

# ÁRVORES AVL

Gustavo Carvalho  
(ghpc@cin.ufpe.br)

Universidade Federal de Pernambuco  
Centro de Informática, 50740-560, Brazil



# Agenda

1 Introdução

2 Rotações

3 Bibliografia



# Introdução

Motivação: bom desempenho da BST depende do balanceamento

- AVL: uma BST auto balanceável
- Criadores (1962): G. M. Adelson-Velsky e E. M. Landis

AVL: para todo vértice, o módulo da diferença das alturas das sub-árvores nunca pode ser maior do que 1

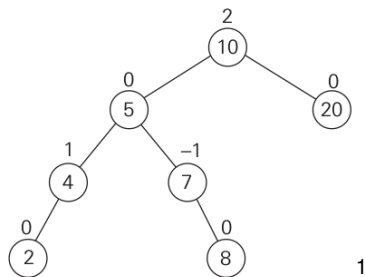
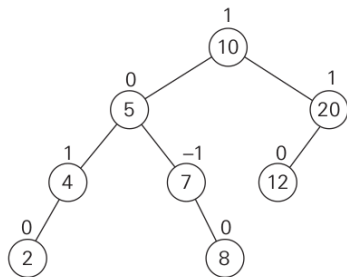
- **Fator de balanceamento**: -1, 0 ou +1.
- Altura da árvore vazia: -1

**Rotação**: transformação para balancear a árvore

- Após inserção, quando o fator de um nó é -2 ou +2
- No vértice -2 ou +2 **mais próximo** do ponto de inserção



# Introdução



1

<sup>1</sup> Fonte: A. Levitin. Introduction to the Design and Analysis of Algorithms. 2011.

# Agenda

1 Introdução

**2 Rotações**

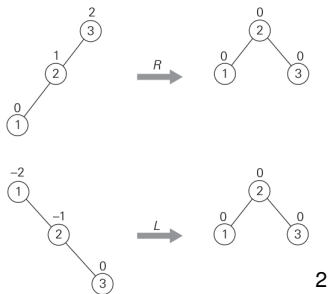
3 Bibliografia



# Rotações

Existem quatro casos:

- Rotação simples à direita (R): valor inserido na sub-árvore à **esquerda** do filho à **esquerda** do nó desbalanceado (+1 antes)
- Rotação simples à esquerda (L): valor inserido na sub-árvore à **direita** do filho à **direita** do nó desbalanceado (-1 antes)

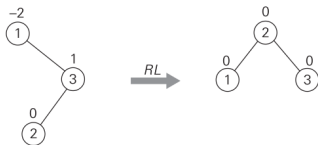
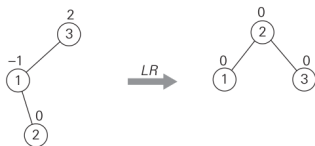


<sup>2</sup>Fonte: A. Levitin. Introduction to the Design and Analysis of Algorithms. 2011.

# Rotações

Existem quatro casos:

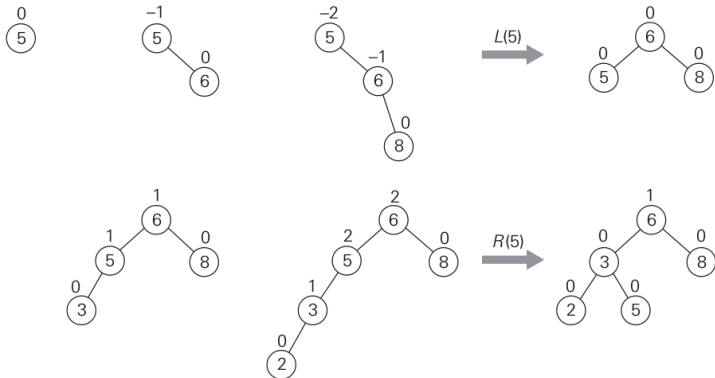
- Rotação dupla à direita (LR): valor inserido na sub-árvore à **direita** do filho à **esquerda** do nó desbalanceado (+1 antes)
- Rotação dupla à esquerda (RL): valor inserido na sub-árvore à **esquerda** do filho à **direita** do nó desbalanceado (-1 antes)



