Couplages

V. Limouzy

9 novembre 2020

Couplages

Definition (Couplage)

Un couplage M d'un graphe non orienté $G = (V, E)$ est un sous-ensemble d'arêtes de E tel que pour toutes paires d'arêtes m_i, m_j $(i \neq j)$ de M n'ont aucun sommet communs.

Couplages

Definition (Couplage)

Un couplage M d'un graphe non orienté $G = (V, E)$ est un sous-ensemble d'arêtes de E tel que pour toutes paires d'arêtes m_i, m_j $(i \neq j)$ de M n'ont aucun sommet communs.

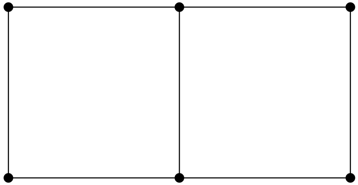
On note $\alpha'(G)$ la taille du couplage maximum.

Couplages

Definition (Couplage)

Un couplage M d'un graphe non orienté $G = (V, E)$ est un sous-ensemble d'arêtes de E tel que pour toutes paires d'arêtes m_i, m_j $(i \neq j)$ de M n'ont aucun sommet communs.

On note $\alpha'(G)$ la taille du couplage maximum.

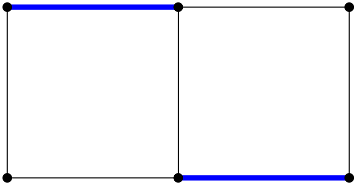


Couplages

Definition (Couplage)

Un couplage M d'un graphe non orienté $G = (V, E)$ est un sous-ensemble d'arêtes de E tel que pour toutes paires d'arêtes m_i, m_j $(i \neq j)$ de M n'ont aucun sommet communs.

On note $\alpha'(G)$ la taille du couplage maximum.

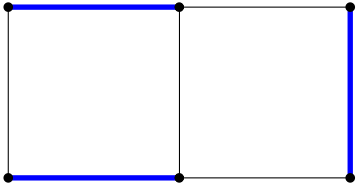


Couplages

Definition (Couplage)

Un couplage M d'un graphe non orienté $G = (V, E)$ est un sous-ensemble d'arêtes de E tel que pour toutes paires d'arêtes m_i, m_j $(i \neq j)$ de M n'ont aucun sommet communs.

On note $\alpha'(G)$ la taille du couplage maximum.



Couplages : Applications

Affectation de tâches

Soient :

- $T = \{t_1, t_2, \dots, t_l\}$ un ensemble de tâche à effectuer.
- $P = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ un ensemble de personnes.

On peut associer à ces deux ensembles un **graphe de compatibilité** où les sommets représentent les personnes et les tâches. Et on ajoute une arête p_i, t_j si la personne p_i est compétente pour effectuer la tâche t_j.

Couplages : Applications

Affectation de tâches

Soient :

- $T = \{t_1, t_2, \dots, t_l\}$ un ensemble de tâche à effectuer.
- $P = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ un ensemble de personnes.

On peut associer à ces deux ensembles un **graphe de compatibilité** où les sommets représentent les personnes et les tâches. Et on ajoute une arête p_i, t_j si la personne p_i est compétente pour effectuer la tâche t_j.

Objectif

On cherche à affecter à chaque personne une tâche, et que le plus de tâches soient effectuées.

Couplages parfaits/Couplages Maximum

Definition (Couplage parfait)

Un couplage M est parfait si M recouvre l'ensemble des sommets du graphe.

Couplages parfaits/Couplages Maximum

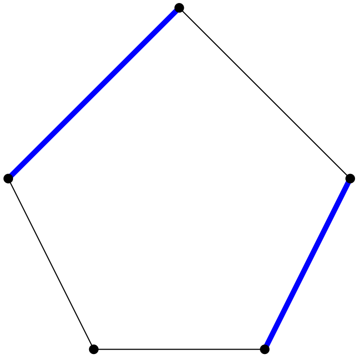
Definition (Couplage parfait)

Un couplage M est parfait si M recouvre l'ensemble des sommets du graphe.

