GRAFOS

Gustavo Carvalho
(ghpc@cin.ufpe.br)

Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Informática, 50740-560, Brazil

Agenda

Introdução

Grafo: um conjunto de pontos (vértices ou nós) ligados por segmentos (arestas ou arcos)

$G = (V, E)$, onde $V \neq \emptyset$

Nomenclatura

- Grafos não-dirigidos
  - O par $(u, v) = (v, u) \in E$
  - u e v: vértices adjacentes
  - u e v são extremidades de (u, v)
  - (u, v) é uma aresta incidente aos vértices u e v
  - Grafo não-dirigido: todas as arestas são não-dirigidas
- Grafos dirigidos (*digraphs*)
  - $(u, v) \neq (v, u)$
  - u e v: cauda e cabeça da aresta (u, v)
  - Grafo dirigido: todas as arestas são dirigidas

Introdução

[1]

$$V = \{a, b, c, d, e, f\},$$
$$E = \{\{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, f\}, \{c, e\}, \{d, e\}, \{e, f\}\}$$

$$V = \{a, b, c, d, e, f\},$$
$$E = \{(a, c), (b, c), (b, f), (c, e), (d, a), (d, e), (e, c), (e, f)\}$$

[1] Fonte: A. Levitin. Introduction to the Design and Analysis of Algorithms. 2011.

Introdução

Nomenclatura[2]:

- Grafo simples: não-dirigido, sem laços e sem arestas paralelas
- Multigrafo: não-dirigido, sem laços e com arestas paralelas
- Pseudografo: não-dirigido, com laços e com arestas paralelas
- Grafo dirigido simples: dirigido, sem laços e sem arestas paralelas
- Multigrafo dirigido: dirigido, com laços e com arestas paralelas
- Grafo misto

Exemplos:

- Cidades conectadas por vôos diretos
- Rotas (a pé) entre bairros
- Rotas (de carro) entre bairros
- Quem ganhou/perdeu/empatou a partida

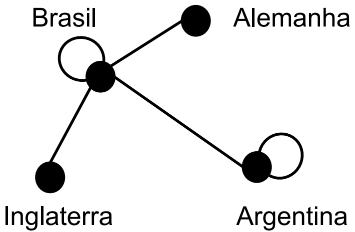
[2] Kenneth H. Rosen. Discrete Mathematics and Its Applications. 2011

Introdução

Seja G um grafo não dirigido:

- O grau de um vértice é seu número de arestas incidentes.
- Laços contribuem duas vezes.
- Notação: $deg(a)$ (do inglês: *degree*)

Qual o grau dos vértices abaixo?



Introdução

Teorema do aperto de mãos

- Seja G um grafo não dirigido, então

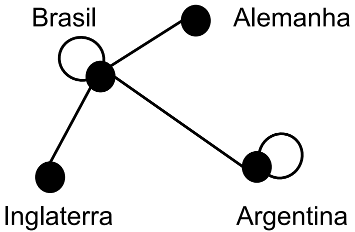
$$2 \mid E \mid = \sum_{v \in V} deg(v)$$

- Por quê?
  - Cada aresta incide sobre 2 vértices.
  - Cada aresta contribui com $1 + 1$ na soma dos graus.
  - Então, a soma dos graus é o dobro do número de arestas.

Introdução

Calcule a soma dos graus do grafo abaixo

Compare este número com a quantidade de arestas

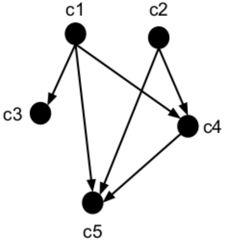


Introdução

Seja G um grafo dirigido, e v um vértice de G:

- Grau de entrada $deg^-(v)$: número de arestas apontando para v.
- Grau de saída $deg^+(v)$: número de arestas saindo de v.

Qual o $deg^-(v)$ e o $deg^+(v)$ para cada vértice v do grafo abaixo?



