Tp Moindres Carrés

L3 informatique université Clermont Auvergne

2020/2021

1 Régression Linéaire simple

On considère le modèle de régression linéaire suivant :

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i.$$

Soit l'échantillon suivant qui représente le pourcentage de rendement, y_i, en fonction de la température x_i en degré celsius d'un procédé chimique.

$$\begin{array}{l} x_i : 45\ 50\ 55\ 60\ 65\ 70\ 75\ 80\ 85\ 90 \\ y_i : 43\ 45\ 48\ 51\ 55\ 57\ 59\ 63\ 66\ 68 \end{array}$$

Il est prévu que le pourcentage du rendement d'un procédé chimique est liée linéairement à la température. L'objectif est donc d'estimer un modèle de régression linéaire simple à partir de cet échantillon. Pour cela:

- Créez une fonction qui calcule et renvoie les coefficients de régression à partir des données, en utilisant la version non vectoriel. (calcul des β_i à l'aide de $\overline{x}$ et $\overline{y}$).
- Représentez graphiquement les données et la droite de régression obtenue (sur le même graphique).
- Comparez vos résultats avec ceux que donne la fonction polyfit de Matlab ou l'équivalent en python .

Modèle vectoriel
Maintenant considérons le même modèle sous sa forme vectoriel

$$y = A\beta.$$

où $\beta = (\beta_0, \beta_1)$ est le vecteur des coefficients de régressions inconnus à estimer, A la matrice de régression. y le vecteur des données des sorties. Afin d'estimer le vecteur paramètre β du modèle, Nous allons créer une fonction qui calcule et renvoie ce vecteur des coefficients de régression à partir des données en utilisant la version vectorielle:

- Implémentez la formule matricielle des $(A^T A)^{-1} A^T y$ pour estimer β.

- Représentez graphiquement les données et la droite de régression obtenue (sur le même graphique).
- Testez graphiquement la normalité des erreurs en utilisant la fonction Matlab qqplot.
- Comparez vos résultats avec ceux que donne la fonction polyfit de Matlab ou l'équivalent en python .

2 Régression linéaire et descente de gradient

Nous allons utiliser l'algorithme de gradient pour estimer les paramètres de régression (bien que l'on ait une solution exacte, l'idée ici est de voir la notion d'optimisation globale et méthode itérative ...).

L'algorithme de gradient est comme suit. On se donne un paramètre initial β^0 et un seuil de tolérance $\epsilon > 0$ (pour le teste de convergence).

Initialisation : $\beta = \beta^0$.

Répéter

$$\beta^t = \beta^{t-1} - \lambda \frac{\partial f(\beta)}{\beta}.$$

Tant que $\|\beta^t - \beta^{t-1}\| > \epsilon$.
λ étant le pas de descente $\in [0, 1]$.

- Créez une fonction implémentant l'algorithme de gradient pour la régression polynomiale.
- Considérez un des jeux de données précédents et comparez les résultats obtenus par la méthode de gradient avec le cas de la minimisation directe des moindres carrés.
- Faites une représentation graphique du résultat obtenu.
- Représentez graphiquement (sur le même graphique) le résultat obtenu après estimation par moindres carrés de β_0 et β_1. Que peut on déduire ?