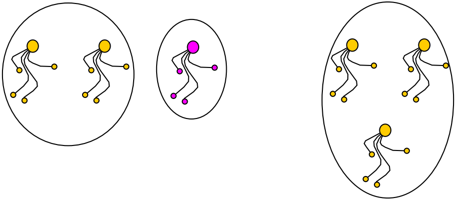
Théorie des Jeux

F. Bendali-Mailfert
bendali@isima.fr

Bur. D119 Bat. Isima



Jeux Coopératifs

Plan du cours

- Définitions
- Fonction caractéristique, imputation
- Exemples
- Cœur d'un jeu

n joueurs, $N = \{1, 2, \ldots, n\}$
Les joueurs forment des *coalitions* ou se mettent tous ensemble pour coopérer.
Une coalition est un sous ensemble $S \subset N$ de joueurs. Il en existe $2^n - 1$. *Objectif :* Former une coalition telle que chaque membre de la coalition puisse obtenir un gain plus important que ce qu'il reçoit seul.
La fonction caractéristique du jeu permet de définir l'allocation d'une coalition.

Fonction caractéristique

Soit 2^N l'ensemble des coalitions possibles pour n joueurs. Si $S = \{i\}$ alors c'est la coalition à un joueur.
$v : 2^N \mapsto \mathbb{R}$ telle que

$$v(\emptyset) = 0, v(N) \geq \sum_{i=1}^{n} v(\{i\})$$

est une fonction caractéristique du jeu.
Le jeu est noté (N, v).

Exemple

1. Une entreprise avec n employés executent la même tâche. Si chacun gagne b € la fonction caractéristique est :
$v(S) = b.|S|$; $v(\emptyset) = 0$; $v(N) = nb$
2. Un aéroport possède une seule piste d'attérisage et tous les avions doivent l'utiliser. Il y a 3 types d'avions : le plus gros utilise 1000 m de piste, le moyen 750 m et le plus petit 500 m. La piste est conçue pour recevoir le plus gros. Le coût d'utilisation est égal à la longueur. Pour les 3 types, la fonction caractéristique est :

$$v(1) = 500; v(2) = 750; v(3) = 1000;$$

$$v(12) = 750; v(13) = 1000; v(23) = 1000;$$

$$v(123) = 1000; v(\emptyset) = 0$$

Suradditivité

Une fonction caractéristique est surradittive si

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T), \forall S, T \subset N, S \cap T = \emptyset$$

Imputation

x_i (part du joueur i) un réel pour chaque joueur $i \in N$ tel que : $v(N) \cancel{\leq} \sum_{i=1}^{n} x(\{i\})$.
Un vecteur $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une imputation du jeu (N, v) si :

1. $x(\{i\}) \geq v(i)$ (Rationalité individuelle)
2. $\sum_{i=1}^{n} x(\{i\}) = v(N)$ (Rationalité collective)

Cœur d'un jeu

Définition

Le cœur d'un jeu (N, v) est l'ensemble des imputations x qui vérifient

$$x_i \geq v(i)$$

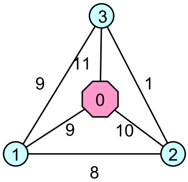
$$\sum_{i=1}^{n} x(\{i\}) = v(N)$$

$$\sum_{i=1}^{|S|} x(\{i\}) \geq v(S), \forall S \subset N$$

Les imputations du cœur bloquent la formation des coalitions (Von Neumann et Morgenstern)

3 Villes doivent être connectées à une centrale de distribution d'eau. Le coût de connexion entre les différentes villes et la centrale sont données sur le graphe suivant :
On peut alors calculer la fonction caractéristique v du jeu avec $N = \{1, 2, 3\}$:

S	1	2	3	1, 2	1, 3	2, 3	1, 2, 3
$v(S \cup \{0\})$	9	10	11	17	18	11	18



$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 18 \\ x_1 + x_2 \leq 17 \\ x_2 + x_3 \leq 1\cancel{8} \\ x_1 + x_3 \leq 1\cancel{1} \\ x_1 \leq 9 \\ x_2 \leq 10 \\ x_{\cancel{1}} \leq 11 \end{cases}$$

Solutions possibles $x^* = (9, 8, 1)$, $x^* = (7, 10, 1)$, $x^* = (9, 0, 9)$,$x^* = (7, 0, 11)$,...