Centro de Informática U·F·P·E

Matemática Discreta
Para Computação

Aula de Monitoria – MP4

Roteiro

- Ordem Parcial
- Ordem Lexicográfica
- Diagrama de Hasse
- Reticulados

Ordem Parcial

- Ordem Parcial
  - Uma relação R em um conjunto S com as seguintes propriedades:
    1. Reflexiva
    2. Anti-simétrica
    3. Transitiva

- Conjunto Parcialmente Ordenado (Poset)
  - Um conjunto S juntamente com uma ordem parcial R: (S,R)

Ordem Parcial

- Em um poset, a notação $a \leq b$ denota que (a,b) pertence a relação R do poset

- A notação $a \bullet b$ denota que $a \leq b$ mas $a \neq b$. Dizemos que “a é menor que b” ou “b é maior que a”.

- Os elementos a e b em um poset $(S,\leq)$ são chamados de comparáveis se $a \leq b$ ou $b \leq a$.

Ordem Parcial

- Se (S,≤) é um poset e cada par de elementos de S são comparáveis, dizemos que S é um conjunto totalmente ordenado ou linearmente ordenado, e ≤ é chamada de ordem total ou linear.

- Um conjunto totalmente ordenado é chamado de cadeia

Ordem Parcial

- MP4 - 2016.1

3. (0,7 pontos). Seja $S = N \times N$ e seja R uma relação binária em S definida por $(x, y)R(z, w) \leftrightarrow y|w \wedge x \leq z$. Sobre a relação R, responda e justifique adequadamente:

A relação R é uma relação de ordem parcial (poset)?

Ordem Parcial

- MP4 - 2016.1

3. Precisamos provar que a relação é uma ordem parcial. Logo, precisamos provar as propriedades reflexiva, anti--simétrica e transitiva:

Reflexiva

1. Como $y|y$ e $x \leq x$ para todo x e y naturais, (x, y) R (x, y).

Ordem Parcial

- MP4 - 2016.1 (Cont.)

Anti--simétrica

1. Suponha que (a,b) R (c,d) e (c,d) R (a,b)

2. De 1, conclui--se que b | d e d | b e a≤ c e c ≤a.

3. Podemos reescrever b e d da seguinte forma:

d = b * m (1)

b = d * n (2) , onde m e n são inteiros positivos.

Substituindo (2) em (1):

d = d * n * m

Conclui--se, portanto que m = n = 1.

Assim, substituindo o valor de m na primeira equação: d = b.

Como a≤ c e c ≤a, a = c.

Logo, temos que (a,b) e (c,d) são a mesma tupla.

4. Provada a anti--simetria.

Ordem Parcial

- MP4 - 2016.1 (Cont.)

Transitiva

Transitiva (0,3 pontos)

1. Suponha que (a,b) R (c,d) e (c,d) R (e,f)
2. De 1, conclui-se que $b \mid d$ e $d \mid f$ e $a \leq c$ e $c \leq e$.
3. Podemos reescrever d e f da seguinte forma:

$d = b * m$ (1)

$f = d * n$ (2) ,

onde m e n são inteiros positivos. Substituindo (1) em (2):

$f = b * m * n$

Como o produto de dois inteiros resulta num inteiro, chamamos m*n de um inteiro positivo t qualquer.

$f = b * t;$

Ordem Parcial

- MP4 - 2016.1 (Cont.)

Reescrevendo, temos que b | f.

Como a≤ c e c ≤e, a ≤e.

4. De 3, conclui--se que, como b | f e a ≤e, (a,b) R (e,f).

5. Provada a transitividade.

Como provamos as três propriedades, temos que R é uma relação de ordem parcial.

Ordem Lexicográfica

- Precisamos construir uma ordem parcial no produto cartesiano de dois posets $(A, \leq_1)$ e $(B, \leq_2)$

- A ordem lexicográfica $\leq$ em $A \times B$ é definida da seguinte forma:

$$(a_1,b_1) \bullet (a_2,b_2) \text{ se}$$
$$\text{ou } a_1 <_1 a_2$$
$$\text{ou } a_1 = a_2 \text{ e } b_1 <_2 b_2$$

Ordem Lexicográfica

- Uma ordem lexicográfica pode ser definida no produto cartesiano de n posets:

$$(A_1, \leq_1), (A_2, \leq_2)\ldots,(A_n, \leq_n).$$

- Defina a ordem parcial em $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ por:

$$(a_1,a_2,\ldots,a_n) < (b_1,b_2,\ldots,b_n)$$

Ordem Lexicográfica

- Considere as cadeias distintas $a_1a_2...a_m$ e $b_1b_2...b_n$ sobre um conjunto parcialmente ordenado S

- Seja t = mínimo(n,m)

- $a_1a_2...a_m < b_1b_2...b_n$ se e somente se

$$(a_1a_2...a_t) < (b_1b_2...b_t) \text{ ou}$$
$$(a_1a_2...a_t) = (b_1b_2...b_t) \text{ e } m<n$$

Ordem Lexicográfica

- MP4 - 2017.1

1. (0,3) Encontre a ordem lexicográfica do seguinte conjunto A, considerando que $0 \leq 1$.

$$A = \{11,1010,100,1,101,111,110,1001,10,1000\}$$

Ordem Lexicográfica

- MP4 - 2017.1

1. 1 , 10, 100, 1000, 1001, 101, 1010, 11, 110, 111.

