Lógica Matemática
Para Computação

Centro de Informática U·F·P·E

Universidade Federal de Pernambuco

CIn.ufpe.br

Provas por indução sobre a complexidade da fórmula

- **Para toda fórmula $\varphi \in$ PROP, o número total de símbolos de φ é no mínimo igual ao número de operadores de φ.**

- **Seja *t* a função que calcula o número total de símbolos e *o* o número de operadores.**

- **Vamos provar que *t*(φ) $\geq$ *o*(φ) por indução sobre a complexidade de φ.**

Para toda fórmula $\varphi \in$ PROP, o número total de símbolos de φ é no mínimo igual ao número de operadores de φ.

***o*: PROP $\rightarrow \aleph$ (*n. total de operadores*)**

$o(\varphi) = 0$, se φ for atômica

$o((\varphi \wedge \alpha)) = 1 + o(\varphi) + o(\alpha)$

$o((\varphi \vee \alpha)) = 1 + o(\varphi) + o(\alpha)$

$o((\varphi \rightarrow \alpha)) = 1 + o(\varphi) + o(\alpha)$

$o((\neg \varphi)) = 1 + o(\varphi)$

***t*: PROP $\rightarrow \aleph$ (*n. total de símbolos*)**

$t(\varphi) = 1$, se φ for atômica

$t((\varphi \wedge \alpha)) = 3 + t(\varphi) + t(\alpha)$

$t((\varphi \vee \alpha)) = 3 + t(\varphi) + t(\alpha)$

$t((\varphi \rightarrow \alpha)) = 3 + t(\varphi) + t(\alpha)$

$t((\neg \varphi)) = 3 + t(\varphi)$

Provas por indução sobre a complexidade da fórmula

- **Para toda fórmula $\varphi \in$ PROP, o número de parênteses à esquerda de φ é igual ao número de parênteses à direita de φ.**

- **Seja *e* a função que calcula o número de parênteses à esquerda e *d* o número de parênteses à direita.**

- **Vamos provar que $e(\varphi) = d(\varphi)$ por indução sobre a complexidade de φ.**

Para toda fórmula $\varphi \in$ PROP, o número de parênteses à esquerda de φ é igual ao número de parênteses à direita de φ.

e: PROP $\rightarrow \aleph$ (*n. de par. à esq.*)

$e(\varphi) = 0$, se φ for atômica

$e((\varphi \wedge \alpha)) = 1 + e(\varphi) + e(\alpha)$

$e((\varphi \vee \alpha)) = 1 + e(\varphi) + e(\alpha)$

$e((\varphi \rightarrow \alpha)) = 1 + e(\varphi) + e(\alpha)$

$e((\neg\varphi)) = 1 + e(\varphi)$

d: PROP $\rightarrow \aleph$ (*n. de par. À dir.*)

$d(\varphi) = 0$, se φ for atômica

$d((\varphi \wedge \alpha)) = 1 + d(\varphi) + d(\alpha)$

$d((\varphi \vee \alpha)) = 1 + d(\varphi) + d(\alpha)$

$d((\varphi \rightarrow \alpha)) = 1 + d(\varphi) + d(\alpha)$

$d((\neg\varphi)) = 1 + d(\varphi)$

Provas por indução sobre a complexidade da fórmula

- **Para toda fórmula φ ∈ PROP, o número de subfórmulas de φ é no máximo, duas vezes o número de operadores de φ mais 1.**
- **Seja *s* a função que calcula o conjunto das subexpressões de φ. E, *o* a função que calcula o número de operadores de φ .**
- **Vamos provar que $|s(\varphi)| \leq 2.o(\varphi) + 1$ por indução sobre a complexidade de φ.**

Para toda fórmula $\varphi \in$ PROP, o número de subfórmulas de φ é no máximo, duas vezes o número de operadores de φ mais 1.

***s*: PROP $\rightarrow \wp$(PROP) (subfórmulas)**

$s(\varphi) = \{\varphi\}$, se φ for atômica

$s((\varphi\wedge\alpha)) = \{(\varphi\wedge\alpha)\} \cup s(\varphi) \cup s(\alpha)$

$s((\varphi\vee\alpha)) = \{(\varphi\vee\alpha)\} \cup s(\varphi) \cup s(\alpha)$

$s((\varphi\rightarrow\alpha)) = \{(\varphi\rightarrow\alpha)\} \cup s(\varphi) \cup s(\alpha)$

$s((\neg\varphi)) = \{(\neg\varphi)\} \cup s(\varphi)$

***o*: PROP $\rightarrow \aleph$ (*n. operadores*)**

$o(\varphi) = 0$, se φ for atômica

$o((\varphi\wedge\alpha)) = 1 + o(\varphi) + o(\alpha)$

$o((\varphi\vee\alpha)) = 1 + o(\varphi) + o(\alpha)$

$o((\varphi\rightarrow\alpha)) = 1 + o(\varphi) + o(\alpha)$

$o((\neg\varphi)) = 1 + o(\varphi)$

Provas por indução sobre a complexidade da fórmula

- **Para toda fórmula $\varphi \in$ PROP, o posto (altura da árvore sintática) de φ é no máximo igual ao número total de símbolos de φ.**
- **Seja *p* a função que calcula o posto de φ. E, *t* a função que calcula o número de símbolos de φ .**
- **Vamos provar que $p(\varphi) \leq t(\varphi)$.**

Centro de Informática UFPE

Para toda fórmula $\varphi \in$ PROP, o posto (altura da árvore sintática) de φ é no máximo igual ao número total de símbolos de φ.

***p*: PROP $\rightarrow \aleph$ (posto)**

$p(\varphi) = 0$, se φ for atômica

$p((\varphi \wedge \alpha)) = \quad 1 + \max(p(\varphi)\ , p(\alpha))$

$p((\varphi \vee \alpha)) = \quad 1 + \max(p(\varphi), p(\alpha))$

$p((\varphi \rightarrow \alpha)) = \quad 1 + \max(p(\varphi), p(\alpha))$

$p((\neg\varphi)) = \quad 1 + p(\varphi)$

***t*: PROP $\rightarrow \aleph$ (*n. símbolos*)**

$t(\varphi) = 1$, se φ for atômica

$t((\varphi \wedge \alpha)) = \quad 3 + t(\varphi) + t(\alpha)$

$t((\varphi \vee \alpha)) = \quad 3 + t(\varphi) + t(\alpha)$

$t((\varphi \rightarrow \alpha)) = \quad 3 + t(\varphi) + t(\alpha)$

$t((\neg\varphi)) = \quad 3 + t(\varphi)$