Lógica para Computação

IF673

Cin/UFPE – Anjolina Grisi de Oliveira

Termos

Seja L uma assinatura. O conjunto de termos de L é definido indutivamente como a seguir:

1. Todo símbolo c de constante de L é um termo;
2. Toda variável é um termo;
3. Para todo símbolo de função n-ária f de L, se $t_1,...,t_n$ forem termos, então $f(t_1,...,t_n)$ é um termo;
4. Nada mais é um termo.

TERMO FECHADO: NÃO CONTEM VARIÁVEL.

Termos: Fecho indutivo

Seja L uma assinatura.

O conjunto de termos de L é o fecho indutivo do conjunto X = variáveis U destaques sob o conjunto dos símbolos de função f de L.

Fórmulas atômicas

Seja L uma assinatura.

1. Se P é um símbolo de relação de L com aridade n, e $t_1,\ldots,t_n$ são termos de L, então $P(t_1,\ldots,t_n)$ é uma fórmula atômica.
2. Se t_1 e t_2 são termos de L, então $t_1=t_2$ é uma fórmula atômica.

Escopo de um quantificador

1) $\forall x(P(x) \rightarrow \exists y R(x,y))$

Qual o escopo de $\forall x$? $\boxed{P(x) \rightarrow \exists y R(x,y)}$

Qual o escopo de $\exists y$? $\boxed{R(x,y)}$

2) $S(x) \vee \exists z(P(z) \wedge \forall x(R(x,y) \rightarrow \exists y R(y,x)))$

Escopo de $\exists z$: $\boxed{(P(z) \wedge \forall x(R(x,y) \rightarrow \exists y R(y,x))}$

Escopo de $\forall x$: $\boxed{R(x,y) \rightarrow \exists y R(y,x)}$

Escopo de $\exists y$: $\boxed{R(y,x)}$

Variável livre e ligada

Definição : *Uma ocorrência de uma variável em uma fórmula é ligada se e somente se ela está no escopo de um quantificador aplicado a ela. Ou ela é a ocorrência do quantificador. Uma ocorrência de uma variável numa fórmula é livre se e somente se essa ocorrência não é ligada.*

Definição : *Uma variável é livre numa fórmula se pelo menos uma ocorrência dela é livre na fórmula. Uma variável é ligada se pelo menos uma ocorrência dela é ligada*

Exemplos

1) $\forall x P(x,y)$

As duas ocorrências de x são ligadas.

A ocorrência de y é livre.

2) $\forall x P(x,y) \wedge \forall y Q(y)$

Nesse exemplo notamos que uma variável pode ser ao mesmo tempo livre e ligada em uma fórmula.

Fórmulas bem formadas

Uma fórmula bem formada da lógica de primeira ordem é definida recursivamente como a seguir:

1. Um átomo (fórmula atômica) é uma fórmula;
2. Se F e G são fórmulas, então $\neg$(F),(F$\vee$G), (F$\wedge$G), (F$\rightarrow$G) e (F$\leftrightarrow$G) são fórmulas;
3. Se F é uma fórmula e x é uma variável livre em F, então $\forall$xF e $\exists$xF são fórmulas;
4. Fórmulas são geradas apenas por um finito número de aplicação das regras acima.

Sentenças

Sentenças são fórmulas sem variáveis livres.

Dessa forma, uma sentença atômica é uma fórmula atômica sem variável.

Significado de uma sentença atômica

Seja L uma assinatura e φ uma sentença atômica de L. O significado de φ segundo uma interpretação de L numa estrutura A de assinatura L é determinado pelo resultado da interpretação sobre os termos de φ e sobre o símbolo de relação de φ.

Significado de uma sentença atômica

A

0
1
2
3 4

menor_que(_,_)
primo(_)
divide(_,_)

0
2

quad_mod5(_)
soma_mod5(_,_)
mult_mod5(_,_)

Assinatura de A:
- Constantes: c_1, c_2
- Relações: R(_,_), S(_,_), P(_)
- Funções:f(_,_), g(_,_), h(_)

Seja a seguinte interpretação:
- $c_1^A = 0$, $c_2^A = 2$
- R^A = menor_que(_,_),
- S^A = divide(_,_), P^A = primo(_)
- f^A = soma_mod5(_,_)
- g^A = mult_mod5(_,_)
- h^A = quad_mod5(_)

Seja φ a fórmula $R(f(c_1,g(c_1,c_2)),g(f(c_2,c_2),c_1))$
- Qual o significado de φ segundo a interpretação dada em A?

