- Aula 12 - Transformações Lineares e Matrizes:

- Exemplo 1: Seja $T: M_{2\times 2} \to P_3$ a transformação linear dada por $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+b+c) + bx + (a+d)x^2 + cx^3$. Construa $[T]^{\alpha}_{\beta}$, onde $\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ e $\beta = \{1, 1+x, -1+x^2, x^3\}$ são bases de $M_{2\times 2}$ e P_3, respectivamente.

- Solução: Temos $T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 + x^2$, $T\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = x - x^2$, $T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -1 - x^3$ e $T\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -x + x^3$. É fácil ver que $1 + x^2 = 2\cdot(1) + 0\cdot(1+x) + 1\cdot(-1+x^2) + 0\cdot(x^3)$, $x - x^2 = -2\cdot(1) + 1\cdot(1+x) - 1\cdot(-1+x^2) + 0\cdot(x^3)$, $-1 - x^3 = -1\cdot(1) + 0\cdot(1+x) + 0\cdot(-1+x^2) - 1\cdot(x^3)$ e $-x + x^3 = 1\cdot(1) - 1(1+x) + 0\cdot(-1+x^2) + 1\cdot(x^3)$, portanto da definição segue que $[T]^{\alpha}_{\beta} = \boxed{\begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}}$.

Uma outra alternativa seria usando a fórmula de mudança de base vista na última aula, $[T]^{\alpha}_{\beta} = [I]^{can}_{\beta} \cdot [T]^{\alpha}_{can}$. A primeira linha desta solução indica que $[T]^{\alpha}_{can} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Como $[I]^{\beta}_{can} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, sabemos que a inversa dessa matriz é $[I]^{can}_{\beta}$. Escalonando, obtemos

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \to L_1 - L_2} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \to L_1 + L_3} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right],$$

logo

$$[I]^{can}_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Finalmente, $[T]^{\alpha}_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}}$. ■

- Exemplo 2: Seja $T: P_2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = (a_0 + a_2, 2a_1, a_1 - a_2)$ e sejam $\alpha = \{1+x, x^2, x - x^2\}$ e $\beta = \{(1,0,1), (2,0,-1), (0,1,0)\}$ bases de P_2 e $\mathbb{R}^3$, respectivamente. Prove que T é isomorfismo e determine $[T]^{\alpha}_{\beta}$.

- Solução: Note que $T(1+x)=(1,2,1)$, $T(x^2)=(1,0,-1)$ e $T(x-x^2)=(-1,2,2)$. Daí, concluímos que $[T]^{\alpha}_{can}=\begin{bmatrix}1&1&-1\\2&0&2\\1&-1&2\end{bmatrix}$. Novamente usamos a fórmula $[T]^{\alpha}_{\beta}=[I]^{can}_{\beta}\cdot[T]^{\alpha}_{can}$. Sabemos que $[I]^{\beta}_{can}=\begin{bmatrix}1&2&0\\0&0&1\\1&-1&0\end{bmatrix}$, cuja inversa é $[I]^{can}_{\beta}$. Escalonando, obtemos

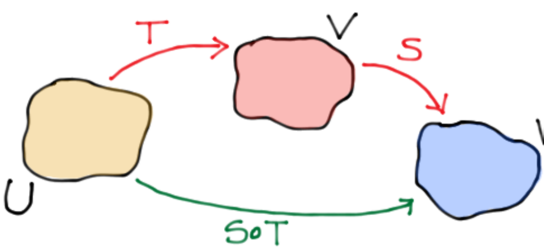
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&1&0&0\\0&0&1&0&1&0\\1&-1&0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{L_2\leftrightarrow L_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&1&0&0\\1&-1&0&0&0&1\\0&0&1&0&1&0\end{array}\right]\xrightarrow{L_2\to L_2-L_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&1&0&0\\0&-3&0&-1&0&1\\0&0&1&0&1&0\end{array}\right]\xrightarrow{L_2\to -\frac{1}{3}L_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&1&0&0\\0&1&0&1/3&0&-1/3\\0&0&1&0&1&0\end{array}\right]\to$$

$$\xrightarrow{L_1\to L_1-2L_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1/3&0&2/3\\0&1&0&1/3&0&-1/3\\0&0&1&0&1&0\end{array}\right],$$ logo $[I]^{can}_{\beta}=\begin{bmatrix}1/3&0&2/3\\1/3&0&-1/3\\0&1&0\end{bmatrix}$. Daí, $[T]^{\alpha}_{\beta}=\begin{bmatrix}1/3&0&2/3\\1/3&0&-1/3\\0&1&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&1&-1\\2&0&2\\1&-1&2\end{bmatrix}=$

