TALLINNA TEHNIKAÜLIKOOL

Infotehnoloogia teaduskond
Arvutisüsteemide instituut

KODUTÖÖ

DISKREETNE MATEMAATIKA

Glen Kink

Tallinn 2021

Sisukord

1 Loogikafunktsioon

Windows kalkulaatorist leidsin vastavalt oma martiklinumbrile järgmise 7-kohalise 16ndarvu: **1EC 1978**. Vastavalt sellele märgin tõeväärtustabelis ära loogikafunktsiooni 1de piirkonna numbrilises 10nd esituses, mis on: **1 7 8 9 12 14**.

Tõeväärtustabel 1de piirkonnast:

$x_1x_2x_3x_4$	f
0 0 0 0	
0 0 0 1	1
0 0 1 0	
0 0 1 1	
0 1 0 0	
0 1 0 1	
0 1 1 0	
0 1 1 1	1
1 0 0 0	1
1 0 0 1	1
1 0 1 0	
1 0 1 1	
1 1 0 0	1
1 1 0 1	
1 1 1 0	1
1 1 1 1	

Määramatuspiirkonna leidmiseks korrutasin arvu, kuni sain uue 9-kohalise 16ndarvu: **293561FC8**. Vastavalt sellele märgin tõeväärtustabelisse määramatuspiirkonna, 10nd kujul: **1 2 3 5 6 8 9 12 15** . Tabelisse märgin ainult väärtused, mis ei kuulu juba 1de piirkonda.

Määramatuspiirkonna ja 1de piirkonna tõeväärtustabel:

$x_1x_2x_3x_4$	f
0 0 0 0	
0 0 0 1	1
0 0 1 0	–
0 0 1 1	–
0 1 0 0	
0 1 0 1	–
0 1 1 0	–
0 1 1 1	1
1 0 0 0	1
1 0 0 1	1
1 0 1 0	
1 0 1 1	
1 1 0 0	1
1 1 0 1	
1 1 1 0	1
1 1 1 1	–

2 Tõeväärtustabel ja numbriline 10ndesitus

Ülejäänud arvud, mis ei kuulu 1de ja määramatuspiirkonda, moodustavad 0de piirkonda. Minu funktsiooni puhul on nendeks: **0 4 10 11 13** ehk **0 4 A B D**.

$x_1x_2x_3x_4$	f
0 0 0 0	0
0 0 0 1	1
0 0 1 0	−
0 0 1 1	−
0 1 0 0	0
0 1 0 1	−
0 1 1 0	−
0 1 1 1	1
1 0 0 0	1
1 0 0 1	1
1 0 1 0	0
1 0 1 1	0
1 1 0 0	1
1 1 0 1	0
1 1 1 0	1
1 1 1 1	−

Vastavalt minu matrikli numbrile 213432 vastav 4-muutuja loogikafunktsioon 10nd esituses on järgmine:

$$f(x_1 \dots x_4) = \Sigma(\mathbf{1, 7, 8, 9, 12, 14})_1 \quad \prod(\mathbf{0, 4, 10, 11, 13})_0 \quad (\mathbf{2, 3, 5, 6, 15})_-$$

3 MDNK ja MKNK

Minu martiklinumbri viimane number on 2. Seega mina pean leidma **Karnaugh' kaardiga MDNK** ja **McClauskey' intervallmeetodiga MKNK**, mis sobiksid eelnevalt genereeritud osaliselt määratud 4-muutuja funktsiooni esitamiseks.

Leian Karnaugh' kaardiga MDNK:

$$f(x_1 \ldots x_4) = \Sigma(\mathbf{1, 7, 8, 9, 12, 14})_1 \quad (\mathbf{2, 3, 5, 6, 15})_-$$

Paremaks ülevaateks värvisin kontuurid erinevat värvi.

