Z325EU07 - Probabilités et Statistiques

Introduction aux Probabilités

Hervé Kerivin

Bureau : B133, Institut d'Informatique - ISIMA

Téléphone : 04 73 40 50 37

E-mail: herve.kerivin@uca.fr

Déroulement du cours

- Nombre de crédits : 3
- Contrôles des connaissances :
  - Première session (Examen terminal : 75%, TP : 25%)
  - Deuxième session (Examen terminal : 100%)
  - Régime Spécial d'Étude (RSE) (Examen terminal : 100%)

Contenu du Cours

- Objectifs : Introduction aux concepts principaux des probabilités et statistiques et à leur utilisation en informatique
  - connaissances sur les lois de probbilités discrètes
  - construction d'une simulation et analyse des résultats d'une expérience
- Programme du cours
  1. Introduction aux probabilités
  2. Probabilités conditionnelles
  3. Variables aléatoires discrètes
  4. Couple de variables aléatoires discrètes
  5. Estimation et intervalles de confiance
  6. Regression linéaire

Ressources Bibliographiques Utilisées

- Introduction to Probability Theory with Contemporary Applications, L.L. Helmes, Dover Publications, Inc., Mineola, New York
- Basic Probability Theory, R.B. Ash, Dover Publications, Inc., Mineola, New York
- Introduction to Probability, J.E. Freund, Dover Publications, Inc., New York
- Cours de Probabilités et Statistiques, A. Perrut, Université Claude Bernar Lyon 1
- Cours de Probabilités, F. Delarue, Université Sophia-Antipolis
- Introduction au Calcul des Probabilités, L. Mazliak, Université Paris VI
- Probabilités et Statistiques, S. Gire et A.R. Mahjoub, Université de Bretagne Occidentale

Expérience Aléatoire

Expérience aléatoire

Une expérience aléatoire (ou épreuve) est tout phénomène dont on ne peut pas prédire l'issue avec certitude

Exemples

- lancer d'une pièce
- lancer d'un dé à six faces
- lancer d'une pièce trois fois de rang

Ensemble fondamental Ω

L'ensemble fondamental Ω (ou univers) est l'ensemble de toutes les issues possibles d'une expérience aléatoire

Exemples

- lancer d'une pièce $\Omega = \{P, F\}$
- lancer d'un dé à six faces $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- lancer d'une pièce trois fois de rang
  $\Omega = \{PPP, FPP, PFP, PPF, PFF, FPF, FFP, FFF\}$

Évènement

Évènement élémentaire ω

Un évènement élémentaire ω est toute issue d'une expérience aléatoire, i.e.,tout élément de Ω

Exemples

- lancer d'une pièce : P et F
- lancer d'un dé à six faces : $1, 2, 3, 4, 5$ et 6
- lancer d'une pièce trois fois de rang : $PPP, FPP, PFP, PPF, PFF, FPF, FFP$ et FFF

Évènement

Un évènement, représenté par une lettre majuscule, est tout sous-ensemble de Ω, i.e., toute réunion d'élément élémentaire

Exemples

- lancer d'une pièce: $A = \{P\}$ "obtenir un pile"
- lancer d'un dé : $B = \{2, 4, 6\}$ "obtenir un chiffre pair"
- lancer d'une pièce trois fois de rang : $C = \{PFP, PFF, FFP, FFF\}$ "obtenir un face au deuxième lancer"

Ensembliste vs Probabiliste

- L'ensemble des évènements coïncide avec l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ des parties de l'ensemble fondamental Ω
- Un évènement est réalisé si un des évènements élémentaires le constituant est réalisé

notation	terme ensembliste	terme probabiliste
Ω	ensemble plein	évènement certain
$\emptyset$	ensemble vide	évènement impossible
ω	élément de Ω	évènement élémentaire
A	sous-ensemble de Ω	évènement
$\omega \in A$	ω appartient à A	ω réalise A
$A \subset B$	A inclus dans B	A implique B
$A \cup B$	union de A et B	A ou B
$A \cap B$	intersection de A et B	A et B
A^C ou $\overline{A}$	complémentaire de A	évènement contraire de A
$A \cap B = \emptyset$	A et B disjoints	A et B incompatibles

Probabilité d'un Évènement

- Étant donnés
  - une expérience aléatoire d'univers Ω
  - un évènement $A \subset \Omega$
- Supposons que
  - l'expérience aléatoire est répétée N fois
  - $N(A)$ correspond au nombre de fois où l'évènement A est réalisé

Fréquence relative

La fréquence relative de A est égale au ratio $\frac{N(A)}{N}$

Probabilité de A

La fréquence relative semble se stabiliser près d'une valeur rélle $P(A)$ lorsque N devient très grand (loi empirique) ; le nombre $P(A)$ est appelé la probabilité de l'évènement A

Probabilités

Probabilité

On appelle (mesure de) probabilité toute application P sur $\mathcal{P}(\Omega)$ telle que

1. $P(A) \in [0, 1]$ pour tout évènement $A \in \mathcal{P}(\Omega)$
2. $P(\Omega) = 1$ (i.e., proriété de normalisation)
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ pour toute paire d'évènements incompatibles A et B (propriété d'additivité)

Espace de probabilité

Le couple (Ω, P) s'appelle espace de probabilité

Additivité : $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$ pour toute séquence $A_1, \ldots, A_n$ d'évènements deux à deux incompatibles

Probabilité (Definition #2)

Une (loi de) probabilité sur l'ensemble $\Omega = \{w_1, \ldots, w_n\}$ est la donnée de $(p_1, \ldots, p_n) \in [0, 1]^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

Exemple

Un entraineur de football pense qu'il y a 3 chances contre 2 que son équipe remporte le prochain match, tandis que les cotes contre un nul ou un défaite de son équipe sont de 4 contre 1 et de 9 contre 1, respectivement.

1. Décrire l'ensemble des évènements élémentaires.

Exemple

Un entraineur de football pense qu'il y a 3 chances contre 2 que son équipe remporte le prochain match, tandis que les cotes contre un nul ou un défaite de son équipe sont de 4 contre 1 et de 9 contre 1, respectivement.

1. Décrire l'ensemble des évènements élémentaires.
   $\Omega = \{\text{victoire,nul,défaite}\}$
2. Quelles sont leurs probabilités ?

Exemple

Un entraineur de football pense qu'il y a 3 chances contre 2 que son équipe remporte le prochain match, tandis que les cotes contre un nul ou un défaite de son équipe sont de 4 contre 1 et de 9 contre 1, respectivement.

