- Proposição => uma sentença que é verdadeira ou falsa.
- Teorema => uma proposição que é garantida como verdade por uma prova.
- Axioma => proposição que se assume como verdadeira e que não precisa de uma prova. (postulado, lei, princípio)

* Conectivos lógicos :

- Formam novas proposições a partir das já existentes

(ver Tabela verdade deles no slide)

① Negação (¬)

$\neg P$ é verdade quando P é falso

② Disjunção (v)

$P \vee Q$ é verdade quando pelos menos uma (P ou Q) é verdade

③ Conjunção (∧)

$P \wedge Q$ é verdade quando ambos (P e Q) são verdade

④ Implicação (→)

$P \rightarrow Q$ é verdade se P é falso ou Q é verdade
(P = antecedente ; Q = consequente)

* Predicado :

- Quando há uma lista de proposições que pode ser infinita
- Cria-se uma função (predicado) que mapeia cada "n" para uma proposição que de alguma forma depende de "n"
- Se queremos dizer que todos possuem a propriedade definida pelo predicado, usamos o quant. universal " ∀ " ("para todo")

obs → ao saber se todos realmente possuem a prop. definida, usamos um contra-exemplo ; se for provado que a expressão é falsa, dizemos que ela foi refutada

· Conjectura ⇒ é uma proposição que ainda não foi provada nem refutada.

· Quantificador Existencial :

- Representado por "E" ao contrário ($\exists$) ; lê-se "existe"; "existe pelo menos um"; "algum"
- Quando usado em uma sentença, para provar-se verdade, basta encontrar apenas uma opção válida para ela
- No entanto, refutar uma sentença com o quant. universal significa provar que para todo "n", a sentença é falsa.

· Tipos de Provas :

① Provas por Enumeração

- Simples ; enumera-se os casos possíveis
- Baseia-se no significado dos conectivos lógicos

exemplo = · Temos "rosas são vermelhas e violetas são azuis"
· prove "violetas são azuis"

P: "rosas são vermelhas"
Q: "violetas são azuis"

premissa: $P \wedge Q$ (verdade)

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

no caso onde a premissa se confirma, tanto "P" como "Q" são verdadeiros, logo, Q é verdade.

② Provas por aplicação de regras de inferência

- Ao fazer prova por enumeração, identifica-se um padrão geral (regra de inferência)
- Nela, há a premissa e conclusão da regra

$$\frac{P \wedge Q}{P} \rightarrow P \text{ infere-se de } P \wedge Q$$

$$\frac{P \wedge Q}{Q} \rightarrow Q \text{ infere-se de } P \wedge Q$$

14 ♥ 03 ♥ 18

- modus ponens (eliminação da implicação)

$$\frac{P \quad P \to Q}{Q}$$

"se temos P como verdade, e P implica em Q, então podemos inferir Q"

- inclusão do "E"

$$\frac{P \quad Q}{P \land Q}$$

"se temos P e Q como verdade, podemos inferir $P \land Q$"

- inclusão do "ou"

$$\frac{P}{P \lor Q}$$

"se temos P como verdade, inferimos $P \lor Q$"

- lei do terceiro excluído

$$\frac{\top}{P \lor \neg P}$$

= só existem duas possib.: P ou não P

- princípio da contradição

$$\frac{P \land \neg P}{\bot}$$

obs → pode derivar qualquer proposição a partir do falso ou absurdo

Exemplo (inferência):

$$\frac{\dfrac{A \land B}{B} \quad B \to C}{C}$$

+ exemplo: slide 34 (provas e prop)

- equivalência de expressões
  - $P \equiv \neg\neg P$
  - $P \to Q \equiv \neg P \lor Q$
  - $\neg(P \land Q) \equiv \neg P \lor \neg Q$ e $\neg(P \lor Q) \equiv \neg P \land \neg Q$ (de morgan)

③ Prova por Contrapositiva (Prova Indireta)

- Dizemos que $\neg Q \to \neg P$ é a contrapositiva de $P \to Q$
- Às vezes é mais fácil provar por contrapositiva do que normalmente

