Lógica para Computação

IF673 – Engenharia da Computação

Cin/UFPE – Anjolina Grisi de Oliveira

Forma Padrão de Skolem

O princípio da resolução que vamos estudar para a lógica de primeira ordem se aplica a fórmulas numa certa forma padrão. Chamamos de forma padrão de Skolem, obtida da seguinte forma:

1. A fórmula é transformada para a forma normal prenex, onde a matriz não contem quantificadores e o prefixo é uma sequência de quantificadores;

2. A matriz é transformada para a forma normal conjuntiva

3. Os quantificadores existenciais são eliminados através do uso de funções de Skolem.

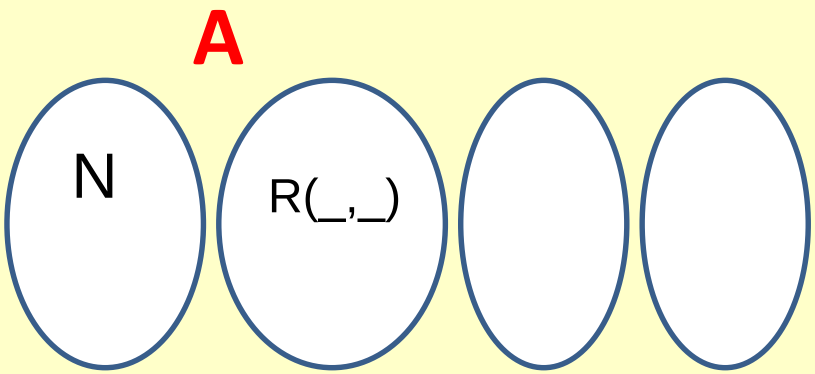
Eliminando os quantificadores existenciais

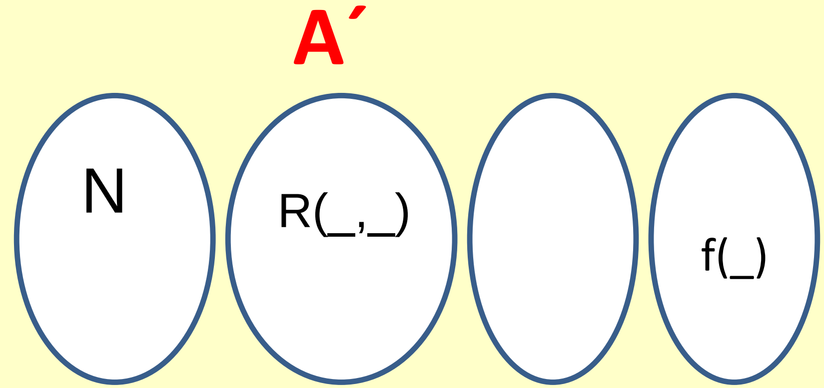
O método de Thoralf Skolem:

No início dos anos 1920, um lógico-matemático norueguês, chamado Thoralf Skolem definiu um método, que acabou ganhando seu nome:

o método da skolemização.

Skolemização: Exemplo





$\varphi = \forall x \exists y R(x,y)$

$\varphi' = \forall x R(x,?)$

Substituimos a variável que sumiu com a retirada do quantificador por uma função de Skolem, que depende das variáveis que sobraram (aquelas unidas aos quantificadores universais).

φ é verdadeira na estrutura A

φ' é verdadeira na estrutura A´, que é exatamente igual a A, adicionando-se uma função f de forma que **$\varphi' = \forall x R(x,f(x))$**

Teorema de Lowenheim-Skolem

Seja φ uma fórmula da lógica de predicados numa assinatura L, tal que φ está na forma normal prenex. Seja φ'a fórmula resultante da eliminação dos quantificadores existenciais que ocorrem em φ, e cujas variáveis correspondentes são substituídas por termos do tipo $f(x_1, ..., x_n)$, onde f é um novo símbolo de função e $x_1, ..., x_n$ são variáveis universalmente quantificadas imediatamente anteriores a esse existencial. Então se existe uma L-estrutura A que é modelo para φ, é possível construir uma L´-estrutura A´, que é modelo para φ' simplesmente acrescentando à estrutura A uma interpretação para cada símbolo novo de função em A´.

Teorema de Lowenheim-Skolem

Caso não haja quantificadores universais, como por exemplo:

$$\exists x \exists y\ (P(x,y) \rightarrow Q(y))$$

x e y são substituídas por constantes:

$$P(a,b) \rightarrow Q(b)$$

Assim, na estrutura A´é necessário apenas acrescentar mais dois <u>novos </u>destaques.

Exemplos

1) $(\exists x)(\forall y)(\forall z)(\exists u)(\forall v)(\exists w)(P(x,y,z,u,v,w))$

2) $(\forall x)(\exists y)(\exists z)(((\neg P(x,y) \wedge Q(x,z)) \vee R(x,y,z))$

3) $(\forall x)(\forall y)(\exists z)(P(x,y) \rightarrow R(z))$

Atenção: Para aplicar o método da resolução precisamos:

1. **Colocar a fórmula na forma normal prenex**
2. **Colocar na forma padrão de Skolem (sem existenciais e a matriz na FNC)**
3. **Simplesmente, esquecer os quantificadores universais**

Exemplo: resolução

$\forall y(Q(y) \vee Q(f(y)))$ é uma consequência lógica do seguinte conjunto

$\{ \forall x(P(x,b) \vee Q(x)), \forall y(\neg P(f(y),b) \vee Q(y))\}$?

Atenção: Para resolver essa questão precisamos estudar o conceito de unificação de termos.