1. Décrire l'ensemble des évènements élémentaires.
   $\Omega = \{\text{victoire,nul,défaite}\}$
2. Quelles sont leurs probabilités ?
   $P(\text{victoire}) = \frac{3}{5}, P(\text{nul}) = \frac{1}{5}, P(\text{défaite}) = \frac{1}{10}$
3. Définissent-elles une loi de probabilité ?

Exemple

Un entraineur de football pense qu'il y a 3 chances contre 2 que son équipe remporte le prochain match, tandis que les cotes contre un nul ou un défaite de son équipe sont de 4 contre 1 et de 9 contre 1, respectivement.

1. Décrire l'ensemble des évènements élémentaires.
   $\Omega = \{\text{victoire,nul,défaite}\}$
2. Quelles sont leurs probabilités ?
   $P(\text{victoire}) = \frac{3}{5}, P(\text{nul}) = \frac{1}{5}, P(\text{défaite}) = \frac{1}{10}$
3. Définissent-elles une loi de probabilité ?
   $P(\text{victoire}) + P(\text{nul}) + P(\text{défaite}) = \frac{3}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$

Univers Non Dénombrable

- Expérience aléatoire avec un nombre infini d'issues (e.g., lancer un dé jusqu'à obtenir un Pile
- Propriété d'additivité
$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$
pour toute séquence infinie $\{A_i\}$ d'évènements deux à deux incompatibles, est-elle valide ?
- Impossibilité de garantir à la fois
  1. propriété d'additivité ci-desssus est valide
  2. $P(A)$ a un sens pour tout évènement A
- Abandon du dernier point, i.e., $P(A)$ peut ne pas avoir de sens pour un évènement A

Espace Probabilisé

σ-algèbre

Une collection $\mathcal{A}$ de sous-ensemblles de Ω est un σ-algèbre (ou tribu) si

1. $\Omega \in \mathcal{A}$
2. $A \in \mathcal{A}$ implique $A^C \in \mathcal{A}$
3. si $\{A_i\}$ est une séquence finie ou infinie de $\mathcal{A}$, alors $\bigcup_i A_i \in \mathcal{A}$

Espace probabilisé

Un espace probabilisé est un tiplet $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ où $\mathcal{A}$ est un σ-algèbre non-vide de sous-ensemble de Ω et P est une application de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

1. $P(\Omega) = 1$
2. $0 \leq P(A) \leq 1$ pour tout $A \in \mathcal{A}$
3. si $\{A_i\}$ est une séquence finie ou infinie d'évènements deux à deux disjoints de $\mathcal{A}$, alors $P(\bigcup A_i) = \sum P(A_i)$ (propriété de σ-additivité)

Propriétés des Probabilités

$A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ implique $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$ et $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$

$P(\emptyset) = 0$

$P(A^C) = 1 - P(A)$

$P(A) \leq P(B)$ pour $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subset B$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Inégalité de Boole

Si $\{A_i\}$ est une séquence d'évènements, alors $P(\bigcup A_i) \leq \sum P(A_i)$

Formule de Poincaré

$$P(\bigcup_{r=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{r+1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \ldots \cap A_{i_r})$$

Exemples

- Consider n lancer d'une pièce et soit A l'évènement "Face a été obtenu au moins une fois". Quelle est la valeur de $P(A)$?

Exemples

- Consider n lancer d'une pièce et soit A l'évènement "Face a été obtenu au moins une fois". Quelle est la valeur de $P(A)$?

$P(A) = 1 - P(A^C) = 1 - \frac{1}{2^n}$

Exemples

- Consider n lancer d'une pièce et soit A l'évènement "Face a été obtenu au moins une fois". Quelle est la valeur de $P(A)$?

$P(A) = 1 - P(A^C) = 1 - \frac{1}{2^n}$

- Une carte est sélectionnée aléatoirement d'un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité que la carte sélectionnée soit un roi ou un pique ?

Exemples

- Consider n lancer d'une pièce et soit A l'évènement "Face a été obtenu au moins une fois". Quelle est la valeur de $P(A)$?

$P(A) = 1 - P(A^C) = 1 - \frac{1}{2^n}$

- Une carte est sélectionnée aléatoirement d'un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité que la carte sélectionnée soit un roi ou un pique ?

$A = \{\text{roi}\}, B = \{\text{pique}\}$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{4}{13}$

Exemples

- Consider n lancer d'une pièce et soit A l'évènement "Face a été obtenu au moins une fois". Quelle est la valeur de $P(A)$?

$P(A) = 1 - P(A^C) = 1 - \frac{1}{2^n}$

- Une carte est sélectionnée aléatoirement d'un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité que la carte sélectionnée soit un roi ou un pique ?

$A = \{\text{roi}\}, B = \{\text{pique}\}$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{4}{13}$

- Considérons trois évènements A, B et C pour lesquels $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{4}$, $P(C) = \frac{1}{2}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$, $P(A \cap C) = \frac{1}{8}$, $P(B \cap C) = \frac{5}{32}$ et $P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{32}$. Calculer $P(A \cup B \cup C)$

Exemples

- Consider n lancer d'une pièce et soit A l'évènement "Face a été obtenu au moins une fois". Quelle est la valeur de $P(A)$?

$P(A) = 1 - P(A^C) = 1 - \frac{1}{2^n}$

- Une carte est sélectionnée aléatoirement d'un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité que la carte sélectionnée soit un roi ou un pique ?

$A = \{\text{roi}\}, B = \{\text{pique}\}$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{4}{13}$

- Considérons trois évènements A, B et C pour lesquels $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{4}$, $P(C) = \frac{1}{2}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$, $P(A \cap C) = \frac{1}{8}$, $P(B \cap C) = \frac{5}{32}$ et $P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{32}$. Calculer $P(A \cup B \cup C)$

$$\begin{aligned}
P(A \cup B \cup C) &= P(A \cup B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C) \\
&= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P((A \cap C) \cup (B \cap C)) \\
&= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) \\
&\qquad + P(A \cap B \cap C) \\
&= \frac{65}{96}
\end{aligned}$$

Loi Uniforme

Loi uniforme

Soit Ω un ensemble fini. Une loi est dite uniforme (ou equiprobable) si les probabilités de tous les évènements élémentaires sont les mêmes, i.e., valent $\frac{1}{|\Omega|}$

Propriété

Pour tout évènement A, $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

Exemple : Considérons un bol contenant cinq jetons numérotés $1, 2, 3, 4$ et 5 et l'épreuve consistant à tirer sans remise deux jetons du bol. Quelle est la probabilité de l'évènement "le numéro du premier jeton tiré est inférieur à celui du deuxième" ?