14 ♥ 03 ♥ 18

④ Prova por Casos

- Quando há um conjunto de possíveis casos numa prova, e não sabe qual é verdadeiro e qual é falso, mas pelo menos um é verdadeiro
- Ao provar que um dos casos é verdade, conclui-se a prova
- Prova não construtiva = o teorema é provado sem a construção de um exemplo

⑤ Prova por Contradição (redução ao absurdo)

- Assume o oposto do que quer provar até chegar numa contradição

$$\dfrac{\begin{matrix}[\neg P] \\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{P}$$

tilibra

17 03 18

Conjuntos

· Subconjunto (notação):

A é subconjunto de B = $A \subseteq B : \forall x (x \in A \rightarrow x \in B)$ (pertence)

obs · $\emptyset$ é subconjunto de todos os conjuntos

· Subconjunto (def. básica):

- $P \subseteq P$ (P é subconjunto dele mesmo)
- Subconjunto próprio = $B \subseteq A$ e $B \neq A$ (estrito)

· Conjunto das partes de um conjunto com n elementos = 2^n

* Operações com Conjuntos:

① União → $A \cup B$; é o conjunto que contém os elementos contidos em A ou em B ou em ambos

② Intersecção → $A \cap B$; contém os elementos que estão em A e em B ao mesmo tempo

obs → conjuntos disjuntos = interseção entre eles é vazia

③ Diferença → $A - B = A \cap \bar{B}$ → complemento

obs → complemento de A = $\boxed{U - A}$

tilibra

17 03 18

* **Identidade entre Conjuntos:**

① Comutatividade

$A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$

② Associatividade

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

③ Distributividade

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

④ Identidade

$A \cup \emptyset = A$; $A \cap U = A$

⑤ Dominação

$A \cup U = U$; $A \cap \emptyset = \emptyset$

⑥ Complemento

$A \cup A' = U$; $A \cap A' = \emptyset$; $(A')' = A$

⑦ Idempotência

$A \cup A = A$; $A \cap A = A$

⑧ De Morgan

$(\overline{A \cup B}) = \bar{A} \cap \bar{B}$
$(\overline{A \cap B}) = \bar{A} \cup \bar{B}$

Unidade 1

Conjuntos

· Cardinalidade = número de elementos (n) ; $|A| = n$

· Conjunto das partes = conjunto $P(S)$ que contém todos os subconjuntos de S ; sua cardinalidade é 2^n

· Quando há o produto cartesiano de dois conjuntos $(A \times B)$, cria-se um conjunto de pares ordenados (a,b)

· Identidade entre conjuntos :

① Comutativa

$A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$

② Associativa

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

③ Distributiva

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

④ Identidade

$A \cup \varnothing = A$; $A \cap U = A$

⑤ Dominação

$A \cup U = U$; $A \cap \varnothing = \varnothing$

⑥ Complemento

$A \cup \bar{A} = U$; $A \cap \bar{A} = \varnothing$; $(A')' = A$

⑦ De Morgan

$(\overline{A \cup B}) = \bar{A} \cap \bar{B}$; $(\overline{A \cap B}) = (\bar{A} \cup \bar{B})$

· A diferença simétrica entre conjuntos : $A \otimes B = (A - B) \cup (B - A)$

Enumerabilidade

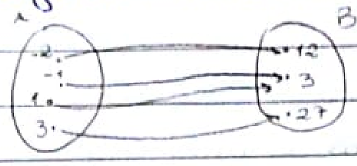
· A e B enumeráveis	· A enumerável e B não	· A e B não enumeráveis
$A \cup B$ enumerável	$A \cup B$ não enumerável	$A \cup B$ não enumerável
$A \cap B$ enumerável	$A \cap B$ enumerável	$A \cap B$ não pode afirmar
$A - B$ enumerável		
$D \subseteq A$, D enumerável	· C não enumerável e $D \subseteq C$ nada pode afirmar sobre D	

09 ♥ 01 ♥ 18

Funções

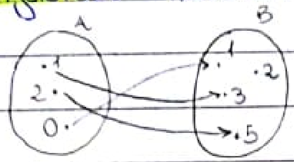
2 elem do domínio podem ter a mesma imagem

· Função sobrejetora: contradomínio = imagem

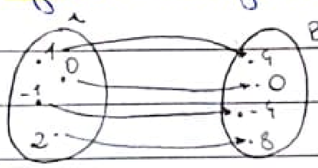


· Função injetora: não há elementos com a mesma imagem

(pode sobrar elem.)



