MaratonaCIn

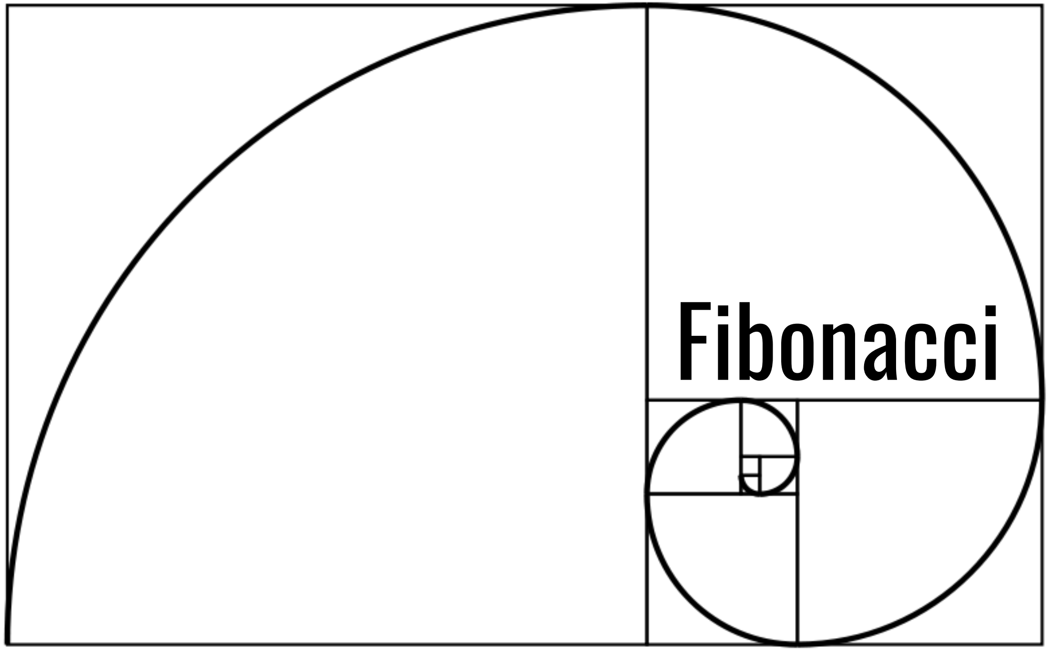
Seletiva 2020

Programação Dinâmica (aula 1)

Aula 5

MaratonaCIn

Fibonacci



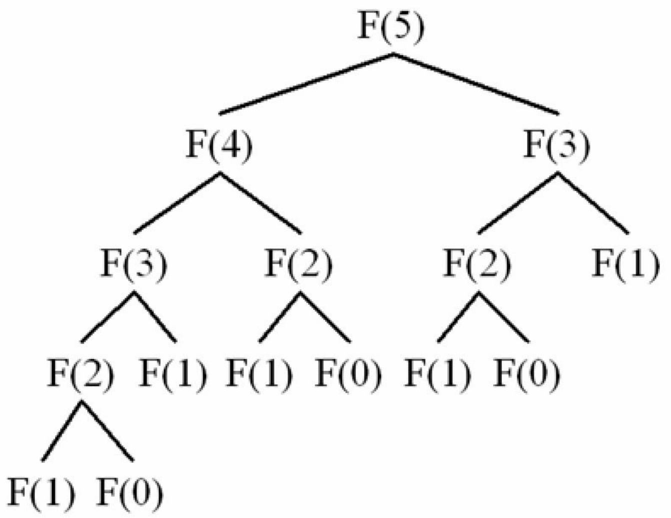
Fibonacci

```
int fibo(int n) {
 if (n == 0) return 0;
 if (n == 1) return 1;
 return fibo(n - 1) + fibo(n - 2);
}
```