Loi Uniforme

Loi uniforme

Soit Ω un ensemble fini. Une loi est dite uniforme (ou equiprobable) si les probabilités de tous les évènements élémentaires sont les mêmes, i.e., valent $\frac{1}{|\Omega|}$

Propriété

Pour tout évènement A, $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

Exemple : Considérons un bol contenant cinq jetons numérotés $1, 2, 3, 4$ et 5 et l'épreuve consistant à tirer sans remise deux jetons du bol. Quelle est la probabilité de l'évènement "le numéro du premier jeton tiré est inférieur à celui du deuxième" ?

$\Omega = \{(i, j) : 1 \leq i, j \leq 5, i \neq j\}, |\Omega| = 20$

Loi Uniforme

Loi uniforme

Soit Ω un ensemble fini. Une loi est dite uniforme (ou equiprobable) si les probabilités de tous les évènements élémentaires sont les mêmes, i.e., valent $\frac{1}{|\Omega|}$

Propriété

Pour tout évènement A, $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

Exemple : Considérons un bol contenant cinq jetons numérotés $1, 2, 3, 4$ et 5 et l'épreuve consistant à tirer sans remise deux jetons du bol. Quelle est la probabilité de l'évènement "le numéro du premier jeton tiré est inférieur à celui du deuxième" ?

$\Omega = \{(i, j) : 1 \leq i, j \leq 5, i \neq j\}, |\Omega| = 20$

$A = \{(i, j) : 1 \leq i < j \leq 5\}, |A| = 10$

Loi Uniforme

Loi uniforme

Soit Ω un ensemble fini. Une loi est dite uniforme (ou equiprobable) si les probabilités de tous les évènements élémentaires sont les mêmes, i.e., valent $\frac{1}{|\Omega|}$

Propriété

Pour tout évènement A, $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

Exemple : Considérons un bol contenant cinq jetons numérotés $1, 2, 3, 4$ et 5 et l'épreuve consistant à tirer sans remise deux jetons du bol. Quelle est la probabilité de l'évènement "le numéro du premier jeton tiré est inférieur à celui du deuxième" ?

$\Omega = \{(i, j) : 1 \leq i, j \leq 5, i \neq j\}, |\Omega| = 20$
$A = \{(i, j) : 1 \leq i < j \leq 5\}, |A| = 10$
$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{2}$

Cardinaux et Suites

Proposition

Soient A et B deux ensembles finis.

1. $|A \times B| = |A|.|B|$ (multiplicité)
2. $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ (inclusion-exclusion)

Suite de longueur r

Soit A un ensemble fini. Une suite ordonnée de longueur r avec remise constituée d'éléments de A est un r-uplet, ou r-liste, $(a_1, \ldots, a_r)$ avec $a_i \in A$ pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$. L'ensemble A est appelé population.

Théorème

Le nombre de suites de longueur r avec remise d'une population de cardinalité n est n^r.

Exemple: Un dé est lancé trois fois de rang.

- évènements élémentaires?

Cardinaux et Suites

Proposition

Soient A et B deux ensembles finis.

1. $|A \times B| = |A|.|B|$ (multiplicité)
2. $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ (inclusion-exclusion)

Suite de longueur r

Soit A un ensemble fini. Une suite ordonnée de longueur r avec remise constituée d'éléments de A est un r-uplet, ou r-liste, $(a_1, \ldots, a_r)$ avec $a_i \in A$ pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$. L'ensemble A est appelé population.

Théorème

Le nombre de suites de longueur r avec remise d'une population de cardinalité n est n^r.

Exemple: Un dé est lancé trois fois de rang.

- évènements élémentaires? suite ordonnée de longueur 3 avec remise de la population $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Cardinaux et Suites

Proposition

Soient A et B deux ensembles finis.

1. $|A \times B| = |A|.|B|$ (multiplicité)
2. $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ (inclusion-exclusion)

Suite de longueur r

Soit A un ensemble fini. Une suite ordonnée de longueur r avec remise constituée d'éléments de A est un r-uplet, ou r-liste, $(a_1, \ldots, a_r)$ avec $a_i \in A$ pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$. L'ensemble A est appelé population.

Théorème

Le nombre de suites de longueur r avec remise d'une population de cardinalité n est n^r.

Exemple: Un dé est lancé trois fois de rang.

- évènements élémentaires? suite ordonnée de longueur 3 avec remise de la population $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- nombre d'évènements élémentaires?

Cardinaux et Suites

Proposition

Soient A et B deux ensembles finis.

1. $|A \times B| = |A|.|B|$ (multiplicité)
2. $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ (inclusion-exclusion)

Suite de longueur r

Soit A un ensemble fini. Une suite ordonnée de longueur r avec remise constituée d'éléments de A est un r-uplet, ou r-liste, $(a_1, \dots, a_r)$ avec $a_i \in A$ pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$. L'ensemble A est appelé population.

Théorème

Le nombre de suites de longueur r avec remise d'une population de cardinalité n est n^r.

Exemple: Un dé est lancé trois fois de rang.

- évènements élémentaires? suite ordonnée de longueur 3 avec remise de la population $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- nombre d'évènements élémentaires? 6^3

Permutations

Principe de dénombrement

Considérons deux expériences aléatoires produisant n et m issues différentes, respectivement. Au total, pour les deux expériences aléatoires prises ensembles, il existe nm issues possibles.

Permutation

Soit A un ensemble fini. Une permutation de A est une manière d'ordonner (i.e., arranger) les éléments de A.

Théorème (nombre de permutations)

Le nombre de permutations d'une population de cardinalité n est $n!$.

Exemple : Problème du voyageur de commerce - Un représentant commercial doit rendre visite à ses 50 clients . Combien de tours (i.e., trajets) différents sont possibles ?

- population $A = \{1, 2, \ldots, 50\}$
- tour = permutation de A
- $50! \approx 3 \times 10^{64}$

Arrangements

Arrangement

Soit A un ensemble fini. Un arrangement de r éléments pris parmi A est une suite ordonnée de longueur r constituée d'éléments de A sans remise, i.e., un r-uplet, ou r-liste, $(a_1, \ldots, a_r)$ avec $a_i \in A \setminus \{a_1, \ldots, a_{i-1}\}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$.