Esimene võimalik MDNK:

x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	11	10
00	0	1	–	–
01	0	–	1	–
11	1	0	–	1
10	1	1	0	0

$$f_D = \overline{x_1}\, x_4 \;\vee\; x_1x_2\overline{x_4} \;\vee\; x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}$$

Teine võimalik MDNK:

x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	11	10
00	0	1	–	–
01	0	–	1	–
11	1	0	–	1
10	1	1	0	0

$$f_D = x_2x_3 \;\vee\; \overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4 \;\vee\; x_1\overline{x_3}\,\overline{x_4}$$

Leian McClauskey’ invervallmeetodiga MKNK:

$$f(x_1 \dots x_4) = \prod(\mathbf{0,4,10,11,13})_0 \quad (\mathbf{2,3,5,6,15})_-$$

Laiendatud 0de piirkond:

$$\prod(\mathbf{0,4,10,11,13,\ 2^*\ ,3^*,5^*,6^*,15^*})_0$$

Kleepimistabel:

indeks	**laiendatud 0de pk.**	**K?**	**2-sed intervallid**	**K?**	**4-sed intervallid**	**K?**
0	0 0 0 0	K	0 – 0 0 0 0 – 0	K K	0 – – 0	A1
1	0 1 0 0 0 0 1 0*	K K			– 0 1 –	A2
2	1 0 1 0 0 0 1 1* 0 1 0 1* 0 1 1 0*	K K K K	0 1 0 – 0 1 – 0 – 0 1 0 0 0 1 – 0 – 1 0	A3 K K K K		
3	1 0 1 1 1 1 0 1	K K	1 0 1 – – 0 1 1 – 1 0 1	K K A4		
4	1 1 1 1*	K	1 – 1 1 1 1 – 1	A5 A6		

Katmistabel:

lihtimplikandid	0	2*	3*	4	5*	6*	10	11	13	15*
A1	0	0		0		0				
A2		0	0				0	0		
A3				0	0					
A4					0				0	
A5								0		0
A6									0	0

Esimene võimalik MKNK kasutab ridu: $f = (A1)\ (A2)\ (A4)$

	$\boldsymbol{x_1 x_2 x_3 x_4}$	MKNK liikmed
A1	$0\ -\ -\ 0$	$(x_1 \lor x_4)$
A2	$-\ 0\ 1\ -$	$(x_2 \lor \overline{x_3})$
A4	$-\ 1\ 0\ 1$	$(\overline{x_2} \lor x_3 \lor \overline{x_4})$

$f_K = (x_1 \lor x_4)\ (x_2 \lor \overline{x_3})\ (\overline{x_2} \lor x_3 \lor \overline{x_4})$

Teine võimalik MKNK kasutab ridu: $f = (A1)\ (A2)\ (A6)$

	$\boldsymbol{x_1 x_2 x_3 x_4}$	MKNK liikmed
A1	$0\ -\ -\ 0$	$(x_1 \lor x_4)$
A2	$-\ 0\ 1\ -$	$(x_2 \lor \overline{x_3})$
A6	$1\ 1\ -\ 1$	$(\overline{x_1} \lor \overline{x_2} \lor \overline{x_4})$

$f_K = (x_1 \lor x_4)\ (x_2 \lor \overline{x_3})\ (\overline{x_1} \lor \overline{x_2} \lor \overline{x_4})$

Sellel funktsioonil on kaks erinevat MDNK-d ja kaks erinevat MKNK-d. Mina valin esimesed leitud variandid.

4 MDNK ja MKNK tõeväärtustabelid

$f_D = \overline{x_1}\,x_4 \;\lor\; x_1 x_2 \overline{x_4} \;\lor\; x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_3}$

$x_1x_2x_3x_4$	f_D
0 0 0 0	0
0 0 0 1	1
0 0 1 0	0
0 0 1 1	1
0 1 0 0	0
0 1 0 1	1
0 1 1 0	0
0 1 1 1	1
1 0 0 0	1
1 0 0 1	1
1 0 1 0	0
1 0 1 1	0
1 1 0 0	1
1 1 0 1	0
1 1 1 0	1
1 1 1 1	0

$f_K = (x_1 \lor x_4)\,(x_2 \lor \overline{x_3})\,(\overline{x_2} \lor x_3 \lor \overline{x_4})$

$x_1x_2x_3x_4$	f_K
0 0 0 0	0
0 0 0 1	1
0 0 1 0	0
0 0 1 1	0
0 1 0 0	0
0 1 0 1	0
0 1 1 0	0
0 1 1 1	1
1 0 0 0	1
1 0 0 1	1
1 0 1 0	0
1 0 1 1	0
1 1 0 0	1
1 1 0 1	0
1 1 1 0	1
1 1 1 1	1

Valitud MDNK ja MKNK ei ole võrdsed, kuna nende tõeväärtustabelid ei ole võrdsed.

