- Aula 19 - Classificação das Quádricas:

Comecemos com mais uma importante aplicação das matrizes ortogonais.

- **Teorema 1:** Matrizes de mudança de base entre bases ortonormais são matrizes ortogonais. Em outras palavras, se α e β são bases ortonormais de um espaço vetorial com produto interno, então $[I]^{\alpha}_{\beta}$ é uma matriz ortogonal.

- **Dem.:** Basta mostrar que as colunas de $[I]^{\alpha}_{\beta}$ são vetores ortonormais em relação ao produto interno usual de $\mathbb{R}^n$. Se $\alpha = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$, essas colunas são $[\vec{v}_1]_{\beta}, \dots, [\vec{v}_n]_{\beta}$, e como β é ortonormal temos $\langle [\vec{v}_i]_{\beta}, [\vec{v}_j]_{\beta} \rangle_{can} = \langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = \begin{cases} 1, & \text{se } i=j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$ pois α é ortonormal, como queríamos. ■

Considere $V = \mathbb{R}^3$ com o produto interno usual. Chamamos de forma quadrática em $\mathbb{R}^3$ as funções da forma $q(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz$. Vamos associar uma matriz simétrica a essa forma quadrática, pondo $Q = \begin{bmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{bmatrix}$.

De onde saiu essa matriz? Note que $q(x,y,z)$ pode ser escrita em forma matricial como

$$\boxed{q(x,y,z) = [x \;\; y \;\; z] \cdot \begin{bmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}} \cdot \quad (*)$$

Essa não é a única matriz que podemos associar a $q(x,y,z)$ de modo que a expressão matricial acima seja válida, mas é a única que é simétrica, o que nos vai ser útil: seja $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ o operador linear cuja matriz na base canônica é Q. Como o produto interno é o usual, a base canônica é ortonormal, logo T é autoadjunto. Pelo Teorema Espectral, T é diagonalizável e existe uma base ortonormal α de autovetores.

Sejam $D=[T]_\alpha^\alpha$ (matriz diagonal) e $P=[I]_\alpha^{can}$. Como α e a base canônica são ortonormais, o Teorema 1 garante que P é matriz ortogonal, logo $[I]_{can}^{\alpha}=P^{-1}=P^T$. Daí, $Q=[T]_{can}^{can}=[I]_{can}^{\alpha}\cdot[T]_\alpha^\alpha\cdot[I]_\alpha^{can}=P^T\cdot D\cdot P$.

Seja $\vec{v}=(x,y,z)$. Denotemos por $\begin{bmatrix}u\\v\\w\end{bmatrix}=[\vec{v}]_\alpha=[I]_\alpha^{can}\cdot[\vec{v}]_{can}=P\cdot\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$. Da mesma forma, como $(A\cdot B)^T=B^T\cdot A^T$, temos $[u\ \ v\ \ w]=[\vec{v}]_\alpha^T=[\vec{v}]_{can}^T\cdot P^T=[x\ y\ z]\cdot P^T$. Assim, (*) pode ser reescrita como

$$q(x,y,z)=[x\ \ y\ \ z]\cdot P^T\cdot D\cdot P\cdot\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\Rightarrow\boxed{q(u,v,w)=[u\ \ v\ \ w]\cdot D\cdot\begin{bmatrix}u\\v\\w\end{bmatrix}}\ .$$

Em particular, se $D=\begin{bmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_3\end{bmatrix}$, temos $\boxed{q(u,v,w)=\lambda_1u^2+\lambda_2v^2+\lambda_3w^2}$, o que simplificou a forma quadrática à sua forma canônica. Vamos aplicar esta técnica ao estudo das quádricas.

Exemplo: Classifique a quádrica de equação $2x^2+3y^2+3z^2+2yz-2\sqrt{2}y+2\sqrt{2}z=0$.

Solução: A quádrica é composta por uma forma quadrática $q(x,y,z)=2x^2+3y^2+3z^2+2yz$ e por uma parte linear $L(x,y,z)=-2\sqrt{2}y+2\sqrt{2}z$. Em forma matricial, a equação tem a forma

$$[x\ \ y\ \ z]\cdot\begin{bmatrix}2&0&0\\0&3&1\\0&1&3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}+[0\ \ -2\sqrt{2}\ \ 2\sqrt{2}]\cdot\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=0.$$

