Тема 13

Нечёткая логика

Понятие нечёткой логики (НЛ) было введено профессором Лотфи Заде в 1965 году [1]. НЛ – это раздел математики, в котором обобщается классическая логика и теория множеств.

Существует две главные характеристики нечётких систем, которые дают преимущества в специальных приложениях. Нечёткие системы применимы для неопределённых или приближённых рассуждений, особенно для систем с математической моделью трудной для обсчёта. Нечёткая логика позволяет делать суждение с приблизительными оценками из неполной или неопределённой информации. Эти характеристики сближают область применения нечёткой логики с областью применения методов нейроинформатики.

Основные определения

Определение 13.1. Пусть X – непустое множество. Нечёткое множество A в X характеризуется функцией принадлежности

$$\mu_A : X \to [0,1],$$

и $\mu_A(x)$ интерпретируется как мера принадлежности элемента x нечёткому множеству A для каждого $x \in X$. Ясно, что A полностью определяется множеством кортежей $A = \{(u, \mu_A(u)) \mid u \in X\}$.

Если $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ - ограниченное множество и A - нечёткое множество в X, тогда мы будем использовать нотацию

$$A = \mu_1 / x_1 + \mu_2 / x_2 + ... + \mu_n / x_n,$$

где терм $\mu_i / x_i, i = 1,...,n$ означает что μ_i - это мера принадлежности x_i к A и знак плюса означает объединение.

Пример 13.1. Функция принадлежности множеству действительных чисел «близких к 1» может быть определена как

$$A(t) = \exp(-\beta(t-1)^2),$$

где β - положительное действительное число.

Определение 13.2. Пусть A будет нечётким подмножеством множества X. *Основание* (*носитель*) множества A, обозначаемое как $\mathrm{supp}(A)$, есть строгое подмножество X, чьи элементы имеют ненулевые оценки принадлежность в A:

$$\mathrm{supp}(A) = \{x \in X \mid A(x) > 0\}.$$

Определение 13.3. Нечёткое подмножество A классического множества X называется *нормальным*, если существует такое $x \in X$, что $A(x) = 1$. Иначе A - поднормальное.

Определение 13.4. α-уровень (α-срез) нечёткого множества A из X это чёткое множество, обозначаемое $[A]^\alpha$ и определяемое как

$$[A]^\alpha = \begin{cases} \{t \in X \mid A(t) \geq \alpha\}, \text{åñëè } \alpha > 0, \\ cl(\text{supp}(A) \quad \text{åñëè } \alpha = 0, \end{cases}$$

где $cl(\text{supp}(A))$ замыкание основания A.

Определение 13.5. Нечёткое множество A из X называется выпуклым если $[A]^\alpha$ - выпуклое подмножество X $\forall \alpha \in [0,1]$, то есть

$$A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = \min\left(A(x_1), A(x_2)\right),$$

для любого $\lambda \in \left[0,1\right]$.

Определение 13.6. Нечёткое число A - это нечёткое множество действительной оси с нормальной, (нечёткой) выпуклой и непрерывной функцией принадлежности ограниченного основания. Семейство нечётких чисел будем обозначать буквой *F*.

Операции над нечёткими множествами

Мы расширяем классические теоретико-множественные операции из обычной теории четких множеств. Мы заметим, что все такие операции, которые являются расширением концепций четких множеств, сужаются до их обычного значения, когда нечёткие подмножества имеют своими членами элементы из $\{0,1\}$. По этим причинам, расширяя операции до нечётких множеств, мы используем те же символы, что и теории множеств.

Пусть A и B - это нечёткие подмножества непустого (чёткого) множества X.

Определение 13.7. *Включение*. Говорят, что *A* содержится в *B* (*B* включает в себя *A*), если

$$A(t) \leq B(t)$$

для всех $t \in X$.

Определение 13.8. Пустое нечёткое подмножество X определяется как нечёткое подмножество 0 из X, такое что $0(x) = 0$ $\forall x \in X$. Легко видеть, что $0 \subset A$ справедливо для любого нечёткого подмножества A из X.