Théorème (nombre d'arrangements)

Le nombre d'arrangements de r éléments pris parmi n est $(n)_r = A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$.

Exemple: Tiercé dans l'ordre pour 20 chevaux (pas d'ex aequo)

Arrangements

Arrangement

Soit A un ensemble fini. Un arrangement de r éléments pris parmi A est une suite ordonnée de longueur r constituée d'éléments de A sans remise, i.e., un r-uplet, ou r-liste, $(a_1, \dots, a_r)$ avec $a_i \in A \setminus \{a_1, \dots, a_{i-1}\}$ pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$.

Théorème (nombre d'arrangements)

Le nombre d'arrangements de r éléments pris parmi n est $(n)_r = A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$.

Exemple: Tiercé dans l'ordre pour 20 chevaux (pas d'ex aequo)

- $A = \{1, \dots, 20\}, n = |A| = 20$
- Tiercé $r = 3$
- $(20)_3 = A_{20}^3 = 6840$

Combinaisons

Combinaison

Soit A un ensemble fini. Une combinaison de r éléments pris parmi A est un sous-ensemble de cardinalité r constitué d'éléments de A sans remise, i.e., $\{a_1, \ldots, a_r\}$ avec $a_i \in A \setminus \{a_1, \ldots, a_{i-1}\}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$.

Théorème (nombre de combinaisons)

Le nombre de combinaisons de r éléments pris parmi n est $\binom{n}{r} = C_n^r = \frac{n!}{(n-r)!r!}$.

Exemple : Une main au poker est constituée de 5 cartes distribuées d'un jeu de 52 cartes. Combien y a-t-il de mains possibles ?

Combinaisons

Combinaison

Soit A un ensemble fini. Une combinaison de r éléments pris parmi A est un sous-ensemble de cardinalité r constitué d'éléments de A sans remise, i.e., $\{a_1, \ldots, a_r\}$ avec $a_i \in A \setminus \{a_1, \ldots, a_{i-1}\}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$.

Théorème (nombre de combinaisons)

Le nombre de combinaisons de r éléments pris parmi n est $\binom{n}{r} = C_n^r = \frac{n!}{(n-r)!r!}$.

Exemple : Une main au poker est constituée de 5 cartes distribuées d'un jeu de 52 cartes. Combien y a-t-il de mains possibles ?

- ordre n'a pas d'importance dans une main
- $n = 52$, $r = 5$
- $\binom{52}{5} = C_{52}^5 = 2\ 598\ 960$

Formule du Binôme de Newton

Proposition

Pour tout entier positif n et pour tout entier $r \leq n$

- $\binom{n}{0} = 1$
- $\binom{n}{r} = 0$ si $r < 0$
- $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$
- $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$
- $\binom{n}{r} = \frac{n}{r}\binom{n-1}{r-1}$

Théorème (Formule du binôme de Newton)

Soient a et b deux réels et n un entier strictement positif

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Théorème (nombre de parties d'un ensemble)

Soit Ω un ensemble fini de cardinalité n. Le nombre de parties de Ω, i.e., la cardinalité de $\mathcal{P}(\Omega)$, vaut 2^n.

Discernables vs Indiscernables

Théorème

Considérons n objets parmi lesquels n_1 sont indiscernables, n_2 sont indiscernables,$\cdots$, n_p sont indiscernables. Le nombre de permutations différentes de ces n éléments est $\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots,n_p!}$.

Exemple : Anagramme

- nombre d'anagrammes de PROBA?

Discernables vs Indiscernables

Théorème

Considérons n objets parmi lesquels n_1 sont indiscernables, n_2 sont indiscernables, $\cdots$, n_p sont indiscernables. Le nombre de permutations différentes de ces n éléments est $\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots,n_p!}$.

Exemple : Anagramme

- nombre d'anagrammes de PROBA? $\frac{5!}{1!1!1!1!1!} = 120$
- nombre d'anagrammes de STAT ?

Discernables vs Indiscernables

Théorème

Considérons n objets parmi lesquels n_1 sont indiscernables, n_2 sont indiscernables,$\cdots$, n_p sont indiscernables. Le nombre de permutations différentes de ces n éléments est $\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots,n_p!}$.

Exemple : Anagramme

- nombre d'anagrammes de PROBA? $\frac{5!}{1!1!1!1!1!} = 120$
- nombre d'anagrammes de STAT ? $\frac{4!}{1!2!1!} = 12$

Théorème

Le nombre de possibilités de distribuer r boules indiscernables dans n boites vaut $\binom{n+r-1}{r}$

Exemple : Quel est le nombre de dominos dans une jeu de dominos ?

Discernables vs Indiscernables

Théorème

Considérons n objets parmi lesquels n_1 sont indiscernables, n_2 sont indiscernables,$\cdots$, n_p sont indiscernables. Le nombre de permutations différentes de ces n éléments est $\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots,n_p!}$.

Exemple : Anagramme

- nombre d'anagrammes de PROBA? $\frac{5!}{1!1!1!1!1!} = 120$
- nombre d'anagrammes de STAT ? $\frac{4!}{1!2!1!} = 12$

Théorème

Le nombre de possibilités de distribuer r boules indiscernables dans n boites vaut $\binom{n+r-1}{r}$

Exemple : Quel est le nombre de dominos dans une jeu de dominos ?

- $n = 7$ boites numérotées $0, 1, \ldots, 6$
- $r = 2$
- $\binom{7+2-1}{2} = 28$

Exemples

- Un dé est lancé n fois de rang. Quelle est la probabilité qu'aucun 1 n'apparaisse ?

Exemples

- Un dé est lancé n fois de rang. Quelle est la probabilité qu'aucun 1 n'apparaisse ?

$\Omega = \{(i_1, \ldots, i_n) : 1 \leq i_j \leq 6, 1 \leq j \leq n\} = \{1, \ldots, 6\}^n, |\Omega| = 6^n$
$A = \{(i_1, \ldots, i_n) : 2 \leq i_j \leq 6, 1 \leq j \leq n\}, |A| = 5^n$
$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{5^n}{6^n}$

Exemples

- Un dé est lancé n fois de rang. Quelle est la probabilité qu'aucun 1 n'apparaisse ?