· Função bijetora: sobrejetora + injetora !



· Função composta

$(f \circ g)(a) = f(g(a))$

· Função chão e teto:

$\lfloor 0{,}5 \rfloor = 0$; $\lceil 0{,}5 \rceil = 1$

Sequências

· Sequência: subconjunto do conjunto dos inteiros

· Definição recursiva

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 1 \end{cases} \text{ base}$$

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2} \ \underbrace{p/\ (n>1)}_{\text{escopo}} \quad \text{relação de recorrência}$$

09 ♥ 04 ♥ 18

Indução

* Principais técnicas para provar "$P \to Q$":

① Demonstração por exaustão:

- demonstre $P \to Q$ para todos os casos
- útil para número finito de casos

② Prova direta:

- suponha P, deduza Q
- abordagem padrão

③ Prova por contraposição:

- Suponha $\neg Q$, deduza $\neg P$
- usada quando $\neg Q$ parece mais fácil de provar que P

④ Prova por absurdo:

- negue $P \to Q$
- logo, $P \wedge \neg Q$ é verdade
- deduza uma contradição
- $P \to Q$ é provado

* Indução - utilidade

· Prova propriedades sobre inteiros não negativos ou sobre subconjunto infinito dos inteiros

!

* Princípio da indução:

· Como provar que para todo inteiro positivo n, temos $P(n)$ = ?

1 - Passo básico da indução = provamos $P(1)$ (que é válida para o número 1)

2 - Passo indutivo = provamos $P(k) \to P(k+1)$

· assume $P(k)$ verdade (hipótese de indução / suposição indutiva)

· prova $P(k+1)$

09 ♥ 04 ♥ 18

• Prova por indução matemática

ex1.

$P(n)$ = exemplo do dominó

· base { $P(1)$: o primeiro dominó cai
· passo indutivo { $P(k) \to P(k+1)$: se o k-ésimo dominó cai → o dominó k+1 também cai

· passo indutivo $P(k) \to P(k+1)$:

HI = supor $P(k)$ (hipótese indutiva)

Tese = provar $P(k+1)$

↳ usar a HI

ex2. prove que para $n \geq 1$, $2^n > n$

· base = $2^1 > 1$

· passo indutivo =

HI → $2^n > n \sim 2 \cdot 2^n > 2n \sim \boxed{2 \cdot 2^n > n+n}$

Tese → $2^{n+1} > n+1 \sim 2 \cdot 2^n > n+1$

Se $n > 1$,

$$\frac{2 \cdot 2^n > n+n \quad \wedge \quad n+n > n+1}{2 \cdot 2^n > n+1}$$

ex 3. prove que para $n \geq 4$, $n^2 > 3n$

· base = $n = 4$

$n^2 > 3n \sim 16 > 12$ (ok)

· HI : é (v) p/ n

Tese: $(n+1)^2 > 3(n+1)$

$$n^2 + 2n + 1 > 3n + 3$$

HI

$2n+1 > 3$

$2n > 2$

$n > 1$ (ok, pois $n \geq 4$)

· Base
· Passo indutivo
- HI
- Tese

ex4. prove que p/ $n > 1$, $2^{n+1} < 3^n$

$2^{n+1} < 3^n$

· base: $n=2$

$2^3 < 3^2 \rightsquigarrow 8 < 9$ (ok)

· HI: é (v) para n

· Tese: $2^{n+1+1} < 3^{n+1}$

$2 \cdot 2^{n+1} < 3 \cdot 3^n$

HI: $2^{n+1} < 3^n$

$2 < 3$ (v)

ex5. mostre que a soma dos n primeiros números ímpares é igual a n^2

$1+3+5+7+\dots+2n-1 = n^2$

· base: $n=1$ $\quad 1 = 1^2 = 1$

· passo indutivo:

HI é (v) $n=k$ $\quad 1+3+5\dots+(2k)-1 = k^2$

Tese: provar p/ $n=k+1$

$1+3+5+\dots+2(k+1)-1 = (k+1)^2$

$k^2+2k+1 = k^2+2k+1$

ex6. prove que p/ qualquer inteiro positivo n, o número $2^{2n}-1$ é div. por 3

· base: $n=1$

$2^2-1 = 3$ (ok - divisível)

