Théorie des Jeux

F. Bendali-Mailfert
bendali@isima.fr

Bur. D119 Bat. Isima

Plan du cours

- Introduction aux jeux à deux joueurs
-
-
  -
  -

Contexte et Définitions

Un jeu est défini par

- N joueurs ($N = 2$)
- Un ensemble de stratégies.
- Une issue du jeu : valeur qui donne pour chaque joueur le "montant" gagné ou "perdu".

On peut jouer en simultané ou en séquentiel ! !

Objectifs

Le joueur I a n stratégies et le joueur II a m stratégies.

1. Simultané :
   Chacun en choisie une : Choix de la stratégie $i = 1, \ldots, n$ pour I et de la stratégie $j = 1, \ldots, m$ pour II, le gain et la perte sont une conséquence de ce choix.
2. Séquentiel :
   Chacun à son tour en choisie une : Choix de la stratégie $i = 1, \ldots, n$ pour I et de la stratégie $j = 1, \ldots, m$ pour II, le gain et la perte sont une conséquence de la suite de ces choix.

Deux cas de jeux simultanés $\rightarrow$ Forme normale *Matrice*

- Les jeux à deux joueurs à somme nulle.
- Les jeux à deux joueurs à somme constante.

Un cas de jeu séquentiel $\rightarrow$ Forme extensive *Arbre de décision*

Jeu à somme nulle

- Un joueur gagne ce que l'autre perd et inversement.
- Une matrice $A = (a_{ij}; i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, m)$ représente les issues du jeu.
- Si $a_{ij} > 0$ alors c'est un gain pour le joueur en ligne I. C'est le joueur *maximisateur*. Le joueur II est le joueur en colonne qui perd $a_{ij} > 0$, c'est le joueur *minimisateur*.
  Si $a_{ij} < 0$ c'est une perte pour le joueur en ligne I et un gain pour le joueur II.

Jeu à somme constante

- Classe de jeux qui généralise la précédente.
- Une matrice $A = (a_{ij}; i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, m)$ représente les issues du jeu
- Si I joueur en ligne obtient a_{ij} en jouant la stratégie i alors le joueur II obtient la valeur $C - a_{ij}$ en choisissant la stratégie j, où C est la constante du jeu.

Jeu papier (P), ciseaux (Ci), cailloux (Ca) : Somme nulle

- :
  (Issues : *le papier enveloppe le caillou, le caillou résiste aux ciseaux et les ciseaux coupent le papier*)
- 3 stratégies pour chaque joueur : $1 : P$, $2 : Ci$ et $3 : Ca$.
- La matrice A du jeu a 3 lignes et 3 colonnes, elle est définie par
  $$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
- $a_{23} = -1 < 0$ est une perte pour I car il joue "ciseaux" face au joueur II qui joue "caillou" qui résiste aux ciseaux et II gagne 1.

Jeu de production : Somme constante

- Deux entreprises introduisent chacune un produit sur le marché. Elles choisissent la période d'introduction du produit sur 3 mois.
- 3 stratégies pour chaque joueur : 1 : premier mois , 2 : deuxième mois, et 3 : troisième mois.
- La matrice A du jeu a 3 lignes et 3 colonnes, elle est définie par

