Théorie des Jeux

F. Bendali-Mailfert
bendali@isima.fr

Bur. D119 Bat. Isima

- Jeux simultanés (Forme normale)
  - Stratégies pures
  - Stratégies mixtes-Equilibre de Nash
- Jeux séquentiel

Jeux simultanés

Le jeu est défini par

- N joueurs ($N = 2$)
- Un ensemble de stratégies.
- Une issue du jeu : valeur qui donne pour chaque joueur le "montant" gagné ou "perdu".

On peut jouer en simultané ou en séquentiel ! !

Représentation de la forme normale

Le joueur I a n stratégies et le joueur II a m stratégies.
Une matrice A à n lignes et m colonnes représente le jeu.
L'élément de la ligne i et de la colonne j comprend les issues des deux joueurs (a_{ij}, b_{ij}) où :
a_{ij} est le gain ou la perte de I lorsqu'il choisit la stratégie i face à II qui choisit la stratégie j et gagne ou perd b_{ij}.

Exemple de jeu simultané

Deux étudiants ont un examen le lendemain. Ils peuvent choisir de réviser ou d'aller danser. La matrice des gains est donnée par :

$$A = \begin{array}{c|cc} & \text{Réviser} & \text{Danser} \\ \hline \text{Réviser} & (2,2) & (3,1) \\ \text{Danser} & (1,3) & (4,1) \end{array}$$

Tous les deux révisent : Ils sont satisfaits de pouvoir réussir.
L'un révise (Content qu'il puisse réussir mieux que l'autre) et l'autre danse (Content de danser mais un peu soucieux).
Les 2 dansent : l'un n'a aucun remord et l'autre en a beaucoup.

Comment jouer ?

Algorithme de meilleure réponse

Définition

- La meilleure réponse de I face au choix $Y^0 \in S_m$ de II est $X^0 \in S_n$ telle que :

$$E_I(X^0, Y^0) = Max_{X \in S_n} E_I(X, Y^0)$$

- La meilleure réponse de II face au choix $X^0 \in S_n$ de II est $Y^0 \in S_m$ telle que :

$$E_{II}(X^0, Y^0) = Max_{Y \in S_m} E_{II}(X^0, Y)$$

Jouons à donner la meilleure réponse !

$$A = \begin{pmatrix} (2,2) & (3,1) \\ (1,3) & (4,1) \end{pmatrix}$$

- Si I choisit de "Réviser" alors II choisit de "Réviser" d'où I choisit de "Réviser" : les deux joueurs restent sur le même choix à l'infini. Leur gain est $E_I(\text{Réviser}, \text{Réviser}) = 2$ et $E_{II}(\text{Réviser}, \text{Réviser}) = 2$.
- Si I choisit de "Danser" alors II choisit de "Réviser" d'où I choisit de "Réviser" et II choisit de "Réviser" : les deux joueurs reviennent sur le même choix.

Le couple de stratégies $(\text{Réviser},\text{Réviser})$ est un point d'équilibre pour les deux joueurs. Pour ce jeu, il est unique.

Equilibre de Nash

Propriétés

- Le couple de stratégies (X^*, Y^*) tel que :

$$Max_{X \in S_n} E_I(X, Y^*) = Max_{Y \in S_m} E_{II}(X^*, Y)$$

  est un équilibre de Nash. Il est obtenu par l'algorithme de meilleure réponse.
- Un équilibre de Nash (i^*, j^*) en stratégies pures est la ligne i^* telle que $a_{ij^*} \leq a_{i^*j^*}$ et $b_{i^*j} \leq b_{i^*j^*}$ pour toutes les lignes i et colonnes j.
- $a_{i^*j^*}$ est la plus grande valeur de la ligne i^* et de la colonne j^*.
- Si $a_{ij} = -b_{ij}, \forall i, \forall j$ alors le jeu est à somme nulle.

QUESTIONS :

1. Existe-t-il toujours un équilibre de Nash en stratégies pures ?
2. Existe-t-il un équilibre de Nash en stratégies mixtes ?
3. Comment le calculer ?

Deux complices sont arrêtés et interrogés dans 2 pièces différentes pour éviter de communiquer. Le but de la police est d'essayer de faire avouer à l'un et à l'autre leur vol et le lieu où ils ont caché leur butin.

On considère la matrice du jeu qui en résulte avec les stratégies "se taire" et "dénoncer" :

	se taire	dénoncer
se taire	$(-5,-5)$	$(0,-20)$
dénoncer	$(-20,0)$	$(-1,-1)$

- **Equilibre : I choisit de se taire alors II choisit de se taire** car si I choisit de dénoncer alors II choisit de se taire et I choisit de se taire, on revient à l'équilibre.
- Si l'un dévie du point d'équilibre alors il perd 20 au lieu de 5
- Cet équilibre leur rapporte moins que le choix (dénoncer, dénoncer) pourtant. Mais ce choix est instable.
  La conclusion est que dans ce dilemme, les joueurs refusent de coopérer.

