\mathrm{r}(B_{n\times s})=n\Rightarrow\mathrm{r}(AB)=\mathrm{r}(A)$

8）$\mathrm{r}(A_{m\times n})=n\Leftrightarrow Ax=0$ 只有零解

四、线性方程组

重要公式与结论

（1）设 A 为 $m\times n$ 矩阵，$\mathrm{r}(A_{m\times n})=m$，则对 $Ax=b$ 而言必有 $\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(A,b)=m$，从而 $Ax=b$ 有解。

（2）设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为 $Ax=b$ 的解，则 $k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_nx_n$ 当 $k_1+k_2+\cdots+k_n=1$ 时仍为 $Ax=b$ 的解，但当时 $k_1+k_2+\cdots+k_n=0$，则为 $Ax=0$ 的解。

特别：$\dfrac{x_1+x_2}{2}$ 为 $Ax=b$ 的解；$2x_3-(x_1+x_2)$ 为 $Ax=0$ 的解。

（3）非其次线性方程组 $Ax=b$ 无解 $\Leftrightarrow\mathrm{r}(A)+1=\mathrm{r}(\overline{A})\Leftrightarrow b$ 不能由 A 的列向量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 线性表示。

（4）n 阶矩阵 A 可逆 $\Leftrightarrow$ $Ax=0$ 只有零解。

$\Leftrightarrow\ \forall b, Ax=b$ 总有唯一解。

一般地，$\mathrm{r}(A_{m\times n})=n\Leftrightarrow Ax=0$ 只有零解。

五、特征值、特征向量

重要公式与结论

（1）设 λ 是 A 的一个特征值，则 $kA,aA+bE,A^2,A^m,f(A),A^T,A^{-1},A^*$ 有一个特征值分别为

$k\lambda, a\lambda+b, \lambda^2, \lambda^m, f(\lambda), \lambda, \lambda^{-1}, \frac{|A|}{\lambda}$，且对应特征向量相同（$A^T$ 例外）

（2）若 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 A 的 n 个特征值，则 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}a_{ii},\prod_{i=1}^{n}\lambda_i=|A|$，从而 $|A|\neq 0 \Leftrightarrow A$ 没有零特征值。

（3）若 $A\sim B$，则

1）$A^T\sim B^T, A^{-1}\sim B^{-1}, A^*\sim B^*$　2）$|A|=|B|, \sum_{i=1}^{n}a_{ii}=\sum_{i=1}^{n}b_{ii}, \mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(B)$　3）$|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$，对 $\forall\lambda$ 成立。

（4）设 A 为 n 阶方阵，则 A 可对角化 $\Leftrightarrow$ 对每个 k_i 重特征值 λ_i，有 $n-\mathrm{r}(\lambda_i E-A)=k_i$。

（5）设 A 可对角化，则由 $P^{-1}AP=\Lambda$，从而 $A^n=P\Lambda P^{-1}$。

（6）设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 为 A 的 s 个特征值，对应的特征向量为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$，若 $\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s$，则

$$A^n\alpha=k_1A^n\alpha_1+k_2A^n\alpha_2+\cdots+k_sA^n\alpha_s=k_1\lambda_1^n\alpha_1+k_2\lambda_2^n\alpha_2+\cdots+k_s\lambda_s^n\alpha_s。$$

六、二次型

重要公式与结论

（1）设 A 正定 $\Rightarrow kA(k>0), A^T, A^{-1}, A^*$ 正定；$|A|>0, A$ 可逆；$a_{ii}>0$，且 $|A_{ii}|>0$。

（2）A,B 正定 $\Rightarrow A+B$ 正定，但 AB,BA 不一定正定。

（3）A 正定 $\Leftrightarrow f(x)=x^TAx>0, \forall x\neq 0$

$\Leftrightarrow$ A 的各阶顺序主子式全大于零

$\Leftrightarrow$ A 的所有特征值都大于零

$\Leftrightarrow$ A 的正惯性指数为 n

$\Leftrightarrow \exists$ 可逆阵 P 使 $A=P^TP$

$\Leftrightarrow$ 存在正交阵 Q 使得 $Q^TAQ=Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$ 其中 $\lambda_i>0, i=1,2,\cdots,n$