· passo indutivo:

HI é (v) p/ n $\rightsquigarrow 2^{2n}-1 = 3 \cdot z \rightarrow 2^{2n} = 3z+1$

$2^{2(n+1)} - 1 = 3i$, $i \in \mathbb{Z}$

$2^{2n+2} - 1 = 2^2 \cdot 2^{2n} - 1 = 4 \cdot 2^{2n} - 1 = 4 \cdot (3z+1)-1$

$4 \cdot 3z + 4 - 1 = 3 \cdot (4z+1)$

ex7. prove que a soma dos n primeiros int. pos. é $n(n+1)/2$

· base: $n=1 \rightsquigarrow 1 = 1 \cdot 2/2 \rightsquigarrow 1$ (ok)

· passo indutivo

HI é (v) p/ n

Tese: $1+2+\dots+n+(n+1) = (n+1)(n+2)/2$

$\frac{n(n+1)}{2} + n+1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \rightsquigarrow \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

Enumerabilidade

• **Teoria da Enumerabilidade**

X é enumerável se, e somente se X é finito ou existe pelo menos uma função dos naturais em X para qual f é bijetora

· Sejam A e B enumeráveis

$A \cup B$ é enumerável — $A - B$ é enumerável

$A \cap B$ é enumerável

· Seja $D \subseteq A$

D é enumerável

· Sejam A enumerável e B não enumerável

$A \cup B$ não enumerável

$A \cap B$ enumerável

· Seja C não enumerável e $D \subseteq C$

não se pode afirmar nada sobre D!

· Sejam A e B não enumeráveis

$A \cup B$ não enumerável

$A \cap B$ não pode afirmar

Recursão

• **Caso Torre de Hanoi**

· Fórmula direta = $H_n = 2^n - 1$

· Fórmula recursiva = $H_1 = 1$

$H_n = 2H(n-1) + 1$ p/ $n > 1$

ex1 Definição recursiva de exponencial

$a^0 = 1$

$a^n = a^{n-1} \cdot a$ p/ $n > 0$

* Algoritmo Recursivo

função fatorial (n: int.)
  se n=0, então
  retorne 1
  caso contrário
  retorne fat (n-1) · n

ex1 Algoritmo p/ calcular a soma dos n primeiros nº inteiros pares e posit.

p/ $n=1 \to 2$
$n=2 \to 2+4$
$n=3 \to 2+4+6$
$n=4 \to 2+4+6+8$

Def. recursiva:
soma (1) = 2
soma(n) = soma (n-1) + 2n
p/ n > 1

Se n=1, então
retorne 2
senão
retorne (n-1) + 2.n

* Caso com Palíndromo

· P/ alfabeto grande:
pal $\subseteq \Sigma^*$
$\Sigma = \{\ldots\}$

base ⇒ $\varepsilon \in$ pal
todo símbolo $s \in \Sigma$ também é pal

passo ind ⇒ se $x \in$ pal, então
$sxs \in$ pal, onde $s \in \Sigma$

Aritmética Modular

- Se $a \equiv b \pmod{m}$, então $a \bmod m = b \bmod m$ (congruência)
- Agora veremos o algoritmo de euclides: dados 2 inteiros pos. a e b, ache o mdc:
  ① se $a > b$, trocamos a por b ou vice versa
  ② se $a > 0$, dividimos b por a obtendo o resto r
  ③ Substitui b por r e retorna ao passo 1
  ④ se $a = 0$, retorna b como mdc e para

Teorema Chinês do Resto

1 $x \equiv 2 \pmod{3}$ $\quad a_1 = 2$ $\quad n_1 = 3$
2 $x \equiv 3 \pmod{5}$ $\quad a_2 = 3$ $\quad n_2 = 5$ $\quad \sim n = 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$
3 $x \equiv 2 \pmod{7}$ $\quad a_3 = 2$ $\quad n_3 = 7$

$N_1 \cdot X_1 \equiv 1 \pmod{3}$ $\quad N_1 = 5 \cdot 7 = 35$
$N_2 \cdot X_2 \equiv 1 \pmod{5}$ $\quad N_2 = 3 \cdot 7 = 21$
$N_3 X_3 \equiv 1 \pmod{7}$ $\quad N_3 = 3 \cdot 5 = 15$

