Alexis PLESSIER N3 Informatique

Exercice 1
Théorie des Jeux
TD2
Page (1/2)

2020-2021

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Stratégie pure : $v^- = 0$
$v^+ = 1$

Stratégie mixte :

$$\begin{array}{cc} & \text{II} \\ & \begin{array}{cc} y_1 & y_2 \end{array} \\ \text{I} \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

I : Maximum gain g : $x_1 - x_2 \geq g$ (1)
$2x_2 \geq g$ (2)
$x_1 + x_2 = 1$ (3) avec $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$

Pour le joueur I (en colonne) : $x_1 = 1 - x_2$ (d'après (3))

Recherche de x_2 et g : (1) : $1 - x_2 - x_2 \geq g$
$\Rightarrow -2x_2 \geq g - 1$
$\Rightarrow -2x_2 \cancel{-g} \geq -1$
$\Rightarrow 2x_2 + g \leq 1$

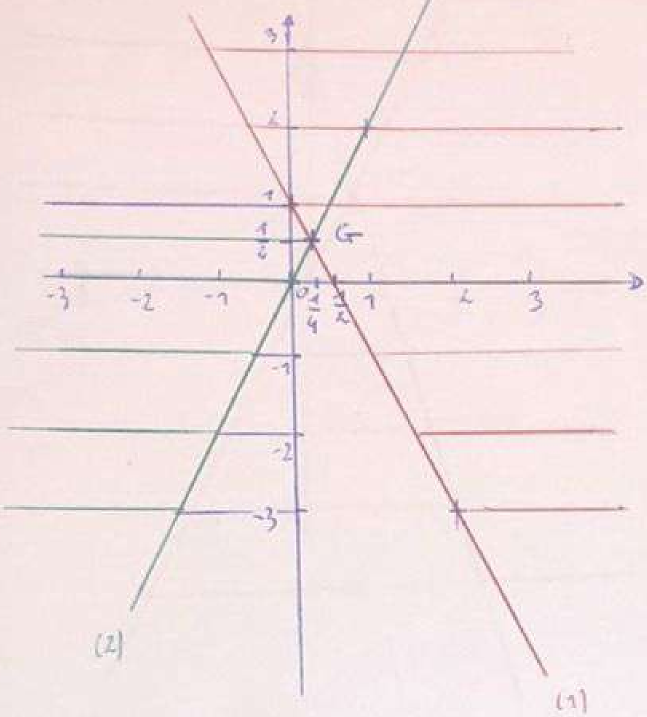
(2) : $2x_2 \geq g$
$\Rightarrow 2x_2 - g \geq 0$
$\Rightarrow -2x_2 + g \leq 0$

(1) : $2x_2 + g \leq 1$:

$x_2 = 0$	$x_2 = 2$
$g = 1$	$g = -3$

(2) : $-2x_2 + g \leq 0$:

$x_2 = 0$	$x_2 = 1$
$g = 0$	$g = 2$



Calcul de G : $2x_2 + g = 1$ (1)

$-2x_2 + g = 0$ (2)

On cherche (1) ∩ (2) = G :

$2x_2 + g - 1 = -2x_2 + g$

$\Rightarrow 4x_2 = 1$

$\Rightarrow \boxed{x_2 = \frac{1}{4}}$

$\Rightarrow 2x_2 + g = 1$

$\Rightarrow \frac{1}{2} - 1 = -g$

$\Rightarrow \boxed{g = \frac{1}{2}}$ d'où $G = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow x_1 = 1 - x_2$

$\Rightarrow \boxed{x_1 = \frac{3}{4}}$

La stratégie optimale de I est donc $\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right) = x^*$ et la valeur du jeu est $\frac{1}{2}$, elle est positive donc I obtient un gain alors que II obtient une perte.

②

$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$

Stratégie pure $v^- = v^+ = 5$

Point selle donc stratégie optimale pour Joueur I car $v > 0$.

Stratégie mixte :

$$\begin{array}{cc} & \text{II} \\ & \begin{array}{cc} y_1 & y_2 \end{array} \\ \text{I} \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \end{array}$$

I : Maximum gain g : $3x_1 + 5x_2 \geq g$ (1)

$x_1 + 7x_2 \geq g$ (2)

$x_1 + x_2 = 1$ (3) avec $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$

Alexis
PLESSIER
N3 Informatique

Exercice 1
Théorie des Jeux
TD2
Page (2/2)

2020 - 2021

Pour le joueur I (en colonne) : $x_1 = 1 - x_2$ (d'après (3)).

