Lógica para Computação

IF673 – Engenharia da Computação

Cin/UFPE – Anjolina Grisi de Oliveira

Retomando o problema SAT

Dado um conjunto C de sentenças da lógica de primeira ordem. Pergunta-se: *C é satisfatível?*

C tem um modelo?

De acordo com o que já estudamos, sabemos que se C for um conjunto de sentenças atômicas, a resposta é SIM. Sabemos como construir pelo menos um modelo, que é o **modelo canônico**.

Resta saber o que fazer quando C contem fórmulas não atômicas.

Substituição de variáveis por termos

Queremos definir precisamente o resultado da substituição das ocorrências de uma variável x numa FBF φ por um termo t (em símbolos $\varphi[t/x]$.

1. Se φ é atômica temos $\varphi[t/x]$. É a fórmula resultante da remoção de todas as ocorrências de x e a colocação do termo t nos seus lugares.
2. Se φ é da forma $\neg\varphi$: $(\neg\varphi)[t/x]=\neg(\varphi[t/x])$
3. Se φ é da forma $(\delta\wedge\rho)$: $(\delta\wedge\rho)[t/x] = (\delta[t/x] \wedge \rho[t/x])$;
4. Se φ é da forma $(\delta\vee\rho)$: $(\delta\vee\rho)[t/x] = (\delta[t/x] \vee \rho[t/x])$;
5. Se φ é da forma $(\delta\rightarrow\rho)$: $(\delta\rightarrow\rho)[t/x] = (\delta[t/x] \rightarrow \rho[t/x])$;

Substituição de variáveis por termos

1. Se φ é atômica temos $\varphi[t/x]$.
2. Se φ é da forma $\neg\varphi$: $(\neg\varphi)[t/x]=\neg(\varphi[t/x])$
3. Se φ é da forma $(\delta\wedge\rho)$:
   $(\delta\wedge\rho)[t/x] = (\delta[t/x] \wedge \rho[t/x])$;
4. Se φ é da forma $(\delta\vee\rho)$:
   $(\delta\vee\rho)[t/x] = (\delta[t/x] \vee \rho[t/x])$;
5. Se φ é da forma $(\delta\rightarrow\rho)$:
   $(\delta\rightarrow\rho)[t/x] = (\delta[t/x] \rightarrow \rho[t/x])$;
6. Se φ é da forma $\forall xi\Psi$, $(\forall xi)\Psi[t/x]=$
   - $\forall xi\Psi$, se $xi=x$
   - $\forall xi(\Psi[t/x])$, se $xi \neq x$
7. Se φ é da forma $\exists xi\Psi$, $(\exists xi)\Psi[t/x]=$
   - $\exists xi\Psi$, se $xi=x$
   - $\exists xi(\Psi[t/x])$, se $xi \neq x$

Exemplos: substituição

1) $(\forall x)(\forall y)(P(x,y) \land R(y))[a/x]$

2) $(\forall x)(\forall y)(P(x,y) \rightarrow R(z))[f(a)/z]$

3) $(\forall x)(\forall y)(P(x,y) \rightarrow R(z))[y/z]$

Atenção: Essa última substituição não pode ser realizada, pois muda o significado da fórmula. Antes z ocorria livre e agora seria substituída por uma variável ligada. Vejamos outro exemplo.

4) $(\forall x)P(x,y)[x/y]$

Nesse exemplo, a substituição também não pode ser aplicada.

Exemplos: substituição

5) $(\forall x)(P(x) \wedge R(y))[f(x)/y]$

Nesse exemplo, a substituição também não pode ser aplicada.

6) $(\forall x)(P(x) \rightarrow R(z))[f(z)/z]$

Atenção: Essa última substituição também não pode ser realizada. A variável que está sendo substituída não pode ocorrer no termo.

Substituição de variáveis por termos

Podemos aplicar substituição também a termos somente. Usamos a mesma notação: s[t/x], para indicar a substituição da variável x pelo termo t no termo s.

Exemplos:

1. f(x)[a/x]
2. g(g(x,y),g(f(z),x))[a/x,b/y,f(c)/z]
3. h(x,y)[a/x,f(y)/y]

Essa última substituição não pode ser aplicada.