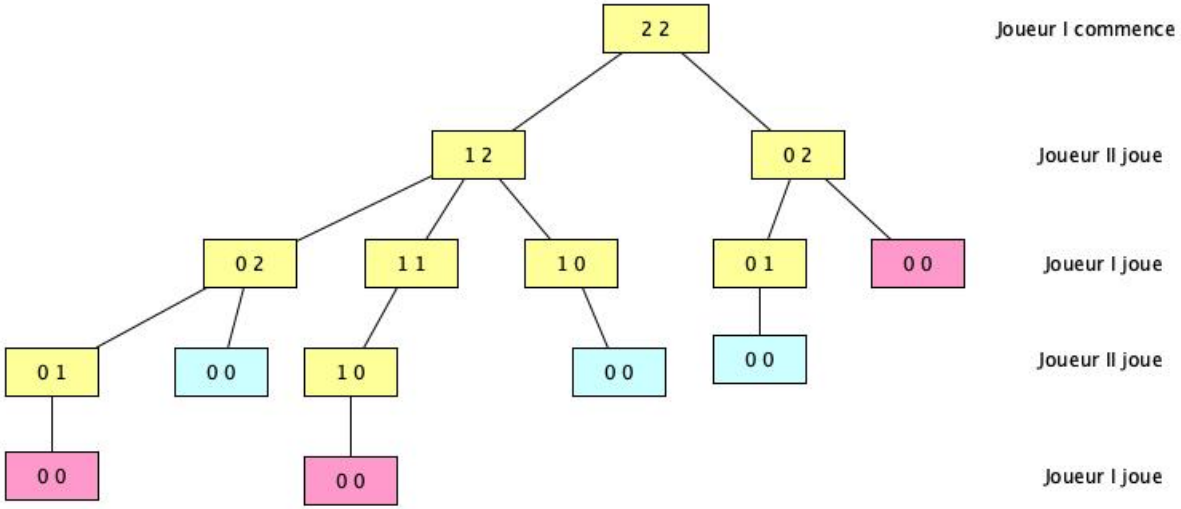
$$A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.6 & 0.8 \\ 0.4 & 0.5 & 0.9 \\ 0.2 & 0.4 & 0.5 \end{pmatrix}$$

- $a_{13} = 0.8$, le joueur I obtient 80% du marché car il choisit d'introduire son produit au premier mois face au joueur II qui choisit d'introduire le sien au troisième mois. II a trop attendu et n'obtient que 100-80=20 % du marché, la constante est 100.

Jeux séquentiels : jeu de Nim 2×2

Règle du jeu : 4 pièces sont disposées en 2 piles de 2 pièces chacune. Le joueur *I* commence : il choisit une pile et décide d'enlever 1 ou 2 pièces de la pile choisie. Le joueur *II* choisit à son tour une pile avec au moins une pièce et décide du nombre de pièces à retirer. Puis *I* joue de la même façon.
Lorsque les 2 piles sont vides, le jeu s'arrête. Le perdant est celui qui a retiré la dernière pièce.

Le jeu de Nim est séquentiel, il peut être représenté par l'arbre de décision suivant :



Passage Forme Extensive à forme Normale

Dans le jeu de Nim, les stratégies des deux joueurs sont :
Joueur *I*

- 1 : Jeu (1,2) puis si (0,2) alors jeu (0, 1)
- 2 : Jeu (1,2) puis si (0,2) alors jeu (0, 0)
- 3 : Jeu (0,2)

Joueur *II*

- *a* : Si (1,2) $\rightarrow$ (0,2) ; si (0,2) $\rightarrow$ (0, 1)
- *b* : Si (1,2) $\rightarrow$(1,1) ; si (0,2) $\rightarrow$ (0, 1)
- *c* : Si (1,2) $\rightarrow$ (1,0) ; si (0,2) $\rightarrow$ (0, 1)
- *d* : Si (1,2) $\rightarrow$ (0,2) ; si (0,2) $\rightarrow$ (0, 0)
- *e* : Si (1,2) $\rightarrow$ (1,1) ; si (0,2) $\rightarrow$ (0, 0)
- *f* : Si (1,2) $\rightarrow$ (1,0) ; si (0,2) $\rightarrow$ (0, 0)

La matrice du jeu est :

$$A = \begin{array}{c|cccccc} & a & b & c & d & e & f \\ \hline 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

Analyse du jeu :

II ne joue jamais la stratégie e (perte) : pour lui, elle est dominée $\rightarrow$ éliminer e

II joue la stratégie c car quelque soit le choix de *I*, *II* gagne toujours.

Conclusion : La valeur du jeu est -1 avec les couples de stratégies $(1, c)$, $(2, c)$, $(3, c)$: Points selles ou stratégies optimales du jeu.

Jeu pair-impair

Règle du jeu : Chaque joueur décide de choisir le chiffre 1, 2 ou 3.
Si le nombre total est pair , le joueur *I* gagne 1 et *II* perd -1.
Si le nombre total est impair, Le joueur *I* perd -1 et 2 gagne 1.

Q : Stratégies ? Type de jeu ? Modèle ? Matrice ou arbre ?