Diagrama de Hasse

- O Diagrama de Hasse é uma forma mais simples de representar ordens parciais que usando grafos

  - A relação é reflexiva: possui laços em todos os nós

    No diagrama de Hasse, omitimos os laços

  - A relação é transitiva:

    No diagrama de Hasse, omitimos as arestas que indicam a transitividade

  - Desenhamos o diagrama de forma que não é preciso colocar setas

Diagrama de Hasse

Seja um poset $(S, \leq)$:

- O elemento a é maximal nesse *poset* se não existe $b \in S$ tal que $a < b$;
- O elemento a é minimal nesse *poset* se não existe $b \in S$ tal que $b < a$;
- O elemento a é dito o maior elemento nesse poset se para todo $b \in S$, temos $b \leq a$;
- O elemento a é dito o menor elemento nesse poset se para todo $b \in S$, temos $a \leq b$;

Atenção!

Quando existem, o maior e o menor elementos são únicos no poset.

Diagrama de Hasse

Seja A um subconjunto do poset (S, $\leq$):

- Se u $\in$ S e a $\leq$ u para todo a $\in$ A, então u é chamado de limitante superior de A;
- Se i $\in$ S e i $\leq$ a para todo a $\in$ A, então i é chamado de limitante superior de A;

Atenção!

Ao contrário de maior e menor elemento, os limitantes superiores e inferiores podem ou não serem únicos no *poset*, se existirem.

Diagrama de Hasse

Supremo e ínfimo

- **Supremo**: o menor dos limitantes superiores;
- **Ínfimo**: o maior dos limitantes inferiores;

Atenção!
Quando existem, supremo e ínfimo são únicos.

Diagrama de Hasse

- MP4 - 2016.2

3. (0.6 pt.) Responda às perguntas para o poset $(\{3, 5, 9, 15, 24, 45\}, |)$.

a. Desenhe o diagrama de Hasse do Poset.

b. Encontre os elementos maximais.

c. Encontre os elementos minimais.

d. Há um maior elemento? Se sim, qual?

e. Há um menor elemento? Se sim, qual?

f. Encontre os limitantes superiores de $\{3, 5\}$.

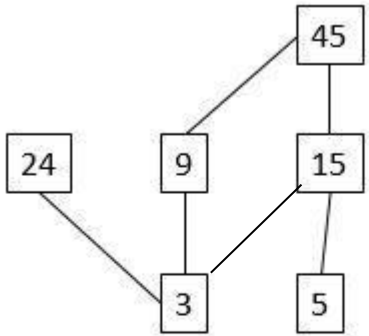
g. Encontre o supremo de $\{3, 5\}$, se existir.

h. Encontre os limitantes inferiores de $\{15, 45\}$.

i. Encontre o ínfimo de $\{15, 45\}$, se existir.

Diagrama de Hasse

- MP4 - 2016.2

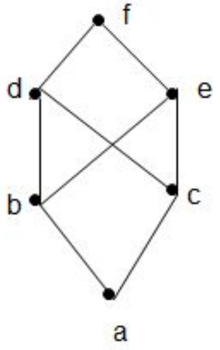


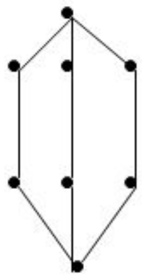
b) maximais = {24, 45}.
c) minimais = {3, 5}.
d) Não.
e) Não
f) superiores{3,5} = {15, 45}.
g) 15.
h) inferiores {15, 45} = {15, 5, 3}.
i) 15.

Reticulado

Reticulado

- É um *poset* onde cada par de elementos possui <u>um supremo e um ínfimo</u>
  - Quais dos seguintes diagramas são reticulados?





Reticulado

- MP4 - 2015.2

2. (0,2 Pontos cada letra) Dê um exemplo de um reticulado infinito com

a) nem um maior nem um menor elemento.

b) um menor, mas não um maior elemento.

c) um maior, mas não um menor elemento.

d) tanto um maior quanto um menor elemento.

Reticulado

- MP4 - 2015.2

a) o poset (Z,<=), onde Z são os inteiros e <= é a relação menor-igual.
b) o poset (N,<=), onde N são os naturais e <= é a relação menor-igual.
c) o poset (Z-,<=), onde Z- são os inteiros não positivos e <= é a relação menor-igual.
d) o poset (S,<=), onde S é o conjunto dos números reais de 0 à 1 e <= é a relação menor-igual.