$$=\boxed{\begin{bmatrix}1&-1/3&1\\0&2/3&-1\\2&0&2\end{bmatrix}}.$$

Para vermos que T é isomorfismo, basta mostrar que T é injetiva, pois tanto o domínio como o contradomínio de T têm mesma dimensão. Para determinar $\ker(T)$, temos que resolver o sistema $\begin{cases}a_0+a_2=0\\2a_1=0\\a_1-a_2=0\end{cases}$, que claramente tem única solução $a_0=a_1=a_2=0$. Assim, $\ker(T)=\{0\}$, logo T é isomorfismo. ∎

∗ Sejam U, V e W espaços vetoriais e $T:U\to V$, $S:V\to W$ transformações lineares. Definimos a composição $S\circ T:U\to W$ como $S\circ T(\vec{u})=S(T(\vec{u}))$. Então $S\circ T$ é linear. Com efeito, $S\circ T(\vec{u}_1+\vec{u}_2)=S(T(\vec{u}_1+\vec{u}_2))=S(T(\vec{u}_1)+T(\vec{u}_2))=S(T(\vec{u}_1))+S(T(\vec{u}_2))=S\circ T(\vec{u}_1)+S\circ T(\vec{u}_2)$, e se $\lambda\in\mathbb{R}$, $S\circ T(\lambda\vec{u})=S(T(\lambda\vec{u}))=S(\lambda T(\vec{u}))=\lambda S(T(\vec{u}))=\lambda S\circ T(\vec{u})$, quaisquer que sejam $\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}\in U$.



Após algumas contas um pouco tediosas, é possível provar que:

- PROP.: Se α, β e γ são bases de U, V e W, respectivamente, então $\boxed{[S\circ T]^{\alpha}_{\gamma}=[S]^{\beta}_{\gamma}\cdot[T]^{\alpha}_{\beta}}$.

Assim, a composição entre transformações lineares corresponde ao produto de suas matrizes.

- <u>CONSEQUÊNCIAS</u>: 1 Se $T: V \to W$ é isomorfismo, então $T^{-1} \circ T(\vec{v}) = \vec{v}\ \forall \vec{v} \in V$. Dizemos que a transformação $I_d: V \to V$ tal que $I_d(\vec{v}) = \vec{v}\ \forall \vec{v} \in V$ é a transformação identidade, que é obviamente linear. Se α é base de V, então é claro que $[I_d]_\alpha^\alpha = I$, a matriz identidade. Assim, se β é base de W, temos $I = [I_d]_\alpha^\alpha = [T^{-1} \circ T]_\alpha^\alpha = [T^{-1}]_\alpha^\beta \cdot [T]_\beta^\alpha$, portanto $\boxed{[T^{-1}]_\alpha^\beta = \left([T]_\beta^\alpha\right)^{-1}}$. Em outras palavras, a matriz da inversa de T é a inversa da matriz de T.

2 A observação anterior nos permite concluir que, se α e β são bases de V e W, respectivamente, então $T: V \to W$ é isomorfismo $\Leftrightarrow [T]_\beta^\alpha$ é inversível $\Leftrightarrow \det [T]_\beta^\alpha \neq 0$.

- <u>Exemplo 3</u>: Seja $T: \mathbb{R}^2 \to P_1$ a transformação linear tal que $[T]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, onde $\alpha = \{(1,1), (-1,0)\}$ e $\beta = \{-x, 2+x\}$ são bases de $\mathbb{R}^2$ e P^1, respectivamente. Se $\vec{v} = (-1,4)$, determine $T(\vec{v})$. Se $\gamma = \{1, x\}$ é outra base de P_1, obtenha $[T]_\gamma^\alpha$.

- <u>Solução</u>: É fácil ver que $(-1,4) = 4\cdot(1,1) + 5(-1,0)$, logo $[\vec{v}]_\alpha = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$. Daí, $[T(\vec{v})]_\beta = [T]_\beta^\alpha \cdot [\vec{v}]_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 12 \end{bmatrix}$, portanto $T(\vec{v}) = 14\cdot(-x) + 12(2+x) = \boxed{24 - 2x}$. Para determinar $[T]_\gamma^\alpha$, note que γ é a base canônica de P_1, logo $[I]_\gamma^\beta = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Assim, $[T]_\gamma^\alpha = [I]_\gamma^\beta \cdot [T]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}}$. ■

- <u>OBS.</u>: Sejam α e β bases dos espaços vetoriais V e W, respectivamente, e $T: V \to W$ uma transformação linear. Digamos que $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ é base de V, ou seja, $\dim V = n$.