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Fibonacci

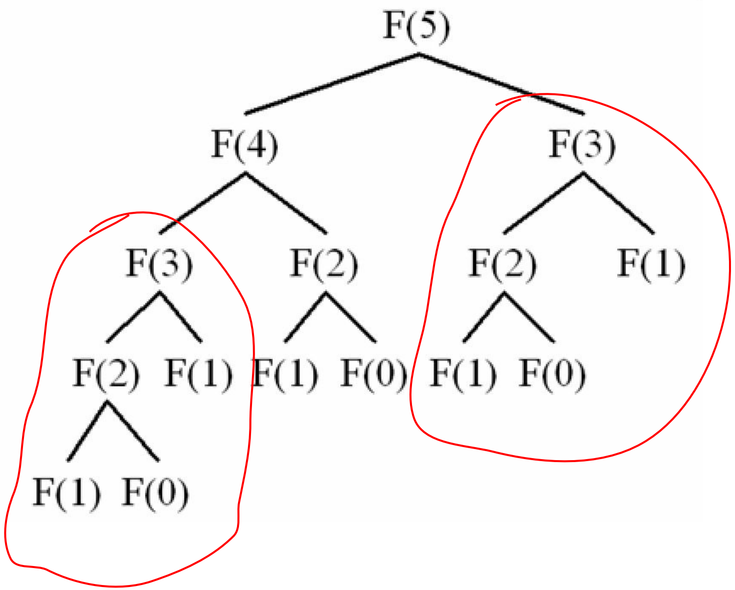
```
int fibo(int n) {
 if (n == 0) return 0;
 if (n == 1) return 1;
 return fibo(n - 1) + fibo(n - 2);
}
```

