Fin chapitre ACPM

V. Limouzy

1er novembre 2020

Invariant de couleur

Une fois que chaque arête a reçu une couleur :

- Les arêtes bleues sont inclus dans un ACPM.
- Les arêtes rouge en sont exclues.

Definition (Algorithme Glouton)

Un algorithme est un algorithme **glouton** (*greedy* en Anglais) qui effectue, à chaque étape, un choix local optimal et qui le reste jusqu'à la fin

Definition (Algorithme Glouton)

Un algorithme est un algorithme **glouton** (*greedy* en Anglais) qui effectue, à chaque étape, un choix local optimal et qui le reste jusqu'à la fin

Theorem

L'algorithme **glouton** *qui consiste à appliquer la règle rouge ou la règle bleue maintient l'invariant de couleur.*

Preuve 1/2.

Soit e l'arête qui va être coloriée en bleu. Et soit T un ACPM qui respecte la l'invariant avant la coloration de e. Deux cas :

$\square$

Preuve 1/2.

Soit e l'arête qui va être coloriée en bleu. Et soit T un ACPM qui respecte la l'invariant avant la coloration de e. Deux cas :

1. $e \in T$: Ok !

$\square$

Preuve 1/2.

Soit e l'arête qui va être coloriée en bleu. Et soit T un ACPM qui respecte la l'invariant avant la coloration de e. Deux cas :

1. $e \in T$: Ok !
2. $e \notin T$:

$\square$

Preuve 1/2.

Soit e l'arête qui va être coloriée en bleu. Et soit T un ACPM qui respecte la l'invariant avant la coloration de e. Deux cas :

1. $e \in T$: Ok !
2. $e \notin T$:
   - Soit $X, \bar{X}$ la coupe utilisée pour colorier e.

$\square$

Preuve 1/2.

Soit e l'arête qui va être coloriée en bleu. Et soit T un ACPM qui respecte la l'invariant avant la coloration de e. Deux cas :

1. $e \in T$: Ok !
2. $e \notin T$:
   - Soit $X, \bar{X}$ la coupe utilisée pour colorier e.
   - Dans T il existe un unique chemin P qui relie les extrémités de e.

$\square$

Preuve 1/2.

Soit e l'arête qui va être coloriée en bleu. Et soit T un ACPM qui respecte la l'invariant avant la coloration de e. Deux cas :

1. $e \in T$: Ok !
2. $e \notin T$:
    - Soit $X, \bar{X}$ la coupe utilisée pour colorier e.
    - Dans T il existe un unique chemin P qui relie les extrémités de e.
    - Dans T aucune arête rouge.

$\square$

Preuve 1/2.

Soit e l'arête qui va être coloriée en bleu. Et soit T un ACPM qui respecte la l'invariant avant la coloration de e. Deux cas :

1. $e \in T$: Ok !
2. $e \notin T$:
   - Soit $X, \bar{X}$ la coupe utilisée pour colorier e.
   - Dans T il existe un unique chemin P qui relie les extrémités de e.
   - Dans T aucune arête rouge.
   - Il existe dans $E[X, \bar{X}]$ une arête e' de T.

□

Preuve 1/2.

Soit e l'arête qui va être coloriée en bleu. Et soit T un ACPM qui respecte la l'invariant avant la coloration de e. Deux cas :

1. $e \in T$: Ok !
2. $e \notin T$:
   - Soit $X, \bar{X}$ la coupe utilisée pour colorier e.
   - Dans T il existe un unique chemin P qui relie les extrémités de e.
   - Dans T aucune arête rouge.
   - Il existe dans $E[X, \bar{X}]$ une arête e' de T.
   - e' est sanc couleur au moment de colorier e.

□

Preuve 1/2.

Soit e l'arête qui va être coloriée en bleu. Et soit T un ACPM qui respecte la l'invariant avant la coloration de e. Deux cas :

1. $e \in T$: Ok !
2. $e \notin T$:
   - Soit $X, \bar{X}$ la coupe utilisée pour colorier e.
   - Dans T il existe un unique chemin P qui relie les extrémités de e.
   - Dans T aucune arête rouge.
   - Il existe dans $E[X, \bar{X}]$ une arête e' de T.
   - e' est sanc couleur au moment de colorier e.
   - $w(e') > w(e)$.

□

Preuve 1/2.

Soit e l'arête qui va être coloriée en bleu. Et soit T un ACPM qui respecte la l'invariant avant la coloration de e. Deux cas :

1. $e \in T$: Ok !
2. $e \notin T$:
   - Soit $X, \bar{X}$ la coupe utilisée pour colorier e.
   - Dans T il existe un unique chemin P qui relie les extrémités de e.
   - Dans T aucune arête rouge.
   - Il existe dans $E[X, \bar{X}]$ une arête e' de T.
   - e' est sanc couleur au moment de colorier e.
   - $w(e') > w(e)$.
   - En supprimant e' de T et en ajoutant e, T respecte l'invariant de couleur.

$\square$

Preuve 2/2.

Soit e l'arête qui va être coloriée en rouge. Deux cas :

1. $e \notin T$: Ok

$\square$

Preuve 2/2.

Soit e l'arête qui va être coloriée en rouge. Deux cas :

1. $e \notin T$: Ok
2. $e \in T$:

$\square$

Preuve 2/2.

Soit e l'arête qui va être coloriée en rouge. Deux cas :

1. $e \notin T$: Ok
2. $e \in T$:
    - $T \setminus e = \{T_1, T_2\}$

$\square$

Preuve 2/2.

Soit e l'arête qui va être coloriée en rouge. Deux cas :

1. $e \notin T$: Ok
2. $e \in T$:
    - $T \setminus e = \{T_1, T_2\}$
    - Le cycle C utilisée pour colorier e comporte une autre arête e' qui a une extremité dans chaque arbre.

$\square$

Preuve 2/2.

Soit e l'arête qui va être coloriée en rouge. Deux cas :

1. $e \notin T$: Ok
2. $e \in T$:
   - $T \setminus e = \{T_1, T_2\}$
   - Le cycle C utilisée pour colorier e comporte une autre arête e' qui a une extremité dans chaque arbre.
   - On a $w(e') \leq w(e)$

$\square$

Preuve 2/2.

Soit e l'arête qui va être coloriée en rouge. Deux cas :

1. $e \notin T$: Ok
2. $e \in T$:
   - $T \setminus e = \{T_1, T_2\}$
   - Le cycle C utilisée pour colorier e comporte une autre arête e' qui a une extremité dans chaque arbre.
   - On a $w(e') \leq w(e)$
   - En échangeant e et e' on obtient un arbre qui respecte l'invariant de couleur.

$\square$