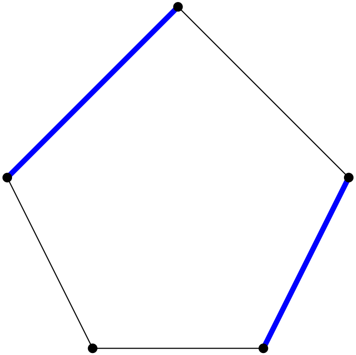
Objectifs

1. On cherche à trouver un couplage maximum.
2. Déterminer si le graphe contient un couplage parfait.
3. On cherche des conditions nécessaires suffisantes pour l'existence d'un couplage parfait.

Graphe sans couplage parfait



Graphe sans couplage parfait



Couplage Parfait : Condition nécessaire

Pour qu'un graphe admette un **couplage parfait** il doit avoir un **nombre pair** de sommets.

Chemin Alternant

Definition (Chemin M-alternant.)

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté et soit M un couplage de G. Un chemin P de G est dit M-alternant si les arêtes du chemin **alternent** successivement entre celles du couplages et celle du graphe qui ne sont pas dans M.

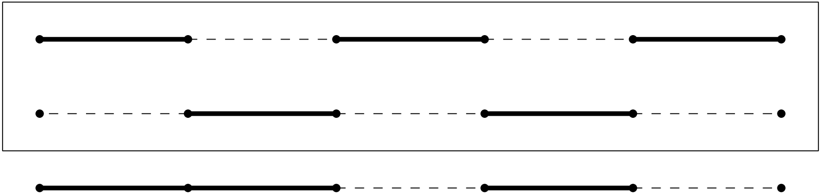
Chemin Alternant

Definition (Chemin M-alternant.)

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté et soit M un couplage de G. Un chemin P de G est dit M-alternant si les arêtes du chemin **alternent** successivement entre celles du couplages et celle du graphe qui ne sont pas dans M.

Exemple

Chemins alternants



Chemin non alternant

Chemin Augmentant

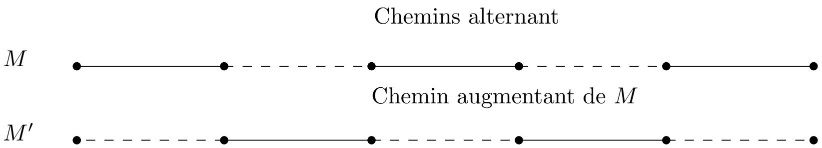
Definition (Chemin M-augmentant.)

Un chemin M-augmentant est un chemin alternant où la première arête et la dernière arête n'appartiennent pas au couplages.

Chemin Augmentant

Definition (Chemin M-augmentant.)

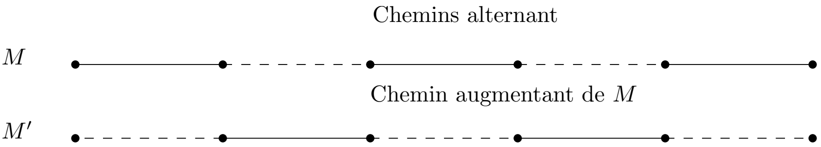
Un chemin M-augmentant est un chemin alternant où la première arête et la dernière arête n'appartiennent pas au couplages.



Chemin Augmentant

Definition (Chemin M-augmentant.)

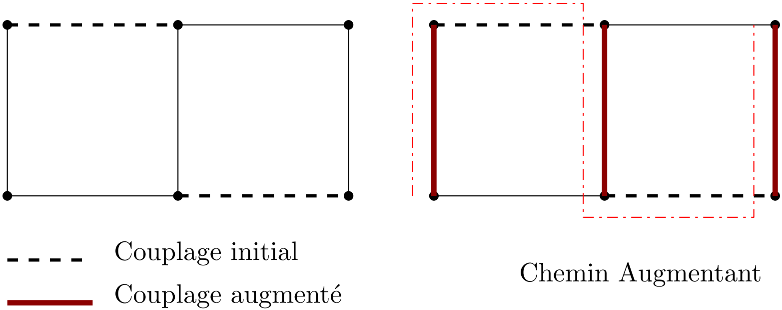
Un chemin M-augmentant est un chemin alternant où la première arête et la dernière arête n'appartiennent pas au couplages.