Recherche de x_2 et g :

(1) : $3(1-x_2) + 5x_2 \geq g$
$\Rightarrow 3 + 2x_2 \geq g$
$\Rightarrow -2x_2 + g \leq 3$

(2) : $1 - x_2 + 7x_2 \geq g$
$\Rightarrow 1 + 6x_2 - g \geq g$
$\Rightarrow -6x_2 + g \leq 1$

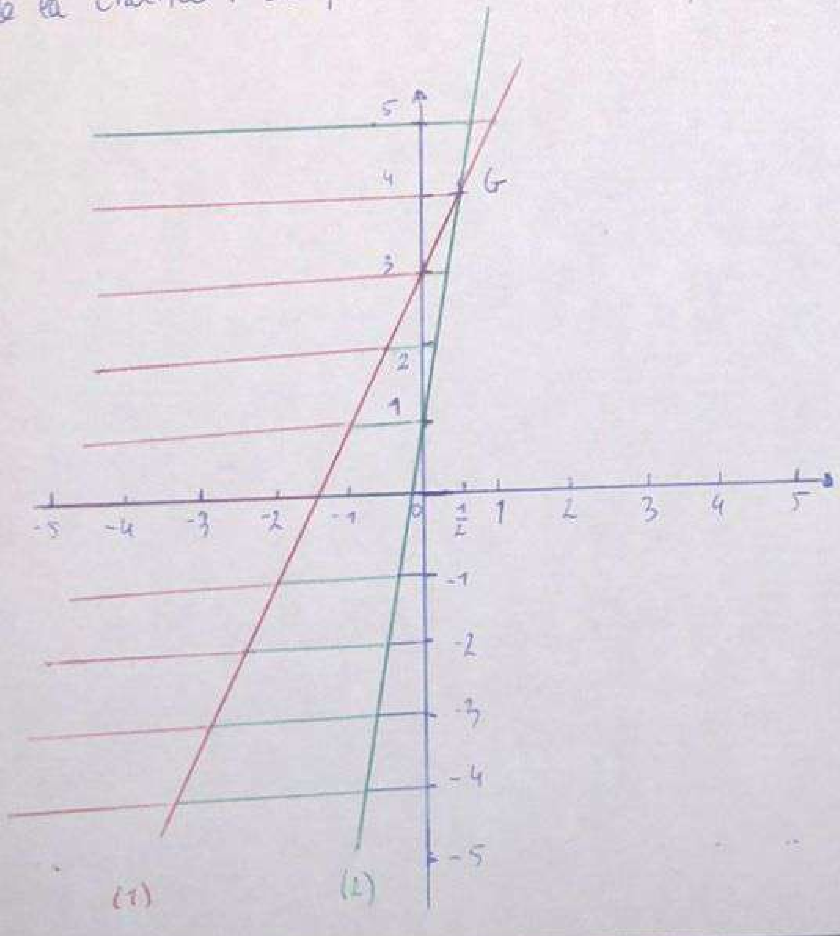
(1) : $-2x_2 + g \leq 3$:

$x_2 = 0$	$x_2 = \frac{1}{2}$
$g = 3$	$g = 4$

(2) : $-6x_2 + g \leq 1$

$x_2 = 0$	$x_2 = \frac{1}{2}$
$g = 1$	$g = 4$

En voulant construire nos droites, nous avons remarqué que 2 points des deux droites sont identiques. Nous avons donc trouvé le point d'intersection des deux droites sans le vouloir, nous avons de la chance ! Je pourrais m'arretter là, mais je vais quand même construire les droites.



Nous savons donc que $G = \left(\frac{1}{2}, 4\right)$ donc la stratégie optimale de I est donc $x^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ car $\boxed{x_1 = 1 - \frac{1}{2}}$

La valeur du jeu est donc égale à 4, elle est positive donc I obtient un gain alors que II obtient une perte.

Nous retrouvons bien notre point selle trouver en stratégie pure.