Lógica para Computação

IF673 – Engenharia da Computação

Cin/UFPE – Anjolina Grisi de Oliveira

Assinatura: notação

Seja A uma estrutura com assinatura L. Então dizemos que A é uma L-estrutura.

Estrutura: mais exemplos

Exemplo 1: *Grafos. Um grafo consiste de um conjunto* ***V*** *(o conjunto de vértices) e* um conjunto **E** (o conjunto de arestas**),** onde cada aresta é um conjunto de dois vértices distintos. Diz-se que uma aresta (v,w) liga os dois vértices v e w**.** Podemos fazer uma figura representando um grafo finito usando pontos para os vértices e a ligação de dois vértices v, w sendo realizada por uma linha quando (v,w) é uma aresta.

De que maneira um grafo é uma estrutura?

Estrutura: mais exemplos

Exemplo 1: *Grafos: uma estrutra G.*

Os elementos de dom(G) são os vértices. Existe uma relação binária R^G; o par ordenado (v,w) pertence à relação R^G se e somente se existe uma aresta ligando v a w.

Estrutura: mais exemplos

Exemplo 2: ***Ordenações lineares.*** *Suponha que $\leq$ ordena um conjunto X.*

De que maneira podemos fazer (X,≤) uma estrutura?

O domínio de A é o conjunto X. Existe um símbolo de relação binária R, e sua interpretação R^A é a ordenação $\leq$.

(Na prática escreveríamos o símbolo de relação como $\leq$ ao invés de R.)

Subestrutura

Como saber se uma dada estrutura A é uma subestrutura de uma estrutura B?

Se A e B forem simplesmente conjuntos, basta verificar se todos os elementos de A estão em B.

Homomorfismo e Subestrutura

Seja L uma assinatura e sejam A e B L-estruturas. Seja h uma função de dom(A) em dom(B) (h: dom(A) $\rightarrow$ dom(B)). Dizemos que h é um **homomorfismo da estrutura** A para B, se h possui as três seguintes propriedades.

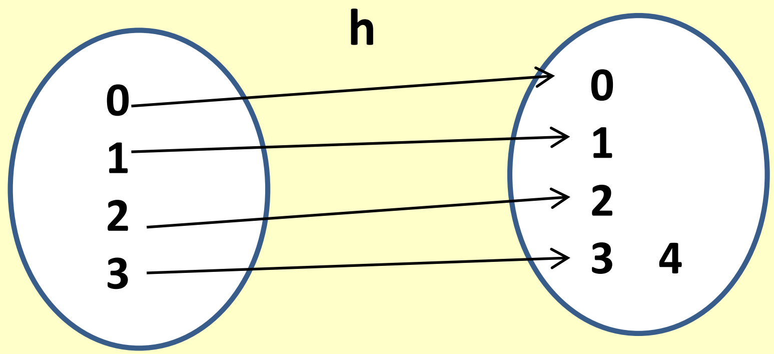
(1) Para cada constante c de L, $h(c^A) = c^B$.

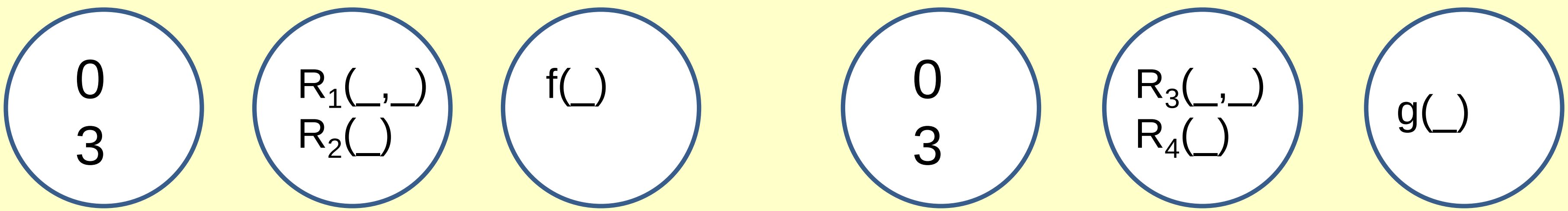
(2) Para todo símbolo de relação n-ária R de L e toda n-upla $(a_1,...a_n)$ de elementos de A, se $(a_1,...,a_n) \in R^A$ então $(h(a_1), ..., h(a_n)) \in R^B$.