$\Omega = \{(i_1, \ldots, i_n) : 1 \leq i_j \leq 6, 1 \leq j \leq n\} = \{1, \ldots, 6\}^n, |\Omega| = 6^n$
$A = \{(i_1, \ldots, i_n) : 2 \leq i_j \leq 6, 1 \leq j \leq n\}, |A| = 5^n$
$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{5^n}{6^n}$

- Une pièce est lancée $2n$ fois de rang. Quelle est la probabilité que les nombres de Face et Pile soit égaux ?

Exemples

- Un dé est lancé n fois de rang. Quelle est la probabilité qu'aucun 1 n'apparaisse ?

$\Omega = \{(i_1, \ldots, i_n) : 1 \leq i_j \leq 6, 1 \leq j \leq n\} = \{1, \ldots, 6\}^n, |\Omega| = 6^n$
$A = \{(i_1, \ldots, i_n) : 2 \leq i_j \leq 6, 1 \leq j \leq n\}, |A| = 5^n$
$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{5^n}{6^n}$

- Une pièce est lancée $2n$ fois de rang. Quelle est la probabilité que les nombres de Face et Pile soit égaux ?

$\Omega = \{Pile, Face\}^{2n}, |\Omega| = 2^{2n}$
$A = \{n\ Faces\}, |A| = (2n)_n = \binom{2n}{n}$
$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{(2n)_n}{2^{2n}}$

Exemples

- Un dé est lancé n fois de rang. Quelle est la probabilité qu'aucun 1 n'apparaisse ?

$\Omega = \{(i_1, \ldots, i_n) : 1 \leq i_j \leq 6, 1 \leq j \leq n\} = \{1, \ldots, 6\}^n, |\Omega| = 6^n$
$A = \{(i_1, \ldots, i_n) : 2 \leq i_j \leq 6, 1 \leq j \leq n\}, |A| = 5^n$
$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{5^n}{6^n}$

- Une pièce est lancée $2n$ fois de rang. Quelle est la probabilité que les nombres de Face et Pile soit égaux ?

$\Omega = \{Pile, Face\}^{2n}, |\Omega| = 2^{2n}$
$A = \{n \ Faces\}, |A| = (2n)_n = \binom{2n}{n}$
$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{(2n)_n}{2^{2n}}$

- Une main au poker est constituée de 5 cartes distribuées d'un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité d'avoir une quinte flush royale, i.e., 10,valet,dame,roi,as de la même couleur ?

Exemples

- Un dé est lancé n fois de rang. Quelle est la probabilité qu'aucun 1 n'apparaisse ?

$\Omega = \{(i_1, \ldots, i_n) : 1 \leq i_j \leq 6, 1 \leq j \leq n\} = \{1, \ldots, 6\}^n, |\Omega| = 6^n$
$A = \{(i_1, \ldots, i_n) : 2 \leq i_j \leq 6, 1 \leq j \leq n\}, |A| = 5^n$
$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{5^n}{6^n}$

- Une pièce est lancée $2n$ fois de rang. Quelle est la probabilité que les nombres de Face et Pile soit égaux ?

$\Omega = \{Pile, Face\}^{2n}, |\Omega| = 2^{2n}$
$A = \{n\ Faces\}, |A| = (2n)_n = \binom{2n}{n}$
$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{(2n)_n}{2^{2n}}$

- Une main au poker est constituée de 5 cartes distribuées d'un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité d'avoir une quinte flush royale, i.e., 10,valet,dame,roi,as de la même couleur ?

$\Omega = \{\text{5 cartes d'une jeux de 52 cartes}\}, |\Omega| = \binom{52}{5} = 2598960$
$A = \{\text{quinte flush royale}\}, |A| = 4$
$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{4}{2598960} = 0.000001539 = 15.39 * 10^{-7}$

Exemples (suite)

- Une machine produit 100 éléments quotidiennement. Supposons que 10 de ces éléments soit défectueux. Quelle est la probabilité qu'un échantillon aléatoire de 5 éléments de la production journalière contiennent 3 éléments défectueux ?

Exemples (suite)

- Une machine produit 100 éléments quotidiennement. Supposons que 10 de ces éléments soit défectueux. Quelle est la probabilité qu'un échantillon aléatoire de 5 éléments de la production journalière contiennent 3 éléments défectueux ?

$\Omega = \{5 \text{ éléments parmi les 100 éléments}\}, |\Omega| = \binom{100}{5} = 7.528752 * 10^7$
$A = \{3 \text{ défectueux parmi les 5}\}, |A| = \binom{10}{3}\binom{90}{2} = 120 * 4005 = 480600$
$P(A) = |A||\Omega| = \frac{480600}{7.528752 * 10^7} = 0.006383528$

Différence de Modélisation

Considérons le résultat du loto (i.e., trouver 6 numéros parmi 49)

- Première modélisation : on regarde le tirage en direct
  - arrangement de 6 nombres pris parmi $\{1, \ldots, 49\}$
  - 6-uplet $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$
  - nombre de tirages différents :

Différence de Modélisation

Considérons le résultat du loto (i.e., trouver 6 numéros parmi 49)

- Première modélisation : on regarde le tirage en direct
  - arrangement de 6 nombres pris parmi $\{1, \ldots, 49\}$
  - 6-uplet $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$
  - nombre de tirages différents : $(49)_6 = A_{49}^6 = 10\,068\,347\,520$

Différence de Modélisation

Considérons le résultat du loto (i.e., trouver 6 numéros parmi 49)

- Première modélisation : on regarde le tirage en direct
  - arrangement de 6 nombres pris parmi $\{1, \ldots, 49\}$
  - 6-uplet $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$
  - nombre de tirages différents : $(49)_6 = A_{49}^6 = 10\ 068\ 347\ 520$
- Deuxième modélisation : on regarde le résultat du tirage sans considérer l'ordre de sortie des numéros
  - combinaison de 6 nombres parmi $\{1, \ldots, 49\}$
  - sous-ensemble $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$
  - nombre de tirages différents :

Différence de Modélisation

Considérons le résultat du loto (i.e., trouver 6 numéros parmi 49)

- Première modélisation : on regarde le tirage en direct
  - arrangement de 6 nombres pris parmi $\{1, \ldots, 49\}$
  - 6-uplet $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$
  - nombre de tirages différents : $(49)_6 = A_{49}^6 = 10\ 068\ 347\ 520$
- Deuxième modélisation : on regarde le résultat du tirage sans considérer l'ordre de sortie des numéros
  - combinaison de 6 nombres parmi $\{1, \ldots, 49\}$
  - sous-ensemble $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$
  - nombre de tirages différents : $\binom{49}{6} = C_{49}^6 = 13\ 983\ 816$