Solution jeu pair-impair

Stratégies : 1, 2, 3 pour chaque joueur.
Jeu à somme nulle
Jeu simultané

Matrice $A =$

	1	2	3
1	1	-1	1
2	-1	1	-1
3	1	-1	1

Analyse

Le joueur *I* en ligne est maximisateur de son gain.
Le joueur *II* en ligne est minimisateur de sa perte.

Q : Choix pour chacun face à l'autre ?
Si *I* choisit la ligne 1 (3) et *II* la colonne 2 (1) : *I* (*II*) perd 1 et *II* (*I*) gagne 1 $\rightarrow$, *I* (*II*) n'est pas content ! !

Raisonnement du joueur en ligne

I suppose que le joueur II joue son meilleur coup :$\rightarrow$ la colonne j telle que :

$$\mathrm{Min}\{a_{ij}, j = 1, \ldots, m\}, \forall i = 1, \ldots, n$$

D'où le joueur I va maximiser cette valeur :

$$v^{-} = Max_{i=1,\ldots,n}(Min_{j=1,\ldots,m}\{a_{ij}\})$$

v^{-} est le plus petit gain que peut s'assurer I.

Raisonnement du joueur en colonne

II suppose que *I* a fait son meilleur choix de ligne : $\rightarrow$ la ligne i telle que :

$$\mathrm{Max}\{a_{ij}, i = 1, \ldots, n\}, \forall j = 1, \ldots, m$$

D'où le joueur *II* va minimiser cette valeur :

$$v^+ = Min_{j=1,\ldots,m}(Max_{i=1,\ldots,n}\{a_{ij}\})$$

v^+ est la plus grande perte que *II* peut subir.

Propriété

$$v^- \leq v^+$$

Définition

- Toute matrice de jeu $A_{(n,m)}$ admet une plus petite valeur $v^- = Max_{i=1,\ldots,n}(Min_{j=1,\ldots,m}\{a_{ij}\})$ et une plus grande valeur $v^+ = Min_{j=1,\ldots,m}(Max_{i=1,\ldots,n}\{a_{ij}\})$
- Le jeu admet une valeur v si $v = v^- = v^+$; Si $v > 0$, gain pour I sinon perte.
- Les ligne et colonne i^* et j^* telles que $a_{i^*j^*} = v$ sont des stratégies *pures* optimales.
- $a_{ij^*} \leq a_{i^*j^*} \leq a_{i^*j}$

Exemple 1

Jeu de Nim

$$A = \begin{array}{c|cccccc} & a & b & c & d & e & f \\ \hline 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

$v^- = MaxMin = -1$, ligne choisie : $i^* = 1$ ou $i^* = 2$ ou $i^* = 3$

$v^+ = MinMax = -1$, colonne choisie $j^* = c$

On retrouve les résultats de l'analyse du jeu : $v = v^- = v^+ = -1$; $(i^*, j^*) = (1, c)$ ou $(i^*, j^*) = (2, c)$ ou $(i^*, j^*) = (3, c)$ sont des points selle.

$v < 0$ perte pour I et gain pour II.

Exemple 2

$A =$

	a	b	c	Min
1	1	-2	-3	-2
2	2	-1	-5	-5
3	2	3	1	1
Max	2	3	1	

$v^- = MaxMin = 1$, ligne choisie : $i^* = 3$

$v^+ = MinMax = 1$, colonne choisie $j^* = 3$

$v = v^- = v^+ = 1$;

$(i^*, j^*) = (3, 3)$ point selle ;

$v > 0$ gain pour I et perte pour II.

Définition

Une stratégie mixte est un vecteur :

- $X = (x_1, \ldots, x_n)$ pour le joueur I tel que
  $x_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$
  x_i représente la probabilité de choisir la ligne i
- $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ pour le joueur II tel que
  $y_j \geq 0$ et $\sum_{j=1}^{m} y_j = 1$
  y_j représente la probabilité de choisir la colonne j

Remarque

Une stratégie pure i est le vecteur $X = (0, \ldots, 0, x_i = 1, 0, \ldots, 0)$.

Exemple pour les stratégies mixtes

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}$$