第三章 矢量代数

一、定义

设矢量 $a = xi + xj + zk = \{x, y, z\}$

（1）矢量 a 的模 $|a| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ （2）单位矢量

$$a^o = \frac{a}{|a|} = \left\{ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right\}$$

（3）矢量 a 的方向余弦 $\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \sin\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

（4）设 $M_1(x\ , y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$,，则 $\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$

二、矢量的运算

1．加减运算

设 $a = \{x_1, y_1, z_1\}, b = \{x_2, y_2, z_2\}$ 则 $a \pm b = \{x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2\}$

2．数乘矢量

设 $a = \{x, y, z\}, \lambda$ 为数量， $\lambda a = \begin{cases} |\lambda a| a^0, \lambda > 0, \text{则}\lambda a\text{与}a\text{同向} \\ 0, \quad \lambda = 0，\text{则}\lambda a\text{为零矢量} \\ -|\lambda a| a^0, \lambda > 0, \text{则}\lambda a\text{与}a\text{反向} \end{cases}$ 则， $\lambda a = \{\lambda x, \lambda y, \lambda z\}$

3．矢量的数积（点积，内积）

设 $a = \{x_1, y_1, z_1\}, b = \{x_2, y_2, z_2\}$, 则矢量 a 与 b 的数量积

$$a \cdot b = |a||b|\cos(a, b) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

4．矢量的矢积（叉积，外积）

设两矢量 a 与 b，若∃一个矢量 c，满足条件：

①$|c| = |a||b|\sin(a, b)$； ②$c \perp a, c \perp b$, 即 c 垂直于 a, b 所确定的平面； ③a, b, c 成右手系

则矢量 c 称为矢量于 a, b 的矢量乘积，记为 $c = a \times b$

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} k$$

5．混合积

设有三个矢量 $a = \{x_1, y_1, z_1\}, b = \{x_2, y_2, z_2\}, c = \{x_3, y_3, z_3\}$ 先作 a, b 的矢积 $a \times b$ 再与 c 作数乘积 $(a \times b)c$，

则称其为 a, b, c 的混合积，记做 $[a, b, c]$

$[a,b,c]=(a\times b)\cdot c=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$ $\left|[a,b,c]\right|$ 表示以 a,b,c 为棱的平行六面体积。