$35 X_1 \equiv 1 \pmod{3}$ $\quad 35 \,\underline{|3}$
$2 \cdot X_1 \equiv 1 \pmod{3}$ $\quad -2-$

$21 X_1 \equiv 1 \pmod{5}$ $\quad 21 \,\underline{|5}$
$1 X_1 \equiv 1 \pmod{5}$ $\quad -1-$

$15 X_3 \equiv 1 \pmod{7}$ $\quad 15 \,\underline{|7}$
$1 X_1 \equiv 1 \pmod{7}$ $\quad -1-$

$2 \cdot 35 \cdot 2 + 3 \cdot 21 \cdot 1 + 2 \cdot 15 \cdot 1 = 233 \pmod{105}$

tilibra

Scanned by CamScanner

09 ♥ 04 ♥ 18

Sequência de Fibonacci

obs → Tanto faz começar com 0 ou 1, só especificar

♥ * Identidades :

$F_0 + F_1 + F_2 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$

(prova por indução)

base → $n=0$ ~ $F_0 = F_2 - 1$ ~ $0 = 1 - 1$ (ok)

HI é (v) p/ n

Tese → p/ $n+1$ ~ $\underbrace{F_0 + F_1 + \dots + F_n}_{HI} + F_{n+1} = F_{n+1+2} - 1$

$F_{n+2} - 1 + F_{n+1} = F_{n+3} - 1$

degeneração do nº de Fibonacci $(F_{n+2} + F_{n+1} = F_{n+3})$

ex1 Prove que F_{3n} é par. $F_{3n} = 2i$, $i \in \mathbb{Z}$

base: $n=0$ → $F_0 = 0$ (é par)

HI: é (v) para n

Tese: $F_{3(n+1)} \overset{?}{=} 2z$, $z \in \mathbb{Z}$

$F(3n+3) = F_{3n+2} + F_{3n+1}$

↳ $F_{3n+1} + F_{3n} + F_{3n+1}$

$2F_{3n+1} + F_{3n}$ pela HI $= 2i$

$F(3n+3) = 2 \cdot \underbrace{(F_{3n+1} + i)}_{z}$

ex2 Prove que F_{5n} é divisível por 5

$F_{5n} = 5K$, $K \in \mathbb{Z}$

base: $F_{5 \cdot 0} = 0$ (ok)

HI: é (v) p/ n ~ $F_{5n} = 5K$

Tese: $F_{5(n+1)} = 5i$, $i \in \mathbb{Z}$

$F_{5n+5} = F_{5n+4} + F_{5n+3}$

$= F_{5n+3} + F_{5n+1} + F_{5n+2} + F_{5n+2}$

$= F_{5n+2} + F_{5n+1} + 2(F_{5n+1} + F_{5n}) + F_{5n+1}$

♥ $= F_{5n+1} + F_{5n} + F_{5n+1} + 2F_{5n+1} + 2 \cdot 2F_{5n} + F_{5n+1}$

$= 5F_{n+1} + 3F_{5n}$ HI

$F_{5n+5} = 5\underbrace{(F_{n+1} + 3K)}$

17 04 18

Contagem

• **Princípios:**

- Princípio da soma → ex1
- Princípio da multiplicação → ex2, ex3

• **ex1** = cada aluno pode escolher um exercício entre três listas. A primeira lista tem 30 questões, a segunda 20 e a terceira 15. Quantos possíveis projetos um aluno pode escolher?

$30 + 20 + 15 = 65$ projetos

• **ex2** = quantas diferentes cadeias de bits de tamanho 8 existem?

$2^8 = 256$

• **ex3** = quantas placas de carro podem ser formadas se cada placa tem duas letras seguidas por 4 dígitos?

$26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$

• **Combinando os dois princípios:**

ex4 = Em uma linguagem X os nomes de variáveis são cadeias de um ou dois caracteres alfanuméricos, onde não há distinção entre maiúsculas e minúsculas. O nome de uma variável deve começar com uma letra e ser diferente de 5 palavras reservadas de tamanho 2 da linguagem. Quantos diferentes nomes podem ser formados?

