Aula 10 – Núcleo e Imagem:

Exemplo 1: Seja $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x,y,z) = (x+2y-z,\ 2x-y+z)$. Determine bases para $\operatorname{Ker}(T)$ e $\operatorname{Im}(T)$.

Solução: Para determinar $\operatorname{Ker}(T)$, precisamos resolver a equação $T(x,y,z) = (0,0)$, ou seja, o sistema $\begin{cases} x+2y-z=0 \\ 2x-y+z=0 \end{cases}$. Escalonando, obtemos $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 - 2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to -\frac{1}{5}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3/5 \end{bmatrix} \to$ $\xrightarrow{L_1 \to L_1 - 2L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1 & -3/5 \end{bmatrix}$, logo $\begin{cases} x + z/5 = 0 \\ y - 3z/5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z/5 \\ y = 3z/5 \end{cases}$, portanto $(x,y,z) \in \operatorname{Ker}(T)$ se, e somente se $(x,y,z) = (-z/5, 3z/5, z) = z\left(-\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, 1\right)$, ou seja, $\boxed{\operatorname{Ker}(T) = [(-1/5, 3/5, 1)]}$. Também poderíamos usar a base $\boxed{\beta_1 = \{(1,-3,-5)\}}$.

Para $\operatorname{Im}(T)$, observe que se $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ é base de $\mathbb{R}^3$ e $\vec{u} = T(\vec{v}) \in \operatorname{Im}(T)$, então podemos escrever $\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + a_3\vec{v}_3$, logo $\vec{u} = T(\vec{v}) = a_1T(\vec{v}_1) + a_2T(\vec{v}_2) + a_3T(\vec{v}_3)$, ou seja, $T(\vec{v}_1), T(\vec{v}_2), T(\vec{v}_3)$ geram $\operatorname{Im}(T)$. Como a base de $\mathbb{R}^3$ não foi especificada, podemos escolher qualquer uma, e a mais simples é a base canônica $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$. Temos $T(1,0,0) = (1,2)$, $T(0,1,0) = (2,-1)$ e $T(0,0,1) = (-1,1)$, portanto $\operatorname{Im}(T) = [(1,2),(2,-1),(-1,1)]$. É claro que esses vetores são LD, e como $\operatorname{Im}(T) \subset \mathbb{R}^2$, basta dois vetores LI para termos uma base. Com isso, descartando $(-1,1)$ ficamos com $\boxed{\operatorname{Im}(T) = [(1,2),(2,-1)] = \mathbb{R}^2}$, e uma base é $\boxed{\beta_2 = \{(1,2),(2,-1)\}}$ pois este conjunto é LI. ∎

* Poderíamos ter descartado qualquer um dos três vetores na imagem, pois o que resta é LI em todos os casos! Destacamos ainda o seguinte fato, que foi usado acima:

Teorema 1: Se $T:V \to W$ é linear e $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ é base de V, então $\operatorname{Im}(T) = [T(\vec{v}_1), \dots, T(\vec{v}_n)]$.

-Exemplo 2: Encontre uma transformação linear $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cujo núcleo é gerado por $(1,2,-1)$ e $(1,-1,0)$.

-Solução: Devemos ter $T(1,2,-1)=(0,0,0)$ e $T(1,-1,0)=(0,0,0)$. Sabemos o que fazer quando temos uma base do domínio, e como $\{(1,2,-1),(1,-1,0)\}$ é LI, podemos completá-lo para obter uma base de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3+L_1]{L_2 \to L_2-2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3+3L_2]{L_1 \to L_1-L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2-L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

portanto $\{(1,2,-1),(1,-1,0),(1,0,0)\}$ é base de $\mathbb{R}^3$.

Note que podemos escolher qualquer valor para $T(1,0,0)$, menos $(0,0,0)$, pois isso afetaria o núcleo. Escolhamos, por exemplo, $T(1,0,0)=(1,0,0)$. Temos que escrever um vetor arbitrário (x,y,z) como combinação linear de $(1,2,-1),(1,-1,0)$ e $(1,0,0)$, ou seja, obter $a,b,c \in \mathbb{R}$ tais que $(x,y,z)=a(1,2,-1)+b(1,-1,0)+c(1,0,0)$, que corresponde ao sistema $\begin{cases} a+b+c=x \\ 2a-b=y \\ -a=z \end{cases}$. Assim, $\boxed{a=-z,\ b=-y-2z \text{ e } c=x+y+3z}$.