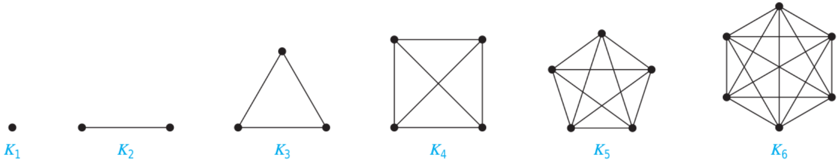
Teorema: $\sum_{v \in V} deg^-(v) = \sum_{v \in V} deg^+(v) = |E|$

Introdução

Seja G um grafo simples (não-dirigido, sem laços/arestas paralelas)

- $0 \leq |E| \leq \frac{|V|(|V|-1)}{2}$

Um grafo (simples) G é completo se existe uma aresta entre dois vértices quaisquer: $K_{|V|}$



[3]

Grafos densos e grafos esparsos

Grafos ponderados: com peso ou custo associado a arestas

[3] Fonte: Kenneth H. Rosen. Discrete Mathematics and Its Applications. 2011.

Introdução

Um caminho de tamanho n de u para v, onde n é um inteiro positivo, é uma sequência de arestas $e_1, ..., e_n$ do grafo de forma que $e_1 = \{x_0, x_1\}, e_2 = \{x_1, x_2\}, ..., e_n = \{x_{n-1}, x_n\}$, onde $x_0 = u$ e $x_n = v$.

Um circuito (ou ciclo) é um caminho em que $u = v$.

Um caminho ou circuito é simples se não contém a mesma aresta mais de uma vez.

Circuito euleriano: circuito simples que contém cada aresta de G.

- Um multigrafo conectado (com $\mid V \mid \geq 2$) tem um circuito euleriano se, e somente se, cada vértice tiver grau par.

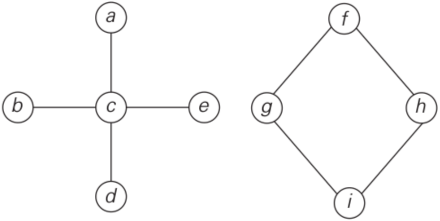
Circuito hamiltoniano: circuito simples que passa por cada vértice de G uma única vez.

Introdução

Grafo conectado: se, para todo u e v, existe um caminho de u para v

Componente conectado: subgrafo máximo conectado

- O subgrafo de G é um grafo G' tal que: $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$



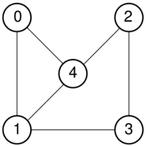
[4]

[4] Fonte: A. Levitin. Introduction to the Design and Analysis of Algorithms. 2011.

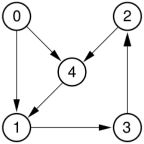
Agenda

Representação de grafos[5]

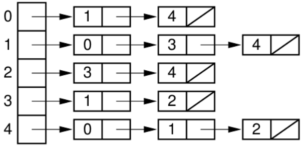
Matriz de adjacências ou lista de adjacências

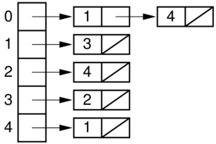


	0	1	2	3	4
0		1			1
1	1			1	1
2				1	1
3		1	1		
4	1	1	1		



	0	1	2	3	4
0		1			1
1				1	
2					1
3			1		
4		1			





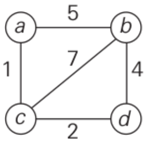
Eficiência espacial: grafo denso *vs.* grafo esparso

Eficiência temporal: $\Theta(|V|^2)$ *vs.* $\Theta(|V| + |E|)$

[5] Fonte: C. Shaffer. Data Structures and Algorithm Analysis. 2013.