5 MKNK teisendus DNK-kujule

Teisendan valitud MKNK DNK-kujule.

$$\boldsymbol{f_K} = (x_1 \vee x_4)\,(x_2 \vee \overline{x_3})\,(\overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4}) =$$

$$= (x_1x_2 \vee x_1\overline{x_3} \vee x_2x_4 \vee \overline{x_3}x_4)(\overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4}) =$$

$$= x_1x_2\overline{x_2} \vee x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_2\overline{x_2}x_4 \vee \overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4 \vee$$

$$x_1x_2x_3 \vee x_1\,\overline{x_3}\,x_3 \vee x_2x_3x_4 \vee \overline{x_3}x_3x_4 \vee$$

$$x_1x_2\overline{x_4} \vee x_1\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee x_2x_4\overline{x_4} \vee \overline{x_3}x_4\overline{x_4} =$$

$$= x_1 0 \vee x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee 0x_4 \vee \overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4 \vee$$

$$x_1x_2x_3 \vee x_1\,0 \vee x_2x_3x_4 \vee 0x_4 \vee$$

$$x_1x_2\overline{x_4} \vee x_1\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee x_2 0 \vee \overline{x_3}0 =$$

$$= \boldsymbol{x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_1x_2x_3 \vee \overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4 \vee x_2x_3x_4 \vee x_1x_2\overline{x_4} \vee x_1\overline{x_3}\,\overline{x_4}}$$

Leitud DNK ei lange kokku punktis 3 leitud MDNK-ga, seega leian DNK-le tõeväärtustabeli ning võrdlen seda MDNK tõeväärtustabeliga.

$f_D = \overline{x_1}\, x_4 \;\; \vee \;\; x_1 x_2 \overline{x_4} \;\; \vee \;\; x_1 \overline{x_2}\, \overline{x_3}$

$x_1 x_2 x_3 x_4$	f_D
0 0 0 0	0
0 0 0 1	1
0 0 1 0	0
0 0 1 1	1
0 1 0 0	0
0 1 0 1	1
0 1 1 0	0
0 1 1 1	1
1 0 0 0	1
1 0 0 1	1
1 0 1 0	0
1 0 1 1	0
1 1 0 0	1
1 1 0 1	0
1 1 1 0	1
1 1 1 1	0

$f_{DNK} = x_1 \overline{x_2}\, \overline{x_3} \;\vee\; x_1 x_2 x_3 \;\vee\; \overline{x_2}\, \overline{x_3} x_4 \;\vee\; x_2 x_3 x_4$
$\vee\; x_1 x_2 \overline{x_4} \;\vee\; x_1 \overline{x_3}\, \overline{x_4}$

$x_1 x_2 x_3 x_4$	f_{DNK}
0 0 0 0	0
0 0 0 1	1
0 0 1 0	0
0 0 1 1	0
0 1 0 0	0
0 1 0 1	0
0 1 1 0	0
0 1 1 1	1
1 0 0 0	1
1 0 0 1	1
1 0 1 0	0
1 0 1 1	0
1 1 0 0	1
1 1 0 1	0
1 1 1 0	1
1 1 1 1	1

Punktis 3 valitud MDNK ja MKNK-st leitud DNK ei ole lange kokku, kuna nende tõeväärtustabelid ei ole omavahel võrdsed. Lisaks sellele sisaldab leitud DNK rohkem algterme kui punktis 3 leitud MDNK

6 Taandatud DNK ja Täielik DNK

Taandatud DNK on funktsiooni kõigi lihtimplikantide disjunktsioon. Igal funktsioonil on vaid üks taandatud DNK. Taandatud DNK leidmiseks leian kõik lihtimplikandid. Lihtimplikandiks nimetatakse maksimaalset ehk suurimat implikanti.

x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	11	10
00	0	1	–	–
01	0	–	1	–
11	1	0	–	1
10	1	1	0	0

MDNK lihtimplikandid

x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	11	10
00	0	1	–	–
01	0	–	1	–
11	1	0	–	1
10	1	1	0	0

kõik lihtimplikandid

Lihtimplikante on kokku 5 tükki.

TaDNK

$f(x_1\, x_2\, x_3\, x_4) = \overline{x_1}\, x_4 \;\vee\; x_1x_2\overline{x_4} \;\vee\; x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3} \;\vee\; x_1\overline{x_3}\,\overline{x_4} \;\vee\; \overline{x_2}\,\overline{x_3}\, x_4$

Täielik DNK saadakse funktsiooni 1-de piirkonnast. Selleks kirjutan välja iga 1-de piirkonna argumentvektori konstituendi ning seejärel liidan saadud elementaarkonjuktsioonid VÕI-tehtega kokku DNK-ks. Igal loogikafunktsioonil on vaid üks täielik DNK.