Se $\mathcal{B}$ é a base canônica de W (lembre-se que podemos identificar W com algum $\mathbb{R}^m$), então $[T]^\alpha_\mathcal{B}$ é a matriz cujas colunas são os vetores $T(\vec{v}_1), T(\vec{v}_2), \dots, T(\vec{v}_n)$.

Sabemos também que $Im(T) = [T(\vec{v}_1), \dots, T(\vec{v}_n)]$. Para extrair uma base, formamos a matriz cujas colunas são esses vetores, ou seja, $[T]^\alpha_\mathcal{B}$, e a escalonamos até a forma escada. Como as colunas com pivôs correspondem aos vetores que formam a base e o número de pivôs é igual ao posto de $[T]^\alpha_\mathcal{B}$, concluímos que $\dim Im(T) =$ posto de $[T]^\alpha_\mathcal{B}$.

Além disso, a nulidade de $[T]^\alpha_\mathcal{B}$ é igual ao número de colunas, que é $n = \dim V$, menos o posto, ou seja, nulidade de $[T]^\alpha_\mathcal{B} = \dim V - \dim Im(T) = \dim Ker(T)$. Isso prova que a nulidade de uma matriz é igual à dimensão do núcleo de uma transformação linear, o que justifica o nome "nulidade" e mostra que o Teorema do Núcleo e da Imagem nada mais é que uma versão mais rebuscada da relação posto + nulidade = nº de colunas.

- Exemplo 4: Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{U}$ as bases de $\mathbb{R}^2$ dadas por $\mathcal{B} = \{(2,-3), (-1,1)\}$ e $\mathcal{U} = \{(-1,2), (1,-3)\}$ e seja $S: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear dada por $S(x,y) = (2y, x-y)$. Determine $[S]^\mathcal{B}_\mathcal{U}$.

- Solução: Temos $S(2,-3) = (-6,5)$ e $S(-1,1) = (2,-2)$. Precisamos escrever esses dois vetores como combinação linear dos vetores da base $\mathcal{U}$, ou seja, obter $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tais que $(-6,5) = a(-1,2) + b(1,-3)$ e $(2,-2) = c(-1,2) + d(1,-3)$. Obtemos os sistemas $\begin{cases} -a+b=-6 \\ 2a-3b=5 \end{cases}$ e $\begin{cases} -c+d=2 \\ 2c-3d=-2 \end{cases}$, que matricialmente escrevem-se como $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 5 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$. Note que ambos têm a mesma matriz dos coeficientes, logo podemos resolvê-los simultaneamente, como no processo de inversão de matrizes via escalonamento: $\left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & -6 & 2 \\ 2 & -3 & 5 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \to -L_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 6 & -2 \\ 2 & -3 & 5 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \to L_2 - 2L_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 6 & -2 \\ 0 & -1 & -7 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \to -L_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 7 & -2 \end{array}\right] \to$ $\xrightarrow{L_1 \to L_1 + L_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 13 & -4 \\ 0 & 1 & 7 & -2 \end{array}\right]$, logo $a = 13$, $b = 7$, $c = -4$ e $d = -2$. Por definição, temos que $\boxed{[S]^\alpha_\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 13 & -4 \\ 7 & -2 \end{bmatrix}}$, que é justamente a matriz que ficou do lado direito no fim do escalonamento. ■

Vamos sistematizar o método usado no Exemplo anterior:

- No início do escalonamento, do lado esquerdo temos a matriz cujas colunas são os vetores da base $\mathcal{U}$, ou seja, $[I]^{\mathcal{U}}_{can}$.
- Do lado direito, temos a matriz cujas colunas são os valores de S calculados nos vetores da base α, ou seja, $[S]^{\alpha}_{can}$.

Daí, o método pode ser resumido como:

$$\boxed{\left[\, [I]^{\beta}_{can} \,\middle|\, [S]^{\alpha}_{can} \,\right] \xrightarrow{\text{escalone}} \left[\, \text{Identidade} \,\middle|\, [S]^{\alpha}_{\beta} \,\right]}$$

* Por motivos análogos, esse método também vale para mudanças de base:

$$\boxed{\left[\, [I]^{\beta}_{can} \,\middle|\, [I]^{\alpha}_{can} \,\right] \xrightarrow{\text{escalone}} \left[\, \text{Identidade} \,\middle|\, [I]^{\alpha}_{\beta} \,\right]}$$

Observe que as duas matrizes do início sempre são fáceis de calcular!