Representação de grafos

Grafos ponderados: as duas representações são possíveis



$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} \infty & 5 & 1 & \infty \\ 5 & \infty & 7 & 4 \\ 1 & 7 & \infty & 2 \\ \infty & 4 & 2 & \infty \end{bmatrix} \end{array}$$

a	$\rightarrow b, 5 \rightarrow c, 1$
b	$\rightarrow a, 5 \rightarrow c, 7 \rightarrow d, 4$
c	$\rightarrow a, 1 \rightarrow b, 7 \rightarrow d, 2$
d	$\rightarrow b, 4 \rightarrow c, 2$

[6]

[6] Fonte: A. Levitin. Introduction to the Design and Analysis of Algorithms. 2011.

Representação de grafos

Operações do ADT grafo

- int n(G g);
- int e(G g);
- int first(G g, int v);
- int next(G g, int v, int w);
- void setEdge(G g, int i, int j, int wt);
- void delEdge(G g, int i, int j);
- boolean isEdge(G g, int i, int j);
- int weight(G g, int i, int j);
- void setMark(G g, int v, int val);
- int getMark(G g, int v);

Representação de grafos: matriz de adjacências

Estrutura de dados G:

```
int[][] matrix ;        // matriz de adjacências
int numEdge ;           // quantidade de arestas
int[] Mark ;            // array auxiliar de marcação
```

Algoritmo: G create_graph(int n)

```
g.Mark ← new int[n];
g.matrix ← new int[n][n];
g.numEdge ← 0;
return g;
```

Representação de grafos: matriz de adjacências

Algoritmo: int n(G g)

return $length(g.Mark)$;

Algoritmo: int e(G g)

return $g.numEdge$;

Algoritmo: int first(G g, int v)

for $i \leftarrow 0$ **to** $length(g.Mark) - 1$ **do**
    if $g.matrix[v][i] \neq 0$ **then return** i;
return $length(g.Mark)$;

Representação de grafos: matriz de adjacências

Algoritmo: int next(G g, int v, int w)

1. **for** $i \leftarrow w + 1$ **to** $length(g.Mark) - 1$ **do**
2.   **if** $g.matrix[v][i] \neq 0$ **then return** i;
3. **return** $length(g.Mark)$;

Algoritmo: void setEdge(G g, int i, int j, int wt)

1. **if** $wt = 0$ **then** *error* ;
2. **if** $g.matrix[i][j] = 0$ **then** $g.numEdge$++;
3. $g.matrix[i][j] \leftarrow wt$;

Algoritmo: void delEdge(G g, int i, int j)

1. **if** $g.matrix[i][j] \neq 0$ **then** $g.numEdge$--;
2. $g.matrix[i][j] \leftarrow 0$;

Representação de grafos: matriz de adjacências

Algoritmo: boolean isEdge(G g, int i, int j)

return $g.matrix[i][j] = 0$;

Algoritmo: int weight(G g, int i, int j)

return $g.matrix[i][j]$;

Algoritmo: void setMark(G g, int v, int val)

$g.Mark[v] \leftarrow val$;

Algoritmo: int getMark(G g, int v)

return $g.Mark[v]$;

Representação de grafos: lista de adjacências

- int n(G g);
  retorna $length(g.Mark)$
- int e(G g);
  retorna $g.numEdge$
- int first(G g, int v);
  retorna o primeiro elemento na lista de v
- int next(G g, int v, int w);
  se w está na lista de v, retorna o elemento após w na lista de v
- void setEdge(G g, int i, int j, int wt);
  se j já existe na lista de i, atualiza o peso
  se j não existe na lista de i, insere j (ordenado por j)
  na lista de i com peso wt
  e incrementa $g.numEdge$

Representação de grafos: lista de adjacências

- void delEdge(G g, int i, int j);
  se *j* está na lista de *i*, remove da lista e decrementa *g.numEdge*
- boolean isEdge(G g, int i, int j);
  procura na lista de *i* pelo elemento *j*
- int weight(G g, int i, int j);
  procura na lista de *i* pelo elemento *j* e retorna seu peso
- void setMark(G g, int v, int val);
  igual à representação com matriz
- int getMark(G g, int v);
  igual à representação com matriz