Valor-verdade de uma sentença

Seja L uma assinatura, A uma L-estrutura, e $.^A$ uma interpretação dos símbolos de L na L-estrutura. O valor-verdade de uma sentença φ de L é definida indutivamente da seguinte forma:

1. Se φ é atômica:
   1. é da forma $R(t_1,...,t_n)$:
      φ^A é verdade sse $(t_1^A, ..., t_n^A) \in R^A$;
   2. é da forma t1=t2:
      φ^A é verdade sse $(t_1^A = t_2^A)$.
2. Se φ é da forma $\neg\psi$:
   φ^A é verdade sse $(\neg\psi)^A$ é V sse ψ^A é falsa .

Valor-verdade de uma sentença

3. Se φ é da forma $(\delta\wedge\rho)$:

   φ^A é V sse $(\delta\wedge\rho)^A$ é V sse δ^A é V e ρ^A é V.

4. Se φ é da forma $(\delta\vee\rho)$:

   φ^A é V sse $(\delta\vee\rho)^A$ é V sse δ^A é V ou ρ^A é V.

5. Se φ é da forma $(\delta\rightarrow\rho)$:

   φ^A é V sse $(\delta\rightarrow\rho)^A$ é V sse $(\neg\delta)^A$ é V ou ρ^A é V sse δ^A é falsa ou ρ^A é V.

6. Se φ é da forma $\forall x\psi$:

   φ^A é V sse $(\forall x\psi)^A$ é V sse $(\psi)^A$ [a/x] é V para <u>todo</u> elemento a do domínio da estrutura A.

7. Se φ é da forma $\exists x\psi$:

   φ^A é V sse $(\exists x\psi)^A$ é V sse $(\psi)^A$ [a/x] é V para <u>algum</u> elemento a do domínio da estrutura A.

Valor-verdade de uma sentença

Essa maneira de definir quando uma sentença é verdadeira numa estrutura é conhecida como a noção de verdade em um ``modelo de Tarski´´, em referência ao lógico Alfred Tarski, que foi pioneiro nessa definição.

É conhecida também como a definição de verdade por meio de uma meta-linguagem.

Satisfabilidade de uma sentença

Seja L uma assinatura, A uma L-estrutura e φ uma sentença de L.

Dizemos que A satisfaz φ sob a interpretação i: $L \rightarrow A$, se φ^A for verdadeira.

Nessa caso usamos a notação $A \models \varphi$

Satisfabilidade de uma sentença

Seja φ uma sentença da lógica de predicados numa assinatura L.

- φ é **satisfatível** se existe uma L-estrutura A e uma interpretação i: L$\rightarrow$A tal que A satisfaz φ
- φ é **refutável** se existe uma L-estrutura A e uma interpretação i: L$\rightarrow$A tal que A não satisfaz φ
- φ é **tautologia** (válida) se para toda L-estrutura A e toda interpretação i: L$\rightarrow$A A satisfaz φ.
- φ é **insatisfatível** se para toda L-estrutura A e toda interpretação i: L$\rightarrow$A , A não satisfaz φ

Conjunto de Sentenças

Suponha que Γ seja um conjunto de sentenças da assinatura L.

- Γ é **satisfatível** se existe uma L-estrutura A e uma interpretação i: $L \rightarrow A$ tal que A satisfaz cada uma das sentenças de Γ.
- φ é **consequência lógica** de Γ se para toda L-estrutura A e toda interpretação i: $L \rightarrow A$, se A satisfaz Γ então A satisfaz φ

Equivalência Lógica

- φ é **logicamente equivalente** a ψ se para toda L-estrutura A e toda interpretação i: L$\rightarrow$A, A satisfaz φ se e somente se A satisfaz ψ.

Valor-verdade de uma fórmula

Para calcular o valor-verdade de uma fórmula, precisamos antes aplicar uma substituição apropriada de variáveis livres da fórmula por termos fechados da linguagem L.

Satisfabilidade de uma fórmula

Seja $\varphi(x_1,...,x_n)$ uma fórmula da lógica de predicados numa assinatura L, na qual aparecem ocorrências livres das variáveis $x_1,...,x_n$.

- φ é **satisfatível** se existe uma L-estrutura A, uma interpretação i: $L \rightarrow A$ e termos $a_1,...,a_n$ tais que A satisfaz $\varphi[a_1/x_1, \ldots a_n/x_n]$.
- φ é **refutável** se existe uma L-estrutura A e uma interpretação i: $L \rightarrow A$ e termos $a_1,...,a_n$ tais que A não satisfaz $\varphi[a_1/x_1, \ldots a_n/x_n]$.

