Universidade Federal de Pernambuco
Cálculo Diferencial e Integral 1

Terceiro Exercício Escolar
09/12/2015

1) Determine as integrais indefinidas abaixo.

(a)(1,5 pto.) $\displaystyle\int \frac{2x^2+1}{x^3+x}dx$.

(b)(1,5 pto.) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-4}}$.

2) Para cada integral abaixo, determine seu valor ou decida sobre sua convergência.

(a)(1,5 pto.) $\displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x(\ln x)^2}$.

(b)(1,5 ptos.) $\displaystyle\int_1^3 x\ln(x+1)dx$.

3) Considere $\mathcal{R}$ a região do primeiro quadrante limitada pelas curvas $y=\frac{8}{x}$, $y=2x$ e $y=8x$.

(a)(0,5 pto.) Esboce a região $\mathcal{R}$.

(b)(1,5 pto.) Calcule a área de $\mathcal{R}$.

4) Considere a seguinte função

$$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$f(x)=\int_2^{x^2+x} e^{-t^2}dt\ .$$

(a)(0,5 pto.) Determine $f(1)$.

(b)(1,5 pto.) Calcule $f'(0)$.

BOA PROVA!

CÁLCULO 1 (3º E.E.)

GABARITO

1º)

a) $\displaystyle\int \frac{2x^2+1}{x^3+x}\,dx$

Observe que $\displaystyle\frac{2x^2+1}{x^3+x} = \frac{2x^2+1}{x(x^2+1)}$

Vamos dividir esta em frações parciais:

$$\frac{2x^2+1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$\therefore\ 2x^2+1 = A(x^2+1) + x(Bx+C)$$

$$2x^2+1 = (A+B)x^2 + Cx + A$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=2 \\ C=0 \\ A=1 \end{cases} \ \therefore\ \boxed{B=1} \ \Rightarrow \frac{2x^2+1}{x^3+x} = \frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+1}$$

Portanto,

$$\int \frac{2x^2+1}{x^3+x}\,dx = \int\left(\frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+x}\right)dx = \int\frac{dx}{x} + \int\frac{x}{x^2+1}\,dx$$

$$= \ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + K$$

__Obs.__ Para resolver $\displaystyle\int\frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + K$

basta fazer a substituição $u = x^2+1$ (direta). ∎

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-4}}$

Utilizando a subst. trig. inv. $x = 2\sec u$, temos:

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-4}} = \int \frac{2\sec u \,\mathrm{tg}\, u}{8\sec^3 u\sqrt{4\sec^2 u - 4}}\,du$$

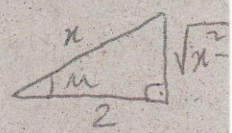
$$= \int \frac{\sec u \cdot \mathrm{tg}\, u}{4\sec^3 u \cdot 2\sqrt{\sec^2 u - 1}}\,du = \int \frac{\sec u \cdot \mathrm{tg}\, u}{8\sec^3 u \cdot \mathrm{tg}\, u}\,du$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{1}{\sec^2 u}\,du = \frac{1}{8}\int \cos^2 u\,du = \frac{1}{16}\int (1+\cos 2u)\,du$$

$$= \frac{1}{16}\int du + \frac{1}{16}\int \cos 2u\,du$$

$$= \frac{u}{16} + \frac{1}{16}\,\frac{\mathrm{sen}\, 2u}{2} + K = \frac{u}{16} + \frac{\mathrm{sen}\, u \cos u}{16} + K$$

Como $x = 2\sec u$, temos as relações:



Daí,

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-4}} = \frac{\mathrm{arcsec}(x/2)}{16} + \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\cdot\frac{2}{x} + K \quad \blacksquare$$

(Obs: Para resolver $\int \cos 2u\,du = \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\, 2u + K$, basta fazer a substituição direta $v = 2u$.)

