Lógica para Computação

IF673 – Engenharia da Computação

Cin/UFPE – Anjolina Grisi de Oliveira

Lógica de Predicados

Motivação:

Obter uma linguagem simbólica para representação de enunciados na qual os objetos mencionados tenham uma representação própria nas sentenças simbólicas.

Origem: Gottlob Frege (1879)

Lógica de Predicados

Relembrando o exemplo do unicórnio

- Sentenças atômicas

- Sentenças compostas

Exemplo do unicórnio

- O unicórnio é bruxaria.

É consequência lógica de:

- O unicórnio, se não é lenda , é mamífero, mas se é lenda , ele é imortal.

- Se o unicórnio é imortal ou mamífero, ele possui chifres.

- O unicórnio, se ele possui chifres, é bruxaria.

Lógica de Predicados

- O jumento é mamífero, mas não é lenda.
- O jumento é primo do unicórnio.
- Todo primo do unicórnio é chifrudo.
- Algum primo do unicórnio não é bruxaria.
- A fêmea do jumento é chifruda.

- Símbolos para objetos
- Símbolos para predicados e relações

- **Objetos**: jumento (**j**), unicórnio (**u**) e fêmea do jumento (**f(j)**)
- Símbolos para predicados e relações:

  Lenda (**L(x)**), Imortal (**I(x)**), Mamífero (**M(x)**), Chifrudo (**C(x)**), Bruxaria (**B(x)**) e Primo-de (**P(x,y)**)

Lógica de Predicados

Como ficam as sentenças dos dois exemplos?

- $(L(u) \rightarrow I(u)) \wedge (\neg L(u) \rightarrow M(u))$
- $(I(u) \vee M(u)) \rightarrow C(u)$
- $C(u) \rightarrow B(u)$
- $B(u)$

- $M(j) \wedge \neg L(j)$
- $P(j,u)$
- $\forall x P(x,u) \rightarrow C(x)$
- $\exists x P(x,u) \wedge \neg B(x)$
- $C(f(j))$

Estruturas

O vocabulário simbólico da lógica de predicados, inclui não apenas os símbolos dos conectivos lógicos, mas também **símbolos para representar os objetos e predicados**.

Por essa razão, temos que enriquecer o instrumental semântico que vinha sendo usado na lógica proposicional: **a noção de valoração tem que ser enriquecida para algo que permita associar valores aos objetos e predicados.**

Estrutura

Nas sentenças: $(L(u) \to I(u)) \land (\neg L(u) \to M(u))$ $C(f(j))$

Precisamos associar um significado (ou valor) aos:

- símbolos de predicado ``L´´, ``I´´, ``M´´ e ``C´´;
- símbolos de constantes u e j;
- símbolo de função f.

Chegamos então a uma noção enriquecida de conjunto: estrutura. Trata-se de um conjunto ampliado com:

- Relações e predicados
- Elementos destacados (do conjunto)
- Funções sobre o conjunto

Estrutura: exemplos

Estrutura A:

Conjunto Naturais	Relações	Destaques	Funções
	$<$	0 1	$+$ $\times$

Estrutura B:

Conjunto Naturais	Relações Predicado: Primo	Destaques	Funções
	$\mid$ P	2 3	x^2 x

Uma estrutura A é definida por 4 componentes:

I) Um conjunto de elementos chamado de ``domínio´´ de A (denotado por dom(A)) ou ``universo´´ de A. É o conjunto de objetos.

II) Um conjunto de relações sobre dom(A), cada uma com sua aridade.

III) Uma coleção de elementos de dom(A), que são considerados destacados.

IV) Um conjunto de funções sobre dom(A), cada uma com sua aridade.

OBS: quaisquer um dos 4 conjuntos pode ser vazio.

Estrutura: exemplos

Vamos supor que desejamos formalizar as seguintes sentenças sobre a estrutura A:

1. 2 é menor que 5.
2. Para todo natural x, existe um natural y que é maior que x.
3. Não existe natural menor que 0.
4. Para todo natural x existem naturais y e z tais que a soma de y e z é igual a x.
5. Existe um natural x que é a multiplicação de 1 por algum natural y.

Símbolos necessários:

1. Relação: **M** para representar ``menor que´´.
2. Destaques: **a** para representar o 0 e **b** para representar o ``1´´.
3. Função: **f** para representar ``+´´ e **g** para representar ``$\times$´´.