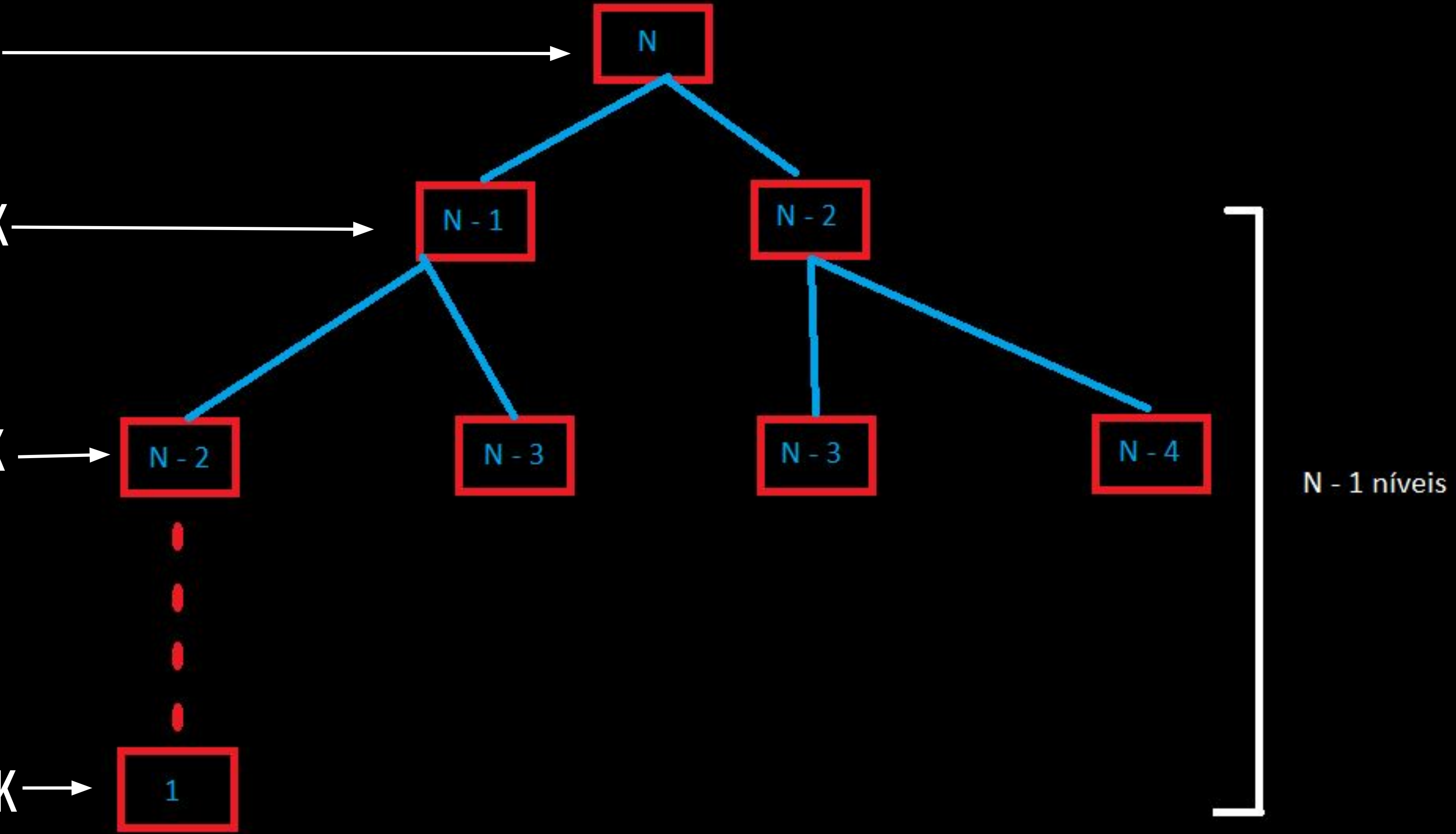


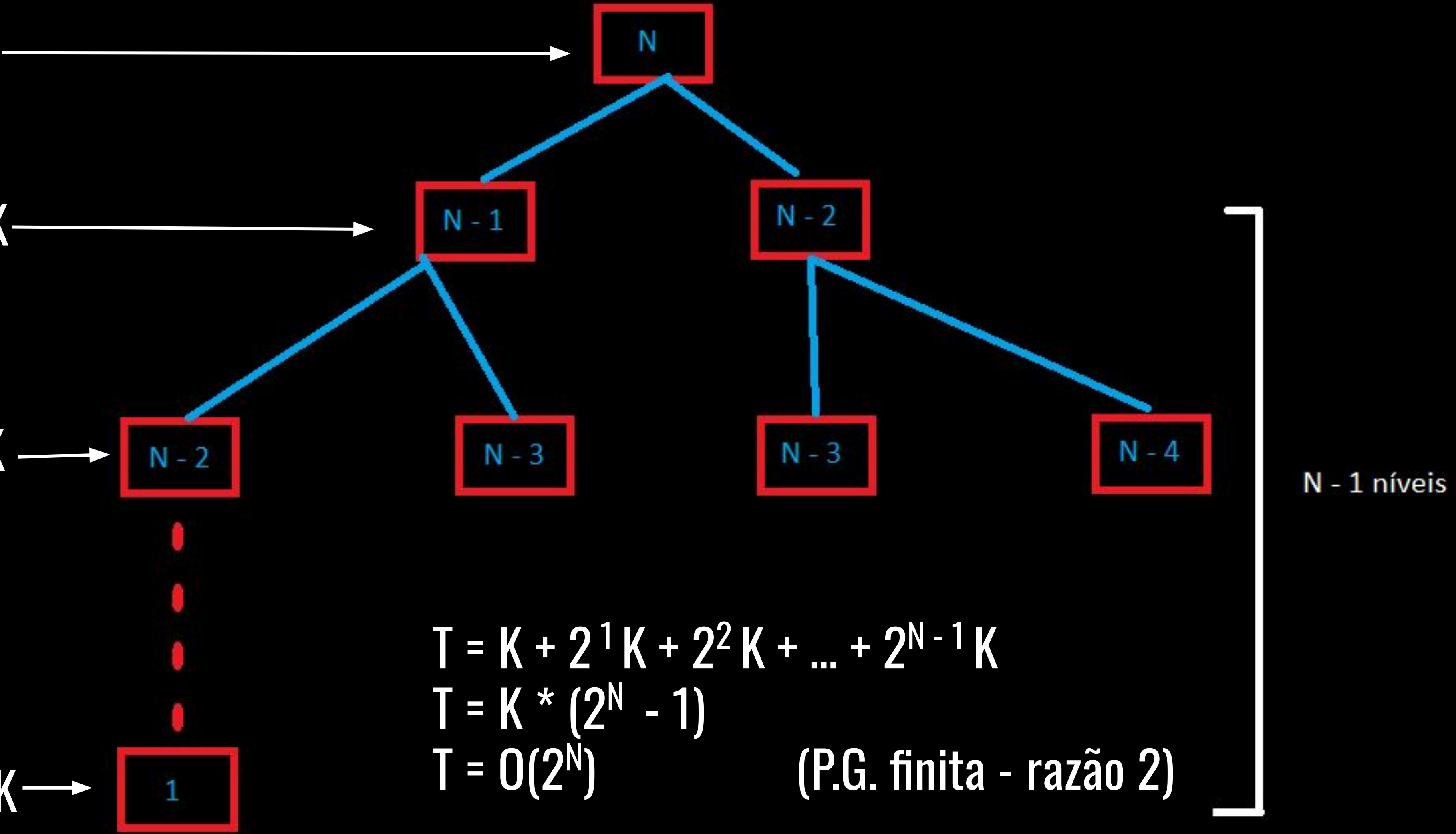
Fibonacci

MaratonaCIn

```
int fibo(int n) {
 if (n == 0) return 0;
 if (n == 1) return 1;
 return fibo(n - 1) + fibo(n - 2);
}
```




N
N - 1
N - 2
N - 2
N - 3
N - 3
N - 4
1
N - 1 níveis



$$T = K + 2^1 K + 2^2 K + \ldots + 2^{N-1} K$$

$$T = K * (2^N - 1)$$

$$T = O(2^N) \qquad \text{(P.G. finita - razão 2)}$$

Fibonacci

Gargalo identificado: recalcular vários estados inúmeras vezes.