Augmentation

Pour augmenter un couplage à l'aide d'un *chemin augmentant* il suffit d'échanger sur ce chemine les arêtes qui appartiennent au couplage et celles qui n'y appartiennent pas encore.

Augmentation



Couplage Maximum

Theorem (Berge 1959)

Soit $G = (V, E)$ *un graphe et soit* M *un couplage. Le couplage* M *est maximum si et seulement si* G *ne contient pas de chemin* M*-augmentant.*

Couplage Maximum

Theorem (Berge 1959)

Soit $G = (V, E)$ un graphe et soit M un couplage. Le couplage M est maximum si et seulement si G ne contient pas de chemin M-augmentant.

Différence symétrique

Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble X.

$$A \Delta B = A \cup B \setminus A \cap B$$

Couplage Maximum

Theorem (Berge 1959)

Soit $G = (V, E)$ un graphe et soit M un couplage. Le couplage M est maximum si et seulement si G ne contient pas de chemin M-augmentant.

Différence symétrique

Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble X.

$$A \Delta B = A \cup B \setminus A \cap B$$

Démonstration

$\Rightarrow$ (Par contraposée) Soit M un couplage et soit P un chemin M-augmentant de G. Construisons un couplage $M' = M \Delta E(P)$. Alors $|M'| = |M| + 1$. Donc M n'est pas maximum.

Couplage Maximum

Démonstration (suite)

Leftarrow (Contraposée) Supposons que M ne soit pas un couplage maximum. Et soit M^* un couplage tel que $|M^*| > |M|$.

$\square$

Couplage Maximum

Démonstration (suite)

Leftarrow (Contraposée) Supposons que M ne soit pas un couplage maximum. Et soit M^* un couplage tel que $|M^*| > |M|$.

- On construit le graphe $H = G[M \Delta M^*]$.

$\square$

Couplage Maximum

Démonstration (suite)

Leftarrow (Contraposée) Supposons que M ne soit pas un couplage maximum. Et soit M^* un couplage tel que $|M^*| > |M|$.

- On construit le graphe $H = G[M \Delta M^*]$.
- Chaque sommet de H a degré 1 ou 2.

$\square$

Couplage Maximum

Démonstration (suite)

Leftarrow (Contraposée) Supposons que M ne soit pas un couplage maximum. Et soit M^* un couplage tel que $|M^*| > |M|$.

- On construit le graphe $H = G[M \Delta M^*]$.
- Chaque sommet de H a degré 1 ou 2.
- Chaque composante connexe de H est soit un chemin soit un cycle.

$\square$

Couplage Maximum

Démonstration (suite)

Leftarrow (Contraposée) Supposons que M ne soit pas un couplage maximum. Et soit M^* un couplage tel que $|M^*| > |M|$.

- On construit le graphe $H = G[M \Delta M^*]$.
- Chaque sommet de H a degré 1 ou 2.
- Chaque composante connexe de H est soit un chemin soit un cycle.
- Si H contient des cycles : ils ne nous intéressent pas.

$\square$

Couplage Maximum

Démonstration (suite)

Leftarrow (Contraposée) Supposons que M ne soit pas un couplage maximum. Et soit M^* un couplage tel que $|M^*| > |M|$.

- On construit le graphe $H = G[M \Delta M^*]$.
- Chaque sommet de H a degré 1 ou 2.
- Chaque composante connexe de H est soit un chemin soit un cycle.
- Si H contient des cycles : ils ne nous intéressent pas.
- Considérons les chemins.

$\square$

Couplage Maximum

Démonstration (suite)

Leftarrow (Contraposée) Supposons que M ne soit pas un couplage maximum. Et soit M^* un couplage tel que $|M^*| > |M|$.

