Série d'exercices # 3

1. Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ avec $P(\omega_1) = \frac{1}{3}$, $P(\omega_2) = P(\omega_3) = \frac{1}{4}$ et $P(\omega_4) = \frac{1}{6}$.

   (a) $P : \Omega \to [0,1]$ definit-elle une probabilité ?

   (b) Considérons les variables aléatoires X_1 et X_2 définies comme suit :

   $X_1(\omega_1) = X_1(\omega_2) = 1$, $X_1(\omega_3) = 4$, $X_1(\omega_4) = 5$
   $X_2(\omega_1) = X_2(\omega_2) = X_2(\omega_3) = 1$, $X_2(\omega_4) = 5$

   Donner les lois de X_1 et X_2. Calculer $E[X_1]$ et $E[X_2]$.

   (c) Donner la loi de $X_1 + X_2$ et calculer $E[X_1 + X_2]$.

2. Un dé à six faces est lancé. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de points obtenus sur la face supérieure. Considérons la loi de probabilité P définie par $P(X = x) = x\alpha$ pour tout $x \in X(\Omega)$, où α est un nombre réel.

   (a) Quelle est la valeur de α ?

   (b) Le dé est-il faussé ? Justifier.

3. Considérons le lancer de deux dés identiques à six faces. Soit X la variable aléatoire égale au maximum des résultats des deux dés.

   (a) Donner la loi de probabilité de X.

   (b) Quelle est l'espérance de X ?

4. Considérons le jeu suivant : Une urne contient 7 boules rouges, 5 boules bleues et 3 boules blanches. Ces boules sont indiscernables au toucher. Après une mise de 5 euros, deux boules sont tirées sans remise. Le joueur gagne 10 euros par boule blanche tirée.
   Soit X la variable aléatoire égale au gain net du joueur (i.e., la différence entre le gain et la mise).

   (a) Déterminer $X(\Omega)$

   (b) Donner la loi de probabilité de X.

   (c) Quelle est l'espérance de ce jeu ?

5. Trois touristes tirent en même temps sur un éléphant au cours d'un safari. La bête meurt frappée par deux balles. On estime la valeur d'un chasseur par sa probabilité d'atteindre sa cible en un coup. Ces prbabilités sont $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{4}$. On suppose que les chasseurs tirent indépendamment l'un de l'autre. Trouver pour chacun des chasseurs la probabilité d'avoir raté l'éléphant.

6. Un lot de montres identiques est reçu par un détaillant. Ce lot provient soit d'une usine à Hong-Kong soit d'une usine à Singapour. L'usine de Singapour produit un article défectueux sur 200 en moyenne, celle de Hong-Kong un sur 1000. Le détaillant inspecte une première montre qui marche. Quelle est la probabilité que la deuxième montre inspectée marche ? On supposera que dans une usine donnée, les états des montres successives sont indépendants et que le lot à la même probabilité de provenir de Singapour que de Hong-Kong.

7. Considérons le couple de variable aléatoire (X, Y) dont les valeurs possibles et les probabilités sont données dans le tableau suivant :

$Y \setminus X$	0	1	2
3	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{8}$
5	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{12}$
10	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

   (a) Donner les lois de X et Y.
   (b) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
   (c) Déterminer $E[X]$, $E[Y]$ et $E[3X - Y]$.
   (d) Donner la loi de X sachant que $Y = 5$
   (e) Déterminer $E[XY]$

8. Un tour opérateur utilise un bus ayant une capacité de 45 personnes mais a vendu 50 tickets. Une personne, ayant acheté un ticket, sur 12 ne se présente pas et on suppose que les présences des personnes sont indépendantes les unes des autres.

   (a) Quelle est la probabilité que toutes les personnes (ayant acheté un ticket) se présentant trouve une place dans le bus.
   (b) Si chaque ticket est vendu 50 euros et est non-remboursable et chaque personne présente qui ne peut pas être assise reçoit 100 euros, quel est le revenu moyen du tour opérateur ?

9. Un QCM comporte 10 questions. À chaque question, une seule réponse parmi les trois proposées est exacte. Chaque réponse rapporte 2 points. Sachant qu'on répond au hasard à chaque question,

   (a) Combien de bonnes réponses peut-on espérer avoir ?
   (b) Quelle note peut-on espérer obtenir ?

10. Une personne essaie de pénétrer dans un système informatique qui est protégé par un mot de passe. Supposons qu'il y a n mots de passe, qu'un seul soit correct, et que la personne les essaie dans un ordre aléatoire. Soit N le nombre d'essais nécessaires pour réussir à entrer dans le système. Déterminer

    (a) la loi de probabilité si tous les mots de passe essayés sont reconsidéré à chaque fois

    (b) la loi de probabilité si tous les mots de passe essayés sont éliminés

    (c) le nombre d'essais espérés pour les deux situations précédentes si $n = 10$.

