Chapitre 4:   Le 3-11-2018.

Ordre sur $\mathbb{R}$

→ propriétés:

Soit a, b, c et d 4 réels tels que $a < b$

* Addit° et soustract° par un réel:

Si $a < b$ alors $a + c < c + b$

$a - c < b - c$

* Multiplication par un réel:

Si $a < b$ et $c > 0$ alors $a.c < b.c$

Si $a < b$ et $c < 0$ alors $a.c > b.c$

* Divis° par un réel:

Si $a < b$ et $c > 0$ alors $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

Si $a < b$ et $c < 0$ alors $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

N.B: Diviser par un réel non nulle c revient à multiplier par $\frac{1}{c}$

* Carré:

Si $0 < \overset{+}{a} < \overset{+}{b}$ alors $a^2 < b^2$

Si $\overset{-}{a} < \overset{-}{b} < 0$ alors $a^2 > b^2$

* Radicale:

Si $0 \leq a < b$ alors $\sqrt{a} < \sqrt{b}$

* Inverse:

Si $0 < a < b$ alors $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

Si $a < b < 0$ alors $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

Si $a < 0 < b$ alors $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

* Somme de deux ordres:

Si $a \boxed{<} b$

$c \boxed{<} d$ ⊕

$a + c < b + d$

Activité :

1) compléter

x	x^2	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{x}$
4	16	$\sqrt{4}=2$	$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{81}$	$\sqrt{\frac{1}{9}}=\frac{1}{3}$	9

2) Arranger par ordre croissant

⇒ 1er cas $(x=4)$

$\frac{1}{4} < 2 < 4 < 16$

$\frac{1}{x} < \sqrt{x} < x < x^2$

2ème cas $(x=\frac{1}{9})$

$\frac{1}{81} < \frac{1}{9} < \frac{1}{3} < 9$

$x^2 < x < \sqrt{x} < \frac{1}{x}$

3) Que peut on déduire ?

⇒ On déduit que :

si $x > 1$ alors $\frac{1}{x} < 1 < \sqrt{x} < x < x^2$

si $0 < x < 1$ alors $x^2 < x < \sqrt{x} < 1 < \frac{1}{x}$.

Comparaison des deux réels :

1) a) $a^2 < b^2$ et $a, b > 0$ alors $a < b$

b) $a^2 < b^2$ et $a, b < 0$ alors $a > b$

2) $a-b < 0$ alors $a < b$

$a-b > 0$ alors $a > b$ (Il faut factoriser $a-b$)

3) a) Si $a > 0$ et $b > 0$ et $\frac{a}{b} > \boxed{1}$ alors $a > b$

b) Si $a > 0$ et $b > 0$ et $\frac{a}{b} < 1$ alors $a < b$.

Ex 4 P.77 :

a) Soit $x = 9,3$

$x > 1$ et si $x > 1$ alors : $\frac{1}{x} < 1 < \sqrt{x} < x < x^2$

Par suite : $\frac{1}{9,3} < 1 < \sqrt{9,3} < 9,3 < 9,3^2$.

b) Soit $x = \sqrt{2} - 1$.

on a : $1 < \sqrt{2} < 2$ (-1)

$0 < \sqrt{2} - 1 < 1$

Si $0 < x < 1$ alors : $x^2 < x < \sqrt{x} < 1 < \frac{1}{x}$

Par suite : $(\sqrt{2}-1)^2 < \sqrt{2} - 1 < \sqrt{\sqrt{2}-1} < 1 < \frac{1}{\sqrt{2}-1}$.

Encadrement : Soit $x \in \mathbb{R}$.

On appelle encadrement de x une double inégalité ayant l'une des formes suivantes : $a \leq x \leq b$; $a < x \leq b$; $a \leq x < b$ ou $a < x < b$

où a et b sont 2 réels tel que $a < b$.

N.B : la différence $(b-a)$ s'appelle amplitude de l'encadrement

Opération sur l'encadrement :

Soit $a < x < b$ et $\alpha \in \mathbb{R}$

1) Addit° et soustract° :

- Si $a < x < b$ alors $a+\alpha < x+\alpha < b+\alpha$
- Si $a < x < b$ alors $a-\alpha < x-\alpha < b\ \alpha$

2) Multiplication par un réel α :

- Si $\alpha > 0$ et $a < x < b$ alors $\alpha a < \alpha x < \alpha b$
- Si $\alpha < 0$ et $a < x < b$ alors $\alpha b < \alpha x < \alpha a$.