Total = tam1 + tam2 $= 26 + 26 \cdot 36 - 5 = 957$

tam1 = 26 (nenhum começa com número)

tam2 = $26 \cdot 36 - 5$ (reservada)

- **Princípio da inclusão - exclusão** → ex5

↳ $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$

↳ união de todos = todos separados menos a interseção entre eles

· ex5: Quantas cadeias de bits de tamanho 8 ou começam com o bit 1 ou terminam com dois bits 00?

$|A|$ = começa com 1 = 128

$|B|$ = termina com 00 = $2^6 = 64$

$|A \cap B| = 1 \cdot 2^5 \cdot 1 \cdot 1$ = os dois juntos!

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 128 + 64 - 32 = 160$

* OU = união

E = intersecção

* Permutação

· Rearranjo de elementos em uma nova ordem, pode mudar algo ou não

* Número de Subconjuntos Ordenados = arranjo

· O número de subconjuntos ordenados com k elementos de um conjunto com n elementos é $n(n-1)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} \rightarrow P(n,k)$

* Número de subconjuntos de um dado tamanho = combinação

· O número de k-subconjuntos de um n-conjunto é dado por (sem ordenação)

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ (I)} = \binom{n}{k}$$

↳ coeficientes binomiais

* Coeficientes Binomiais: ⤳ se $n > 0$, $k > 0$

· $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (II)

· $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ (III) Identidade de Pascal

· $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$ (IV)

obs = Vandermonde:

$$\binom{n}{0}\binom{m}{k} + \binom{n}{1}\binom{m}{k-1} + \ldots + \binom{n}{k-1}\binom{m}{1} + \binom{n}{k}\binom{m}{0} = \binom{n+m}{k}$$

01 05 18

Inclusão - Exclusão

· Deve contar o elemento uma única vez

Casa dos Pombos

· Se $K+1$ ou mais objetos são colocados em K caixas, então no mínimo uma caixa terá dois ou mais objetos.

Exemplo: entre um grupo de 367 pessoas, pelo menos duas possuem o mesmo dia de nascimento, pois só existem 366 possibilidades.

· Se n objetos são colocados em K caixas, então existe no mínimo uma caixa que contém pelo menos $\lceil N/K \rceil$ objetos

Exemplo: entre um conjunto de 21 dígitos decimais, quantos são os mesmos?

$$\left\lceil \frac{21}{10} \right\rceil = \lceil 2,1 \rceil = 3$$ são os mesmos

Unidade 2

Relações

· Uma relação R em um conjunto S é uma relação de S para S, ou seja, é um subconjunto de S×S

· Relação reflexiva: é reflexiva se $(s,s) \in R$ para todo elemento $s \in S$

· Relação simétrica: é simétrica se $(b,a) \in R$ toda vez que $(a,b) \in R$, para $a,b \in S$

· Relação antisimétrica: se $(a,b) \in R$ e $(b,a) \in R$, então $a=b$, para $a,b \in S$

· Relação transitiva: é transitiva se toda vez que $(a,b) \in R$ e $(b,c) \in R$, então $(a,c) \in R$ para $a,b,c \in S$

· Representação da relação em uma matriz de bits:

seja $S = \{1,2,3\}$ e $R = \{(1,2),(2,2),(3,1)\}$

matriz: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $[m_{ij}] = 1$ quando $(s_i, s_j) \in R$

$[m_{ij}] = 0$ quando $(s_i, s_j) \notin R$

· Relação reflexiva: todos os elementos da diagonal principal são 1

· Relação simétrica: quando a matriz é igual a sua transposta

· Relação antisimétrica: para $i \neq j$, se $[m_{ij}] = 1$, então $[m_{ji}] = 0$

· O fecho reflexivo de R é o que falta na relação R para ela ser reflexiva + R, e o mesmo se aplica para as propriedades simétrica e transitiva

Relações de Equivalência

· Em um conjunto, uma relação de equivalência é aquela que é reflexiva, simétrica e transitiva

· Quando é definida uma relação de equivalência em um conjunto, é criada uma partição

· Partição de um conjunto S: coleção de subconjuntos disjuntos não vazios de S que possuem S como resultado da união

Ordens Parciais

· Uma ordem parcial é uma relação em um conjunto que contém as propriedades reflexiva, antissimétrica e transitiva

