M1 Informatique
2021-2022

Problème du sac à dos à variables bivalentes
I - Résolution par la programmation dynamique

Le problème du sac à dos unidimensionnel est défini par le programme (P) suivant :

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad \text{(Max)}$$

sous

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b$$

$$x_j \in \{0, 1\}, \forall j = 1, \ldots, n$$

où b, a_j, et c_j (j = 1, …, n) sont des entiers positifs.

Pour sa résolution par programmation dynamique, on le plonge dans la famille de problèmes ($P_k(y)$) définie pour k= 1, …, n et y = 0, …, b, par :

$$z_k(y) = \sum_{j=1}^{k} c_j x_j \quad \text{(Max)}$$

sous

$$\sum_{j=1}^{k} a_j x_j \leq y$$

$$x_j \in \{0, 1\}, \forall j = 1, \ldots, k$$

On a alors la relation de récurrence : $z_{k+1}(y) = \max \{z_k(y), c_{k+1} + z_k(y-a_{k+1})\}$ qui permet d'obtenir la valeur optimale de (P) : $z^* = z_n(b)$.
La résolution directe à partir de cette relation se fait en un temps O(nb) et en espace mémoire O(nb).

1) Algorithme

L'algorithme suivant permet de réduire l'espace mémoire à O(b) par l'utilisation de deux vecteurs Z et D qui renvoient respectivement en sortie la valeur optimale z* de (P) et sa solution optimale x*.
Pour y= 0, …, b on a :

Z(y) = valeur optimale du problème ($P_k(y)$),
D(y) = $\max\{j \leq k : x_j = 1$ pour le problème $(P_k(y))\}$

Début Algorithme

(a) Initialisation

Pour y allant de 0 à b **faire** Z(y) :=0 ; D(y) := 0.
k := 0.

(b) Etape k
Pour y allant de 0 à b **faire** Z'(y) := Z(y) ;
Pour y allant de a_{k+1} à b **faire**
Si $Z'(y-a_{k+1}) + c_{k+1} > Z'(y)$ **alors** D(y) := k+1 ;
$Z(y) := \max \{Z'(y), c_{k+1} + Z'(y-a_{k+1})\}$;
k := k+1.
(c) Si k = n **alors** FIN sinon aller en (b)
(d) Pour j allant de 1 à n faire $x^*_j := 0$;
y := b ;
Tant que y >0 faire
Tant que Z(y)=Z(y-1) faire
y :=y-1 ;
$x^*_{D(y)} := 1$
$y := y - a_{D(y)}$

Fin Algorithme.

2) Exemple

$$z= 12 x_1 + 8x_2+ 2x_3+5x_4 \text{ (max)}$$
sous
$$5 x_1 + 4x_2+ x_3+3x_4 \leq 11$$
$$x_j \in \{0, 1\}, \forall j= 1, \ldots, 4$$

A la fin de l'algorithme :
Z = (0, 2, 2, 5, 8, 12, 14, 14, 17, 20, 22, 22)
D = (0, 3, 3, 4, 2, 1, 3, 3, 4, 2, 3, 3)
x* =(1, 1, 1, 0).

3) Travail à faire pour le 13 mars 2022

1) Génération d'exemples pour $n \leq 100$, $b \leq 1000$.
2) Résolution par l'algorithme proposé après **tri des variables** dans les instances telles que : $c_1/a_1 \geq c_2/a_2 \geq \ldots \geq c_n/a_n$.
3) Déterminer les courbes de complexité temps pour
   a) n fixé, b variable
   b) b fixé, n variable