Определение 13.9. Наибольшее нечёткое подмножество X, называемое универсальным нечётким множеством в X, обозначаемая 1_X, определяется $1_X(t) = 1, \forall t \in X$. Легко видеть, что $A \subset 1_X$ справедливо для любого нечёткого подмножества $A \subset X$.

Определение 13.11. *Равенство*. Говорят, что A равно B ,если

$$A(t) = B(t)$$

для всех $t \in X$.

Определение 13.12. *Пересечение* A и B определяется как

$$(A \cap B)(t) = \min(A(t), B(t)) = A(t) \wedge B(t)$$

для всех $t \in X$.

Определение 13.13. Объединение A и B определяется формулой

$$(A \cup B)(t) = \max(A(t), B(t)) = A(t) \vee B(t)$$

для всех $t \in X$.

Определение 13.14. *Дополнение* нечёткого множества A до универсального множества определяется формулой

$$(\neg A)(t) = 1 - A(t)$$

для всех $t \in X$.

В некоторых случая эксперты при описании объектов используют такие связки как «очень», «более менее», «почти». Для формализации этих понятий можно использовать модификаторы нечетких множеств.

Так, для формализации понятия «очень» мы можем использовать операцию возведения в степень: $(\text{"î ÷åíü"} A)(x) = A^2(x)$. Эту операцию также называют *концентрацией* нечеткого множества.

Для формализации понятия «почти» можно использовать операцию извлечения корня: $(\text{"ïî÷òè"} A)(x) = \sqrt{A(x)}$. Эту операцию также называют *разбавлением* нечеткого множества.

Введенные выше определения операций над нечеткими множествами основаны на использовании операций max и min. Однако использование этих операций не всегда адекватно отражает смысловые оттенки понятий естественного языка. Например, связки «не», «и», «или» могут быть интерпретированы по-разному, в зависимости от контекста. Поэтому в теории нечетких множеств были введены понятия *t*-нормы (*треугольной нормы*) и *t*-конормы (*треугольной конормы*), являющиеся естественным обобщением операций min и max.

Определение 13.15. *Треугольной нормой* (*t*-нормой) называется действительная функция $T : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $T(0,0) = 0; T(A,1) = A; T(1, A) = A$ - ограниченность;
2) $T(A, B) \le T(C, D)$, если $A \le C$ и $B \le D$ - монотонность;
3) $T(A, T(B,C)) = T(T(A, B),C)$ - ассоциативность.

Пример. Треугольная норма может быть задана любым из следующих способов:

- $T(A(t), B(t)) = A(t) \cdot B(t)$ - алгебраическое произведение;
- $T(A(t), B(t)) = \min(A(t), B(t))$ - минимум;
- $T(A(t), B(t)) = \max(0, A(t) + B(t) - 1)$ - *t*-норма Лукасевича;
- $T(A(t), B(t)) = \begin{cases} \min(A(t), B(t)), \text{ } \textit{если} \text{ } \max(A(t), B(t)) = 1, \\ 0, \textit{ в противном случае}. \end{cases}$

  - слабейший.

Есть и другие способы определения *t*-нормы.

Треугольная норма *T* называется строгой, если *T* строго возрастающая по каждому своему аргументу. Треугольные нормы широко применяются в качестве логической связки «или».

Определение 13.16. *Треугольной конормой* (*t-конормой*) называется действительная функция $S:[0,1]\times[0,1] \to [0,1]$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $S(1,1) = 1;\ S(A,0) = A;\ S(0, A) = A$ - ограниченность;
2) $S(A, B) \geq S(C, D)$, если $C \leq A$ и $D \leq B$ - монотонность;
3) $S(A, B) = S(B, A)$ - коммутативность;
4) $S(A, S(B,C)) = S(S(A, B), C)$ - ассоциативность.