(3) Para todo símbolo de função n-ária g de L e toda n-upla $(a_1,...a_n)$ de elementos de A, $h(g^A(a_1,...,a_n)) = g^B(h(a_1), ..., h(a_n))$.

Homomorfismo: exemplos

A **B**





R_1={(0,2),(1,2),(1,3),(0,3)}
R_2={1,2}
f(0) = 1, f(1) = 1, f(2)=1, f(3)=2

R_3={(0,2),(1,2),(1,3),(0,3),(0,1),(1,0)}
R_4={1,2,4}
g(0) = 1, g(1)=1, g(2)=1, g(3) = 2, g(4) =4

Homomorfismo: exemplos

Sejam as seguintes L-estruturas A e B e a função h:dom(A)$\rightarrow$dom(B), onde h(x) = x mod 3.

Prove ou refute se h é um homomorfismo de A em B.

Estrutura A: **domínio**: o conjunto do números naturais;
destaque: o número 3;
uma relação binária cujos seus elementos são os pares (x,y) de forma que x é menor que y.

Estrutura B: **domínio**: {0,1,2},
destaque: o número 0;
uma relação binária composta pelos pares (x,y) de forma que x é menor que y.

Homomorfismo: exemplos

Sejam as seguintes L-estruturas A e B e a função
$h:dom(A) \rightarrow dom(B)$, onde $h(x) = x \bmod 3$.

Prove ou refute se h é um homomorfismo da estrutura A na estrutura B.

Estrutura A: **domínio**: o conjunto do números inteiros;
destaque: o número 4;
uma função unária: $f(x) = 3x + x$.

Estrutura B: **domínio**: {0,1,2},
destaque: o número 1;
uma função unária $f(x) = x$.

Homomorfismo: exemplos

Sejam A e B duas L-estruturas, na qual o domínio de A é o conjunto dos números inteiros (Z) e o domínio de B é o conjunto {0,1}. A assinatura L e as interpretações em A e em B, são dadas a seguir.

Prove ou refute se a função h: $Z \rightarrow \{0,1\}$ é um homomorfismo da estrutura A na estrutura B, onde h é definida como :

h(x) = 0, se x é par; e h(x) = 1, se é ímpar.

Assinatura L: um símbolo de função binária: f.

Interpretação em A: $f^A(x,y) = x+y$
Interpretação em B: $f^B(x,y) = x+y \pmod 2$

Imersão

(1) Para cada constante c de L, $f(c^A) = c^B$.

(2) Para todo símbolo de relação n-ária R de L e toda n-upla $(a_1,...a_n)$ de elementos de A, se $(a_1,...,a_n) \in R^A$ então $(h(a_1), ..., h(a_n)) \in R^B$.

(3) Para todo símbolo de função n-ária g de L e toda n-upla $(a_1,...a_n)$ de elementos de A, $f(g^A(a_1,...,a_n)) = g^B(h(a_1), ..., h(a_n))$.

A função h é dita ser uma imersão se ela for injetora e o item 2 for substituído por:

(2) Para todo símbolo de relação n-ária R de L e toda n-upla $(a_1,...a_n)$ de elementos de A, $(a_1,...,a_n) \in R^A$ **se e somente se** $(h(a_1), ..., h(a_n)) \in R^B$.

Isomorfismo, endomorfismo, automorfismo

Um **isomorfismo** é uma imersão sobrejetora**.**

Homomorfismos $f : A \rightarrow A$ são chamados de **endomorfismos** de A**.**

Isomorfismos $f : A \rightarrow A$ são chamados de **automorfismos** de A.

Subestrutura

- Sejam A e B duas L-estruturas. Dizemos que A é uma subestrutura de B ($A \subseteq B$), se:

1. $\mathrm{dom}(A) \subseteq \mathrm{dom}(B)$
2. a função identidade de dom(A) em dom(B) é uma imersão.