φ^A = menor_que(soma_mod5(0,mult_mod5(0,2)),mult_mod5(soma_mod5(2,2),0))

É falso

Modelo de uma sentença atômica

Seja L uma assinatura e A uma L-estrutura. Dizemos que A é um modelo de φ sob uma determinada interpretação de L em A se φ^A for verdadeira.

Contra-modelo de uma sentença atômica

Seja L uma assinatura e A uma L-estrutura. Dizemos que A é um contra-modelo de φ sob uma determinada interpretação φ^A , se φ^A for falsa.

Sentenças e estruturas

Vamos ver agora como passar de uma estrutura para um conjunto de sentenças que a descrevem. E como passar de um conjunto de sentenças para uma estrutura que satisfaz esse conjunto.

1. De estrutura para sentenças
2. De sentenças para estrutura

De estrutura para sentenças

A

0
1
2

menor_que(_,_)
primo(_)

0
2

quad_mod3(_)
soma_mod3(_,_)

Assinatura de A:
- Constantes: a, b
- Relações: R(_,_), P(_)
- Funções:f(_,_), h(_)

Seja a seguinte interpretação:
- $a^A = 0$, $b^A = 2$
- R^A = menor_que(_,_),
- P^A = primo(_)
- f^A = soma_mod3(_,_)
- h^A = quad_mod3(_)

R(a,h(b)), R(a,b), R(h(b),b)),...
P(b), P(f(a,b)),....

f(a,h(b)) = h(b), f(a,b) = b, f(h(b),b) = a,...
h(a) = a, h(h(b)) = h(b), h(b) =f(b,b),...

Se algum termo não pode ser representado com os destaques e funções, ele é acrescentado ao conjunto de destaques.

DESCRIÇÃO LÓGICA DE A

Diagrama positivo de uma estrutura

Seja A uma L-estrutura. O conjunto de todas sentenças atômicas de L que são verdadeiras sob uma determinada interpretação em A, (ou seja, a descrição lógica de A) é chamado de diagrama positivo de A.

O processo de construção do diagrama positivo se dá da seguinte forma:

(1) Para todo símbolo de relação n-ária R de L, inclua uma sentença atômica da forma $R(t_1,...t_n)$ se os elementos $(t_1^A,...,t_n^A) \in R^A$.

(2) Para todo símbolo de função n-ária f de L inclua uma sentença atômica da forma $f(t_1,...t_n) = t_{n+1}$ se, $f^A(t_1^A,...,t_n^A) = t^A_{n+1}$ na estrutura A, onde $t^A_1,...,t^A_n$ são representações dos elementos de A.

Extensão de uma estrutura

Seja A uma L-estrutura. Quando desejamos produzir o diagrama positivo de A e A tem elementos ``sem nome´´, definimos uma ***extensão*** de A, chamada A', que admite esses `` sem nome´´ como novos elementos destacados.

Isso significa dizer que a assinatura A' é L'= L $\cup$ $\{c_1,...,c_n\}$.

Onde cada c_i é um símbolo de constante para representar o elemento a_i. Às vezes abreviamos L $\cup$ $\{c_1,...,c_n\}$ como $L(\bar{c})$.

De sentenças para estrutura

Suponha que nos seja dado um conjunto de sentenças atômicas T numa linguagem L e desejamos construir uma estrutura que satisfaça todas as sentenças de T. Para construir essa estrutura, precisamos definir:

1. Domínio
2. Elementos destacados
3. Predicados e relações
4. Funções

De sentenças para estrutura: domínio

Classe de equivalência de termos fechados.