Numbriline kümnendesitus	MDNK 1-de piirkonna argumentvektorid	Vastavad konstituendid
1	0 0 0 1	$\overline{x_1}\ \overline{x_2}\ \overline{x_3}\, x_4$
3	0 0 1 1	$\overline{x_1}\ \overline{x_2}\ x_3\ x_4$
5	0 1 0 1	$\overline{x_1}\ x_2\, \overline{x_3}\ x_4$
7	0 1 1 1	$\overline{x_1}\ x_2\ x_3\ x_4$
8	1 0 0 0	$x_1\, \overline{x_2}\ \overline{x_3}\ \overline{x_4}$
9	1 0 0 1	$x_1\, \overline{x_2}\ \overline{x_3}\ x_4$
12	1 1 0 0	$x_1\ x_2\, \overline{x_3}\ \overline{x_4}$
14	1 1 1 0	$x_1\ x_2\ x_3\, \overline{x_4}$

TDNK

$f(x_1\, x_2\, x_3\, x_4\,) = \overline{x_1}\ \overline{x_2}\ \overline{x_3}\, x_4 \ \vee\ \overline{x_1}\ \overline{x_2}\ x_3\ x_4 \ \vee\ \overline{x_1}\ x_2\, \overline{x_3}\ x_4 \ \vee\ \overline{x_1}\ x_2\ x_3\ x_4 \ \vee$
$\vee\ x_1\, \overline{x_2}\ \overline{x_3}\ \overline{x_4} \ \vee\ x_1\, \overline{x_2}\ \overline{x_3}\ x_4 \ \vee\ x_1\ x_2\, \overline{x_3}\ \overline{x_4} \ \vee\ x_1\ x_2\ x_3\, \overline{x_4}$

7 Täielik KNK

Täielik KNK saadakse funktsiooni 0-de piirkonnast. Selleks kirjutan välja iga 0-de piirkonna argumentvektori konstituendi ning seejärel korrutan saadud elementaardisjuktsioonid JA-tehtega kokku KNK-ks. Igal funktsioonil on vaid üks täielik KNK.

Numbriline kümnendesitus	MKNK 0-de piirkonna argumentvektorid	Vastavad konstituendid
0	0 0 0 0	$(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4)$
2	0 0 1 0	$(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4)$
3	0 0 1 1	$(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4})$
4	0 1 0 0	$(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4)$
5	0 1 0 1	$(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4})$
6	0 1 1 0	$(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4)$
10	1 0 1 0	$(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4)$
11	1 0 1 1	$(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4})$
13	1 1 0 1	$(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4})$

TKNK

$$f(x_1 x_2 x_3 x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4)(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4)(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4})\&$$
$$\& (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4)(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4})(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4) \&$$
$$\& (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4)(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4})(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4})$$

8 Shannoni disjunktiivne arendus 1-muutuja järgi

Punktis 3 saadud MDNK-le tuleb leida Shannoni disjunktiivne arendus muutuja järgi, mida esineb antud MDNK-s kõige rohkem. Minu MDNK-s esineb kõige rohkem muutujat x_1.

$\boldsymbol{MDNK} = \overline{x_1}\, x_4 \;\; \vee \;\; x_1 x_2 \overline{x_4} \;\; \vee \;\; x_1 \overline{x_2}\, \overline{x_3}$

Leian Shannoni disjunktsiivse arenduse muutuja x_1 järgi:

$$f = \overline{x_1}(1 \cdot x_4 \;\; \vee \;\; 0 \cdot x_2\overline{x_4} \;\; \vee \;\; 0 \cdot \overline{x_2}\,\overline{x_3}) \;\; \vee \;\; x_1(0 \cdot x_4 \;\; \vee \; 1 \cdot x_2\overline{x_4} \;\; \vee \; 1 \cdot \overline{x_2}\,\overline{x_3}) =$$
$$= \boldsymbol{\overline{x_1}(x_4) \;\; \vee \;\; x_1(x_2\overline{x_4} \;\; \vee \; \overline{x_2}\,\overline{x_3})}$$