Il n' y a pas toujours unicité de l'équilibre de Nash

Nouvelle matrice pour les deux étudiants (moins "studieux")

$$A = \begin{array}{c|cc} & \text{Réviser} & \text{Danser} \\ \hline \text{Réviser} & (2,2) & (3,1) \\ \text{Danser} & (1,3) & (4,4) \end{array}$$

2 equilibres :

Si I choisit "Réviser" $\rightarrow$ II choisit "Réviser"

I choisit "Danser" $\rightarrow$ II choisit "Danser"

Lequel est meilleur ?

Il n' y a pas toujours déquilibre de Nash

$$A = \begin{array}{c|ccc} & 1 & & 2 \\ \hline a & (2,0) & \rightarrow & (1,3) \\ & \uparrow & & \downarrow \\ & \uparrow & & \downarrow \\ b & (0,1) & \leftarrow & (3,0) \end{array}$$

$I : a \rightarrow II : 2 \rightarrow I : b \rightarrow II : 1 \rightarrow I : a$

Bouclage et cycle : Pas d'équilibre ... en stratégies pures ! !

Mais en stratégies mixtes, il existe toujours un équilibre de Nash.

Jeu séquentiel : forme extensive

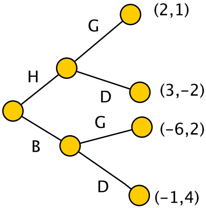
- Connaissant le jeu de l'adversaire, quelle décision prendre avec cette information ?
- On peut passer d'un jeu simultané à un jeu séquentiel et inversement.
- Un jeu séquentiel se joue sur un arbre :
  - Il est composé de : la Racine, les nœuds de décision et les gains sur les feuilles.
  - Jeu à information complète : Tout joueur connait l'arbre de décision complet.

Différences entre un jeu séquentiel et un jeu simultané

Exemple :
2 joueurs sélectionnent une direction, I : Haut Bas et II : Gauche Droite.
Jeu sequentiel I joue en premier H ou B., II connaissant le jeu de I, va choisir G ou D. D'où les stratégies du joueur II

1. GG : si I joue H alors G ; si I joue B alors G ;
2. GD : si I joue H alors G ; si I joue B alors D ;
3. DG : si I joue H alors D ; si I joue B alors G ;
4. DD : si I joue H alors D ; si I joue B alors D ;

Forme extensive



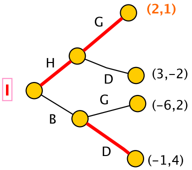
Forme normale

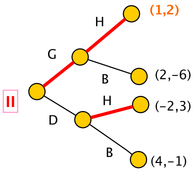
	GG	GD	DG	DD
H	$(2,1)$	$(2,1)$	$(3,-2)$	$(3,-2)$
B	$(-6,2)$	$(-1,4)$	$(-6,2)$	$(-1,4)$

Forme normale. Un équilibre unique de Nash : (H, G)

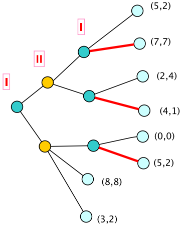
	G	D
H	$(2, 1)$	$(3, -2)$
B	$(-6, 2)$	$(-1, 4)$

Forme extensive. Un équilibre unique : (H, G) si I commence et (G, H) si II commence.

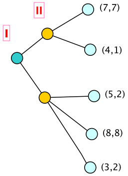




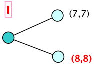
Récurrence à rebours : Exemple



Arbre Initial



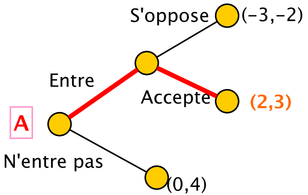
Première réduction

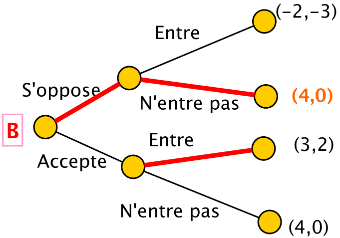


Deuxième réduction

Exemple Jeu de production

	S'oppose	Accepte
Entre	$(-3, -2)$	$(2, 3)$
N'entre pas	$(0, 4)$	$(0, 4)$





Equilibre parfait en sous jeux

Définition

Un équilibre parfait en sous jeu pour la forme extensive est un équilibre de Nash dont la restriction à tout sous jeu est encore un équilibre de Nash.

Si $I : G$ alors $II : H$ et si $I : D$ alors $II : B$ alors l'équilibre parfait en sous jeu est $I : G$ et $II : H$ de gain $(3, 1)$.

	H	B
G	$(3, 1)$	$(0, 0)$
D	$(0, 0)$	$(1, 3)$