- On construit le graphe $H = G[M \Delta M^*]$.
- Chaque sommet de H a degré 1 ou 2.
- Chaque composante connexe de H est soit un chemin soit un cycle.
- Si H contient des cycles : ils ne nous intéressent pas.
- Considérons les chemins.
- Comme $|M^*| > |M|$ on a au moins un chemin de H qui est augmentant.

$\square$

Graphes Bipartis

Graphe Biparti : rappel

Un graphe $G = (V, E)$ est biparti si on peut partitionner l'ensemble des sommets V en X et Y tels que

- $X \cap Y = \emptyset$.
- $X \cup Y = V$.
- $G[X]$ est un stable.
- $G[Y]$ est un stable.

Graphes Bipartis

Graphe Biparti : rappel

Un graphe $G = (V, E)$ est biparti si on peut partitionner l'ensemble des sommets V en X et Y tels que

- $X \cap Y = \varnothing$.
- $X \cup Y = V$.
- $G[X]$ est un stable.
- $G[Y]$ est un stable.

Couplages parfaits dans les bipartis :CNS

Dans les graphe bipartis on a une caractérisation pour l'existence d'un couplage parfait.

Théorème de Hall

Theorem (Hall - 1935)

Soit $G = (X, Y, E)$ *un graphe biparti non orienté. Le graphe* G *admet un couplage qui couvre tous les sommets de* X *si et seulement si* $\forall S \subseteq X$ *on a* $|S| \leq |N(S)|$.

Théorème de Hall

Theorem (Hall - 1935)

Soit $G = (X, Y, E)$ *un graphe biparti non orienté. Le graphe* G *admet un couplage qui couvre tous les sommets de* X *si et seulement si* $\forall S \subseteq X$ *on a* $|S| \leq |N(S)|$.

Preuve

$\Rightarrow$ Si G admet un couplage M qui couvre tous les sommets de X.

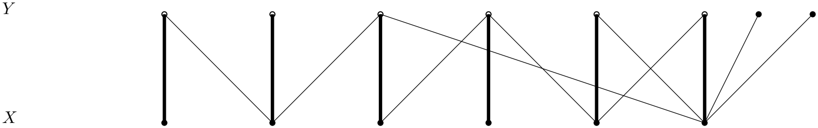
Théorème de Hall

Theorem (Hall - 1935)

Soit $G = (X, Y, E)$ un graphe biparti non orienté. Le graphe G admet un couplage qui couvre tous les sommets de X si et seulement si $\forall S \subseteq X$ on a $|S| \leq |N(S)|$.

Preuve

$\Rightarrow$ Si G admet un couplage M qui couvre tous les sommets de X.



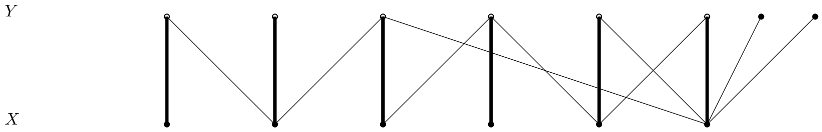
Théorème de Hall

Theorem (Hall - 1935)

Soit $G = (X, Y, E)$ *un graphe biparti non orienté. Le graphe* G *admet un couplage qui couvre tous les sommets de* X *si et seulement si* $\forall S \subseteq X$ *on a* $|S| \leq |N(S)|$.

Preuve

$\Rightarrow$ Si G admet un couplage M qui couvre tous les sommets de X.



Pour chaque sommet x de X on peut luis associer de manière unique un sommet y de Y auquel il est relié par M. Par conséquent quel que soit le sous-ensemble S de X qu'on considère on sait que $|S| \leq |N(S)|$.

Preuve (suite)

$\Leftarrow$ (par contraposée) Soit G un graphe biparti qui n'admet aucun couplage qui couvre tous les sommets de X. Soit M^* un couplage maximum de G.