3

# Rotações

Inserindo valores: 5, 6, 8, 3, 2, 4, e 7



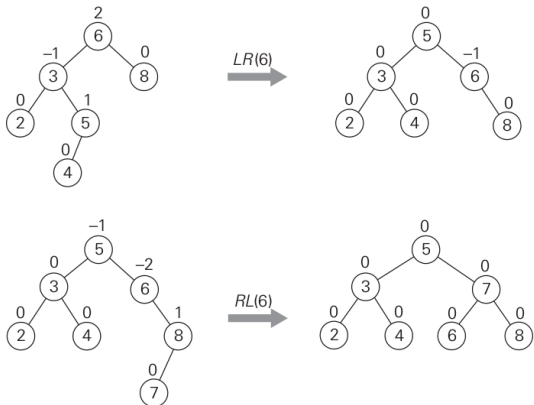
4

<sup>4</sup>Fonte: A. Levitin. Introduction to the Design and Analysis of Algorithms. 2011.



# Rotações

Inserindo valores: 5, 6, 8, 3, 2, 4, e 7

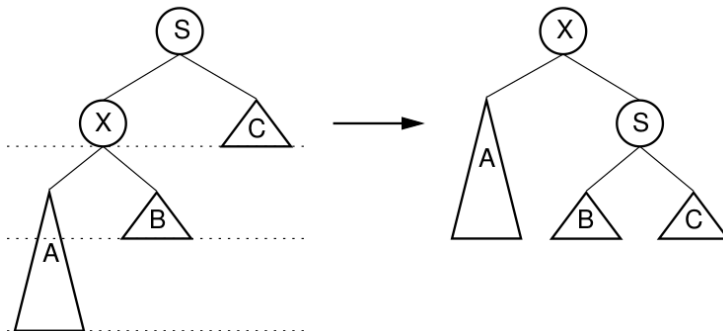


5

<sup>5</sup> Fonte: A. Levitin. Introduction to the Design and Analysis of Algorithms. 2011.

# Rotações

Rotação simples (R): de uma forma mais geral



6

6

Fonte: A. Levitin. Introduction to the Design and Analysis of Algorithms. 2011.

# Rotações

## Algoritmo: BSTNode inserthelp(BSTNode rt, Key k, E e)

```

1  if rt = NULL then return create_bstnode(k, e) ;
2  if rt.key > k then
3    |   rt.left ← inserthelp(rt.left, k, e);
4  else
5    |   rt.right ← inserthelp(rt.right, k, e);
6  rt.height ← 1 + max(height(rt.left), height(rt.right));
7  int balance ← getBalance(rt);
8  if balance > 1 ∧ k < rt.left.key then return righthRotate(rt) ;
9  if balance < -1 ∧ k ≥ rt.right.key then return leftRotate(rt) ;
10 if balance > 1 ∧ k ≥ rt.left.key then
11   |   rt.left ← leftRotate(rt.left);
12   |   return righthRotate(rt);
13 if balance < -1 ∧ k < rt.right.key then
14   |   rt.right ← rightRotate(rt.right);
15   |   return leftRotate(rt);
16 return rt;

```

# Rotações

---

**Algoritmo:** `int getBalance(BSTNode rt)`

---

```
1  if rt = NULL then return 0 ;  
2  return height(rt.left) – height(rt.right);
```

---

---

**Algoritmo:** `int height(BSTNode rt)`

---

```
1  if rt = NULL then return –1 ;  
2  return rt.height;
```

---

# Rotações

---

**Algoritmo:** BSTNode rightRotate(BSTNode rt)

---

```
1  BSTNode l  $\leftarrow$  rt.left;  
2  BSTNode lr  $\leftarrow$  l.right;  
3  l.right  $\leftarrow$  rt;  
4  rt.left  $\leftarrow$  lr;  
5  rt.height  $\leftarrow$  max(height(rt.left), height(rt.right)) + 1;  
6  l.height  $\leftarrow$  max(height(l.left), height(l.right)) + 1;  
7  return l;
```