Estrutura: exemplos

Vamos supor que desejamos formalizar as seguintes sentenças sobre a estrutura A:

1. 2 é menor que 5. $M(f(b,b),f(g(f(b,b),f(b,b)),b))$

2. Para todo natural x, existe um natural y que é maior que x. $\forall x \exists y M(x,y)$

3. Não existe natural menor que 0. $\neg \exists x M(x,a)$

4. Para todo natural x existem naturais y e z tais que a soma de y e z é igual a x. $\forall x \exists y \exists z (f(y,z)=x)$

5. Existe um natural x que é a multiplicação de 1 por algum natural y. $\exists x \exists y\ (x = g(b,y))$

Estrutura: exemplos

Vamos supor que desejamos formalizar as seguintes sentenças sobre a estrutura B:

1. 2 não divide 3.
2. Existe um natural que divide todos os naturais.
3. 2 é Primo.
4. Para todo natural x existem naturais y e z tais que ambos dividem x.
5. Não existe natural x tal que x^2 divide x.
6. Para todo natural x existe um natural y que divide a multiplicação de x por x^2.

Símbolos necessários:

1. Relação: **D** para representar ``divide´´ e **P** para primo.
2. Destaques: **a** para representar o ``2´´ e **b** para representar o ``3´´.
3. Função: **f** para representar ``quadrado´´ e **g** para representar ``$\times$´´.

Assinatura da estrutura

Para definir um vocabulário simbólico a ser usado na formalização de sentenças sobre uma dada estrutura de primeira ordem vamos precisar identificar:

1. Os elementos destacados.
2. As relações e suas respectivas aridades.
3. As funções e suas respectivas aridades.

O conjunto reunindo essas informações determina o que chamamos de assinatura.

Estruturas com a mesma assinatura

Estrutura A:

Conjunto	Relações	Destaques	Funções
0 1 2 3 4	Menor-que(_,_) Primo(_)	1 3	quadrado_mod5(_) soma_mod5(_,_)

Estrutura B:

Conjunto Inteiros	Relações	Destaques	Funções
	divide(_,_) cubo_perfeiro(_)	-2 0	sucessor(_) multiplicação(_,_)

Estruturas com a mesma assinatura

A:

0 1 2
3 4

Menor-que(_,_)

Primo(_)

1
3

quadrado_mod5(_)

soma_mod5(_,_)

B:

Z

divide(_,_)

cubo_perfeiro(_)

-2
0

sucessor(_)

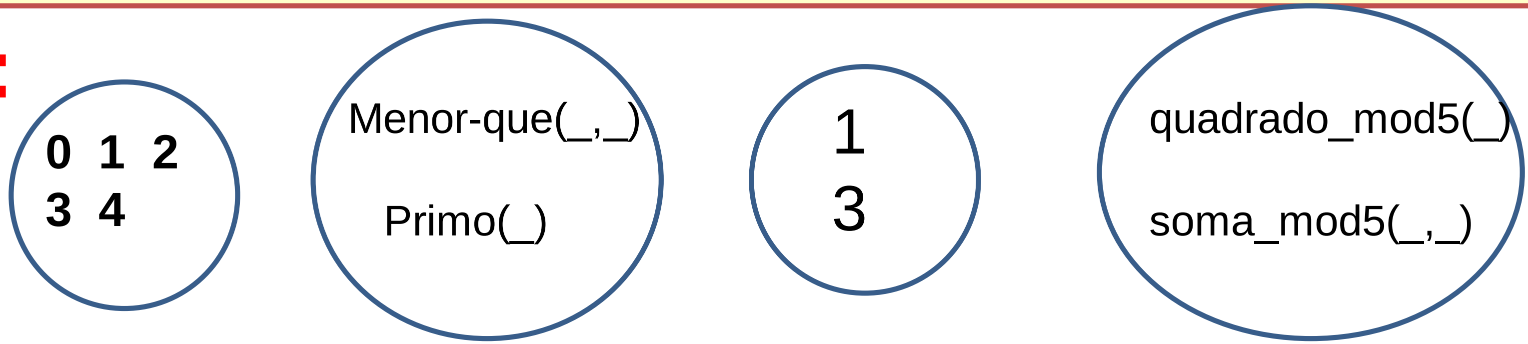
multiplicação(_,_)

Assinatura:

1. 2 destaques: a e b
2. 1 relação binária: R(_,_) e 1 relação unária S(_)
3. 1 função unária f(_) e uma função binária g(_,_)

Interpretação da assinatura em uma estrutura

A:



Assinatura:

1. 2 destaques: a e b
2. 1 relação binária: R(_,_) e 1 relação unária S(_)
3. 1 função unária f(_) e uma função binária g(_,_)

Interpretação em A:

1. a^A=1 e b^A= 3
2. R^A= menor_que(_,_) e S^A= primo(_)
3. f^A=quadrado_mod5(_) e g^A=soma_mod5(_,_)

Sentenças sobre A

A:

0 1 2
3 4

Menor-que(_,_)
Primo(_)

1
3

quadrado_mod5(_)
soma_mod5(_,_)

Interpretação em A:

1. $a^A=1$ e $b^A= 3$
2. R^A= menor_que(_,_) e S^A= primo(_)
3. f^A=quadrado_mod5(_) e g^A=soma_mod5(_,_)

1. 4 não é primo
2. 1 é menor que 4
3. Para todo elemento x existe um elemento y cujo quadrado mod 5 é menor que x
4. Existe um elemento z tal que a soma dele com o seu quadrado módulo 5 é igual a zero

Sentenças sobre A

Interpretação em A:

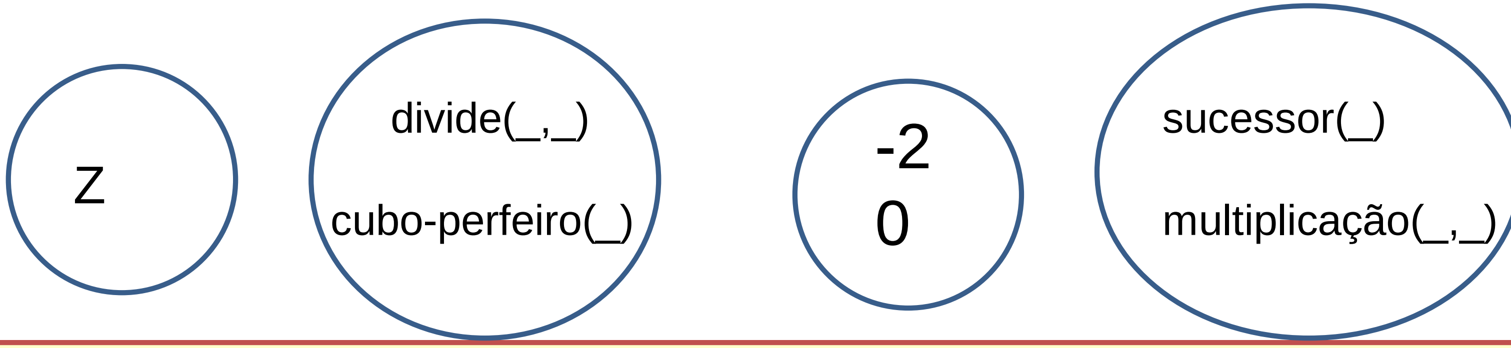
1. $a^A=1$ e $b^A= 3$
2. $R^A=$ menor_que(_,_) e $S^A=$ primo(_)
3. $f^A=$quadrado_mod5(_) e $g^A=$soma_mod5(_,_)

1. 4 não é primo
2. 1 é menor que 4
3. Para todo elemento x existe um elemento y cujo quadrado mod 5 é menor que x
4. Existe um elemento z tal que a soma dele com o seu quadrado módulo 5 é igual a zero

1. $(\neg S(f(b)))^A$
2. $(R(a,f(b)))^A$
3. $(\forall x \exists y R(f(y),x))^A$
4. $(\exists z (g(z,f(z)) = g(a,g(a,b))))^A$

Significado das sentenças

B:



Interpretação em B:

1. $a^B = -2$ e $b^B = 0$
2. R^B= divide(_,_) e S^B= cubo-perfeito(_)
3. f^B=sucessor(_) e g^B=multiplicação(_,_)

1. $(\neg S(f(b)))^B$
2. $(R(a,f(b)))^B$
3. $(\forall x \exists y R(f(y),x))^B$
4. $(\exists z (g(z,f(z)) = g(a,g(a,b))))^B$

Interpretação

Interpretação da assinatura em uma estrutura .

Notação: a^B, M^B, f^B, etc.

Dada uma interpretação, podemos então perguntar qual o significado de uma sentença.