Probabilités Égales ou Pas

1. Une pièce est lancée jusqu'à obtenir Face avec un maximum de deux lancers.
   - Trois évènements élémentaires $\Omega = \{F, PF, PP\}$
   - Loi de probabilité #1 (M. de Roverbal) : $P(\omega) = \frac{1}{3}$ pour tout $\omega \in \Omega$
   - Loi de probabilité #2 (Pascal) : $P(F) = \frac{1}{2}$, $P(PF) = \frac{1}{4}$, $P(PP) = \frac{1}{4}$

Répétitions indépendantes

Supposons qu'une expérience aléatoire, modélisée par un univers Ω et une probabilité P, est répétée N fois. Le nouvel univers est $\Omega^N = \Omega \times \ldots \Omega$ et la probabilité associée est $P^N((\omega_1, \ldots, \omega_N)) = P(\omega_1) \ldots P(\omega_N)$

2. Une paire de dés est lancée. Quelle est la probabilité que la somme des faces soit supérieure ou égale à 8 ?

Probabilités Égales ou Pas

1. Une pièce est lancée jusqu'à obtenir Face avec un maximum de deux lancers.
   - Trois évènements élémentaires $\Omega = \{F, PF, PP\}$
   - Loi de probabilité #1 (M. de Roverbal) : $P(\omega) = \frac{1}{3}$ pour tout $\omega \in \Omega$
   - Loi de probabilité #2 (Pascal) : $P(F) = \frac{1}{2}$, $P(PF) = \frac{1}{4}$, $P(PP) = \frac{1}{4}$

Répétitions indépendantes

Supposons qu'une expérience aléatoire, modélisée par un univers Ω et une probabilité P, est répétée N fois. Le nouvel univers est $\Omega^N = \Omega \times \ldots \Omega$ et la probabilité associée est $P^N((\omega_1, \ldots, \omega_N)) = P(\omega_1) \ldots P(\omega_N)$

2. Une paire de dés est lancée. Quelle est la probabilité que la somme des faces soit supérieure ou égale à 8 ?
   - $\Omega = \{2, 3, 4, \ldots, 12\}$
   - $P(2) = \frac{1}{36}, P(3) = \frac{2}{36}, P(4) = \frac{3}{36}, P(5) = \frac{4}{36}, P(6) = \frac{5}{36} P(7) = \frac{6}{36}$
     $P(8) = \frac{5}{38}, P(9) = \frac{4}{36}, P(10) = \frac{3}{36}, P(11) = \frac{2}{36}, P(12) = \frac{1}{36}$

Probabilités Égales ou Pas

1. Une pièce est lancée jusqu'à obtenir Face avec un maximum de deux lancers.
   - Trois évènements élémentaires $\Omega = \{F, PF, PP\}$
   - Loi de probabilité #1 (M. de Roverbal) : $P(\omega) = \frac{1}{3}$ pour tout $\omega \in \Omega$
   - Loi de probabilité #2 (Pascal) : $P(F) = \frac{1}{2}$, $P(PF) = \frac{1}{4}$, $P(PP) = \frac{1}{4}$

Répétitions indépendantes

Supposons qu'une expérience aléatoire, modélisée par un univers Ω et une probabilité P, est répétée N fois. Le nouvel univers est $\Omega^N = \Omega \times \ldots \Omega$ et la probabilité associée est $P^N((\omega_1, \ldots, \omega_N)) = P(\omega_1) \ldots P(\omega_N)$

2. Une paire de dés est lancée. Quelle est la probabilité que la somme des faces soit supérieure ou égale à 8 ?
   - $\Omega = \{2, 3, 4, \ldots, 12\}$
   - $P(2) = \frac{1}{36}, P(3) = \frac{2}{36}, P(4) = \frac{3}{36}, P(5) = \frac{4}{36}, P(6) = \frac{5}{36} P(7) = \frac{6}{36}$
     $P(8) = \frac{5}{38}, P(9) = \frac{4}{36}, P(10) = \frac{3}{36}, P(11) = \frac{2}{36}, P(12) = \frac{1}{36}$
   - $A = \{8, 9, 10, 11, 12\}$
   - $P(A) = P(8) + P(9) + P(10) + P(11) + P(12) = \frac{5}{12}$

Probabilité Conditionnelle

Probabilité conditionnelle

Étant donnés deux évènements A et B avec $P(B) > 0$, la probabilité conditionelle de A sachant que B est réalisé est

$$P(A|B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- La probabilité conditionnelle schant B, $P(.|B)$ est une nouvelle probabilité
- Si $P(B) = 0$, alors on a usuellement $P(A|B) = 0$
- $P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$

Probabilité Conditionnelle - Exemple

Une urne contient 10 boules rouges et 10 boules blanches. Une expérience aléatoire consiste à sélectionner une boule dans l'urne, de le remplacer par une boule de l'autre couleur qui est mise dans l'urne, puis de sélectionner une deuxième boule dans l'urne. Quelle est la probabilité de tirer deux boules rouges ?

Probabilité Conditionnelle - Exemple

Une urne contient 10 boules rouges et 10 boules blanches. Une expérience aléatoire consiste à sélectionner une boule dans l'urne, de le remplacer par une boule de l'autre couleur qui est mise dans l'urne, puis de sélectionner une deuxième boule dans l'urne. Quelle est la probabilité de tirer deux boules rouges ?

- $\Omega = \{(Rouge, Rouge), (Rouge, Blanche), (Blanche, Rouge), (Blanche, Blanche)\}$
- $A_1 = \{\text{première boule est Rouge}\}, A_2 = \{\text{deuxième boule est Rouge}\}$
- $A_1 \cap A_2 = \{\text{les deux boules sont rouges}\}$. On cherche $P(A_1 \cap A_2)$.

Probabilité Conditionnelle - Exemple

Une urne contient 10 boules rouges et 10 boules blanches. Une expérience aléatoire consiste à sélectionner une boule dans l'urne, de le remplacer par une boule de l'autre couleur qui est mise dans l'urne, puis de sélectionner une deuxième boule dans l'urne. Quelle est la probabilité de tirer deux boules rouges ?

