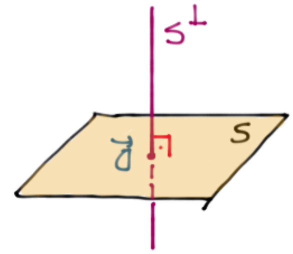
-Aula 16 - Complemento Ortogonal:

-Definição: Sejam V um espaço vetorial com produto interno e $S \subset V$ um subconjunto não-vazio. O complemento ortogonal de S é definido como $\boxed{S^{\perp} = \{\vec{u} \in V : \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0 \ \forall \vec{v} \in S\}}$ isto é, o conjunto dos vetores de V que são ortogonais simultaneamente a todos os elementos de S.

Note que não estamos supondo que S é subespaço!



-Teorema 1: $S^{\perp}$ é subespaço de V.

-Dem.: Como $\langle \vec{0}, \vec{v} \rangle = 0 \ \ \forall \vec{v} \in V$, temos $\vec{0} \in S^{\perp}$. Se $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in S^{\perp}$, então qualquer que seja $\vec{v} \in S$ teremos $\langle \vec{u}_1 + \vec{u}_2, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}_1, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}_2, \vec{v} \rangle = 0 + 0 = 0$, logo $\vec{u}_1 + \vec{u}_2 \in S^{\perp}$. Se $\vec{u} \in S^{\perp}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então qualquer que seja $\vec{v} \in S$ teremos $\langle \lambda \vec{u}, \vec{v} \rangle = \lambda \cdot \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \lambda \cdot 0 = 0$, logo $\lambda \vec{u} \in S^{\perp}$. ■

-Exemplo: Considere $V = \mathbb{R}^3$ com o produto interno usual. Se $S = \{(1,0,1), (1,-1,1)\}$, calcule $S^{\perp}$.

-Solução: Se $(x,y,z) \in S^{\perp}$, então por definição temos $\langle (x,y,z), (1,0,1) \rangle = 0$ e $\langle (x,y,z), (1,-1,1) \rangle = 0$. Obtemos o sistema homogêneo $\begin{cases} x \quad\ + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -x \\ y = 0 \end{cases}$. Daí, $(x,y,z) = (x,0,-x) = x(1,0,-1)$, ou seja, $\boxed{S^{\perp} = [(1,0,-1)]}$ ■

Como ilustra o Exemplo acima, obter o complemento ortogonal de um conjunto finito equivale a resolver um sistema linear homogêneo. Se S for infinito, apenas nos interessa o caso de um subespaço de V, que é resolvido no Teorema a seguir.

Teorema 2: Se W é um subespaço de V e $\{\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_k\}$ é um conjunto gerador de W, então $\vec{u} \in W^{\perp} \Leftrightarrow \langle \vec{u},\vec{v}_1\rangle = \cdots = \langle \vec{u},\vec{v}_k\rangle = 0$.

Dem.: Se $\vec{u} \in W^{\perp}$, como $\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_k \in W$, é claro que $\langle \vec{u},\vec{v}_1\rangle = \cdots = \langle \vec{u},\vec{v}_k\rangle = 0$. Reciprocamente, se $\langle \vec{u},\vec{v}_1\rangle = \cdots = \langle \vec{u},\vec{v}_k\rangle = 0$, então dado $\vec{v} \in W$ podemos escrever $\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + \ldots + a_k\vec{v}_k$, logo $\langle \vec{u},\vec{v}\rangle = \langle \vec{u}, a_1\vec{v}_1 + \ldots + a_k\vec{v}_k\rangle = a_1\langle \vec{u},\vec{v}_1\rangle + \ldots + a_k\langle \vec{u},\vec{v}_k\rangle = 0$. Como $\vec{v} \in W$ foi qualquer, concluímos que $\vec{u} \in W^{\perp}$. ■

Assim, se W é subespaço de V, para determinar $W^{\perp}$ basta obter todos os vetores simultaneamente ortogonais a um conjunto gerador de W, logo as contas são semelhantes às do caso de um conjunto finito.

Exemplo: Em $V = \mathbb{R}^4$, com o produto interno usual, determine $W^{\perp}$, onde $W = [(1,0,1,1),(0,1,2,-1)]$.

