Lógica Matemática
Para Computação

Centro de Informática U·F·P·E

Universidade Federal de Pernambuco

CIn.ufpe.br

Método dos “Tableaux” Semânticos

Evert Beth (1954)
Jaakko Hintikka (1955)

Qual seria o significado intuitivo da noção de valoração-verdade?

Beth e Hintikka associaram o conceito de valoração-verdade à noção de possibilidade (``mundo possível´´).

Daí, ao perguntar se uma fórmula α é satisfatível, estamos perguntando se existe um mundo possível no qual α é verdadeira.

Método dos “Tableaux” Semânticos

O método consiste na montagem de uma ``árvore de possibilidades´´, que se baseia em um conjunto de regras simples.

A árvore resultante indica os ``mundos possíveis´´ como sendo os caminhos de sua raiz até as folhas.

A árvore é construída adicionando-se nós às folhas de acordo com as regras, até que uma contradição seja encontrada ou não seja mais possível expandir a árvore.

Método dos “Tableaux” Semânticos

Agora, vamos montar uma “árvore de possibilidades” :

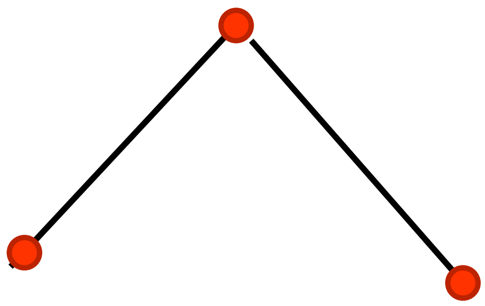
1) Para cada nó da árvore inicial que contem uma fórmula composta, aplique uma das regras do tableux.

2) Repita esse procedimento, sempre expandindo a árvore em direção às folhas, até que seja encontrada uma contradição ou não haja mais nenhum nó com fórmula composta que não tenha sido devidamente simplificado por uma das regras do tableaux.

3) Agora, percorra todos os caminhos da raiz até uma folha, e utilize como solução para o problema original todo caminho que não apresente contradição. Essas soluções, se existirem, serão os “mundos possíveis”.

Regras do Tableaux

1) $\hat{w}(\varphi \rightarrow \psi) = 1$



$\hat{w}(\varphi) = 0$ $\hat{w}(\psi) = 1$

2) $\hat{w}(\varphi \rightarrow \psi) = 0$

$\hat{w}(\varphi) = 1$

$\hat{w}(\psi) = 0$

Regras do Tableaux

3) $\hat{w}(\varphi \wedge \psi) = 0$

$\hat{w}(\varphi) = 0$ $\qquad$ $\hat{w}(\psi) = 0$

4) $\hat{w}(\varphi \wedge \psi) = 1$

$\hat{w}(\varphi) = 1$

$\hat{w}(\psi) = 1$

Regras do Tableaux

5) $\hat{w}(\varphi \vee \psi) = 1$

$\hat{w}(\varphi) = 1$ $\qquad$ $\hat{w}(\psi) = 1$

6) $\hat{w}(\varphi \vee \psi) = 0$

$\hat{w}(\varphi) = 0$

$\hat{w}(\psi) = 0$

Exemplo

$\varphi = ((X \rightarrow (\neg Y)) \rightarrow ((\neg Z) \wedge (Y \rightarrow (\neg X))))$

φ é satisfatível?

Quero saber se existe pelo menos uma valoração que satisfaz a expressão φ. Em outras palavras, quero saber se existe um mundo possível no qual φ seja verdadeira.

Vamos construir a árvore de possibilidades para a expressão φ. Vamos começar com φ e então ir "desmontando" esta expressão em subexpressões através das regras do tableaux, até não haver mais subexpressões no qual possamos usar alguma regra. Fazemos isso de cima para baixo, i.e., da raiz em direção as folhas.

Exemplo

$\varphi = ((X \rightarrow (\neg Y)) \rightarrow ((\neg Z) \wedge (Y \rightarrow (\neg X))))$

φ é satisfatível?

A árvore resultante indica os mundos possíveis, como sendo os caminhos da sua raiz até as folhas.

Um ramo da árvore é um caminho da raiz até uma das folhas.

Um ramo é dito **fechado** se ele contem nós rotulados com α e $\neg\alpha$ (para uma dada fórmula α). Caso contrário, ele é chamado de ramo ou caminho **aberto**.

Mais exemplos

$$\varphi = ((\neg x)\rightarrow z) \rightarrow ((\neg y) \rightarrow ((\neg z) \wedge (\neg x)))$$

φ é satisfatível?

Observe que as fórmulas nos nós de um mesmo ramo são consideradas como conjunção. Ao passo que diferentes ramos são considerados disjunções.

Mais exemplos

$\varphi = (x \rightarrow y) \rightarrow ((z \rightarrow x) \rightarrow (z \rightarrow y))$

φ é uma tautologia?

O método do tableaux não é um método exaustivo, uma vez que não analisa todas as possibilidades.

Dessa forma, quando perguntamos se uma fórmula é tautologia, vamos verificar se existe a possibilidade dela ser falsa.

Por isso é um método de prova por refutação.

TEOREMA(2)

- Seja φ uma proposição. φ é satisfatível se, e somente se, ¬φ é refutável.

PROVA

(parte 1) Se φ é satisfatível então ¬φ é refutável.

- Suponha que φ é satisfatível.
- Ora, então existe w tal que ŵ(φ) = 1.
- Claro que ŵ(¬φ) = 0. Então existe valoração que não satisfaz ¬φ. Logo ¬φ é refutável.

Mais exemplos

$\varphi = (((x \rightarrow y) \rightarrow x) \rightarrow x)$

φ é uma tautologia?

E, se a pergunta fosse

φ é refutável?

E, se a pergunta fosse

φ é insatisfatível?

Mais exemplos

φ é consequência lógica de Γ ? ($\Gamma \models \varphi$?)

Estamos perguntando se $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é insatisfatível.

Seja $\Gamma = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$.

Vamos procurar valorações que satisfaçam α_i **e** refute φ.