9 Shannoni disjunktiivne arendus 2-muutuja järgi

Minu martiklinumbri viimane number on paarisarv, seega minu ülesanne on leida punktis 3 valitud MDNK-le Shannoni 2-muutja disjunktiivne arendus muutujate x_2 ja x_4 järgi.

$$\boldsymbol{MDNK} = \overline{x_1}\, x_4 \quad \vee \quad x_1 x_2 \overline{x_4} \quad \vee \quad x_1 \overline{x_2}\, \overline{x_3}$$

Leian Shannoni disjunktsiivse arenduse muutujate x_2 ja x_4 järgi (paremaks jälgimiseks kasutasin erinevaid värve):

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{f} &= \boldsymbol{\overline{x_1}\, x_4 \quad \vee \quad x_1 x_2 \overline{x_4} \quad \vee \quad x_1 \overline{x_2}\, \overline{x_3}} = \\
&= \boldsymbol{\overline{x_2}\, \overline{x_4}(\overline{x_1} \cdot 0 \;\vee\; x_1 \cdot 0 \cdot 1 \;\vee\; x_1 \cdot 1 \cdot \overline{x_3})} \\
&\vee\; \boldsymbol{\overline{x_2} x_4\, (\overline{x_1} \cdot 1 \;\vee\; x_1 \cdot 0 \cdot 0 \;\vee\; x_1 \cdot 1 \cdot \overline{x_3})} \\
&\vee\; \boldsymbol{x_2 \overline{x_4}(\overline{x_1} \cdot 0 \;\vee\; x_1 \cdot 1 \cdot 1 \;\vee\; x_1 \cdot 0 \cdot \overline{x_3})} \\
&\vee\; \boldsymbol{x_2 x_4(\overline{x_1} \cdot 1 \;\vee\; x_1 \cdot 1 \cdot 0 \;\vee\; x_1 \cdot 0 \cdot \overline{x_3})} = \\
&= \boldsymbol{\overline{x_2}\, \overline{x_4}(x_1 \overline{x_3})} \;\vee\; \boldsymbol{\overline{x_2} x_4\, (\overline{x_1} \vee x_1\, \overline{x_3})} \;\vee\; \boldsymbol{x_2 \overline{x_4}(x_1)} \;\vee\; \boldsymbol{x_2 x_4(\overline{x_1})}
\end{aligned}$$

10 Jääkfunktsioon

Minu tudengikood on paarisarvuline, seega pean leidma punktis 3 saadud MDNK-na saadud loogikafunktsioonile tema **jääkfunktsiooni** muutuja $\boldsymbol{x_2} = \mathbf{0}$ korral ja esitama selle jääkfunktsiooni 8-realise tõeväärtustabelina.

$$\boldsymbol{MDNK}\ \ f_D = \overline{x_1}\, x_4 \quad \vee \quad x_1 x_2 \overline{x_4} \quad \vee \quad x_1 \overline{x_2}\, \overline{x_3}$$

Jääkfunktsiooni leidmine:

$\boldsymbol{x_1 x_2 x_3 x_4}$	$\boldsymbol{f_D}$
0 0 0 0	0
0 0 0 1	1
0 0 1 0	0
0 0 1 1	1
~~0 1 0 0~~	~~0~~
~~0 1 0 1~~	~~1~~
~~0 1 1 0~~	~~0~~
~~0 1 1 1~~	~~1~~
1 0 0 0	1
1 0 0 1	1
1 0 1 0	0
1 0 1 1	0
~~1 1 0 0~~	~~1~~
~~1 1 0 1~~	~~0~~
~~1 1 1 0~~	~~1~~
~~1 1 1 1~~	~~0~~

$\boldsymbol{x_1 x_3 x_4}$	$\boldsymbol{f(x_1 0\ x_3 x_4)}$
0 0 0	0
0 0 1	1
0 1 0	0
0 1 1	1
1 0 0	1
1 0 1	1
1 1 0	0
1 1 1	0

$$\boldsymbol{f(x_1 0\ x_3 x_4)} = \overline{x_1}\, x_4 \quad \vee \quad x_1 \overline{x_3}$$

Järgmisena pean leidma **jääkfunktsiooni** valitud MDNK-le muutuja $\boldsymbol{x_4 = 1}$ ja esitama selle jääkfunktsiooni MDNK-na.