Agenda

Travessia em grafos

De forma geral:

Algoritmo: void graphTraverse(G g)

for $v \leftarrow 0$ **to** $n(g) - 1$ **do**
    $setMark(g, v, UNVISITED)$;
for $v \leftarrow 0$ **to** $n(g) - 1$ **do**
    if $getMark(g, v) = UNVISITED$ **then**
        $traverse(g, v)$;

A operação *traverse* pode ser feita em profundidade ou largura

- DFS: depth-first search (busca em profundidade)
- BFS: breadth-first search (busca em largura)

Eficiência temporal: $\Theta(| V | + | E |)$

Travessia em grafos: DFS

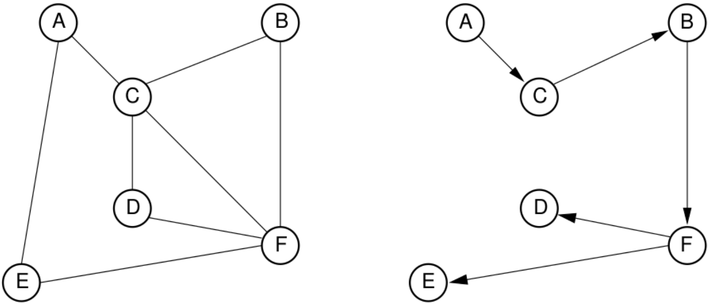
Faz uso de uma pilha (implícita na recursão)

Algoritmo: void DFS(G g, int v)

$preVisit(g, v)$;
$setMark(g, v, VISITED)$;
$w \leftarrow first(g, v)$;
while $w < n(g)$ **do**
    if $getMark(g, w) = UNVISITED$ **then**
        $DFS(g, w)$;
    $w \leftarrow next(g, v, w)$;
$posVisit(g, v)$;

Travessia em grafos: DFS

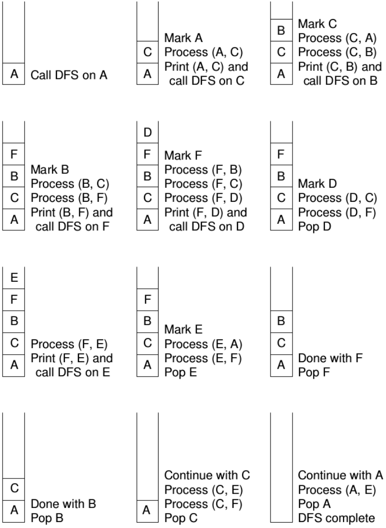
Começando a busca de A



[7]

[7] Fonte: C. Shaffer. Data Structures and Algorithm Analysis. 2013.

Travessia em grafos: DFS



[8]

[8] Fonte: C. Shaffer. Data Structures and Algorithm Analysis. 2013.

Travessia em grafos: BFS

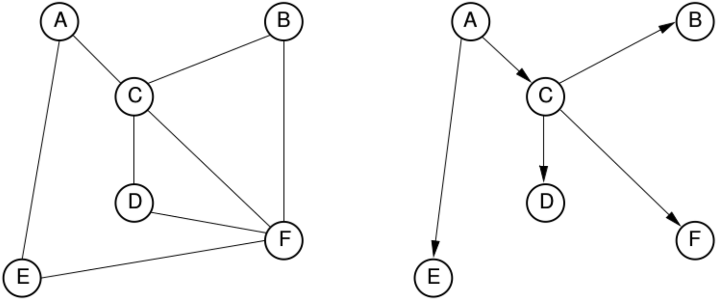
Faz uso de uma fila (explicitamente)

Algoritmo: void BFS(G g, int start)

```
Q ← create_queue();
enqueue(Q, start);
setMark(g, start, VISITED);
while length(Q) > 0 do
    v ← dequeue(Q);
    preVisit(g, v);
    w ← first(g, v);
    while w < n(g) do
        if getMark(g, w) = UNVISITED then
            setMark(g, w, VISITED);
            enqueue(Q, w);
        w ← next(g, v, w);
    posVisit(g, v);
```

Travessia em grafos: BFS

Começando a busca de A



[9]

[9] Fonte: C. Shaffer. Data Structures and Algorithm Analysis. 2013.