· Provando que a divisibilidade dos inteiros é uma ordem parcial:

reflexiva ⇝ $\forall\, a \in \mathbb{Z}^+,\ a \mid a$

anti simétrica ⇝ se $a \mid b$ e $b \mid a$, $\quad a,b,m,n \in \mathbb{Z}^+$

$a \cdot m = b$ e $b \cdot n = a$

$(a \cdot m) \cdot n = a \quad \therefore\ m = n = 1 \quad \therefore\ a = b$

Transitiva ⇝ se $a \mid b$ e $b \mid c$, $\quad a,b,c,m,n,K \in \mathbb{Z}^+$

$a \cdot m = b$ e $b \cdot n = c \quad m \cdot n = K$

$(a \cdot m) \cdot n = c \quad \therefore\ a \cdot K = c \quad \therefore\ a \mid c$

· Um conjunto parcialmente ordenado (poset) é um conjunto S juntamente com uma ordem parcial R (S, R)

· Usa-se a notação $(S, \leq)$ para falar de um poset arbitrário

· O nome ordem parcial é assim pois os elementos se relacionam parcialmente

· Os elementos a e b em um poset $(S, \leq)$ são comparáveis se $a \leq b$ ou $b \leq a$. Caso contrário, os elementos são incomparáveis

· Se $(S, \leq)$ é um poset e cada par de elementos é comparável, S é um conjunto totalmente ordenado (linearmente ordenado) e $\leq$ é uma ordem total (ou linear)

· Conjunto totalmente ordenado = cadeia

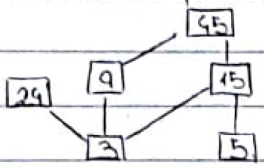
Ordem Lexográfica

· Quando os elementos do conjunto são ordenados de forma similar a como são ordenadas as palavras em um dicionário

Diagrama de Hasse

- É um grafo mais simples com uma relação de ordem parcial num conjunto finito

- Ex:



maximal = {24, 45} não há máximo ou mínimo

minimal = {3, 5}

limitante superior = {15, 45} supremo = 15

limitante inferior = {15, 5, 3} ínfimo = 15

- Um elemento "a" é maximal se não há ninguém maior que "a"
- Um elemento "a" é minimal se não há ninguém menor que "a"
- Um elemento "a" é máximo se não há ninguém maior que "a"
- Um elemento "a" é mínimo se não há ninguém menor que "a"

} são únicos

- Limitante superior de "a" são todos os números maiores que "a" que se relacionam com os elementos nele contidos
- Limitante inferior de "a" são os números menores que "a" que se relacionam com os elementos nele contidos
- Um elemento é dito supremo quando é o menor dos limitantes superiores
- Um elemento é dito ínfimo quando é o maior dos limitantes inferiores

} são únicos

Reticulados

- Reticulado é um poset no qual cada par de elementos possui um supremo e um ínfimo

$n^{\underline{o}}$
n = vértices

Grafos

- O grafo simples é representado por $G = (V, E)$, no qual V é um conjunto de vértices (ou nós) e E é o conjunto de arestas (pares não ordenados)
- Dois vértices são adjacentes se existe uma aresta unindo-os
- Duas arestas são adjacentes se elas tem um vértice em comum
- Dois vértices são incidentes em uma aresta se eles são extremos dela
- A aresta $e = \{x, y\}$ é incidente a x e a y

- O multigrafo (orientado / não orientado (tem laço)) é um grafo que não possui laços mas pode ter arestas paralelas ($f(e_1) = f(e_2)$)
- laço = aresta formada por um par de vértices idênticos
- O pseudografo pode ter laços e arestas paralelas
- O grau de um vértice é o número de arestas adjacentes a ele (o laço conta duas vezes)
- Um vértice de grau zero é um vértice isolado e um de grau um é um vértice pendente

- Em um grafo regular (K), todos os vértices tem o mesmo grau (K)

- A soma dos graus de um grafo é sempre par
- Segundo o teorema do aperto de mãos ~> $2 \cdot |\underset{\text{aresta}}{E}| = \underset{\text{grau}}{r} \cdot |\underset{\text{vertice}}{V}|$
- Em um grafo, ~~somente~~ o $n^{\underline{o}}$ de vértices com grau ímpar deve ser par