Vamos diagonalizar a matriz $Q=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&3&1\\0&1&3\end{bmatrix}$. Seu polinômio característico é dado por

$$p(x)=\begin{vmatrix}2-x&0&0\\0&3-x&1\\0&1&3-x\end{vmatrix}=(2-x)\cdot\left[(3-x)^2-1\right]=(2-x)\left(9-6x+x^2-1\right)=(2-x)\left(x^2-6x+8\right)=(2-x)\cdot(x-2)(x-4),$$

logo os autovalores são $\boxed{\lambda_1=2}$ e $\boxed{\lambda_2=4}$. Vejamos como são os autovetores:

$\boxed{\lambda_1=2:}$ Temos $Q-2I=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}$, que nos fornece $\begin{cases}x \text{ livre}\\ z=-y\end{cases}$. Logo, os autovetores são da forma $(x,y,-y)=x(1,0,0)+y\cdot(0,1,-1)$. Uma base ortonormal para esse autoespaço é $\mathcal{B}_1=\boxed{\left\{(1,0,0),\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}}$.

$\boxed{\lambda_2=4:}$ Temos $Q-4I=\begin{bmatrix}-2&0&0\\0&-1&1\\0&1&-1\end{bmatrix}$, que nos fornece $\begin{cases}x=0\\y=z\end{cases}$. Logo, os autovetores são da forma $(0,y,y)=y\cdot(0,1,1)$. Uma base ortonormal para esse autoespaço é $\mathcal{B}_2=\left\{\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$.

Daí, $\alpha=\mathcal{B}_1\cup\mathcal{B}_2=\left\{(1,0,0),\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de Q. Se as coordenadas nessa base são u, v e w, vimos que a parte quadrática pode ser escrita como $[u\ v\ w]\cdot D\cdot\begin{bmatrix}u\\v\\w\end{bmatrix}$, onde $D=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&4\end{bmatrix}$.

Falta reescrever a parte linear. Temos $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=[(x,y,z)]_{can}=[I]^{\alpha}_{can}\cdot[(x,y,z)]_{\alpha}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\\0&-1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}u\\v\\w\end{bmatrix}$, logo $L(u,v,w)=[0\ \ -2\sqrt{2}\ \ 2\sqrt{2}]\cdot\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\\0&-1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}u\\v\\w\end{bmatrix}=[0\ \ -4\ \ 0]\cdot\begin{bmatrix}u\\v\\w\end{bmatrix}$. Assim, após mudarmos as coordenadas para a base α, a quádrica escreve-se como

$$[u\ v\ w]\cdot\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}u\\v\\w\end{bmatrix}+[0\ \ -4\ \ 0]\cdot\begin{bmatrix}u\\v\\w\end{bmatrix}=0 \iff 2u^2+2v^2+4w^2-4v=0.$$

Simplificando, obtemos $u^2+v^2+2w^2-2v=0$. Finalmente, ao completar o quadrado chegamos à equação $\boxed{\frac{u^2}{1}+\frac{(v-1)^2}{1}+\frac{w^2}{1/2}=1}$, um elipsoide. ∎

Exemplo: Classifique a quádrica de equação $2x^2+2y^2-4z^2-12xy-8\sqrt{2}x+8\sqrt{2}y=0$.

Solução: Na forma matricial, temos $[x\ y\ z]\cdot\overbrace{\begin{bmatrix}2&-6&0\\-6&2&0\\0&0&-4\end{bmatrix}}^{Q}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-8\sqrt{2}&8\sqrt{2}&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=0$. Diagonalizando a forma quadrática obtemos o polinômio característico $p(x)=\begin{vmatrix}2-x&-6&0\\-6&2-x&0\\0&0&-4-x\end{vmatrix}=$ $=\left[(2-x)^2-36\right]\cdot(-4-x)=(4-4x+x^2-36)(-4-x)=(x^2-4x-32)\cdot(-4-x)=(x+4)(x-8)(-4-x)$. Com isso, os autovalores são $\boxed{\lambda_1=-4 \text{ e } \lambda_2=8}$. Quanto aos autovetores, temos:

$\boxed{\lambda_1=-4}$: $Q+4I=\begin{bmatrix}6&-6&0\\-6&6&0\\0&0&0\end{bmatrix}$, o que nos fornece $\begin{cases}x=y\\z \text{ livre}\end{cases}$. Logo, os autovetores são da forma $(x,x,z)=x(1,1,0)+z(0,0,1)$, e uma base ortonormal para esse autoespaço é $B_1=$ $=\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right),(0,0,1)\right\}$.

$\boxed{\lambda_2=8}$: Nesse caso, $Q-8I=\begin{bmatrix}-6&-6&0\\-6&-6&0\\0&0&-12\end{bmatrix}$, o que nos fornece $\begin{cases}y=-x\\z=0\end{cases}$. Os autovetores são da forma $(x,-x,0)=x(1,-1,0)$ e uma base ortonormal para o autoespaço é $B_2=\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)\right\}$.