- $\Omega = \{(Rouge, Rouge), (Rouge, Blanche), (Blanche, Rouge), (Blanche, Blanche)\}$
- $A_1 = \{\text{première boule est Rouge}\}, A_2 = \{\text{deuxième boule est Rouge}\}$
- $A_1 \cap A_2 = \{\text{les deux boules sont rouges}\}$. On cherche $P(A_1 \cap A_2)$.
- $P(A_1 \cap A_2) = P(A_2|A_1).P(A_1)$
- $P(A_1) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$
- $P(A_2|A_1) = \frac{9}{20}$
- $P(A_1 \cap A_2) = P(A_2|A_1).P(A_1) = \frac{9}{20} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{40}$

Évènements Indépendants

Évènement indépendant

Deux évènements A et B, où $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$, sont indépendants si l'une des conditions suivantes est satisfaite

(i) $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

(ii) $P(A|B) = P(A)$

(iii) $P(B|A) = P(B)$

Exemple

- Considérons le lancer de deux dés, un rouge et un blanc.
- Soient R_i, $i \in \{1, \ldots, 6\}$, l'évènement "le dé rouge tombe sur i" et B_j, $j \in \{1, \ldots, 6\}$, l'évènement "le dé blanc tombe sur j".
- Montrer que n'importe quelle paire R_i et B_j est indépendante.

Évènements Indépendants

Évènement indépendant

Deux évènements A et B, où $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$, sont indépendants si l'une des conditions suivantes est satisfaite

(i) $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

(ii) $P(A|B) = P(A)$

(iii) $P(B|A) = P(B)$

Exemple

- Considérons le lancer de deux dés, un rouge et un blanc.
- Soient R_i, $i \in \{1, \ldots, 6\}$, l'évènement "le dé rouge tombe sur i" et B_j, $j \in \{1, \ldots, 6\}$, l'évènement "le dé blanc tombe sur j".
- Montrer que n'importe quelle paire R_i et B_j est indépendante.

  $P(R_i \cap B_j) = P((i,j)) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = P(R_i)P(B_j)$

Évènements Indépendants (cont'd)

Proposition

Il est équivalent de dire

1. (i) A et B sont indépendants
2. (ii) A^C et B sont indépendants
3. (iii) A et B^C sont indépendants
4. (iv) A^C et B^C sont indépendants

A et B indépendants $\Longrightarrow$ la connaissance de la réalisation de l'un n'influence pas la probabilité de l'autre

Remarque

Deux évènements incompatibles A et B, où $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$, ne sont jamais indépendants

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0$ car incompatibilité implique $P(A \cap B) = 0$

Famille d'Évènements Mutuellement Indépendants

Famille d'évènements mutuellement indépendants

Soient A_i, $i \in I$ où I est un ensemble d'indices possiblement infini, une famille d'évènements. Les évènements A_i sont mutuellement indépendants si et seulement si pour chaque ensemble fini d'indices distincts $i_1, \ldots, i_k \in I$, nous avons

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\ldots P(A_{i_k})$$

Remarque

La condition $P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_n}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\ldots P(A_{i_n})$ n'implique pas la condition analogue pour toute sous-famille d'évènements

Famille d'Évènements Mutuellement Indépendants - Exemple

- lancer de deux dés
- univers $\Omega = \{(i, j) : i, j = 1, 2, \dots, 6\}$ avec $P(\omega) = \frac{1}{36}$ pour tout $\omega \in \Omega$

1. évènements $A = \{\text{premier dé} = 1, 2 \text{ ou } 3\}$,
   $B = \{\text{premier dé} = 3, 4 \text{ ou } 5\}$, $C = \{\text{somme des deux dés} = 9\}$

Famille d'Évènements Mutuellement Indépendants - Exemple

- lancer de deux dés
- univers $\Omega = \{(i,j) : i,j = 1,2,\dots,6\}$ avec $P(\omega) = \frac{1}{36}$ pour tout $\omega \in \Omega$

1. évènements $A = \{\text{premier dé} = 1,2 \text{ ou } 3\}$, $B = \{\text{premier dé} = 3,4 \text{ ou } 5\}$, $C = \{\text{somme des deux dés} = 9\}$
   - $A = \{(i,j) : 1 \leq i \leq 3 \text{ et } 1 \leq j \leq 6\}, P(A) = \frac{1}{2}$
   - $B = \{(i,j) : 3 \leq i \leq 5 \text{ et } 1 \leq j \leq 6\}, P(B) = \frac{1}{2}$
   - $A \cap B = \{(3,j) : 1 \leq j \leq 6\}, P(A \cap B) = \frac{1}{6} \neq P(A)P(B)$
   - $C = \{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\}, P(C) = \frac{1}{9}$
   - $A \cap B \cap C = \{(3,6)\}, P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{36} = P(A)P(B)P(C)$

Famille d'Évènements Mutuellement Indépendants - Exemple

- lancer de deux dés
- univers $\Omega = \{(i,j) : i,j = 1,2,\dots,6\}$ avec $P(\omega) = \frac{1}{36}$ pour tout $\omega \in \Omega$

1. évènements $A = \{\text{premier dé} = 1, 2 \text{ ou } 3\}$, $B = \{\text{premier dé} = 3, 4 \text{ ou } 5\}$, $C = \{\text{somme des deux dés} = 9\}$
   - $A = \{(i,j) : 1 \leq i \leq 3 \text{ et } 1 \leq j \leq 6\}$, $P(A) = \frac{1}{2}$
   - $B = \{(i,j) : 3 \leq i \leq 5 \text{ et } 1 \leq j \leq 6\}$, $P(B) = \frac{1}{2}$
   - $A \cap B = \{(3,j) : 1 \leq j \leq 6\}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{6} \neq P(A)P(B)$
   - $C = \{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\}$, $P(C) = \frac{1}{9}$
   - $A \cap B \cap C = \{(3,6)\}$, $P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{36} = P(A)P(B)P(C)$
2. évènements $A = \{\text{premier dé} = 1, 2 \text{ ou } 3\}$, $B = \{\text{second dé} = 4, 5 \text{ ou } 6\}$, $C = \{\text{somme des deux dés} = 7\}$
   - $B = \{(i,j) : 1 \leq i \leq 6 \text{ et } 4 \leq j \leq 6\}$, $P(B) = \frac{1}{2}$
   - $A \cap B = \{(i,j) : 1 \leq i \leq 3 \text{ et } 4 \leq j \leq 6\}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4} = P(A)P(B)$
   - $C = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$, $P(C) = \frac{1}{6}$
   - $A \cap C = \{(1,6),(2,5),(3,4)\}$, $P(A \cap C) = \frac{1}{12}$
   - $B \cap C = \{(4,3),(5,2),(6,1)\}$, $P(B \cap C) = \frac{1}{12}$
   - $A \cap B \cap C = \{(1,6),(2,5),(3,4)\}$, $P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{12} \neq P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{24}$

Système complet d'évènements

Système complet d'évènements

Tout famille A_i, $i \in I$, finie ou pas, d'évènements vérifiant les conditions

(i) $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour tout $i \neq j$

(ii) $\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$

est appelé système complet d'évènements

Proposition

Soit A_i, $i \in I$, un système complet d'évènements. Alors $P(A) = \sum_{i \in I} P(A \cap A_i)$.