Пример. Треугольная конорма может быть задана любым из следующих способов:

- $S(A(t), B(t)) = \max(A(t), B(t))$ - максимум,
- $S(A(t), B(t)) = \min(A(t) + B(t), 1)$ - Лукасевича,
- $S(A(t), B(t)) = A(t) + B(t) - A(t)B(t)$.

Замечание. Мы можем получить другие определения пересечения и объединения двух нечетких множеств, если заменим операции min и max на их аналоги в классе t-норм и t-конорм.

Нечёткие отношения

Классическое отношение можно рассматривать как множество кортежей, где кортеж это упорядоченная пара. Двоичный кортеж записывается (u, v), пример троичного кортежа (u, v, w), а пример *n*-арного кортежа – это $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Определение 13.16. Пусть X и Y - непустые множества. *Нечёткое отношение* R это нечёткое подмножество $X \times Y$. Другими словами $R \in F(X \times Y)$. Если $X = Y$ тогда мы будем говорить что R - *бинарное нечёткое отношение* на X.

Пусть R - бинарное нечёткое отношение на действительной оси R. Тогда $R(u,v)$ интерпретируется как мера принадлежности пары (u,v) к R.

Определение 13.17. Декартово произведение нечетких множеств $A \subseteq X$ и $B \subseteq Y$ обозначается $A \times B$ и определяется как

$$(A \times B)(x,y) = A(x) \wedge B(y) = \min\left(A(x), B(y)\right).$$

Определение 13.18. *Объединением* двух отношений R_1 и R_2 будем называть нечеткое отношение R такое, что

$$R(x,y) = R_1(x,y) \cup R_2(x,y) = \max\left(R_1(x,y), R_2(x,y)\right).$$

Пересечением отношений R_1 и R_2 будем называть отношение R такое, что

$$R(x,y) = R_1(x,y) \cap R_2(x,y) = \min\left(R_1(x,y), R_2(x,y)\right).$$

Алгебраическим произведением отношений R_1 и R_2 будем называть нечеткое отношение R такое, что

$$R(x,y) = R_1(x,y) \cdot R_2(x,y).$$

Алгебраической суммой отношений R_1 и R_2 будем называть нечеткое отношение R такое, что

$$R(x,y) = R_1(x,y) + R_2(x,y) - R_1(x,y) \cdot R_2(x,y).$$

Определение 13.19. Пусть R_1 – нечеткое отношение, $R_1 : X \times Y \to [0,1]$ между X и Y и R_2 – нечеткое отношение $R_2 : Y \times Z \to [0,1]$ между Y и Z. Sup-min композицией (max-min-композицией, сверткой) отношений R_1 и R_2 будем называть нечеткое отношение R между X и Z такое, что

$$R(x,z) = (R_2 \circ R_1)(x,z) = \sup_{y \in Y} \min\left(R_1(x,y), R_2(y,z)\right).$$

Нечеткая и лингвистическая переменные

Весьма важным в нечеткой логике являются понятия нечеткой и лингвистической переменной. Они используются для описания реальных объектов при помощи нечетких множеств.

Определение 13.20. *Нечеткая переменная* задается тройкой (α, X, A), где α - имя переменной, X – область определения переменной, A – нечеткое множество на X, описывающее ограничения на значения переменной.

Определение 13.21. *Лингвистической переменной* будем называть набор пяти элементов: (β, T, X, G, M), где β – имя лингвистической переменной;

T – множество значений (терм-множество), являющееся множеством наименований нечетких переменных;

G – синтаксическая процедура, позволяющая оперировать элементами множества T;

M – семантическая процедура, позволяющая переводить значения лингвистической переменной (в том числе и сгенерированные G) в нечеткую переменную.

Пример. Эксперт для определения атмосферного давления использует понятия «низкое», «нормальное», «высокое» давление. При этом минимальное давление равно 700 мм, а максимальное – 800 мм.

