

Théorie des Graphes - Examen Octobre 2017
L3 Informatique
1h30

Ⓢ Les seuls documents autorisés sont les notes de cours Ⓢ
Ⓢ L'utilisation d'appareils électroniques est strictement prohibée Ⓢ
Les réponses doivent être justifiées.

Dans ce sujet, on notera implicitement par n le nombre de sommet du graphe considéré et par m le nombre d'arêtes. On supposera également que n est supérieur ou égal à 2.

Exercice 1

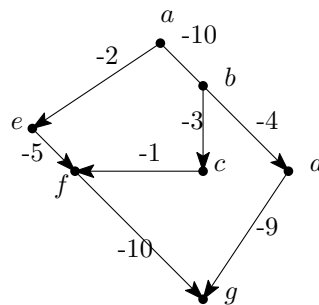


FIGURE 1 –

1. En donnant un ordre topologique du graphe présenté en Figure. 1, montrez que le graphe est sans circuit.
2. Exécutez l'algorithme de Bellman-Ford sur le graphe à partir du sommet a pour trouver les plus courts chemins.
3. Expliquez comment l'algorithme de Bellman-Ford peut être utilisé pour trouver le chemin de longueur maximum à partir d'un sommet dans un graphe sans circuit.

Exercice 2 Soit $G = (V, E)$ un graphe fini, non orienté et sans boucle.

1. Montrez qu'il existe au moins deux sommets x et y pour lesquels on a $d(x) = d(y)$.
2. Montrez que si $|E(G)| > \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ alors G est connexe. Et montrez que si il y a égalité, l'affirmation n'est plus vraie.

3. Dans un graphe sans triangle (*i.e.* le graphe ne contient pas K_3 comme sous-graphe induit) montrez que pour toute arête $e = \{x, y\}$ du graphe l'inégalité $d(x) + d(y) \leq n$ est toujours vérifiée. Déduisez en que pour les graphes sans triangle l'inégalité suivante $\sum_{v \in V(G)} (d(v))^2 \leq n \cdot m$ est toujours vérifiée.

Exercice 3 Un graphe non orienté simple est 2-arête-connexe si après suppression d'une arête du graphe, quelle qu'elle soit, le graphe demeure connexe. Un graphe est 2-connexe, si après suppression d'un sommet, quel qu'il soit, le graphe reste connexe.

1. Montrez que dans un graphe 2-arête connexe, chaque arête appartient à au moins un cycle.
2. Prouvez ou infirmez les affirmations suivantes :
 - (a) Si un graphe est 2-arête connexe alors il est 2-connexe.
 - (b) Si un graphe est 2-connexe alors il est 2-arête connexe.
3. Que peut-on dire sur la 2-arête-connexité d'un graphe pair. Même question pour la 2-connexité ?