---

# Rotações

---

**Algoritmo:** BSTNode leftRotate(BSTNode rt)

---

```

1  BSTNode  $r \leftarrow rt.right$ ;
2  BSTNode  $rl \leftarrow r.left$ ;
3   $r.left \leftarrow rt$ ;
4   $rt.right \leftarrow rl$ ;
5   $rt.height \leftarrow \max(\text{height}(rt.left), \text{height}(rt.right)) + 1$ ;
6   $r.height \leftarrow \max(\text{height}(r.left), \text{height}(r.right)) + 1$ ;
7  return  $r$ ;

```

---

Remoção: análoga à remoção em BST + rotações

- A partir do nível da operação *deletemin*

# Custo computacional

## Relembrando:

Data Structure	Time Complexity								Space Complexity
	Average				Worst				Worst
	Access	Search	Insertion	Deletion	Access	Search	Insertion	Deletion	
Array	$O(1)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(1)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$
Stack	$O(n)$	$O(n)$	$O(1)$	$O(1)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(1)$	$O(1)$	$O(n)$
Queue	$O(n)$	$O(n)$	$O(1)$	$O(1)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(1)$	$O(1)$	$O(n)$
Singly-Linked List	$O(n)$	$O(n)$	$O(1)$	$O(1)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(1)$	$O(1)$	$O(n)$
Doubly-Linked List	$O(n)$	$O(n)$	$O(1)$	$O(1)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(1)$	$O(1)$	$O(n)$
Skip List	$O(\log(n))$	$O(\log(n))$	$O(\log(n))$	$O(\log(n))$	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(n \log(n))$
Hash Table	N/A	$O(1)$	$O(1)$	$O(1)$	N/A	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$
Binary Search Tree	$O(\log(n))$	$O(\log(n))$	$O(\log(n))$	$O(\log(n))$	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$
Cartesian Tree	N/A	$O(\log(n))$	$O(\log(n))$	$O(\log(n))$	N/A	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$
B-Tree	$O(\log(n))$	$O(\log(n))$	$O(\log(n))$	$O(\log(n))$	$O(\log(n))$	$O(\log(n))$	$O(\log(n))$	$O(\log(n))$	$O(n)$
Red-Black Tree	$O(\log(n))$	$O(\log(n))$	$O(\log(n))$	$O(\log(n))$	$O(\log(n))$	$O(\log(n))$	$O(\log(n))$	$O(\log(n))$	$O(n)$
Splay Tree	N/A	$O(\log(n))$	$O(\log(n))$	$O(\log(n))$	N/A	$O(\log(n))$	$O(\log(n))$	$O(\log(n))$	$O(n)$
AVL Tree	$O(\log(n))$	$O(\log(n))$	$O(\log(n))$	$O(\log(n))$	$O(\log(n))$	$O(\log(n))$	$O(\log(n))$	$O(\log(n))$	$O(n)$
KD Tree	$O(\log(n))$	$O(\log(n))$	$O(\log(n))$	$O(\log(n))$	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$

7

AVL:  $\approx$  o mesmo número de comparações da busca binária

Desvantagens: **rotações frequentes** + **armazenar fator por nó**

7

<http://bigocheatsheet.com/>

# Agenda

1 Introdução

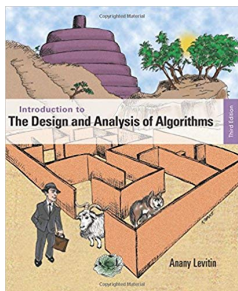
2 Rotações

3 Bibliografia





# Bibliografia + leitura recomendada



## Capítulo 6 (pp. 218–223)

**Anany Levitin.**

*Introduction to the Design and Analysis of Algorithms.*

3a edição. Pearson. 2011.



## Capítulo 13 (pp. 435–437)

**Clifford Shaffer.**

*Data Structures and Algorithm Analysis.*

Dover, 2013.



# ÁRVORES AVL

Gustavo Carvalho  
(ghpc@cin.ufpe.br)

Universidade Federal de Pernambuco  
Centro de Informática, 50740-560, Brazil