Ex : Si $-4 < x < 5$ encadrer $2x$; $-3x$

- $-4 < x < 5$ $(\times 2)$
  $-8 < 2x < 10$
- $-4 < x < 5$ $\times(-3)$
  $-15 < -3x < 12$.

3) Division par un réel :

- Si $\alpha > 0$ et $a < x < b$ alors $\frac{a}{\alpha} < \frac{x}{\alpha} < \frac{b}{\alpha}$.
- Si $\alpha < 0$ et $a < x < b$ alors $\frac{b}{\alpha} < \frac{x}{\alpha} < \frac{a}{\alpha}$.

4) Carrés :

1) • Si $0 < a < x < b$ alors $a^2 < x^2 < b^2$.
- Si $a < x < b < 0$ alors $b^2 < x^2 < a^2$.
- Si $a < 0$ et $b > 0$ alors $0 \leq x^2 < b^2$

Ex : $-4 < x < 5$ et $-7 < y < 3$

$0 \leq x^2 < 25$ $\qquad$ $0 \leq y < 49$

5) Inverse :

a) Si $0 < a < x < b$ alors $\frac{1}{b} < \frac{1}{x} < \frac{1}{a}$

b) Si $a < x < b < 0$ alors $\frac{1}{b} < \frac{1}{x} < \frac{1}{a}$

c) Si $a < 0$ et $b > 0$

alors on ne peut pas encadrés $\frac{1}{x}$

car 0 est entre a et b

6) Radicale :

$0 \leq a < x < b$ alors $\sqrt{a} < x < \sqrt{b}$.

7) De x^2 à x :

Si $0 \leq a < x^2 < b$

alors $\sqrt{a} < x < \sqrt{b}$ ou $-\sqrt{b} < x < -\sqrt{a}$

Ex : $4 < x^2 < 9$

alors $2 < x < 3$ ou $-3 < x < -2$

8) Addit° des deux encadrement

$$\begin{array}{r} a < x < b \\ c < y < d \\ \hline a+c < x+y < b+d \end{array} \quad (+)$$

9) Soustraction des deux encadrements. $x - y = x + (-y)$

$a < x < b$ $\longrightarrow$ $a < x < b$

$c < y < d$ $\qquad$ $-d < -y < -c$ (+)

$a-d < x-y < b-c$

10) Multiplication des deux encadrement

Si $0 < a < x < b$

$0 < c < y < d$

$a.c < xy < b.d$ (×)

Ex $-4 < x < -1$ $\xrightarrow{\times(-1)}$ $1 < -x < 4$

$2 < y < 7$ $\qquad$ $2 < y < 7$ (×)

$2 < -xy < 28$

$-28 < xy < 2$

2ème méthode :

$-4 < x < -1$ $\quad -8 \quad -2$

$2 < y < 7$ $\quad -28 \quad -7$

$\otimes$

$-28 < xy < -2$

II) Division des deux encadrement : $\left(\frac{x}{y} = x \times \frac{1}{y} \right)$

si $a < x < b$ $\qquad a < x < b$

$0 < c < y < d$ $\xrightarrow{inv}$ $\frac{1}{d} < \frac{1}{y} < \frac{1}{c}$ $\otimes$

$\frac{a}{d} < \frac{x}{y} < \frac{b}{c}$

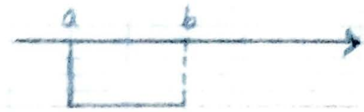
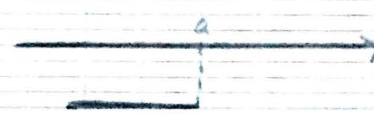
Ex $\quad 2 < x < 4$ $\qquad 2 < x < 4$ $\qquad -1 \quad -2$

$-8 < y < -2$ $\longrightarrow$ $\frac{1}{-2} < \frac{1}{y} < \frac{-1}{8}$ $\qquad -\frac{1}{4} \quad -\frac{1}{2}$

$\otimes$

$-2 < \frac{x}{y} < -\frac{1}{4}$

Intervalles et Représentat°:

	Ensembles	Intervalles	Représentat° sur un axe
1	$\{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$	$x \in [a ; b]$	
2	$\{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$	$x \in [a ; b[$	
3	$\{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$	$x \in]a ; b]$	
4	$\{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$	$x \in]a ; b[$	
5	$\{x \in \mathbb{R} / x > a\}$	$x \in]a ; +\infty[$	
6	$\{x \in \mathbb{R} / a \leq x\}$	$x \in [a ; +\infty[$	
7	$\{x \in \mathbb{R} / x < a\}$	$x \in]-\infty ; a[$	
8	$\{x \in \mathbb{R} / x \leq a\}$	$x \in]-\infty ; a]$