Solução: Pelo Teorema 2, $(x,y,z,t) \in W^{\perp} \Leftrightarrow \langle (x,y,z,t),(1,0,1,1)\rangle = 0$ e $\langle (x,y,z,t),(0,1,2,-1)\rangle = 0$. Obtemos $\begin{cases} x + z + t = 0 \\ y + 2z - t = 0 \end{cases}$, logo $\begin{cases} x = -z - t \\ y = -2z + t \end{cases}$, portanto $(x,y,z,t) = (-z-t, -2z+t, z, t) = z(-1,-2,1,0) + t\cdot(-1,1,0,1)$. Daí, $\boxed{W^{\perp} = [(-1,2,1,0),(-1,1,0,1)]}$. ■

Observe, no exemplo acima, que somando as dimensões de W e de $W^{\perp}$ obtemos a dimensão de V. Isto sempre ocorre, como garante o Teorema a seguir.

Teorema 3: Se W é subespaço de V, então $W \oplus W^{\perp} = V$.

-<u>Dem.</u>: Temos duas coisas a provar: $W+W^{\perp}=V$ e $W\cap W^{\perp}=\{\vec{0}\}$. Comecemos pela segunda, que é mais simples: se $\vec{u}\in W\cap W^{\perp}$, então como $\vec{u}\in W^{\perp}$ temos que $\langle \vec{u},\vec{v}\rangle = 0 \ \forall \vec{v}\in W$. Como $\vec{u}\in W$, segue que $\langle \vec{u},\vec{u}\rangle = 0$, logo $\vec{u}=\vec{0}$, ou seja, o único vetor na interseção é o nulo, como queríamos.

Agora vejamos que $W+W^{\perp}=V$. Seja $\alpha=\{\vec{w_1},\dots,\vec{w_k}\}$ uma base ortonormal de W. Dado $\vec{v}\in V$, defina $\vec{w}=\langle \vec{v},\vec{w_1}\rangle\vec{w_1}+\dots+\langle\vec{v},\vec{w_k}\rangle\vec{w_k}\in W$. Então $\vec{v}-\vec{w}\in W^{\perp}$. Com efeito, o Teorema 2 afirma que basta mostrar que esse vetor é ortogonal a $\vec{w_1},\dots,\vec{w_k}$. Como $\langle \vec{v}-\vec{w},\vec{w_1}\rangle =$
$$= \langle \vec{v}-\langle\vec{v},\vec{w_1}\rangle\vec{w_1}-\dots-\langle\vec{v},\vec{w_k}\rangle\vec{w_k},\vec{w_1}\rangle = \langle\vec{v},\vec{w_1}\rangle - \langle\vec{v},\vec{w_1}\rangle\cdot\cancelto{1}{\langle\vec{w_1},\vec{w_1}\rangle} - \langle\vec{v},\vec{w_2}\rangle\cancelto{0}{\langle\vec{w_2},\vec{w_1}\rangle}-\dots-\langle\vec{v},\vec{w_k}\rangle\cdot\cancelto{0}{\langle\vec{w_k},\vec{w_1}\rangle}$$
$= \langle\vec{v},\vec{w_1}\rangle - \langle\vec{v},\vec{w_1}\rangle = 0$, vemos que $(\vec{v}-\vec{w})\perp\vec{w_1}$, e analogamente podemos mostrar que também é ortogonal aos outros.

Assim, temos $\vec{v}=\vec{w}+(\vec{v}-\vec{w})\in W+W^{\perp}$, mostrando que qualquer vetor de V escreve-se como soma de um elemento de W com um de $W^{\perp}$, ou seja, $V=W+W^{\perp}$, e como já sabemos que $W\cap W^{\perp}=\{\vec{0}\}$, essa soma é direta. ∎

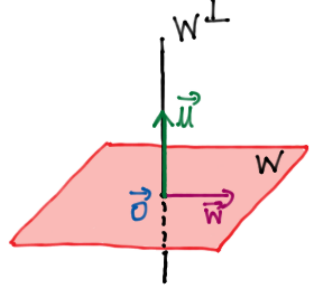
-<u>Exemplo</u>: Considere $V=\mathbb{R}^4$ com produto interno usual. Se $W=[(1,0,1,1),(-1,-1,0,1)]$, obtenha uma base ortonormal para $W^{\perp}$.