Preuve (suite)

$\Leftarrow$ (par contraposée) Soit G un graphe biparti qui n'admet aucun couplage qui couvre tous les sommets de X. Soit M^* un couplage maximum de G.

- Soit u un sommet de X non couvert par M^*.

Preuve (suite)

$\Leftarrow$ (par contraposée) Soit G un graphe biparti qui n'admet aucun couplage qui couvre tous les sommets de X. Soit M^* un couplage maximum de G.

- Soit u un sommet de X non couvert par M^*.
- Soit Z l'ensemble des sommets accessibles par un chemin M^*-alternant à partir de u.

Preuve (suite)

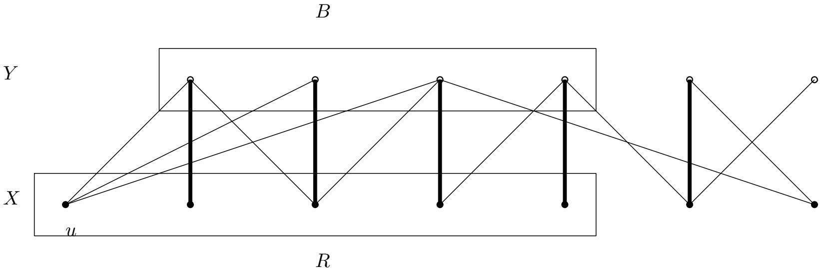
$\Leftarrow$ (par contraposée) Soit G un graphe biparti qui n'admet aucun couplage qui couvre tous les sommets de X. Soit M^* un couplage maximum de G.

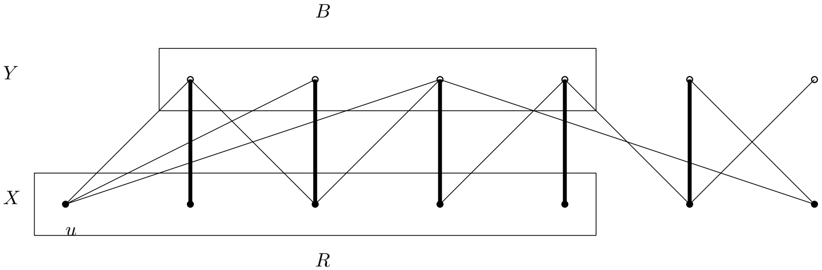
- Soit u un sommet de X non couvert par M^*.
- Soit Z l'ensemble des sommets accessibles par un chemin M^*-alternant à partir de u.
- Comme M^* est maximum u est le seul sommet non couvert de Z.

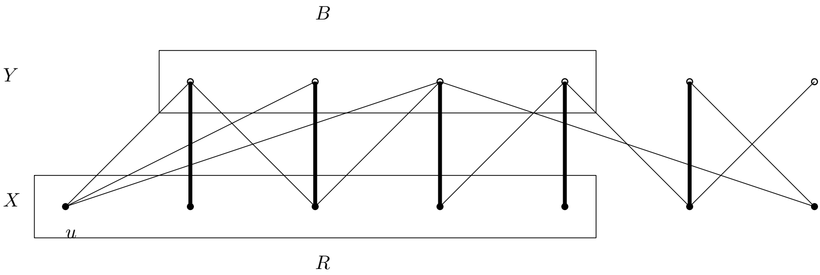
Preuve (suite)

$\Leftarrow$ (par contraposée) Soit G un graphe biparti qui n'admet aucun couplage qui couvre tous les sommets de X. Soit M^* un couplage maximum de G.

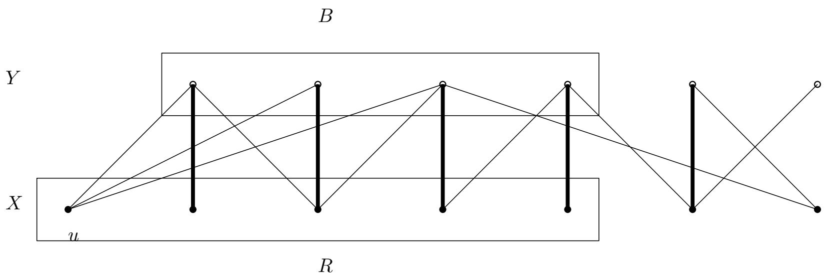
- Soit u un sommet de X non couvert par M^*.
- Soit Z l'ensemble des sommets accessibles par un chemin M^*-alternant à partir de u.
- Comme M^* est maximum u est le seul sommet non couvert de Z.
- On note $R = Z \cap X$ et $B = Z \cap Y$.


