Lógica Matemática
Para Computação

Centro de Informática U·F·P·E
Universidade Federal de Pernambuco

Lógica Proposicional
Conjunto satisfatível

- Suponha que S seja um conjunto de proposições, dizemos que S é satisfatível se existe pelo menos uma valoração que satisfaz a todas as proposições de S.

- S será insatisfatível quando não for satisfatível.

Lógica Proposicional
Conjunto satisfatível

- Seja S = $\{(Y \wedge (\neg Z)), (X \rightarrow Z), ((\neg Z) \wedge (X \vee Y))\}$

- S é satisfatível ?

Conjunto satisfatível

$S = \{(Y \wedge (\neg Z)), (X \rightarrow Z), ((\neg Z) \wedge (X \vee Y))\}$

X	Y	Z	$\neg Z$	$X \rightarrow Z$	$(Y \wedge (\neg Z))$	$(X \vee Y)$	$(\neg Z) \wedge (X \vee Y)$
0	0	0	1	1	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	0	1	0

Consequência Lógica

- **Dizemos que uma proposição φ é uma conseqüência lógica do conjunto S se toda valoração que satisfaz S também satisfaz φ.**

- **No exemplo anterior, a proposição $(Y \wedge (\neg Z))$ é conseqüência lógica do conjunto T formado pelas outras duas?**

$(Y \wedge (\neg Z))$ é cons. lógica de $\{(X \rightarrow Z), ((\neg Z) \wedge (X \vee Y))\}$?

X	Y	Z	$\neg Z$	$X \rightarrow Z$	$(Y \wedge (\neg Z))$	$(X \vee Y)$	$(\neg Z) \wedge (X \vee Y)$
0	0	0	1	1	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	0	1	0

(X→Z) é cons. lógica de {(Y∧(¬Z)) , ((¬Z)∧(X∨Y))}?

X	Y	Z	¬Z	X→Z	(Y∧(¬Z))	(X∨Y)	(¬Z)∧(X∨Y)
0	0	0	1	1	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	0	1	0

Consequência Lógica

- Seja Γ um conjunto de sentenças e φ uma sentença. Dizemos que φ é consequência lógica de Γ se toda valoração que satisfaz Γ também satisfaz φ. Usamos a notação $\Gamma \models \varphi$.

- Se Γ for um conjunto finito ($\Gamma = \{ \alpha_1, ..., \alpha_n \}$), a leitura de $\Gamma \models \varphi$ é $(\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_n) \rightarrow \varphi$.

- Prove que o seguinte argumento é válido.
- O unicórnio é bruxaria.

É consequência lógica de:

- O unicórnio, se não é lenda , é mamífero, mas se é lenda , ele é imortal.
- Se o unicórnio é imortal ou mamífero, ele possui chifres.
- O unicórnio, se ele possui chifres, é bruxaria.

Consequência Lógica
TEOREMA(1)

- φ é uma conseqüência lógica de Γ se, e somente se, $\Gamma \cup \{ \neg\varphi \}$ é insatisfatível.

TEOREMA(2)

- Seja φ uma proposição. φ é satisfatível se, e somente se, ¬φ é refutável.

PROVA

(parte 1) Se φ é satisfatível então ¬φ é refutável.

- Suponha que φ é satisfatível.
- Ora, então existe w tal que $\hat{w}(\varphi) = 1$.
- Claro que $\hat{w}(\neg\varphi) = 0$. Então existe valoração que não satisfaz ¬φ. Logo ¬φ é refutável.

TEOREMA(2)

- Seja φ uma proposição. φ é satisfatível se, e somente se, ¬φ é refutável.

PROVA

(parte 2) Se ¬φ é refutável então φ é satisfatível.

- Suponha que ¬φ seja refutável.
- Ora, então existe w tal que $\hat{w}(\neg\varphi) = 0$.
- Claro que $\hat{w}(\varphi) = 1$. Então existe valoração que satisfaz φ. Logo φ é satisfativel.