- O grafo nulo tem o $n^{\underline{o}}$ de arestas $= 0$ / é um grafo regular de grau 0
- O grafo completo é um grafo regular de grau $n-1$, onde $n = |V|$ / em que existe uma aresta entre cada par de vértices distintos (K_n)
- O complemento de um grafo é aquele que não tem nenhum vértice adjacente igual ao original, ou seja, dois vértices são adjacentes em G' se não são em G
- O grafo cíclico é um grafo conectado, regular, de grau 2 (C_n)
- O grafo roda é obtido de um grafo C_n com a ligação de cada vért. a um novo (W_n)
- O grafo n-cúbico é aquele cujos vértices representam as 2^n cadeias de bits de tamanho n; (Q_n)
- O grafo orientado (dígrafo) é representado por $G = (V, A)$, no qual o A é o conjunto de arestas (pares ordenados)

· Em um digrafo, os vértices possuem grau de entrada e grau de saída
· Um grafo bipartido é aquele que o conjunto V de vértices pode ser particionado em dois subconjuntos V_1 e V_2 tais que toda aresta une um vértice de V_1 a um de V_2
· Em K_n, para $n=2$ vira bipartido, em C_n, $n \geq 2$ (par)
· No grafo bipartido completo, cada elemento de V_1 é adjacente a cada elemento de V_2; $|V_1| = m$ e $|V_2| = n$ $(K_{m,n})$
complementar é a ⟷ para ser regular, $m = n > 0$.
união disjunta de K_m com K_n.

· Um caminho é um circuito se começa e termina no mesmo vértice
· Diz-se ser um circuito simples se ele não contém a mesma aresta mais de uma vez
· Um grafo não orientado é conexo se existe um caminho entre cada par de vértices do grafo
· Em um grafo desconexo, há ao menos dois subgrafos conexos e disjuntos, chamados de componente conexa do grafo
· Um grafo é fortemente conexo se for um digrafo com cada par de vértices participando de um circuito

Grafo Hamiltoniano

· É todo grafo cíclico (composto por um único ciclo)
· É aquele que possui um ciclo hamiltoniano = ciclo onde cada vértice é visitado uma vez
· Qualquer grafo completo com + de dois vértices é hamiltoniano

Grafo Euleriano

· É aquele que contém um ciclo euleriano = caminho em um grafo que visita cada aresta uma vez, começando e terminando no mesmo vértice
· Grafo não dirigido → sem vértices de grau ímpar
· Grafo dirigido → todos os vértices tem que ter grau de entrada = grau de saída
· Grafo semi-euleriano → possui um caminho euleriano e dois vértices de grau ímpar

Nº Cromático

- É o menor nº de cores necessárias p/ colorir o grafo
- Nº de K_n = n
- Nº grafo nulo = 1 ; grafo bipartido não nulo = 2
- Nº de $K_{n,m}$ = 2
- Nº de C_n = 2 (se V for par) / 3 (se V for ímpar)
- Nº de Q_n = n
- Nº de W_n = 3 (ímpar) / 4 (par)

Árvores
grafo bipartido e planar

- É um grafo conexo, não orientado e sem circuitos simples
- Carac.:
  - raiz (a escolha)
  - ancestrais
  - pai (único)
  - filhos
  - nível (tamanho do caminho da raiz até o elem.)
  - altura (maior nível entre os nós)
  - folhas (não possui filhos)
- Quando a raiz é o único nó ela é uma folha
- Subárvore
- Árvore m-ária = todo nó interno não possui mais de m filhos ; uma m-ária cheia tem todos os nós com grau m
- Árvore balanceada = se tem altura h, todas as folhas estão no nível h ou h-1
- Uma árvore com n nós possui n-1 arestas
- Uma árvore m-ária cheia possui $n = m \cdot i + 1$ nós, sendo i os nós internos

- Caminho em pré-ordem ⤳ raiz, esquerda, direita
- Caminho em pós-ordem ⤳ esquerda, direita, raiz

- Notação infixa ~ baixo p/ cima
- Notação préfixa ~ pré ordem
- Notação pós fixa ~ pós ordem

} esquerda p/ direita
folhas = variáveis
nós = operações