Unindo as bases, obtemos a base ortonormal $\alpha=\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right),(0,0,1),\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)\right\}$ de $\mathbb{R}^3$. Se u, v e w são as coordenadas nessa base, então $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=[I]^{\alpha}_{can}\begin{bmatrix}u\\v\\w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}&0&1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}&0&-1/\sqrt{2}\\0&1&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}u\\v\\w\end{bmatrix}$, logo relativamente à base α a quádrica se escreve como

$$[u\ v\ w]\cdot\begin{bmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&-8\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}u\\v\\w\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-8\sqrt{2}&8\sqrt{2}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}&0&1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}&0&-1/\sqrt{2}\\0&1&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}u\\v\\w\end{bmatrix}=0,$$

ou seja, $[u\ v\ w]\cdot\begin{bmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&-8\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}u\\v\\w\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&-16\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}u\\v\\w\end{bmatrix}=0 \Leftrightarrow 4u^2+4v^2-8w^2-16w=0$. Simplificando, temos $u^2+v^2-2w^2-4w=0$, e completando o quadrado segue que $u^2+v^2-2(w^2+2w)=0 \Rightarrow$ $\Rightarrow u^2+v^2-2(w+1)^2=-2 \Rightarrow \boxed{-\frac{u^2}{2}-\frac{v^2}{2}+\frac{(w+1)^2}{1}=1}$, um <u>hiperboloide de duas folhas</u>. ∎

- Exemplo: Classifique a quádrica de equação $-x^2+y^2+z^2+4yz+3\sqrt{2}y+3\sqrt{2}z+4=0$.

- Solução: Temos $[x\ y\ z]\cdot\overbrace{\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&2\\0&2&1\end{bmatrix}}^{Q}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}+[0\ \ 3\sqrt{2}\ \ 3\sqrt{2}]\cdot\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}+4=0$. Diagonalizando a forma quadrática, obtemos o polinômio característico $p(x)=\begin{vmatrix}-1-x&0&0\\0&1-x&2\\0&2&1-x\end{vmatrix}=(-1-x)\cdot\left[(1-x)^2-4\right]=(-1-x)(x^2-2x-3)=$ $=(-1-x)\cdot(x+1)\cdot(x-3)$, logo os autovalores são $\boxed{\lambda_1=-1 \text{ e } \lambda_2=3}$.

$\boxed{\lambda_1=-1:}$ Temos $Q+I=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&2&2\\0&2&2\end{bmatrix}$, o que nos fornece $\begin{cases}x \text{ livre}\\z=-y\end{cases}$, logo os autovetores são da forma $(x,y,-y)=x(1,0,0)+y(0,1,-1)$ e uma base ortonormal para o autoespaço é $\beta_1=\left\{(1,0,0),\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$.

$\boxed{\lambda_2=3:}$ Temos $Q-3I=\begin{bmatrix}-4&0&0\\0&-2&2\\0&2&-2\end{bmatrix}$, ou seja, $\begin{cases}x=0\\y=z\end{cases}$, logo os autovetores são da forma $(0,y,y)=$ $=y(0,1,1)$ e uma base ortonormal é $\alpha=\left\{\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$.

Unindo as bases, obtemos a base ortonormal $\alpha=\left\{(1,0,0),\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$ de $\mathbb{R}^3$. Se u, v e w são as coordenadas nessa base, então $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=[I]^{\alpha}_{can}\cdot\begin{bmatrix}u\\v\\w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\\0&-1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}u\\v\\w\end{bmatrix}$, logo em relação à base α a quádrica se escreve como

$$[u\ \ v\ \ w]\cdot\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}u\\v\\w\end{bmatrix}+[0\ \ 3\sqrt{2}\ \ 3\sqrt{2}]\cdot\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\\0&-1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}u\\v\\w\end{bmatrix}+4=0,$$

ou seja, $[u\ \ v\ \ w]\cdot\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}u\\v\\w\end{bmatrix}+[0\ \ 0\ \ 6]\cdot\begin{bmatrix}u\\v\\w\end{bmatrix}+4=0 \Leftrightarrow -u^2-v^2+3w^2+6w+4=0$. Completando o quadrado, temos que $-u^2-v^2+3(w^2+2w)=-4 \Rightarrow -u^2-v^2+3(w+1)^2=-4+3=-1$, portanto a quádrica tem equação reduzida $\boxed{u^2+v^2-\frac{(w+1)^2}{1/3}=1}$, um <u>hiperboloide de uma folha</u>. ■