Ideia: se eu consigo ver que o resultado já foi calculado e tenho como acessá-lo, não preciso recalcular!

-> Memoização!

Fibonacci (versão recursiva)

MaratonaCIn

```
const int MAX_FIB_N = 20;

ll memo[MAX_FIB_N]; // inicializado com -1

ll fib(int n) {
 if (n == 0) return 0;
 if (n == 1) return 1;
 if (memo[n] != -1) return memo[n];
 return memo[n] = fib(n - 1) + fib(n - 2)
}
```

Complexidade: O(N)
Ideia: cada número de Fibonacci
de 0 a N só precisa ser calculado uma vez

Fibonacci (versão iterativa)

MaratonaCIn

```
const int MAX_FIB_N = 20;

ll fibo[MAX_FIB];

int main() {
 fibo[0] = 0;
 fibo[1] = 1;
 for (int i = 2; i < MAX_FIB_N; ++i) {
   fibo[i] = fibo[i - 1] + fibo[i - 2];
 }
}
```

Programação Dinâmica

- Armazenar resultados obtidos, evitando recalculá-los
- Estados
  - que tipo de informação eu preciso ter para identificar unicamente em que ponto da solução eu estou?
- Transições
  - dado um estado, que escolhas eu tenho a fazer, isto é, de que modo eu posso usar os recursos que definem aquele estado para continuar a solução?

Problema da Mochila

- Dado um conjunto de itens, onde o i-ésimo item possui peso W_i e preço P_i , e uma mochila de capacidade total S, escolha um subconjunto de itens, tal que a soma dos seus pesos não excede S, e a soma dos seus preços é máxima.
  - Brute-force
    - gerar todos subconjuntos e, dentre os válidos, escolher o que maximiza o preço total;
      - para cada item, eu tenho uma opção: ou eu coloco ele na mochila, ou não
        - ao chegar no item, eu preciso saber se ele cabe na mochila. portanto, eu preciso, a todo momento, saber quanto espaço livre há na mochila

Problema da Mochila

```
int brute(int item_atual, int espaco_livre) {
 if (item_atual == num_itens) return 0;
 int melhor_opcao = -1;
 int solucao_com_item = -1;
 if (espaco_livre >= peso[item_atual]) {
   int novo_espaco_livre = espaco_livre - peso[item_atual];
   solucao_com_item = brute(item_atual + 1, novo_espaco_livre) +
preco[item_atual];
 }
 int solucao_sem_item = brute(item_atual + 1, espaco_livre);
 melhor_opcao = max(solucao_com_item, solucao_sem_item);
 return melhor_opcao;
```

Problema da Mochila

- Problema: gerar todos os subconjuntos, dado um conjunto de N elementos -> complexidade $O(2^N)$.
- Solução: memoizar!
- Estados
  - como visto previamente, as informações relevantes que definem bem em que ponto do problema eu estou: qual item eu estou olhando, e qual o espaço livre que eu tenho.
  - dp[MAX_ITENS][MAX_PESO]
- Transições
  - opções: escolher um item, caso possível, ou não escolhê-lo
  - pos -> em qual item estou (posição no vetor)
    - escolher item: solve(pos + 1, espaco_livre - peso[pos]) + preco[pos]
    - não escolher item: solve(pos + 1, espaco_livre)

Problema da Mochila (versão recursiva)

```
int solve(int pos, int espaco_livre) {
  if (pos == num_itens) return 0;
  if (dp[pos][espaco_livre] != -1) return dp[pos][espaco_livre];
  int melhor_opcao = -1;
  int solucao_com_item = -1;
  if (espaco_livre >= peso[pos]) {
    int novo_espaco_livre = espaco_livre - peso[pos];
    solucao_com_item = solve(pos + 1, novo_espaco_livre) + preco[pos];
  }
  int solucao_sem_item = solve(pos + 1, espaco_livre);
  melhor_opcao = max(solucao_com_item, solucao_sem_item);
  return dp[pos][espaco_livre] = melhor_opcao;
}
```

Problema da Mochila (versão recursiva)

- Análise de complexidade:
  - cada estado só precisa ser calculado uma única vez
  - temos MAX_ITENS * MAX_CAP estados
  - cada estado possui uma transição O(1) - escolher ou não um item
  - complexidade total = complexidade_transicao * qtd_estados
- Finalmente, complexidade (tempo e memória) da DP:
  - O(MAX_ITENS * MAX_CAP)