Формализуем эти понятия при помощи лингвистической переменной (β, T, X, G, M), в которой β – величина атмосферного давления; T – {«низкое», «нормальное», «высокое»}; X – [700, 800]; G – процедура образования новых термов при помощи связок «и», «или» и модификаторов «очень», «не», «почти»; M – процедура задания на X нечетких множеств A_1= «низкое давление», A_2= «нормальное давление», A_3= «высокое давление», и нечетких множеств получаемых в результате применения процедуры G.

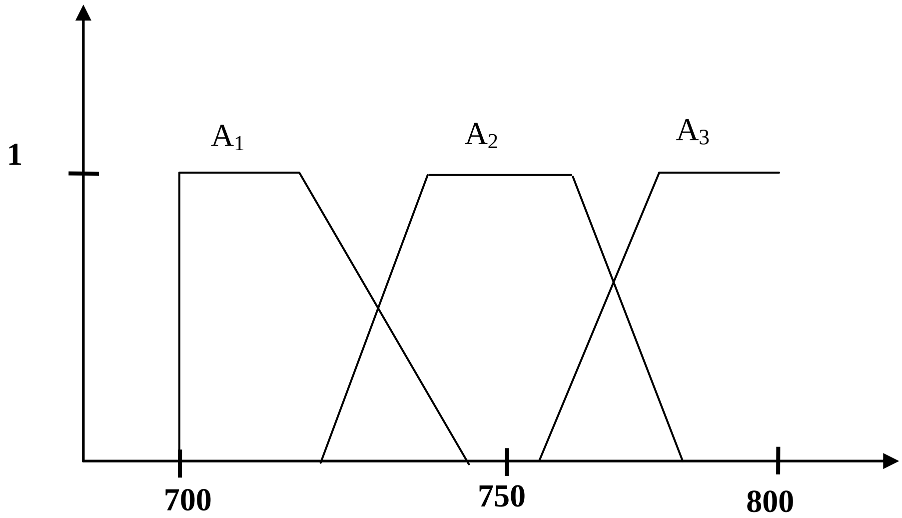

Рис 13.1. График функций принадлежности нечетких множеств A_1, A_2 и A_3.

Нечеткие числа

В теории нечетких систем особую роль играют нечеткие переменные, определенные на действительной оси.

Определение. Нечетким числом называется нечеткое множество A, определенное на множестве действительных чисел R, функция принадлежности которого

$$\mu_A : R \to [0,1]$$

отвечает условиям

1) $\sup\limits_{x \in R} A(x) = 1$, т. е. нечеткое множество A нормальное;

2) $A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min\left(A(x_1), A(x_2)\right)$, т. е. нечеткое множество A выпуклое;

3) $A(x)$ - непрерывно.

В теории нечетких систем различают положительные и отрицательные нечеткие числа. Операции над нечеткими числами могут быть определены следующим образом.

1) Сумма A_1 и A_2: $A_1 \oplus A_2 = B$, где $B(y) = \sup\limits_{x_1, x_2, y = x_1 + x_2} \min\left(A_1(x_1), A_2(x_2)\right)$.

2) Разность A_1 и A_2: $A_1 - A_2 = B$, где $B(y) = \sup\limits_{x_1, x_2, y = x_1 - x_2} \min\left(A_1(x_1), A_2(x_2)\right)$.

3) Произведение A_1 и A_2: $A_1 \square\ A_2 = B$, где $B(y) = \sup\limits_{x_1, x_2, y = x_1 \square x_2} \min\left(A_1(x_1), A_2(x_2)\right)$.

4) Частное A_1 и A_2: $A_1 \div A_2 = B$, где $B(y) = \sup\limits_{x_1, x_2, y = x_1 \div x_2} \min\left(A_1(x_1), A_2(x_2)\right)$.

Кроме того, мы можем определить унарные операции над нечеткими числами.

1) Операция изменения знака: $-A(x) = A(-x)$.

2) Операция обращения: $A^{-1}(x) = A(x^{-1})$.

