第四章 高等代数

1．两个重要极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e=2.718281828459045..$$

2．基本导数公式：

$$(\tan x)'=\sec^2 x$$
$$(\cot x)'=-\csc^2 x$$
$$(\sec x)'=\sec x\cdot\tan x$$
$$(\csc x)'=-\csc x\cdot\cot x$$
$$(a^x)'=a^x\ln a$$
$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$$

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$$
$$(arc\tan x)'=-\frac{1}{1+x^2}$$

3．一些初等函数：

双曲正弦：$shx=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$，双曲余弦：$chx=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$

双曲正切：$thx=\frac{shx}{chx}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$，　$arshx=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$

$$archx=\pm\ln(x+\sqrt{x^2-1}),\quad arthx=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

4．三角函数公式：

·诱导公式：

函数 / 角 A	sin	cos	tan	cot
-α	-sinα	cosα	-tanα	-cotα
90°-α	cosα	sinα	cotα	tanα
90°+α	cosα	-sinα	-cotα	-tanα
180°-α	sinα	-cosα	-tanα	-cotα
180°+α	-sinα	-cosα	tanα	cotα
270°-α	-cosα	-sinα	cotα	tanα
270°+α	-cosα	sinα	-cotα	-tanα
360°-α	-sinα	cosα	-tanα	-cotα
360°+α	sinα	cosα	tanα	cotα

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$
$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$
$$\cot(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\cdot\tan\beta\mp 1}{\tan\beta\pm\tan\alpha}$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

·和差角公式：　　　　**·和差化积公式：**

·倍角公式：

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\cot 2\alpha = \frac{\tan^2\alpha - 1}{2\tan\alpha}, \quad \tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

·半角公式：

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}, \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}, \quad \cot\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$$

·正弦定理： $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$ **·余弦定理：** $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

·反三角函数性质： $\arcsin x = \dfrac{\pi}{2} - \arccos x$ $\arctan x = \dfrac{\pi}{2} - arc\cot x$

5. 高阶导数公式——莱布尼兹（Leibniz）公式：

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$$

$$= u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)} + \cdots + uv^{(n)}$$

6. 中值定理与导数应用：

拉格朗日中值定理： $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$

柯西中值定理： $\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$

当 $\mathrm{F}(x) = x$ 时，柯西中值定理就是拉格朗日中值定理。

7. 曲率：

弧微分公式： $ds = \sqrt{1+y'^2}\,dx$, 其中 $y' = tg\alpha$

平均曲率： $\overline{K} = \left|\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$. $\Delta\alpha$：从 M 点到 M′ 点，切线斜率的倾角变化量； Δs： MM' 弧长。

M 点的曲率： $K = \lim\limits_{\Delta s\to 0}\left|\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right| = \left|\dfrac{d\alpha}{ds}\right| = \dfrac{|y''|}{\sqrt{(1+y'^2)^3}}$.

直线： $K = 0$; 半径为 a 的圆： $K = \dfrac{1}{a}$.

8. 泰勒公式

设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内具有 $n+1$ 阶导数， $x_0 \in (a,b)$，则在区间 (a,b) 内， $f(x)$ 可表为

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x)。$$

其中 $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$， ξ 是介于 x_0 和 x 之间的某个数。

$R_n(x)$ 称为 n 阶泰勒余项(具有拉格朗日形式的余项)。

$x_0=0$ 时的泰勒公式叫做麦克劳林公式，即

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

其中 ξ 在 $\mathbf{0}$ 与 x 之间。

具有皮亚诺余项形式的泰勒公式为(此时，只要求函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内具有 n 阶导数)为：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$$

其中 $o(x^n)$ 为 x^n 的高阶无穷小量，要求 $f(x)$ 具有 n 阶导数。这是不同于拉格朗日余项形的 n 阶泰勒公式之处。

读者应该熟悉五类基本初等函数在 $x=0$ 处的 n 阶泰勒公式(ξ 在 $\mathbf{0}$ 与 x 之间)