Daí, $(x,y,z)=(-z)(1,2,-1)+(-y-2z)(1,-1,0)+(x+y+3z)(1,0,0)$. Aplicando T, obtemos $T(x,y,z)=$ $=(-z)T(1,2,-1)+(-y-2z)T(1,-1,0)+(x+y+3z)T(1,0,0)=(-z)(0,0,0)+(-y-2z)(0,0,0)+(x+y+3z)(1,0,0)$, logo $\boxed{T(x,y,z)=(x+y+3z,0,0)}$ é <u>uma</u> resposta possível para este problema. ■

-Definição 1: Seja $T:V\to W$ uma transformação linear. Dizemos que:

(a) T é injetiva se $\vec{u}\neq\vec{v} \Rightarrow T(\vec{u})\neq T(\vec{v})$. Equivalentemente, T é injetiva se $T(\vec{u})=T(\vec{v}) \Rightarrow \vec{u}=\vec{v}$.

(b) T é sobrejetiva se $\mathrm{Im}(T)=W$.

(c) T é isomorfismo se for bijetiva, ou seja, se for injetiva e sobrejetiva.

* Note que T é sobrejetiva se, e somente se, $\dim \mathrm{Im}(T) = \dim W$.

-Teorema: Uma transformação linear é injetiva se, $\mathrm{Ker}(T) = \{\vec{0}\}$.

-Demonstração: Se T é injetiva, como já sabemos que $T(\vec{0}) = \vec{0}$, então $\mathrm{Ker}(T) = \{\vec{0}\}$, caso contrário T não seria injetiva (note que $\vec{0}_V \in \mathrm{Ker}(T)$, qualquer que seja $T: V \to W$). Reciprocamente, suponha que $\mathrm{Ker}(T) = \{\vec{0}\}$. Para mostrar que T é injetiva, devemos supor que $\vec{u}, \vec{v} \in V$ são tais que $T(\vec{u}) = T(\vec{v})$ e mostrar que $\vec{u} = \vec{v}$. Com efeito, passando para o outro lado vemos que $T(\vec{u}) - T(\vec{v}) = \vec{0}$, mas pela linearidade isso significa que $T(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{0}$, ou seja, $\vec{u} - \vec{v} \in \mathrm{Ker}(T) = \{\vec{0}\}$. Logo, $\vec{u} - \vec{v} = \vec{0}$, e passando para o outro lado novamente concluímos que $\vec{u} = \vec{v}$, como queríamos. ■

-Exemplo 3: Considere a transformação linear $T: M_{2\times 2} \to \mathbb{R}^4$ a transformação linear dada por $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a+b+d, c-2b, -a-b+d, a-b+c)$. T é injetiva? T é sobrejetiva?

-Solução: Para determinar se T é injetiva, calculamos $\mathrm{Ker}(T)$. Temos que resolver o sistema
$$\begin{cases} a+b+d=0 \\ -2b+c=0 \\ -a-b+d=0 \\ a-b+c=0 \end{cases}$$
Escalonamos:
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_4 \to L_4 - L_1]{L_3 \to L_3 + L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to -\frac{1}{2}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_4 \to L_4 + 2L_2]{L_1 \to L_1 - L_2}$$
$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 - 2L_4]{L_1 \to L_1 - L_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
Daqui, vemos que $\begin{cases} a = -c/2 \\ b = c/2 \\ d = 0 \end{cases}$, logo se $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{Ker}(T)$, então $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c/2 & c/2 \\ c & 0 \end{bmatrix} = \frac{c}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, portanto $\boxed{\mathrm{Ker}(T) = \left[\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\right]}$. Como $\mathrm{Ker}(T) \neq \{\vec{0}\}$, segue que T não é injetiva.

Para a imagem, escolhendo a base canônica $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$ de $M_{2\times 2}$, o

Teorema 1 garante que $T\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\right)=(1,0,-1,1)$, $T\left(\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\right)=(1,-2,-1,-1)$, $T\left(\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\right)=(0,1,0,1)$ e $T\left(\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right)=(1,0,1,0)$ geram $Im(T)$. Vamos extrair uma base escalonando a matriz $\begin{bmatrix}1&1&0&1\\0&-2&1&0\\-1&-1&0&1\\1&-1&1&0\end{bmatrix}$, cujas colunas são os vetores geradores, mas note que já escalonamos essa matriz na página anterior, obtendo a forma escada $\begin{bmatrix}1&0&1/2&0\\0&1&-1/2&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$, logo uma base para $Im(T)$ é $\boxed{\{(1,0,-1,1),(1,-2,-1,-1),(1,0,1,0)\}}$.