11. En moyenne deux tornades touchent les principales grandes métropoles en Amérique du Nord par année. Quelle est la probabilité que plus de cinq tornades touchent ces grandes métropoles l'année prochaine ?

12. En moyenne, un ordinateur sur 800 crashe durant un orage violent. Supposons qu'une entreprise possède 4000 ordinateurs en état de marche dans une zone touchée par un orage.

    (a) Calculer l'espérance et la variance du nombre d'ordinateurs ayant crashé.

    (b) Calculer la probabilité que moins de 10 ordinateurs crashent.

    (c) Calculer la probabilité qu'exactement 10 ordinateurs crashent.

13. Soit X une variable aléatoire discrète avec $X(\Omega) = \{0, 1, \ldots, 8\}$. Pour chacune des lois de probabilités suivantes, donner une représentation sous forme d'histogramme et déterminer leurs espérance et variance

    (a) $P(X = 0) = \frac{7}{100}, P(X = 1) = \frac{1}{10}, P(X = 2) = \frac{3}{25}, P(X = 3) = \frac{13}{100}, P(X = 4) = \frac{4}{25}, P(X = 5) = \frac{13}{100}, P(X = 6) = \frac{3}{25}, P(X = 7) = \frac{1}{10}, P(X = 8) = \frac{7}{100}$

    (b) $P(X = 0) = \frac{1}{50}, P(X = 1) = \frac{2}{25}, P(X = 2) = \frac{1}{10}, P(X = 3) = \frac{3}{20}, P(X = 4) = \frac{3}{10}, P(X = 5) = \frac{3}{20}, P(X = 6) = \frac{1}{10}, P(X = 7) = \frac{2}{25}, P(X = 8) = \frac{1}{50}$

    (c) $P(X = 0) = \frac{1}{100}, P(X = 1) = \frac{1}{100}, P(X = 2) = \frac{1}{10}, P(X = 3) = \frac{9}{50}, P(X = 4) = \frac{2}{5}, P(X = 5) = \frac{9}{50}, P(X = 6) = \frac{1}{10}, P(X = 7) = \frac{1}{100}, P(X = 8) = \frac{1}{100}$

    (d) $P(X = 0) = \frac{1}{100}, P(X = 1) = \frac{1}{100}, P(X = 2) = \frac{1}{50}, P(X = 3) = \frac{11}{100}, P(X = 4) = \frac{7}{10}, P(X = 5) = \frac{11}{100}, P(X = 6) = \frac{1}{50}, P(X = 7) = \frac{1}{100}, P(X = 8) = \frac{1}{100}$

14. Considérons le jeu suivant. Une pièce de monnaie est jetée 3 fois de suite. À chaque lancer, si on obtient Face, on gagne 1 euro et si on obtient Pile on perd 2 euros. Déterminer la loi de probabilité, l'espérance et la variance de la variable aléatoire X représentant le gain total au bout de 3 lancers.

15. Les naissance dans une maternité arrivent d'une manière aléatoire à raison de 1.8 naissances par heure.

    (a) Quelle est la probabilité d'observer 4 naissances dans une heure donnée dans cette maternité ?

    (b) Quelle est la probabilité d'observer au moins 2 naissances dans une heure donnée dans cette maternité ?

    (c) Quelle est la probabilité d'observer 5 naissances dans une période donnée de 2 heures dans cette maternité ?

    (d) Supposons maintenant que les naissances dans une maternité A arrivent d'une manière aléatoire à raison de 2.3 naissances par heure et dans une maternité B à raison de 3.6 naissances par heure. Quelle est la probabilité d'observer 7 naissances au total dans une heure donnée dans ces deux maternités ?

16. Une variable aléatoire X représente le nombre d'appels par heure reçu par un centre d'appels durant le dernier mois. La loi de probabilité de X est donnée dans le tableau suivant

x	0	1	2	3	4	5	6	7
$P(X = x)$	0.01	0.1	0.26	0.33	0.18	0.06	α	0.03

    (a) Quelle est la valeur de α ?

    (b) Calculer $E[X]$

    (c) Calculer la variance et l'écart type de X.

    (d) Interpréter vos résultats.

17. Soit X une variable aléatoire représentant le nombre d'appels téléphoniques reçus par une médecin entre 9h et 10h du matin. Sachant que $E[X] = 18$ et $\sigma_X = 4.24$,

    (a) quelle est la probabilité que le médecin recoive entre 10 et 26 appels téléphoniques entre 9h et 10h

    (b) quelle est la probabilité que le médecin recoive au moins 61 appels téléphoniques entre 9h et 10h

18. Considérons une compagnie d'assurance qui pense que 30 pourcent de ses assurés vont déclarer au moins un sinitre par année. Cette compagnie d'assurance doit être suspectée que quelque chose n'est pas normal quand pour une année donnée, 2292 de ses 6200 assurés ont d'eclaré au moins un sinistre ?