Definimos o representante da classe de equivalência de um dado termo t em relação ao conjunto de sentenças atômicas T como sendo todos os termos fechados $t^{\sim}$ de L para os quais temos $t = t^{\sim}$ no conjunto T.

O domínio da estrutura B que estamos construindo será definido pelo conjunto dos representantes das classes de equivalência dos termos fechados de L no conjunto T de sentenças atômicas.

De sentenças para estrutura: Relações

Para definir as relações da estrutura B conforme a descrição contida no conjunto T de sentenças atômicas, faremos o seguinte:

Para toda sentença de T da forma $R(t_1,...,t_n)$, faça com que a n-upla $(t_1^{\sim},...,t_n^{\sim})$ pertença à relação, ou seja:

$R(t_1,...,t_n) \in T$ se e somente se $(t_1^{\sim}, ..., t_n^{\sim}) \in R^B$

De sentenças para estrutura: Funções

Para definir as funções da estrutura B conforme a descrição contida no conjunto T de sentenças atômicas, faremos o seguinte:

Para todo símbolo de função n-ária f, o representante da classe de equivalência de $f(t_1,...,t_n)$, ou seja $f(t_1,...,t_n)^{\sim}$ é igual a f^B aplicada aos elementos $(t_1^{\sim},...,t_n^{\sim})$:

$$f^B(t_1^{\sim}, ..., t_n^{\sim}) = f(t_1,...,t_n)^{\sim}$$

De sentenças para estrutura

Suponha que T seja o conjunto de sentenças atômicas de uma linguagem L. Para construir, uma L-estrutura que seja modelo para T fazemos:

1. O domínio será definido pelo conjunto dos representantes das classes de equivalência ($t^{\sim}$) dos termos fechados de L no conjunto T.

2. Os destaques são os $c^{\sim}$ dados onde c é um símbolo de constante L.

3. Seja R um símbolo de relação n-ária de L. Então $(t_1^{\sim}, ..., t_n^{\sim}) \in R^B$ se e somente se $R(t_1,...,t_n) \in T$.

4. Seja f um símbolo de função n-ária de L. Então
$$f^B(t_1^{\sim}, ..., t_n^{\sim}) = f(t_1,...,t_n)^{\sim}$$

De sentenças para estrutura: exemplo

L:

- Constantes: a, b
- Relações: R(_,_), P(_)
- Funções:f(_,_), h(_)

R(a,h(b)), R(a,b), R(h(b),b)),...
P(b), P(f(a,b)),....

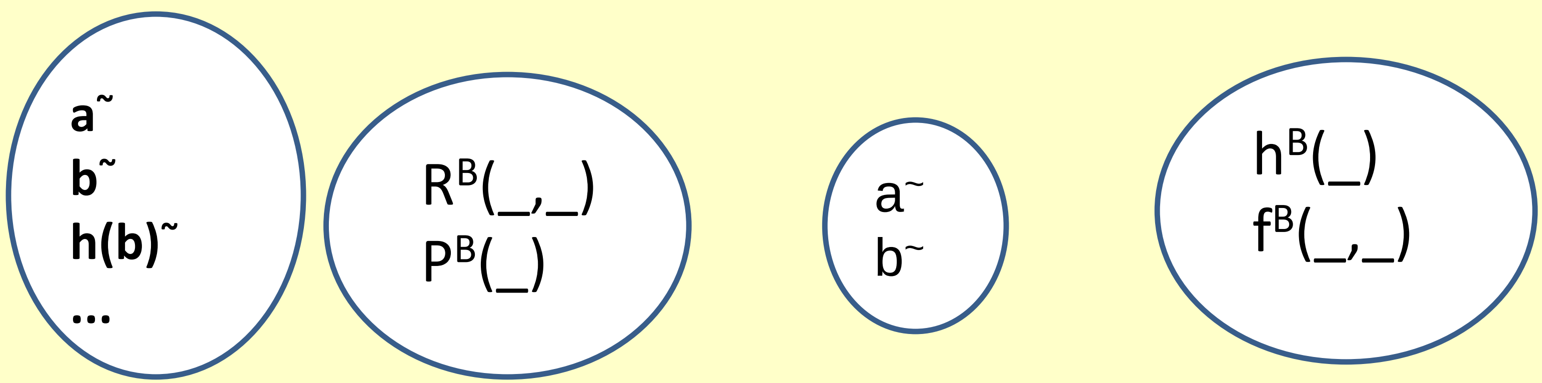
a=h(a), h(a)= h(h(a)), h(h(a))= h(h(h(a)))), f(h(b),b) = a...
a=f(a,a), f(a,a)= f(h(a),h(a)), f(f(a,a),f(a,a))= h(a),.....
b=f(a,b), f(a,b)= f(f(h(b),b),b), ...
h(b)= f(a,h(b)), h(h(b)) = h(b), h(b) =f(b,b),...