B
Y
X
u
R

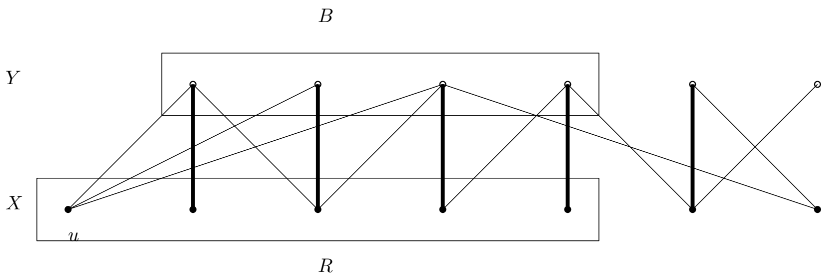

B
Y
X
u
R



- Par définition de Z tous les sommets de R sauf u sont touchés par M^*.



- Par définition de Z tous les sommets de R sauf u sont touchés par M^*.
- chaque sommet de sommet de R (sauf u) est en correspondance avec un sommet de B.



- Par définition de Z tous les sommets de R sauf u sont touchés par M^*.
- chaque sommet de sommet de R (sauf u) est en correspondance avec un sommet de B.
- Donc $|B| = |R| - 1$.

- On a $N(R) = B$. car définit comme accessible à partir de u. (Sinon on aurait un chemin augmentant).

- On a $N(R) = B$. car définit comme accessible à partir de u. (Sinon on aurait un chemin augmentant).
- en prenant $S = R$ on a un ensemble S tel que $|S| > |N(S)|$.

$\square$

- On a $N(R) = B$. car définit comme accessible à partir de u. (Sinon on aurait un chemin augmentant).
- en prenant $S = R$ on a un ensemble S tel que $|S| > |N(S)|$.

$\square$

Corollary

Un graphe biparti $G = (X, Y, E)$ admet un couplage parfait si et seulement si $|X| = |Y|$ et $|N(S)| \geq |S| \ \forall S \subseteq X$.

Couplages Max. graphe biparti avec problème de flot maximum.

Dans le cas des graphes biparti on peut résoudre le problème en le modélisant comme un flot. Soit $G = (X, Y, E)$ un graphe biparti, la transformation est la suivante :

1. On créé un graphe orienté $G_{s,t} = (X', Y', E')$.

Couplages Max. graphe biparti avec problème de flot maximum.

Dans le cas des graphes biparti on peut résoudre le problème en le modélisant comme un flot. Soit $G = (X, Y, E)$ un graphe biparti, la transformation est la suivante :

1. On créé un graphe orienté $G_{s,t} = (X', Y', E')$.
2. $X' = X \cup \{s\}$ et $Y' = Y \cup \{t\}$.

Couplages Max. graphe biparti avec problème de flot maximum.

Dans le cas des graphes biparti on peut résoudre le problème en le modélisant comme un flot. Soit $G = (X, Y, E)$ un graphe biparti, la transformation est la suivante :

1. On créé un graphe orienté $G_{s,t} = (X', Y', E')$.
2. $X' = X \cup \{s\}$ et $Y' = Y \cup \{t\}$.
3. On ajoute tous les arcs de s vers les sommets de X.

Couplages Max. graphe biparti avec problème de flot maximum.