Satisfabilidade de uma fórmula

- φ é **válida** se para toda L-estrutura A, toda interpretação i: $L \rightarrow A$ e toda n-upla $a_1,...,a_n$ de termos de L, A satisfaz $\varphi[a_1/x_1, \ldots a_n/x_n]$.
- φ é **insatisfatível** se para toda L-estrutura A, toda interpretação i: $L \rightarrow A$ e toda n-upla $a_1,...,a_n$ de termos de L, A não satisfaz $\varphi[a_1/x_1, \ldots a_n/x_n]$.

Resolução para lógica de predicados

Temos os mesmos conceitos: literal, cláusula e forma normal conjuntiva.

Novo: conceito de forma normal prenex

Novo: eliminação dos quantificadores existenciais: o conceito de fórmula na forma padrão de Skolem.

Novo: o conceito de unificação.

Forma Normal Prenex

Definição : *Uma fórmula* φ *na lógica de primeira ordem está na forma normal prenex se e somente se a fórmula F está na forma:*

$$(Q_1 x_1)\ldots(Q_n x_n)(M)$$

onde cada $(Q_i x_i)$, $i = 1,\ldots,n$, *ou é* $(\forall x_i)$ *ou* $(\exists x_i)$, *e M é uma fórmula sem quantificadores.* $(Q_1 x_1)\ldots(Q_n x_n)$ *é chamado de* ***prefixo*** *e M de* ***matriz*** *da fórmula* φ.

Exemplos

1) $(\forall x)(P(x,y) \wedge R(y))$

2) $(\forall x)(\forall y)(\exists z)(P(x,y) \rightarrow R(z))$

Fórmula normal prenex

Teorema

Suponha que φ é uma fórmula da lógica de predicados numa assinatura L. Então existe uma fórmula ψ da lógica de predicados na mesma assinatura L, de forma que:

1. ψ está na forma normal prenex;
2. ψ é logicamente equivalente a φ.

Fórmula normal prenex

Para transformar uma fórmula para a forma normal prenex, nós usamos as equivalências lógicas que já estudamos na lógica proposicional e algumas leis novas. Antes, porém vamos introduzir a seguinte notação:

1. Seja F uma fórmula que contem uma variável x. Para enfatizar essa informação, nós vamos representar F como F[x];
2. Usamos a letra Q para denotar um quantificador.
3. Nas leis que vamos definir, a fórmula G não contem a variável x;.

Fórmula normal prenex

1. $(Qx)F[x] \vee G = (Qx)(F[x] \vee G)$

2. $(Qx)F[x] \wedge G = (Qx)(F[x] \wedge G)$

3. $\neg((\forall x)F[x]) = (\exists x)(\neg F[x])$

4. $\neg((\exists x)F[x]) = (\forall x)(\neg F[x])$

Fórmula normal prenex

5. $(\forall x)F[x] \wedge (\forall x)H[x] = (\forall x)(F[x] \wedge H[x])$

6. $(\exists x)F[x] \vee (\exists x)H[x] = (\exists x)(F[x] \vee H[x])$

- $(\exists x)F[x] \wedge (\exists x)H[x] \neq (\exists x)(F[x] \wedge H[x])$
- $(\forall x)F[x] \vee (\forall x)H[x] \neq (\forall x)(F[x] \vee H[x])$
- O que fazer nesses casos?

7. $(\forall x)F[x] \vee (\forall x)H[x] = (\forall x)F[x] \vee (\forall z)H[z] =$
   $(\forall x)(\forall z)(F[x] \vee H[z])$ (renomear variáveis ligadas)

8. $(\exists x)F[x] \wedge (\exists x)H[x] = (\exists x)(F[x] \wedge (\exists z)H[z] =$
   $(\exists x)(\exists z)(F[x] \wedge H[z])$

Fórmula normal prenex

1. Eliminar os conectivos $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$.
2. Repetidamente usar:
   - $\neg(\neg G)=G$
   - as leis de De Morgan
   - e as leis $\neg((\forall x)F[x]) = (\exists x)(\neg F[x])$
     $\neg((\exists x)F[x]) = (\forall x)(\neg F[x])$

   para colocar a negação imediatamente antes dos átomos.
3. Usar as leis novas para deixar a fórmula na forma normal prenex.

Fórmula normal prenex: exemplos

1. $\forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x)$.

2. $\forall x \forall y (\exists z (P(x,z) \wedge P(y,z)) \rightarrow \exists u Q(x,y,u))$.

3. $\neg \exists z((M(f(z)) \wedge \forall z \neg L(f(z),a)) \rightarrow \forall y P(y))$

4. $\exists w \forall y (\forall x P(a,x,w) \rightarrow \exists x Q(x,y)) \vee \forall y \exists z P(f(a),y,z)$