2) Para cada integral abaixo, determine seu valor ou decida sobre sua convergência.

a) • $\int_1^e \frac{dx}{x(\ln x)^2}$. Como $(\ln 1) = 0$, então

$$\int_1^e \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \lim_{t\to 1^+}\int_t^e \frac{dx}{x(\ln x)^2}$$

Vamos resolver $\int_t^e \frac{dx}{x(\ln x)^2}$.

$$\begin{aligned}\int_t^e \frac{dx}{x(\ln x)^2} &= \int_{\ln t}^1 \frac{du}{u^2}, \text{ onde } \begin{array}{l} u=\ln x\\ du=\frac{dx}{x}\end{array}\\ &= \left[-\frac{1}{u}\right]_{\ln t}^1 = -1+\frac{1}{\ln t}.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int_1^e \frac{dx}{x(\ln x)^2} &= \lim_{t\to 1^+}\int_t^e \frac{dx}{x(\ln x)^2}\\ &= \lim_{t\to 1^+}\left(-1+\frac{1}{\ln t}\right)\\ &= \infty.\end{aligned}$$

b) • $\int_1^3 x\ln(x+1)\,dx$.

$$\begin{aligned}\int_1^3 x\ln(x+1)\,dx &= \int_{1+1}^{3+1}(u-1)\ln(u)\,du, \text{ onde } \begin{array}{l} u=x+1\\ du=dx\end{array}\\ &= \int_2^4 u\ln(u)\,du - \int_2^4 \ln(u)\,du.\end{aligned}$$

Vamos resolver por partes a primeira integral na última igualdade.

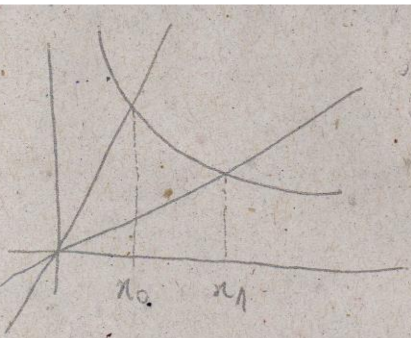
$$\begin{aligned}\int_2^4 u\ln(u)\,du &= \left[\frac{u^2}{2}\ln u\right]_2^4 - \frac{1}{2}\int_2^4 u^2\frac{du}{u}, \text{ onde } \begin{array}{l} w=\ln u\\ dw=\frac{du}{u}\end{array} \text{ e } \begin{array}{l} dv=u\,du\\ v=\frac{u^2}{2}\end{array}\\ &= 8\ln 4 - 2\ln 2 - \frac{1}{4}\left[u^2\right]_2^4\\ &= 8\ln 4 - 2\ln 2 - 4 + 1 = 8\ln 4 - 2\ln 2 - 3.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int_1^3 x\ln(x+1)\,dx &= 8\ln 4 - 2\ln 2 - 3 - \left[u\ln u - u\right]_2^4\\ &= 8\ln 4 - 2\ln 2 - 3 - 4\ln 4 + 4 + 2\ln 2 - 2\\ &= 4\ln 4 - 1.\end{aligned}$$

3ª)

a)



Quem são x_0 e x_1?

$8x_0 = \frac{8}{x_0}$ $\quad x_0^2 = 1 \Rightarrow \boxed{x_0 = 1}$

$\frac{8}{x_1} = 2x_1$ $\quad x_1^2 = 4 \Rightarrow \boxed{x_1 = 2}$

b) $\text{Area}(R) = \int_0^1 (8x - 2x)\,dx + \int_1^2 \left(\frac{8}{x} - 2x\right)dx$

$= \left(4x^2 - x^2\right)\Big|_0^1 + \left(8\ln|x| - x^2\right)\Big|_1^2$

$= (4.1^2 - 1^2) - (4.0^2 - 0^2) + (8\ln|2| - 2^2) - (8\ln|1| - 1^2)$

$= 3 + 8\ln 2 - 4 + 1 = 8\ln 2$ ∎

4) Considere a seguinte função

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(x) &= \int_2^{x^2+x} e^{-t^2} dt \end{aligned}$$

a) • Determine $f(1)$.

$$\begin{aligned} f(1) &= \int_2^2 e^{-t^2} dt \\ &= \underline{0.} \end{aligned}$$

b) • Calcule $f'(0)$.

Para calcular $f'(0)$ precisamos usar o Teorema Fundamental do Cálculo. Sendo $f(x) = \int_2^{x^2+x} e^{-t^2} dt$, o Teorema fundamental do Cálculo nos permite concluir que,

$$f'(x) = e^{-(x^2+x)^2}(2x+1).$$

desta forma

$$\underline{f'(0) = 1.}$$