Como $\dim Im(T)=3<4=\dim \mathbb{R}^4$, T não é sobrejetiva. ■

Observe, no Exemplo acima, que $\dim Im(T)$ foi igual ao posto da matriz $\begin{bmatrix}1&1&0&1\\0&-2&1&0\\-1&-1&0&1\\1&-1&1&0\end{bmatrix}$, e a nulidade foi igual a $4-3=1$, justamente a $\dim Ker(T)$. O número de colunas da matriz corresponde ao número de vetores de uma base de $M_{2\times2}$, que é 4. Em outras palavras, de nulidade + posto = colunas obtemos $\dim M_{2\times2}=\dim Ker(T)+$ $+\dim Ker(T)$. Esse resultado é geral e está apresentado a seguir:

- Teorema do Núcleo e da Imagem: Seja $T:V\to W$ uma transformação linear entre espaços de dimensão finita. Então $\dim V=\dim Ker(T)+\dim Im(T)$.

- Dem.: Seja $\{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n\}$ uma base de $Ker(T)$. Vamos completá-la para obter uma base $\{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n,\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_m\}$ de V. Como vimos no Teorema 1, $Im(T)=[T(\vec{v}_1),\dots,T(\vec{v}_n),$ $T(\vec{u}_1),\dots,T(\vec{u}_m)]$, mas $T(\vec{v}_1)=\dots=T(\vec{v}_n)=0$ pois esses vetores estão no núcleo. Daí, $Im(T)=[T(\vec{u}_1),\dots,T(\vec{u}_m)]$. Vamos mostrar que $\{T(\vec{u}_1),\dots,T(\vec{u}_m)\}$ é LI.

Suponha que $a_1T(\vec{u}_1)+\dots+a_mT(\vec{u}_m)=\vec{0}$. Pela linearidade, $T(a_1\vec{u}_1+\dots+a_m\vec{u}_m)=\vec{0}$, ou seja, $a_1\vec{u}_1+\dots+a_m\vec{u}_m\in Ker(T)$, e portanto podemos escrever esse vetor como combinação linear da base $\{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n\}$ do núcleo: $a_1\vec{u}_1+\dots+a_m\vec{u}_m=b_1\vec{v}_1+\dots+b_n\vec{v}_n$. Passando para o outro lado, obtemos a combinação linear nula $b_1\vec{v}_1+\ldots+b_n\vec{v}_n-a_1\vec{u}_1-\ldots-a_m\vec{u}_m=\vec{0}$. Como $\{\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_n,$ $\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_m\}$ é base de V, todos os coeficientes na combinação linear acima são nulos. Em particular, $a_1=\ldots=a_m=0$, mostrando que $\{T(\vec{u}_1),\ldots,T(\vec{u}_m)\}$ é LI.

Assim, $\dim \operatorname{Ker}(T)=n$, $\dim \operatorname{Im}(T)=m$ e $\dim V=n+m=\dim \operatorname{Ker}(T)+\dim \operatorname{Im}(T)$. ∎

- <u>Exemplo 4</u>: Existe alguma transformação linear $T:\mathbb{R}^5\to\mathbb{R}^2$ injetiva?

- <u>Solução</u>: Se existisse, teríamos $\dim \operatorname{Ker}(T)=0$, logo $\dim \operatorname{Im}(T)=\dim \mathbb{R}^5=5$ pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, o que é impossível pois, como $\operatorname{Im}(T)\subseteq\mathbb{R}^2$, temos $\dim \operatorname{Im}(T)\leq$ ≤ 2. Assim, a resposta é não. ∎

- <u>Exemplo 5</u>: Existe alguma transformação linear $T:\mathbb{R}^{123}\to\mathbb{R}^{250}$ sobrejetiva?

- <u>Solução</u>: Se $T:\mathbb{R}^{123}\to\mathbb{R}^{250}$ é linear e $\{\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_{123}\}$ é base de $\mathbb{R}^{123}$, vimos no Teorema 1 que $\operatorname{Im}(T)=[T(\vec{v}_1),\ldots,T(\vec{v}_{123})]$, portanto $\dim \operatorname{Im}(T)\leq 123<250$. Como $\dim \operatorname{Im}(T)<\dim\mathbb{R}^{250}$, T não pode ser sobrejetiva. ∎