-<u>Solução</u>: Sabemos que $(x,y,z,t)\in W^{\perp} \Leftrightarrow \langle (x,y,z,t),(1,0,1,1)\rangle = 0$ e $\langle (x,y,z,t),(-1,-1,0,1)\rangle = 0$, logo $\begin{cases} x + z + t = 0 \\ -x-y+t=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-x+t \\ z=-x-t\end{cases}$, portanto $(x,y,z,t)=(x,-x+t,-x-t,t)=x(1,-1,-1,0)+t(0,1,-1,1)$. Assim, uma base para $W^{\perp}$ é $\{(1,-1,-1,0),(0,1,-1,1)\}$. Como $\langle(1,-1,-1,0),(0,1,-1,1)\rangle = 0$, essa base é ortogonal, portanto $\boxed{\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},0\right),\left(0,\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}}$ é uma base ortonormal de $W^{\perp}$. ∎

– Operadores Projeção Ortogonal e Reflexão sobre um Subespaço:

Sejam V um espaço vetorial com produto interno e $W \subset V$ um subespaço não-trivial (isto é, $W \neq \{\vec{0}\}$ e $W \neq V$). Vamos estudar dois tipos de operadores lineares em V que são bem interessantes do ponto de vista geométrico.

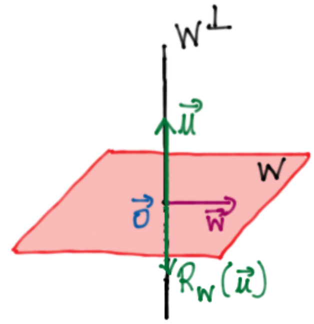
① **Operador Projeção Ortogonal sobre W (P_W):** É natural esperar que, ao projetarmos um vetor $\vec{w} \in W$ sobre W, obtenhamos $\vec{w}$, e ao projetarmos $\vec{u} \in W^\perp$ sobre W, obtenhamos $\vec{0}$. Assim, se $\{\vec{w_1}, \dots, \vec{w_k}\}$ é base de W e $\{\vec{u_1}, \dots, \vec{u_m}\}$ é base de $W^\perp$, tenhamos $P_W(\vec{w_1}) = \vec{w_1}$, $P_W(\vec{w_2}) = \vec{w_2}$, ..., $P_W(\vec{w_k}) = \vec{w_k}$ e $P_W(\vec{u_1}) = \dots = P_W(\vec{u_m}) = \vec{0}$.



Como $W \oplus W^\perp = V$, ao unirmos as bases de W e de $W^\perp$ obtemos uma base de V, portanto definimos P_W em uma base de V, de modo que sabemos determinar sua fórmula.

Dado $\vec{v} \in V$, podemos escrever $\vec{v} = a_1\vec{w_1} + \dots + a_k\vec{w_k} + b_1\vec{u_1} + \dots + b_m\vec{u_m}$. Aplicando P_W, temos $P_W(\vec{v}) = a_1 P_W(\vec{w_1}) + \dots + a_k P_W(\vec{w_k}) + b_1 P_W(\vec{u_1}) + \dots + b_m P_W(\vec{u_m}) = a_1\vec{w_1} + \dots + a_m\vec{w_m}$. Se $\{\vec{w_1}, \dots, \vec{w_m}\}$ for uma base ortonormal de W, então usando os coeficientes de Fourier concluímos que $\boxed{P_W(\vec{v}) = \langle \vec{v}, \vec{w_1} \rangle \vec{w_1} + \dots + \langle \vec{v}, \vec{w_k} \rangle \vec{w_k}}$, que é exatamente o vetor usado na demonstração do Teorema 3!

② **Reflexão sobre W (R_W):** Nesse caso, se $\vec{w} \in W$, então $R_W(\vec{w}) = \vec{w}$ e se $\vec{u} \in W^\perp$, então $R_W(\vec{u}) = -\vec{u}$. Usando as mesmas bases que usamos acima, dado $\vec{v} \in V$ teremos $R_W(\vec{v}) = a_1\vec{w_1} + a_m\vec{w_m} - b_1\vec{u_1} - \dots - b_m\vec{u_m}$, mas isso pode ser reescrito como $\boxed{R_W(\vec{v}) = 2P_W(\vec{v}) - \vec{v}}$.