3) Операция экспонирования: $e^{A(x)} = \begin{cases} A(\log x), \text{äëÿ } x > 0, \\ 0, \text{äëÿ } x \le 0. \end{cases}$

4) Операция расчета абсолютного значения: $|A(x)| = \begin{cases} \max\left(A(x), A(-x)\right), \text{äëÿ } x \ge 0, \\ 0, \text{äëÿ } x < 0. \end{cases}$

Нечеткая импликация

Пусть *p* – это утверждение что *x* принадлежит четкому множеству *A*, а *q* – утверждение о том, что *y* принадлежит четкому множеству *B*. Импликация $p \to q$ может быть интерпретирована как $\neg(p \wedge \neg q)$. В том случае, если *A* и *B* являются нечеткими множествами, импликация может быть обобщена при помощи операций над нечеткими множествами. Ниже представлены варианты задания нечеткой импликации.

- Гёделя: $A(u) \to B(v) = \begin{cases} 1, \text{åñëè } A(u) \le B(v), \\ B(v) \text{ â ï ðî ò èâí î ì ñëó÷àå.} \end{cases}$
- Клини-Даенса: $A(u) \to B(v) = \max(1 - A(u), B(v))$.
- Мамдани: $A(u) \to B(v) = \min(A(u), B(u))$.
- Ларсена: $A(u) \to B(v) = A(u) \cdot B(u)$.
- Лукасевича: $A(u) \to B(v) = \min(1, 1 - A(u) + B(v))$
- Клини-Даенса-Лукасевича: $A(u) \to B(v) = 1 - A(u) + A(u) \cdot B(u)$.

Нечеткий вывод

В нечеткой логике суждения об истинности одних формул выводятся на основании истинности других формул. При наличии базы знаний составленной экспертами нечеткий логический вывод может строиться исходя из предикатных правил следующего вида:

П$_1$: если x_1 есть A_{11} И x_2 есть A_{12} ... x_n есть A_{1n}, то y_1 есть B_{11} И y_2 есть B_{12} ... y_k есть B_{1k}
также
П$_2$: если x_1 есть A_{21} И x_2 есть A_{22} ... x_n есть A_{2n}, то y_1 есть B_{21} И y_2 есть B_{22} ... y_k есть B_{2k}
также
...
П$_n$: если x_1 есть A_{m1} И x_2 есть A_{m2} ... x_n есть A_{mn}, то y_1 есть B_{m1} И y_2 есть B_{m2} ... y_k есть B_{mk}

Предпосылка: x_1 есть A_1 И x_2 есть A_2 ... x_n есть A_n
Вывод: y_1 есть B_1 ... y_k есть B_k

В большинстве случаев вывод можно заменить на более простое утверждение: z есть С.

Здесь x_i – входная переменная, y_j – выходная переменная (вывод); A_{ij} и B_{il} – функции принадлежности. Каждое из таких правил отражает одно из знаний эксперта. i-е нечеткое правило вывода из этой системы задается нечетким отношением R_i и определяется как

$R_i(u,v,w) = (A_i \times B_i \rightarrow C_i)(u,w)= [A_i(u) \times B_i(v)] \rightarrow C_i(w)$,

для i=1,…,n.

Результатом этого правила будет некоторое нечеткое число

$C'_i(w) = [A_i(x_0) \wedge B_i(y_0)] \rightarrow C_i(w)$.

Затем комбинируем эти значения при помощи некоторого оператора соединения ∨:

$C(w) = C'_1(w) \vee C'_2(w) \vee ... \vee C'_n(w) = A_1(x_0) \times B_1(y_0) \rightarrow C_1(w) \vee ... \vee A_n(x_0) \times B_n(y_0) \rightarrow C_n(w)$.

Есть много способов задания операции импликации в нечеткой логике, однако общий логический вывод осуществляется за следующие четыре шага.