$P(A)$ est est calculée par un système complet d'évènements dans lequel A se réalise

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap \Omega) = P(A \cap (\bigcup_{i \in I} A_i)) = P(\bigcup_{i \in I} A \cap A_i)) \\ &= \sum_{i \in I} P(A \cap A_i) \text{ car } (A \cap A_i)_{i \in I} \text{ sont incompatibles} \end{aligned}$$

Théorème des Probabilités Totales

Théorème des probabilités totales

Soit A_i, $i \in I$, un système complet d'évènements. Alors pour tout évènement A, nous avons

$$P(A) = \sum_{i \in I} P(A_i) P(A|A_i)$$

$P(A)$ est la somme pondérée des probabilités conditionnelles $P(A|A_i)$

Exemple: Trois paniers U_1, U_2 et U_3 contiennent chacun a_i pommes sucrées et b_i pommes amères indiscernables, $i = 1, 2, 3$. On choisit un panier au hasard et trois pommes dans le pannier choisi. Quelle est la probabilité d'avoir choisi exactement deux pommes amères ?

Théorème des Probabilités Totales

Théorème des probabilités totales

Soit A_i, $i \in I$, un système complet d'évènements. Alors pour tout évènement A, nous avons

$$P(A) = \sum_{i \in I} P(A_i) P(A|A_i)$$

$P(A)$ est la somme pondérée des probabilités conditionnelles $P(A|A_i)$

Exemple: Trois paniers U_1, U_2 et U_3 contiennent chacun a_i pommes sucrées et b_i pommes amères indiscernables, $i = 1, 2, 3$. On choisit un panier au hasard et trois pommes dans le pannier choisi. Quelle est la probabilité d'avoir choisi exactement deux pommes amères ?

- $\Omega = \{\text{choisir 3 pommes dans le même panier}\}$
- $A = \{\text{avoir choisi deux pommes amères}\}$
- $U_i = \{\text{choisir 3 pommes dans le panier } i\}, P(U_i) = \frac{1}{3}, i = 1, 2, 3$
- U_1, U_2, U_3 : système complet d'évènements
- $P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(A|U_i) P(U_i) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{3} \frac{a_i \binom{b_i}{2}}{\binom{a_i+b_i}{3}}$

Formules de Bayes

Formule de Bayes

Soit A_i, $i \in I$, un système complet d'évènements. Alors pour tout évènement A, nous avons

$$P(A_k|A) = \frac{P(A|A_k)P(A_k)}{\sum_{i \in I} P(A|A_i)P(A_i)}$$

$$P(A_k|A) = \frac{P(A_k \cap A)}{P(A)}, P(A_k \cap A) = P(A|A_k)P(A_k), P(A) = \sum_{i \in I} P(A|A_i)P(A_i)$$

Corollaire

(i) $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B|A)P(C|A \cap B)$

(ii) $P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(A^C)P(B|A^C)}$

$$P(A \cap B \cap C) = P((A \cap B) \cap C) = P(C|A \cap B)P(A \cap B) = P(C|A \cap B)P(B|A)P(A)$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(A \cap B)+P(A^C \cap B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A)+P(B|A^C)P(A^C)}$$

Formules de Bayes - Exemple

Deux opérateurs O_1 et O_2 saisissent 100 et 200 tableaux de données respectivement. Les tableaux saisis par O_1 comportent des fautes dans 5.2% des cas et ceux de O_2 dans 6.7% des cas. Un tableau est choisi au hasard et il comporte des fautes. Quelle est la probabilité que l'opérateur 0_1 ait saisi ce tableau

Formules de Bayes - Exemple

Deux opérateurs O_1 et O_2 saisissent 100 et 200 tableaux de données respectivement. Les tableaux saisis par O_1 comportent des fautes dans 5.2% des cas et ceux de O_2 dans 6.7% des cas. Un tableau est choisi au hasard et il comporte des fautes. Quelle est la probabilité que l'opérateur 0_1 ait saisi ce tableau

- $\Omega = \{\text{un tableau parmi les 300}\}$
- $T_1 = \{\text{tableau saisi par } O_1\}, P(T_1) = \frac{1}{3}$
- $T_2 = \{\text{tableau saisi par } O_2\}, P(T_2) = \frac{2}{3}$
- T_1, T_2 : système complet d'évènements
- $F = \{\text{tableau comporte des fautes}\}$
- $P(F|T_1) = \frac{52}{1000}, P(F|T_2) = \frac{67}{1000}$
- $P(T_1|F) = \frac{P(F|T_1)P(T_1)}{P(F|T_1)P(T_1)+P(F|T_2)P(T_2)} = \frac{\frac{52}{1000}\frac{1}{3}}{\frac{52}{1000}\frac{1}{3}+\frac{67}{1000}\frac{2}{3}} = \frac{26}{93}$

Structure Arborescente

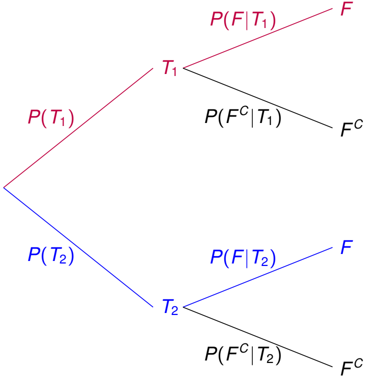
Structure arborescente

L'univers d'une expérience aléatoire est structurée en branches et les probabilités conditionnelles sont les probabilités de passer d'un noeud de l'arbre à un autre

Structure Arborescente

Structure arborescente

L'univers d'une expérience aléatoire est structurée en branches et les probabilités conditionnelles sont les probabilités de passer d'un noeud de l'arbre à un autre



$$P(F) = P(F \cap T_1) + P(F \cap T_2) = P(F|T_1)P(T_1) + P(F|T_2)P(T_2)$$