Exemplo: Obtenha os operadores projeção ortogonal e reflexão sobre o subespaço W do Exemplo anterior.

Solução: Temos $W=[(1,0,1,1),(-1,-1,0,1)]$. Como $\langle(1,0,1,1),(-1,-1,0,1)\rangle=0$, uma base ortogonal para W é $\{(1,0,1,1),(-1,-1,0,1)\}$. Como vimos, $\{(1,-1,-1,0),(0,1,-1,1)\}$ é base ortogonal de $W^{\perp}$ (observe que não precisaríamos dessa base na resolução). Se $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$, então $(x,y,z,t)=a_1(1,0,1,1)+a_2(-1,-1,0,1)+b_1(1,-1,-1,0)+b_2(0,1,-1,1)$, logo $P_W(x,y,z,t)=a_1(1,0,1,1)+$ $+a_2(-1,-1,0,1)$. Como a base é ortogonal, segue que $a_1=\frac{\langle(x,y,z,t),(1,0,1,1)\rangle}{\langle(1,0,1,1),(1,0,1,1)\rangle}=\frac{x+z+t}{3}$ e $a_2=\frac{\langle(x,y,z,t),(-1,-1,0,1)\rangle}{\langle(-1,-1,0,1),(-1,-1,0,1)\rangle}=\frac{-x-y+t}{3}$.

Assim, $P_W(x,y,z,t)=\frac{x+z+t}{3}(1,0,1,1)+\frac{-x-y+t}{3}(-1,-1,0,1)=\frac{1}{3}(2x+y+z,\,x+y-t,\,x+z+t,\,-y+z+2t)$ $\therefore$

$$\boxed{P_W(x,y,z,t)=\left(\frac{2x+y+z}{3},\frac{x+y-t}{3},\frac{x+z+t}{3},\frac{-y+z+2t}{3}\right)}.$$

Além disso, $R_W(x,y,z,t)=2P_W(x,y,z,t)-(x,y,z,t)=\left(\frac{4x+2y+2z}{3},\frac{2x+2y-2t}{3},\frac{2x+2z+2t}{3},\frac{-2y+2z+4t}{3}\right)$ $-\left(\frac{3x}{3},\frac{3y}{3},\frac{3z}{3},\frac{3t}{3}\right)$ $\therefore$ $\boxed{R_W(x,y,z,t)=\left(\frac{x+2y+2z}{3},\frac{2x-y-2t}{3},\frac{2x-z+2t}{3},\frac{-2y+2z+t}{3}\right)}$. ■

Exemplo: Obtenha os operadores projeção ortogonal e reflexão sobre o subespaço $W=$ $=[(1,0,1),(1,-1,1)]$ de $\mathbb{R}^3$, com o produto interno usual.

Solução: Para facilitar as contas, começamos ortogonalizando uma base de W. Ponha $\vec{u}_1=(1,0,1)$ e $\vec{u}_2=(1,-1,1)-\frac{\langle(1,-1,1),(1,0,1)\rangle}{\langle(1,0,1),(1,0,1)\rangle}\cdot(1,0,1)=(1,-1,1)-\frac{2}{2}(1,0,1)=(0,-1,0)$. Daí, uma base ortogonal de W é $\{(1,0,1),(0,1,0)\}$.

Como vimos, $P_W(x,y,z)=a_1(1,0,1)+a_2(0,1,0)$, onde $a_1=\frac{\langle(x,y,z),(1,0,1)\rangle}{\langle(1,0,1),(1,0,1)\rangle}=\frac{x+z}{2}$ e $a_2=\langle(x,y,z),$ $(0,1,0)\rangle=y$. Com isso, $P_W(x,y,z)=\frac{x+z}{2}(1,0,1)+y\cdot(0,1,0)\Rightarrow\boxed{P_W(x,y,z)=\left(\frac{x+z}{2},y,\frac{x+z}{2}\right)}$. Daí,
$R_W(x,y,z)=2P_W(x,y,z)-(x,y,z)=(x+z,2y,x+z)-(x,y,z)$ $\therefore$ $\boxed{R_W(x,y,z)=(z,y,x)}$. ■