Jääkfunktsiooni leidmine:

$$\boldsymbol{MDNK}\ \ f_D = \overline{x_1}\, x_4 \quad \vee \quad x_1 x_2 \overline{x_4} \quad \vee \quad x_1 \overline{x_2}\, \overline{x_3}$$

$$f(x_1 x_2 x_3\ 1) = \overline{x_1} \cdot 1 \quad \vee \quad x_1 x_2 \overline{1} \quad \vee \quad x_1 \overline{x_2}\, \overline{x_3} =$$

$$= \overline{x_1} \ \vee \quad x_1 x_2 0 \ \vee \ \ x_1 \overline{x_2}\, \overline{x_3}$$

$$= \boldsymbol{\overline{x_1}} \ \vee \ \ \boldsymbol{x_1 \overline{x_2}\, \overline{x_3}}$$

11 Tuletis

Minu martiklinumbri viimane number on paarisarv, seega minu ülesanne on leida punktis 3 valitud MDNK-le tema tuletis muutuja x_1 järgi ning selle lihtsustada DNK-ks. Seejärel leida valitud MDNK-le tuletis ka muutuja x_3 järgi ning samuti lihtsustada DNK-ks.

Esmalt leian tuletise muutuja x_1 järgi:

$\boldsymbol{MDNK}\ f_D = \overline{x_1}\, x_4 \;\vee\; x_1 x_2 \overline{x_4} \;\vee\; x_1 \overline{x_2}\, \overline{x_3}$

$f(0\, x_2\, x_3\, x_4) = 1 \cdot x_4 \;\vee\; 0 \cdot x_2 \overline{x_4} \;\vee\; 0 \cdot \overline{x_2}\, \overline{x_3} = x_4$

$f(1\, x_2\, x_3\, x_4) = 0 \cdot x_4 \;\vee\; 1 \cdot x_2 \overline{x_4} \;\vee\; 1 \cdot \overline{x_2}\, \overline{x_3} = x_2 \overline{x_4} \vee \overline{x_2}\, \overline{x_3}$

$$\frac{\delta f(x_1\, x_2\, x_3\, x_4)}{\delta x_1} = f(0\, x_2\, x_3\, x_4) \oplus f(1\, x_2\, x_3\, x_4) = x_4 \oplus (x_2 \overline{x_4} \;\vee\; \overline{x_2}\, \overline{x_3}) =$$

$$= \overline{x_4}(x_2 \overline{x_4} \;\vee\; \overline{x_2}\, \overline{x_3}) \;\vee\; x_4\, \overline{(x_2 \overline{x_4} \;\vee\; \overline{x_2}\, \overline{x_3})} =$$

$$= (x_2 \overline{x_4}\, \overline{x_4} \;\vee\; \overline{x_2}\, \overline{x_3}\, \overline{x_4}) \vee x_4\, (\overline{x_2 \overline{x_4}} \,\&\, \overline{\overline{x_2}\, \overline{x_3}}) =$$

$$= (x_2 \overline{x_4} \;\vee\; \overline{x_2}\, \overline{x_3}\, \overline{x_4}) \;\vee\; x_4\, (\overline{x_2 \overline{x_4}} \,\&\, x_2 x_3) =$$

$$= \overline{x_4}(x_2 \;\vee\; \overline{x_2}\, \overline{x_3}) \;\vee\; x_4\, (x_2 \vee x_3) =$$

$$= \overline{x_4}(x_2 \;\vee\; \overline{x_3}) \vee (x_2 x_4 x_4 \vee x_3 x_4 x_4) =$$

$$= (x_2 \overline{x_4} \;\vee\; \overline{x_3}\, \overline{x_4}) \;\vee\; (x_2 x_4 x_4 \vee x_3 x_4 x_4) =$$

$$= x_2 \overline{x_4} \;\vee\; \overline{x_3}\, \overline{x_4} \;\vee\; x_3 x_4 \vee x_2 x_4 = x_2(\overline{x_4} \;\vee\; x_4) \vee \overline{x_3}\, \overline{x_4} \;\vee\; x_3 x_4$$

$$= x_2 1 \vee \overline{x_3}\, \overline{x_4} \;\vee\; x_3 x_4 = \boldsymbol{x_2} \vee \boldsymbol{\overline{x_3}\, \overline{x_4}} \;\vee\; \boldsymbol{x_3 x_4}$$

Nüüd leian tuletise muutuja x_3 järgi:

$\boldsymbol{MDNK}\ f_D = \overline{x_1}\, x_4 \quad \vee \quad x_1 x_2 \overline{x_4} \quad \vee \quad x_1 \overline{x_2}\, \overline{x_3}$

$f(x_1\, x_2\, 0\, x_4) = \overline{x_1}\, x_4 \quad \vee \quad x_1 x_2 \overline{x_4} \quad \vee \quad x_1 \overline{x_2} \cdot 1 = \overline{x_1}\, x_4 \quad \vee \quad x_1 x_2 \overline{x_4} \quad \vee \quad x_1 \overline{x_2}$

$f(x_1\, x_2\, 1\, x_4) = \overline{x_1}\, x_4 \quad \vee \quad x_1 x_2 \overline{x_4} \quad \vee \quad x_1 \overline{x_2} \cdot 0 = \overline{x_1}\, x_4 \quad \vee \quad x_1 x_2 \overline{x_4}$

$\frac{\delta f(x_1\, x_2\, x_3\, x_4)}{\delta x_3} = f(x_1\, x_2\, 0\, x_4) \oplus f(x_1\, x_2\, 1\, x_4)$

$= (\overline{x_1}\, x_4 \quad \vee \quad x_1 x_2 \overline{x_4} \quad \vee \quad x_1 \overline{x_2}) \oplus (\overline{x_1}\, x_4 \quad \vee \quad x_1 x_2 \overline{x_4}) =$

$= (\overline{x_1}\, x_4 \quad \vee \quad x_1 x_2 \overline{x_4} \quad \vee \quad x_1 \overline{x_2})\overline{(\overline{x_1}\, x_4 \quad \vee \quad x_1 x_2 \overline{x_4})} \vee$

$\vee \overline{(\overline{x_1}\, x_4 \vee \quad x_1 x_2 \overline{x_4} \quad \vee \quad x_1 \overline{x_2})}(\overline{x_1}\, x_4 \quad \vee \quad x_1 x_2 \overline{x_4}) =$

$= \big((\overline{x_1}\, x_4 \quad \vee \quad x_1 x_2 \overline{x_4} \quad \vee \quad x_1 \overline{x_2}) \& \overline{\overline{x_1}\, x_4} \quad \& \quad \overline{x_1 x_2 \overline{\overline{x_4}}}\big) \vee$

$\vee (\overline{\overline{x_1}\, x_4} \quad \& \quad \overline{x_1 x_2 \overline{\overline{x_4}}} \quad \& \quad \overline{x_1 \overline{\overline{x_2}}})(\overline{x_1}\, x_4 \quad \vee \quad x_1 x_2 \overline{x_4}) =$

$= (\overline{\overline{x_1}\, x_4} \& (\overline{x_1} x_1 x_2 \overline{x_4} \quad \vee \quad x_1 \overline{x_2}) \quad \& \quad \overline{x_1 x_2 \overline{\overline{x_4}}}) \vee$

$\vee (\overline{\overline{x_1}\, x_4} \quad \& \quad \overline{x_1 x_2 \overline{\overline{x_4}}} \quad \& \quad \overline{x_1 \overline{\overline{x_2}}})(\overline{x_1}\, x_4 \quad \vee \quad x_1 x_2 \overline{x_4}) =$

$= (\overline{\overline{x_1}\, x_4} \& \overline{x_1 x_2 \overline{\overline{x_4}}} \quad \& \quad x_1 \overline{x_2}) \vee$

$\vee (\overline{\overline{x_1}\, x_4} \quad \& \quad \overline{x_1 x_2 \overline{\overline{x_4}}} \quad \& \quad \overline{x_1 \overline{\overline{x_2}}})(\overline{x_1}\, x_4 \quad \vee \quad x_1 x_2 \overline{x_4}) =$

$= (\, x_1 \,\&(x_1 \vee \overline{x_4})\& \quad \overline{x_1 x_2 \overline{\overline{x_4}}} \quad \& \overline{x_2}) \vee$

$\vee (\overline{\overline{x_1}\, x_4} \quad \& \quad \overline{x_1 x_2 \overline{\overline{x_4}}} \quad \& \quad \overline{x_1 \overline{\overline{x_2}}})(\overline{x_1}\, x_4 \quad \vee \quad x_1 x_2 \overline{x_4}) =$

$= \big(\, x_1 \,\& \overline{x_2} \,\& (\overline{x_2} \vee \overline{x_1} \vee x_4)\big) \vee$