Dans le cas des graphes biparti on peut résoudre le problème en le modélisant comme un flot. Soit $G = (X, Y, E)$ un graphe biparti, la transformation est la suivante :

1. On créé un graphe orienté $G_{s,t} = (X', Y', E')$.
2. $X' = X \cup \{s\}$ et $Y' = Y \cup \{t\}$.
3. On ajoute tous les arcs de s vers les sommets de X.
4. On ajoute tous les arcs des sommets de y vers t.

Couplages Max. graphe biparti avec problème de flot maximum.

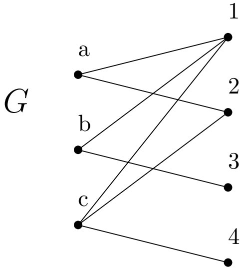
Dans le cas des graphes biparti on peut résoudre le problème en le modélisant comme un flot. Soit $G = (X, Y, E)$ un graphe biparti, la transformation est la suivante :

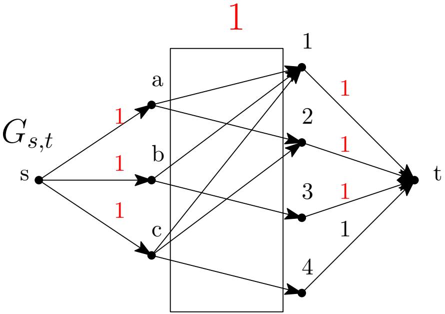
1. On créé un graphe orienté $G_{s,t} = (X', Y', E')$.
2. $X' = X \cup \{s\}$ et $Y' = Y \cup \{t\}$.
3. On ajoute tous les arcs de s vers les sommets de X.
4. On ajoute tous les arcs des sommets de y vers t.
5. On oriente les arêtes de E de X vers Y.

Couplages Max. graphe biparti avec problème de flot maximum.

Dans le cas des graphes biparti on peut résoudre le problème en le modélisant comme un flot. Soit $G = (X, Y, E)$ un graphe biparti, la transformation est la suivante :

1. On créé un graphe orienté $G_{s,t} = (X', Y', E')$.
2. $X' = X \cup \{s\}$ et $Y' = Y \cup \{t\}$.
3. On ajoute tous les arcs de s vers les sommets de X.
4. On ajoute tous les arcs des sommets de y vers t.
5. On oriente les arêtes de E de X vers Y.
6. Toutes les capacités sont à 1.


G
a
b
c
1
2
3
4


G_{s,t}
s
a
b
c
1
2
3
4
t
1
1
1
1
1
1
1
1
1

Theorem

G admet un couplage de taille k si et seulement si il existe un flot de valeur k qui transite sur $G_{s,t}$.

Preuve

$\Rightarrow$Si G admet un couplage M de taille k, alors dans $G_{s,t}$ on peut associer un flot en faisant transiter une quantité 1 sur les arcs associés aux arêtes du couplage. On peut étendre avec les arcs qui partent de s et aux arcs qui arrivent à t. La capacité des arcs n'est pas dépassée.

Preuve (suite)

$\Leftarrow$ Si $G_{s,t}$ admet un flot de valeur k. Alors on sait qu'il existe un flot f de même valeur où les quantités qui transite sur chaque arc sont entières. Si l'on considère les arcs de X vers Y pour lesquels la quantité qui transite est à 1. Notons cet ensemble μ, alors les arêtes de μ forment un couplage, car par construction, pour toutes paires d'arcs qui arrivent sur un sommet y_j, un seul peut être retenu. De manière symétrique, pour toute paires d'arcs qui partent d'un sommet x_i un seul peut partir de x_i. $\square$

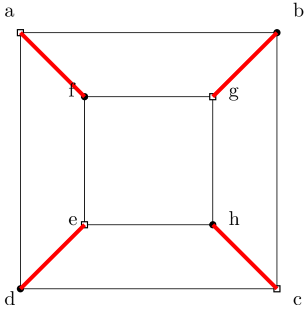
Definition (Couverture d'arête (Vertex Cover))

Soit $G = (V, E)$ un graphe, un sous-ensemble sommets S de G est un ensemble couverture d'arêtes de G si toute arête de G a au moins une de ses extrémités dans S.

