- Aula 18 - Operadores Ortogonais:

Vimos na última aula que um operador $T: V \to V$ em um espaço vetorial com produto interno é ortogonal quando $\langle T(\vec{v}), T(\vec{u}) \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$ para todos $\vec{v}, \vec{u} \in V$. Vimos também que basta verificar essa equação nos vetores de uma base $\alpha = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ de V. Agora vejamos o que acontece se α for ortonormal. Supondo $n = 2$ para simplificar, temos

$$[T]^{\alpha}_{\alpha} = \begin{bmatrix} \langle T(\vec{v}_1), \vec{v}_1 \rangle & \langle T(\vec{v}_2), \vec{v}_1 \rangle \\ \langle T(\vec{v}_1), \vec{v}_2 \rangle & \langle T(\vec{v}_2), \vec{v}_2 \rangle \end{bmatrix}$$

Seja $A = [T]^{\alpha}_{\alpha}$. Que propriedade essa matriz tem? Começemos mostrando o seguinte:

- Teorema 1: Um operador $T: V \to V$ é ortogonal se, e somente se, transforma bases ortonormais em bases ortonormais.

- Dem.: ($\Rightarrow$) Se T é ortogonal e $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ é ortonormal, então $\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = \begin{cases} 1, \text{ se } i = j \\ 0, \text{ se } i \neq j \end{cases}$, logo $\langle T(\vec{v}_i), T(\vec{v}_j) \rangle = \langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = \begin{cases} 1, \text{ se } i = j \\ 0, \text{ se } i \neq j \end{cases}$, logo $\{T(\vec{v}_1), \dots, T(\vec{v}_n)\}$ é ortonormal.

($\Leftarrow$) Se T transforma uma base ortonormal $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ em uma base ortonormal $\{T(\vec{v}_1), \dots, T(\vec{v}_n)\}$, então $\langle T(\vec{v}_i), T(\vec{v}_j) \rangle = \begin{cases} 1, \text{ se } i = j \\ 0, \text{ se } i \neq j \end{cases} = \langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle$, logo a condição de operador ortogonal vale em uma base, o que prova que T é ortogonal. ∎

Relembramos também que, se α é base ortonormal, $[\vec{v}]_{\alpha} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ e $[\vec{u}]_{\alpha} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$, então $\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$. Podemos escrever isso como $\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = \langle [\vec{v}]_{\alpha}, [\vec{u}]_{\alpha} \rangle_{can} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$, onde

$\langle\, ,\, \rangle_{can}$ e $[\ ]\cdot[\ ]$ denotam o produto interno usual de $\mathbb{R}^n$.

Com isso, observando que as colunas de A são $[T(\vec{v}_1)]_\alpha$ e $[T(\vec{v}_2)]_\alpha$, que são também as linhas de A^T, vemos que

$$A^T \cdot A = \begin{bmatrix} \langle [T(\vec{v}_1)]_\alpha, [T(\vec{v}_1)]_\alpha \rangle_{can} & \langle [T(\vec{v}_1)]_\alpha, [T(\vec{v}_2)]_\alpha \rangle_{can} \\ \langle [T(\vec{v}_2)]_\alpha, [T(\vec{v}_1)]_\alpha \rangle_{can} & \langle [T(\vec{v}_2)]_\alpha, [T(\vec{v}_2)]_\alpha \rangle_{can} \end{bmatrix}$$

Como $\langle [T(\vec{v}_i)]_\alpha, [T(\vec{v}_j)]_\alpha \rangle_{can} = \langle T(\vec{v}_i), T(\vec{v}_j) \rangle = \begin{cases} 1, \text{ se } i=j \\ 0, \text{ se } i \neq j \end{cases}$, vemos que $A^T \cdot A = I$.
Matrizes com essa propriedade são ditas matrizes ortogonais. Analogamente, as contas acima nos mostram que se A é ortogonal então T leva base ortonormal em base ortonormal, logo T é operador ortogonal. Isso prova o seguinte:

- Teorema 2: Um operador $T: V \to V$ é ortogonal se, e somente se, sua matriz em uma (qualquer) base ortonormal for ortogonal.

- Exemplo: Na última aula, vimos que $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $T(x,y,z) = (z,y,x)$ é um operador ortogonal se $\mathbb{R}^3$ tiver o produto interno usual. Na base canônica, que é ortonormal, a matriz de T é $[T]^{can}_{can} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A$. Temos então $A^T \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, logo A é uma matriz ortogonal. ■

Agora veremos algumas propriedades das matrizes ortogonais:

1) Toda matriz ortogonal A é inversível, com $A^{-1} = A^T$.

2) Como $A^T \cdot A = I$ e $\det(A^T) = \det A$, temos $1 = \det I = \det(A^T \cdot A) = \det(A^T) \cdot \det A = (\det A)^2$. Logo se A é ortogonal, então $\boxed{\det A = \pm 1}$.

③ Decorre da definição que A é ortogonal se e somente se suas colunas formam um conjunto ortonormal relativamente ao produto interno canônico de $\mathbb{R}^n$. No caso $n=2$, se $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ é ortogonal então $A^T \cdot A = I$, ou seja, $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & c^2+d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, logo $a^2+c^2 = b^2+d^2 = 1$ e $ab+cd=0$.

④ Se A é ortogonal, então A^T também é, pois $(A^T)^T = A$ e $(A^T)^T A^T = A \cdot A^T = I$. Logo a propriedade ③ acima também é verdade se trocarmos "colunas" por "linhas".

-Exemplo: Mostre que $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ é uma matriz ortogonal.