Travessia em grafos: BFS

A	

Initial call to BFS on A.
Mark A and put on the queue.

C	E	

Dequeue A.
Process (A, C).
Mark and enqueue C. Print (A, C)
Process (A, E).
Mark and enqueue E. Print(A, E).

E	B	D	F	

Dequeue C.
Process (C, A). Ignore.
Process (C, B).
Mark and enqueue B. Print (C, B).
Process (C, D).
Mark and enqueue D. Print (C, D).
Process (C, F).
Mark and enqueue F. Print (C, F).

B	D	F	

Dequeue E.
Process (E, A). Ignore.
Process (E, F). Ignore.

D	F	

Dequeue B.
Process (B, C). Ignore.
Process (B, F). Ignore.

F	

Dequeue D.
Process (D, C). Ignore.
Process (D, F). Ignore.

Dequeue F.
Process (F, B). Ignore.
Process (F, C). Ignore.
Process (F, D). Ignore.
BFS is complete.

10

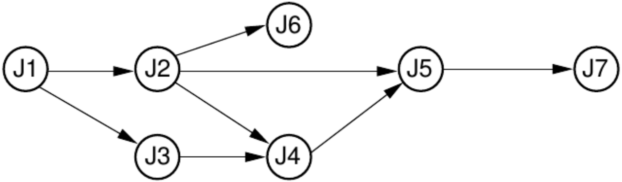
[10] Fonte: C. Shaffer. Data Structures and Algorithm Analysis. 2013.

Agenda

DFS: ordenação topológica

Seja G um grafo dirigido, listar todos os vértices em uma ordem onde, para toda aresta (u, v), u é listado antes de v.

- Só possui solução se, e somente se, G for um dag
- dag: *directed acyclic graph*



[11]

[11] Fonte: C. Shaffer. Data Structures and Algorithm Analysis. 2013.

DFS: ordenação topológica

Assumindo que G é um dag

Algoritmo: void toposort(G g, int v, STACK s)

$setMark(g, v, VISITED);$
$w \leftarrow first(g, v);$
while $w < n(g)$ **do**
    if $getMark(g, w) = UNVISITED$ **then**
        $toposort(g, w, s);$
    $w \leftarrow next(g, v, w);$
$push(s, v);$ `// teremos em` ***s*** `a ordenação topológica`

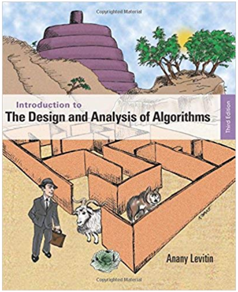
BFS: menor caminho (sem peso)

Similar à busca em largura com algumas modificações

- Iniciar a busca a partir da origem
- Ao chegar no destino, encerrar a busca
- Array auxiliar de predecessores (para reconstruir o caminho)

Agenda

Bibliografia + leitura recomendada



Capítulo 1 (pp. 27–31)
Capítulo 3 (pp. 122–128)
Capítulo 4 (pp. 138–141)
Anany Levitin.
Introduction to the Design and Analysis of Algorithms.
3a edição. Pearson. 2011.

Capítulo 11 (pp. 371–388)
Clifford Shaffer.
Data Structures and Algorithm Analysis.
Dover, 2013.

GRAFOS

Gustavo Carvalho
(ghpc@cin.ufpe.br)

Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Informática, 50740-560, Brazil