$\vee (\overline{\overline{x_1}\, x_4} \quad \& \quad \overline{x_1 x_2 \overline{\overline{x_4}}} \quad \& \quad \overline{x_1 \overline{\overline{x_2}}})(\overline{x_1}\, x_4 \quad \vee \quad x_1 x_2 \overline{x_4}) =$

$= (\, x_1\, \overline{x_2}) \vee (\overline{x_1 \overline{\overline{x_2}}} \& \overline{\overline{x_1}\, x_4} \quad \& \overline{x_1 x_2 \overline{\overline{x_4}}})(\overline{x_1}\, x_4 \quad \vee \quad x_1 x_2 \overline{x_4}) =$

$= (\, x_1\, \overline{x_2}) \vee (\overline{\overline{x_1}\, x_4} \,\&(\overline{x_1}\, x_4 \quad \vee \quad x_1 x_2 \overline{x_4})\& \overline{x_1 x_2 \overline{\overline{x_4}}}) =$

$= (\, x_1\, \overline{x_2}) \vee (x_1 \,\&(x_1 \quad \vee \quad \overline{x_4})\& x_2 \overline{x_4} \,\& \overline{x_1 x_2 \overline{\overline{x_4}}}) =$

$= (\, x_1\, \overline{x_2}) \vee (x_1 \quad \& (\overline{x_1} \quad \vee \quad \overline{x_2} \quad \vee \quad x_4)\& x_2 \,\& \overline{x_4}) =$

$= (\, x_1\, \overline{x_2}) \vee (x_1 \quad \& x_2 \,\& (\overline{x_2} \quad \vee \quad x_4)\& \quad \overline{x_4}) = (\, x_1\, \overline{x_2}) \vee (x_1 \quad \& x_2 \,\& \quad 0)$

$= \boldsymbol{x_1\, \overline{x_2}}$

12 Reed-Mulleri polünoom

Leian MDNK-le loogiliselt võrdse Reed-Mulleri polünoomi.

$$\boldsymbol{MDNK}\ \ f_D = \overline{x_1}\,x_4 \quad \vee \quad x_1 x_2 \overline{x_4} \quad \vee \quad x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_3}$$

MDNK Karnaugh' kaardil juba on võimalikud suurimad kontuurid, mis omavahel ei lõiku, seega need ongi kontuurid leidmiseks Reed-Mulleri polünoomi.

x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	1	1	0
11	1	0	0	1
10	1	1	0	0

Asendan MDNK avaldises disjunktsioonid summa mooduliga 2, kuna mõlema avaldise puhul on paaritu arv liidetavaid ühtesid. Kirjutan välja nendest kontuuridest tuleneva DNK:

$$
\begin{aligned}
f &= \overline{x_1}\,x_4 \ \oplus \ x_1 x_2 \overline{x_4} \ \oplus \ x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_3} \\
&= (x_1 \oplus 1)x_4 \oplus x_1 x_2 (x_4 \oplus 1) \oplus x_1 (x_2 \oplus 1)(x_3 \oplus 1) = \\
&= x_1 x_4 \oplus x_4 \oplus x_1 x_2 x_4 \oplus x_1 x_2 \oplus (x_1 x_2 \oplus x_1)(x_3 \oplus 1) = \\
&= x_1 x_4 \oplus x_4 \oplus x_1 x_2 x_4 \oplus x_1 x_2 \oplus x_1 x_2 x_3 \oplus x_1 x_2 \oplus x_1 x_3 \oplus x_1 = \\
&= x_1 x_4 \oplus x_4 \oplus x_1 x_2 x_4 \oplus x_1 x_2 x_3 \oplus x_1 x_3 \oplus x_1
\end{aligned}
$$

Tõeväärtustabel Reed-Mulleri polünoomile:

$f = x_1x_4 \oplus x_4 \oplus x_1x_2x_4 \oplus x_1x_2x_3 \oplus x_1x_3 \oplus x_1$

$\boldsymbol{x_1x_2x_3x_4}$	$\boldsymbol{f}$
0 0 0 0	0
0 0 0 1	1
0 0 1 0	0
0 0 1 1	1
0 1 0 0	0
0 1 0 1	1
0 1 1 0	0
0 1 1 1	1
1 0 0 0	1
1 0 0 1	1
1 0 1 0	0
1 0 1 1	0
1 1 0 0	1
1 1 0 1	0
1 1 1 0	1
1 1 1 1	0