Correction TD 9 Exo 1

Exercice 1 Soit $G = (V, A)$ un graphe orienté. Nous souhaitons savoir si le graphe est fortement connexe.

1. Rappelez la définition de fortement connexe.
2. Concevez un algorithme qui s'exécute en temps $O(n + m)$ qui vérifie si le graphe est fortement connexe [1].
3. Si le graphe n'est pas fortement connexe comment peut-on s'assurer (avec une preuve) que le graphe a au moins deux composantes fortement connexes.

Correction :

1.) **Définition :** Un graphe G est fortement connexe ssi pour toute paire de sommets y et z il existe dans G un chemin de y à zz et un chemin de z à y.

2.) Algorithme pour vérifier qu'un graphe est fortement connexe

1. Effectuer un Parcours en profondeur [2] à partir d'un sommet v (peu importe le sommet). (Revient à utiliser la fonction **Visiter-PP(v)** du cours).
   (a) Si il existe un p sommet de G non atteint (un sommet qui est resté blanc) le graphe n'est pas fortement connexe : Renvoyer faux.
2. Calculer le graphe graphe G^T (le graphe obtenu en inversant le sens de chaque arc).
3. Effectuer un parcours en profondeur à partir de v sur G^T.
   (a) Si il existe un sommet q qui n'est pas atteint ; le graphe n'est pas fortement connexe ; Renvoyer Faux
   (b) Renvoyer Vrai

Complexité : L'étape 1 et 3 est linéaire $O(n+m)$ car consiste à effectuer un parcours en profondeur. Chaque arête étant considéré au plus 2 fois dans le

1. On ne doit pas utiliser l'algorithme de calcul des Composantes fortement connexes vu en cours.
2. L'algorithme peut marcher avec n'importe quel parcours de graphe : Largeur ; Générique ; Lexicographique...

parcours et chaque sommet est traité une fois donc $O(n+m)$. L'étape 2, peut être faite en temps $O(n)$ en fonction de l'implémentation de la structures du graphes. Si le graphe est représenté sous forme de liste d'adjacence. Pour chaque sommet on aura une liste pour les voisins sortants et une pour les entrants. Il suffit d'échanger les deux listes (modifier deux références...).

Correction de l'algorithme Définissons l'ensemble de sommet Y de la manière suivante $Y = V \setminus \{v\}$. Si l'algorithme renvoie vraie ; cela signifie que pour tout sommet y de Y. Il existe dans G un chemin de v vers y (garanti par le premier parcours) et un chemin de y vers v (garanti par le second parcours sur G^T).

Il reste donc à prouver que pour toute paire de sommets y_i, y_j de Y il existe deux chemins qui les relient (un de y_i vers y_j et l'autre de y_j vers y_i).

Montrons qu'il existe un chemin de y_i vers y_j dans G. On sait par le second parcours qu'il existe un chemin de y_i vers v et par le premier qu'il un chemin de v vers y_j. De manière symétrique on peut garantir l'existence d'un chemin de y_j vers y_i. Le graphe est fortement connexe.

3.) Si le graphe n'est pas fortement connexe, on peut certifier qu'il a au moins deux CFC en exhibant deux sommet x et y qui sont dans 2 CFCs différentes. Il est ensuite facile de vérifier qu'il n'existe pas de chemin de x vers y ou de chemin de y vers x.