(1) $e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+R_n(x)$，其中 $R_n(x)=\frac{1}{(n+1)!}e^{\xi}x^{n+1}$， $x\in(-\infty,+\infty)$。

(2) $\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1}+R_{2n-1}(x)$，

其中 $R_{2n-1}(x)=\frac{1}{(2n)!}\sin(\xi+n\pi)x^{2n}$， $x\in(-\infty,+\infty)$。

(3) $\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n)!}x^{2n}+R_{2n}(x)$，

其中 $R_{2n}(x)=\frac{1}{(2n+1)!}\cos(\xi+\frac{2n+1}{2}\pi)x^{2n+1}$， $x\in(-\infty,+\infty)$。

(4) $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+R_n(x)$，

其中 $R_n(x)=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\xi)^{\alpha-n-1}x^{n+1}$， $x\in(-1,+\infty),\alpha\in(-\infty,+\infty)$。

(5) $\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}x^n+R_n(x)$，

其中 $R_n(x)=(-1)^n\frac{1}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$，$x\in(-1,+\infty)$

9．无穷小量比阶

设 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为某种趋向 $x\to(\cdot)$ 时的无穷小量，若满足 $\lim\limits_{x\to(\cdot)}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\mu$

则 (1) 当 $\mu\neq0$ 时，称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为同阶无穷小量($x\to(\cdot)$)，特别 $\mu=1$ 时，称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为

等价无穷小量（ $x\to(\cdot)$ ），可记为 $\alpha(x)\sim\beta(x)$。

（2）当 $\mu = 0$ 时，称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 高阶的无穷小量（ $x \to (\cdot)$ ）。

（3）当 $\mu = \infty$ 时，称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 低阶的无穷小量（ $x \to (\cdot)$ ）。

常用等价无穷小量（ $x \to 0$ ）

$x \sim \sin x \sim \tan x \sim \ln(1+x)$ $\qquad 1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$ $\qquad a^x - 1 \sim x\ln a \quad a > 0$

$e^x - 1 \sim x$ $\qquad (x+1)^\lambda - 1 \sim \lambda x \quad \lambda \in R$ $\qquad \sin x - x \sim -\frac{1}{6}x^3$

注：（1）以上等价关系可在广义下应用，即等价关系中的 x 在应用中常换为满足 $\lim\limits_{x\to(\cdot)} \alpha(x) = 0$ 的某个 $\alpha(x)$。

（2）在极限运算中，可以用等价无穷小量进行替换，但必须注意，替换只能在因子位置上进行，因等价无穷小量是用因子乘积 $\alpha(x)\cdot\dfrac{1}{\beta(x)}$ 定义的。

10．基本积分表：

不定积分： $\int 0dx = C$； $\int 1dx = x + C$； $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$；

$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$ $\quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ $\quad \int e^x dx = e^x + C$ $\quad \int \tan xdx = -\ln|\cos x| + C$

$\int \cot xdx = \ln|\sin x| + C$ $\quad \int \sec xdx = \ln|\sec x + \tan x| + C$

$\int \csc xdx = \ln|\csc x - \cot x| + C$

$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$ $\quad \int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\frac{a+x}{a-x} + C$

$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$ $\quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$

$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 xdx = \tan x + C$

$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \csc^2 xdx = -\cot x + C$

$\int \sec x \cdot \tan xdx = \sec x + C$ $\quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

$\int \csc x \cdot \cot xdx = -\csc x + C$ $\quad \int shxdx = chx + C$

$\int chxdx = shx + C$

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + C$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

$$\int \sqrt{x^2+a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$$

$$\int \sqrt{x^2-a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{3n}[(y_0+y_n)+2(y_2+y_4+\cdots+y_{n-2})+4(y_1+y_3+\cdots+y_{n-1})]$$