Definition (Couverture d'arête (Vertex Cover))

Soit $G = (V, E)$ un graphe, un sous-ensemble sommets S de G est un ensemble couverture d'arêtes de G si toute arête de G a au moins une de ses extrémités dans S.

Exemple



On note $\beta(G)$ la taille du vertex cover minimum.

On note $\beta(G)$ la taille du vertex cover minimum.

Remarque

Soit S un vertex cover minimal. L'ensemble $V \setminus S$ est un stable maximal.

On note $\beta(G)$ la taille du vertex cover minimum.

Remarque

Soit S un vertex cover minimal. L'ensemble $V \setminus S$ est un stable maximal.

Remarque

Le problème de vertex cover est un problème difficile : pas d'algorithme polynomial connu.

Approximation

On peut approximer le vertex cover avec la taille du couplage maximum :

$$\beta(G) \leq 2 \cdot \alpha'(G)$$

Approximation

On peut approximer le vertex cover avec la taille du couplage maximum :

$$\beta(G) \leq 2 \cdot \alpha'(G)$$

Preuve

Soit M^* un couplage maximum. Si on considère les sommets du couplage, cela forme un vertex cover (car touches toutes les arêtes). Sinon on aurait une arête e avec aucune extrémité dans M^*, arête qu'on pourrait ajouter à M^*. $\square$

Vertex cover dans les bipartis

Dans les graphes bipartis on a une égalité entre les deux paramètres.

Vertex cover dans les bipartis

Dans les graphes bipartis on a une égalité entre les deux paramètres.

Theorem (König (1931) – Ergevary (1931))

Soit $G = (X, Y, E)$ un graphe biparti, l'égalité suivante est vérifiée :

$$\alpha'(G) = \beta(G)$$

Preuve

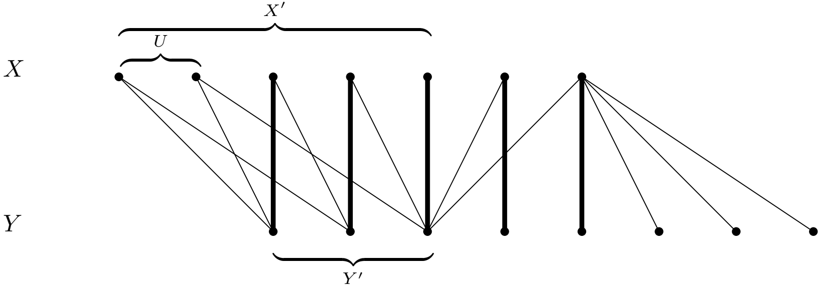
Preuve

Soit M^* un couplage maximum. Soit U l'ensemble des sommets de X non couverts par M^*. On définit X' et Y' comme les sommets accessibles depuis un sommet de U par un chemin M^*-alternant.

Preuve

Preuve

Soit M^* un couplage maximum. Soit U l'ensemble des sommets de X non couverts par M^*. On définit X' et Y' comme les sommets accessibles depuis un sommet de U par un chemin M^*-alternant.



Preuve (suite)

1. Tous les sommets de Y' sont couverts par ceux de X'.

Preuve (suite)

1. Tous les sommets de Y' sont couverts par ceux de X'.
2. On a $N(Y') = X'$.

Preuve (suite)

1. Tous les sommets de Y' sont couverts par ceux de X'.
2. On a $N(Y') = X'$.
3. $S = Y' \cup (X \setminus X')$.

Preuve (suite)

1. Tous les sommets de Y' sont couverts par ceux de X'.
2. On a $N(Y') = X'$.
3. $S = Y' \cup (X \setminus X')$.
4. Toutes arêtes de G a une extrémité dans S.

Preuve (suite)

1. Tous les sommets de Y' sont couverts par ceux de X'.
2. On a $N(Y') = X'$.
3. $S = Y' \cup (X \setminus X')$.
4. Toutes arêtes de G a une extrémité dans S.
5. $|S| = |M|$. $\square$