1. *Введение нечеткости (фазификация, fuzzification).* К значениям нечетких переменных каждого предикатного правила применяются соответствующие функции принадлежности для определения степени истинности предпосылок.
2. *Логический вывод*. К вычисленным на первом шаге значениям истинности применяются правила вывода, в результате чего каждой переменной вывода в каждом правиле назначается нечеткое подмножество.
3. *Композиция*. Все нечеткие подмножества, назначенные к каждой переменной вывода (во всех правилах) объединяются, в результате чего для каждой переменной вывода остается только одно нечеткое подмножество.
4. *Приведение к четкости (дефаззификация, defuzzification)*. Приведение набора нечетких выводов к четкому значению (числовому значению, или символьному терму).

Приведем в пример несколько схем нечеткого логического вывода. Для простоты предположим что мы имеем два «Если … То …» правила следующего вида:

П$_1$: если x есть A_1 и y есть B_1 тогда z есть C_1
также
П$_2$: если x есть A_2 и y есть B_2 тогда z есть C_2
Предпосылка: x есть x_0 и y есть y_0

Вывод: z есть C

Схема нечеткого вывода Мамдани. Нечеткая импликация интерпретируется как импликация Мамдани, а соединяющий терм «также» рассматривается как связка «или» определяемая оператором max.

Таким образом, результат каждого из правил определяется по формулам:
$C'_1(w) = [A_1(x_0) \wedge B_1(y_0)] \wedge C_1(w))$,
$C'_2(w) = [A_2(x_0) \wedge B_2(y_0)] \wedge C_2(w))$,
для любого w.

Далее, результат всей системы вычисляется как логическая сумма результатов каждого из правил:

$$C(w) = C'_1(w) \vee C'_2(w) = ([A_1(x_0) \wedge B_1(y_0)] \wedge C_1(w)) \vee ([A_2(x_0) \wedge B_2(y_0)] \wedge C_2(w)).$$

Для получения четкого результата применяем какой-либо метод приведения к четкости (дефаззификации).

Схема нечеткого вывода Тсукамото. Промежуточные результаты правил вывода получаются по формулам:

$$a_1= [A_1(x_0) \wedge B_1(y_0)],$$

$$a_2= [A_2(x_0) \wedge B_2(y_0)].$$

В этой схеме вывода четкие значения каждого из результатов определяются исходя из равенств

$$a_1 = C_1(z_1),\ a_2 = C_2(z_2).$$

А итоговое четкое значение выражается формулой

$$z_0=(a_1z_1+a_2z_2)/(a_1+a_2).$$

Если же мы имеем n правил вывода в нашей системе, то конечный результат всей системы получается как центр тяжести результатов соответствующих правил системы:
Z0=SUM(ai*zi)/SUM(ai).

Схема нечеткого вывода Сугено-Такаги. Сугено и Такаги использовали следующую систему правил

П$_1$: если x есть A_1 и y есть B_1 тогда $z_1 = a_1x + b_1y$
также
П$_2$: если x есть A_2 и y есть B_2 тогда $z_2 = a_2x + b_2y$
Предпосылка: x есть x_0 и y есть y_0
Вывод: z_0

Значения вывода каждого из правил вычисляется как

$$\alpha_1 = A_1(x_0) \wedge B_1(y_0),\ \alpha_2 = A_2(x_0) \wedge B_2(y_0).$$

Выходные значения каждого правила вычисляются по формулам

$$z_1 = a_1x_0 + b_1y_0,\ z_2 = a_2x_0 + b_2y_0.$$

Итоговое четкое значение вывода выражается через формулу:

$$z_0=(\alpha_1 z_1+ \alpha_2 z_2)/(\alpha_1+ \alpha_2).$$

Литература

1. Zadeh L.A. Fuzzy sets. - Information and Control, 1965, vol.8, N 3,pp.338-353.
2. Батыршин И.З. Основные операции нечеткой логики и их обобщения. – Казань: Отечество, 2001. - 102 с. (ISBN 5-9222-0034-8).
3. Рутковская Д., Пилиньский М., Рутковский Л. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы. – М., 2004.
4. Круглов В. В., Дли М. И., Голунов Р. Ю. Нечеткая логика и искусственные нейронные сети: Учеб. пособие. -- М.: Издательство Физико-математической литературы, 2001.