$R^B=\{(a^{\sim},h(b)^{\sim}), (a^{\sim},b^{\sim}), (h(b)^{\sim},b^{\sim}))\}$ $P^B=\{b^{\sim}\}$

$h^B(a^{\sim})=(h(a))^{\sim}$, $h^B(b^{\sim})= (h(b))^{\sim}$, $h^B(h(b)^{\sim})= (h(h(b)))^{\sim}$

Atenção: o domínio, nesse caso, é infinito.

B



De sentenças para estrutura

Suponha que T seja um conjunto de sentenças atômicas de uma linguagem L:

1. A L-estrutura B que construímos a partir de T e L é chamada de modelo canônico de T.

2. A L-estrutura B que construímos é parecida com qualquer que tenha sido o modelo ``original´´, descrito por T. Isso quer dizer que podemos construir um homomorfismo de B para qualquer outro modelo de T.

3. B é chamada de modelo canônico pois funciona como uma espécie de referencial para todos os modelos de T.

Mostrando que B é modelo canônico

Seja D uma L-estrutura que é modelo de T. Vamos definir um homomorfismo de B para D:

- Faça $h(t^{\sim}) = t^D$
- Para todo $c \in L$, $h(c^B)= c^D$, isto é, $h(c^{\sim}) = c^D$.

- Para todo R de aridade n, e toda n-upla $a_1,a_2,...,a_n$ se $(a_1,a_2,...,a_n) \in R^B$ então $(h(a_1),...,h(a_n)) \in R^D$:
- Se $(t_1^{\sim}, ..., t_n^{\sim}) \in R^B$ é porque $R(t_1, ..., t_n) \in T$ então $(t_1^D, ..., t_n^D) \in R^D$ portanto $(h(t_1^{\sim}), ..., h(t_n^{\sim})) \in R^D$.

- Para toda f de aridade m, e toda m-upla $a_1,a_2,...,a_m \in B$ $h(f^B(a_1,a_2,...,a_m)) = f^D(h(a_1),...,h(a_m))$:
- $h(f^B (t_1^{\sim}, ..., t_n^{\sim})) = h((f(t_1,t_2,...,t_m))^{\sim}) = (f(t_1,t_2,...,t_m))^D =$
  $= f^D (t_1^D, ..., t_m^D) = f^D(h(t_1^{\sim}), ..., h(t_m^{\sim}))$.

Exercícios

1. Dada a estrutura E:
(i) domínio: o conjunto dos números inteiros
(ii) elementos destacados: o número *0*
(iii) relações: *Maior-Que (binária), Impar (unária), Par (unária)*
(iv) funções: *anterior (unária), próxima (unária)*

a) Defina uma assinatura para E
b) Defina indutivamente o conjunto dos termos dessa assinatura
c) Defina o diagrama positivo de E.
d) Qual a diferença entre Fórmulas Atômicas e Sentenças?

2. Dada a Estrutura F com o domínio {1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16}, elemento de destaque 1 e as funções dobro(unária) e triplo(unária), defina o diagrama positivo de F.

Exercícios

3. Defina o modelo canônico a partir do conjunto de sentenças abaixo: { X(k), Y(g(t), t), g(k) = g(t), g(t) = k, p(g(k), k) = t, p(k, t) = g(g(k)), p(t, k) = p(p(g(k), k), t), X(p(g(p(k, t)), t)), Y(k, k) }