-Solução: Basta ver que as colunas de A são ortonormais relativamente ao produto interno usual de $\mathbb{R}^3$. ■

-Exemplo: Seja $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear dada por $T(x,y,z) = \left(\frac{z}{2} - \frac{x}{\sqrt{2}}, x + \frac{z}{\sqrt{2}}, y\right)$. Considere em $\mathbb{R}^3$ o produto interno $\langle (a,b,c),(d,e,f) \rangle = 2ad + be + cf$. T é autoadjunto? T é ortogonal?

-Solução: A base canônica de $\mathbb{R}^3$ não é ortonormal, mas é ortogonal. Normalizando, obtemos a base ortonormal $\alpha = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,0\right),(0,1,0),(0,0,1)\right\}$. Daí, $T\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,0\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,0\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0) + 0\cdot(0,0,1)$, $T(0,1,0) = (0,0,1) = 0\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,0\right) + 0\cdot(0,1,0) + 1\cdot(0,0,1)$ e $T(0,0,1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,0\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0) + 0\cdot(0,0,1)$, portanto $[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Note que $[T]_\alpha^\alpha$ não é simétrica mas é ortogonal, logo T não é autoadjunto, mas é ortogonal. ■

- **Exemplo:** Em $\mathbb{R}^2$, considere o produto interno $\langle (a,b),(c,d)\rangle = 3ac+bd$. Seja $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ o operador linear dado por $T(x,y)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x+\frac{y}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}x-y\right)$. T é autoadjunto? T é ortogonal?

- **Solução:** Novamente, a base canônica de $\mathbb{R}^2$ não é ortonormal, mas é ortogonal, logo $\alpha=\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{3}},0\right),(0,1)\right\}$ é base ortonormal. Como $T\left(\frac{1}{\sqrt{3}},0\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}},0\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}(0,1)$ e $T(0,1)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}},0\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}(0,1)$, temos que $[T]_\alpha^\alpha=\begin{bmatrix}\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2\\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2\end{bmatrix}$, que é simétrica e ortogonal, logo T é autoadjunto e ortogonal. ■

- **Exemplo:** Considere $V=\mathbb{R}^2$ com produto interno dado por $\langle (x,y),(a,b)\rangle = 2xa+yb$. Seja $T:V\to V$ dado por $T(x,y)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}y, mx-\frac{1}{\sqrt{2}}y\right)$. Existe algum valor real m para o qual T seja ao mesmo tempo autoadjunto e ortogonal?

- **Solução:** A base $\alpha=\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0\right),(0,1)\right\}$ é ortonormal. Como $T\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{m}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)+\frac{m}{\sqrt{2}}(0,1)$ e $T(0,1)=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1)$, temos que $[T]_\alpha^\alpha=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ m/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$. Como α é ortonormal, para que T seja autoadjunto basta que essa matriz seja simétrica, o que ocorre se $m=1$. Nesse caso, $[T]_\alpha^\alpha=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$ é uma matriz ortogonal, pois suas colunas formam um conjunto ortonormal em relação ao produto interno usual de $\mathbb{R}^2$, logo T também é ortogonal. ■

O Teorema a seguir nos dá uma caracterização geométrica dos operadores ortogonais.

- **Teorema 3:** $T:V\to V$ é um operador ortogonal se, e somente se, T preserva normas, isto é, $\|T(\vec{v})\|=\|\vec{v}\|$ para todo $\vec{v}\in V$.

Dem.: ($\Rightarrow$) Se T é operador ortogonal, então dado $\vec{v} \in V$ temos $\|T(\vec{v})\|^2 = \langle T(\vec{v}), T(\vec{v}) \rangle =$
$= \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = \|\vec{v}\|^2$, logo $\|T(\vec{v})\| = \|\vec{v}\| \; \forall \vec{v} \in V$.

($\Leftarrow$) Comecemos notando que, se $\vec{u}, \vec{v} \in V$, temos $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \langle \vec{u}+\vec{v}, \vec{u}+\vec{v} \rangle - \langle \vec{u}-\vec{v}, \vec{u}-\vec{v} \rangle =$
$= \|\vec{u}\|^2 + 2\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle - \|\vec{v}\|^2 = 4\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$, logo $\boxed{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \dfrac{\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2}{4}.}$ Essa fórmula é conhecida como identidade de polarização. Ela nos permite expressar o produto interno em termos de sua norma.

Assim, temos $\langle T(\vec{u}), T(\vec{v}) \rangle = \dfrac{\|T(\vec{u}) + T(\vec{v})\|^2 - \|T(\vec{u}) - T(\vec{v})\|^2}{4} = \dfrac{\|T(\vec{u}+\vec{v})\|^2 - \|T(\vec{u}-\vec{v})\|^2}{4} =$
$= \dfrac{\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2}{4} = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \; \forall \vec{u}, \vec{v} \in V$, pois T preserva normas, logo T é ortogonal. ∎

Dessa forma, os operadores ortogonais estão associados aos movimentos rígidos, cujos exemplos mais famosos são as rotações e as reflexões. Já o Teorema a seguir determina como são os autovalores de um operador ortogonal.

- Teorema 4: Se $\lambda \in \mathbb{R}$ é autovalor de um operador ortogonal $T: V \to V$, então $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$.

- Dem.: Seja $\vec{v} \in V$ um autovetor associado a λ. Então $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = \langle T(\vec{v}), T(\vec{v}) \rangle = \langle \lambda\vec{v}, \lambda\vec{v} \rangle =$
$= \lambda^2 \cdot \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle$, logo $(\lambda^2 - 1) \cdot \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0$. Como $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \neq 0$ pois $\vec{v} \neq \vec{0}$ ($\vec{v}$ é autovetor), segue que $\lambda^2 = 1$, ou seja, $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$. ∎