Problema da Mochila (versão iterativa)

```
// lembrar de inicializar o vetor dp
 // com as bases da solução
 for (int item = 1; item <= QTD_ITENS; ++item) {
   for (int espaco_livre = 0; espaco_livre <= CAP_MOCHILA; ++espaco_livre) {
     int pegar_item = -1;
     int nao_pegar_item = dp[item - 1][espaco_livre];
     if (espaco_livre >= peso[item]) {
       pegar_item = dp[item - 1][espaco_livre - peso[item]] + preco[item];
     }
     dp[item][espaco_livre] = max(pegar_item, nao_pegar_item);
   }
 }
```

Subarray de a soma máxima

- Dado um array A, encontre o subarray com a soma máxima.
  - Bruteforce:
    - Para todo subarray de A, calcule a soma e atualize a resposta.
    - $O(n^2)$ de complexidade
    - Muito lento!
    - Como melhorar? :P

Subarray de soma máxima (brute force)

```
long long solve(vector<int> A) {
  int n = (int) A.size();
  long long ans = -1e18;
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    long long cur = 0;
    for (int j = i; j < n; j++) {
      cur += A[j];
      ans = max(ans, cur);
    }
  }
  return ans;
```

Subarray com a soma máxima

- Solução: programação dinâmica.
- Estado:
  - Apenas um inteiro id.
  - dp[id] = melhor resposta olhando as posições do array até o índice id.
- Transições:
  - dp[id] = max(preff[id] - mn[id - 1], dp[id - 1])
  - preff[id] = A[1] + A[2] + ... + A[id]
  - mn[id] = min(preff[1], preff[2], ..., preff[id])

Subarray de soma máxima (PD iterativa)

MaratonaCIn

```
long long solve(vector<int> A) {
  int n = (int) A.size();
  vector<long long> dp(n + 1), preff(n + 1), mn(n + 1);
  dp[0] = -1e18;
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    preff[i + 1] = preff[i] + A[i];
    mn[i + 1] = min(preff[i + 1], mn[i]);
    dp[i + 1] = max(dp[i], preff[i + 1] - mn[i]);
  }
  return dp[n];
}
```

Longest Increasing Subsequence (LIS)

- Problema: dado um array A, encontre a maior subsequência crescente.
  - Bruteforce:
    - Gerar todas subsequências do array e testar se ela é crescente e maior que a resposta atual
    - $O(2^N)$ de complexidade
    - Muito ruim

Longest Increasing Subsequence (LIS)

- Solução com programação dinâmica:
- Estado:
  - dp[i] = maior subsequência que termina no i-ésimo elemento, considerando apenas subsequências que contém elementos até o índice i do vetor
  - vetor dp iniciado com valor 1 em todos os índices (sequência contendo apenas o próprio elemento)
- Transições:
  - Para todo $j < i$, se $A[j] < A[i]$, $dp[i] = \max(dp[i], dp[j] + 1)$
- Complexidade:
  - tempo: $O(n^2)$
  - memória: $O(n)$

Longest Increasing Subsequence (LIS)

MaratonaCIn

```
// lembrar de inicializar o vetor dp
// com as bases da solução
for(int i = 0; i < n; ++i){
  for(int j = 0; j < i; ++j){
    if(A[j] < A[i]){ // < ou <= dependendo do problema
      dp[i] = max(dp[i], dp[j] + 1);
    }
  }
} // O(N²)
```

Longest Increasing Subsequence (LIS)

- Existe uma solução melhor, com complexidade de tempo O(nlogn)
  - Crie um vetor auxiliar S, cujo tamanho, no final, será o tamanho da LIS
  - Para cada elemento A[i] do vetor, faça uma busca binária em S para achar o primeiro elemento maior ou igual que ele (lower_bound)
    - Se não existir valor maior ou igual em S, colocar A[i] no final de S
    - Se existir valor maior ou igual, substituir o valor na menor posição possível em S por A[i]
  - A resposta será o tamanho do vetor auxiliar S

Obs: Só funciona para LIS estritamente crescente.

Obs2: o vetor auxiliar S apenas nos dá a resposta (tamanho da LIS), e não a sequência em si.

Longest Increasing Subsequence (LIS)

```
int lis(int A[], int n){
  vector<int> S;
  for(int i = 0; i < n; i++){
    auto it = lower_bound(S.begin(), S.end(), a[i]);
    if(it == S.end())
      S.push_back(A[i]);
    else
      *it = A[i];
  }
  return S.size();
} // O(nlogn)
```