

Лабораторная работа №1. МЕТОДЫ ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТЕЙ

1) Число $X = 0,10834$, все цифры которого верны в строгом смысле, округлите до трех значащих цифр. Для полученного числа $X_1 \approx X$ найдите предельную абсолютную и предельную относительную погрешности. В записи числа X_1 укажите количество верных цифр (в узком и широком смысле).

Пусть $X = 0,10834$

Округлим данное число до трех значащих цифр, получим число:

$$X_1 = 0,108$$

Вычислим абсолютную погрешность:

$$\Delta X_1 = |X - X_1| = |0,10834 - 0,108| = 0,00034$$

Определим границы абсолютной погрешности (предельную погрешность), округляя с избытком до одной значащей цифры:

$$\Delta_{X_1} = 0,0004$$

Предельная относительная погрешность составляет:

$$\delta_{X_1} = \frac{\Delta_{X_1}}{|X_1|} = \frac{0,0004}{0,00034} = 0,0(037) = 0,37\%$$

Укажем количество верных цифр в узком и широком смысле в записи числа $X_1 = 0,108$

Так как $\Delta_{X_1} = 0,004 \leq 0,0005$, следовательно, в узком смысле верными являются все цифры числа X_1 : 0,1,0,8

Так как $\Delta_{X_1} = 0,004 \leq 0,001$, следовательно, в широком смысле верными являются все цифры числа X_1 : 0,1,0,8

2) Вычислите с помощью микрокалькулятора значение величины $Z = \frac{c + \sin b}{c - a^2}$, при заданных значениях параметров $a = 0,3107$, $b = 13,27$ и $c = 4,711$, используя «ручные» расчетные таблицы для пошаговой регистрации результатов вычислений, тремя способами:

1. по правилам подсчета цифр;
2. по методу строгого учета границ абсолютных погрешностей;
3. по способу границ.

Сравните полученные результаты между собой, прокомментируйте различие методов вычислений и смысл полученных числовых значений.

2.1) «Правила подсчета цифр»

$$Z = \frac{c + \sin b}{c - a^2}$$

a	b	c	$\sin b$	$c + \sin b$	a^2	$c - a^2$	Z
0,3107	13,27	4,711	0,6469	5,3579	0,096534	4,61446	1,16

Прокомментируем ход вычислений.

Рассмотрим $\sin b$: $\sin 13,27 = 0,64698934..$ Воспользуемся правилом, что при определении количества верных цифр в значениях элементарных функций от приближенных значений аргумента следует грубо оценить значение модуля производной функции. Оценка величины производной в этой точке: $\sin b' = \cos b = \cos 13,27 \approx 0,762499 < 10^0$. Так как значение производной не превосходит единицы, то в значении функции можно считать верными столько знаков после запятой, сколько их имеет значение аргумента. Округляя с двумя запасными цифрами, получаем 0,6469 (запасные цифры выделены) и заносим результаты в таблицу.

Рассмотрим $c + \sin b$: $4,711 + 0,6469 = 5,3579$. Воспользуемся правилом, что при сложении и вычитании приближенных чисел в результате следует сохранять столько десятичных знаков, сколько их в приближенном данном с наименьшим количеством десятичных знаков. Число 4,711 содержит три десятичных знака, число 0,6469 – два десятичных знака, т. е. в полученном значении следует сохранить два десятичных знака. Округляя с двумя запасными цифрами, получаем 5,3579 (запасные цифры выделены) и заносим результаты в таблицу.

Рассмотрим a^2 : $0,3107^2 = 0,09653449$. Воспользуемся правилом, что при умножении и делении в результате следует сохранять столько значащих цифр, сколько их имеет приближенное данное с наименьшим числом значащих цифр. Число 0,3107 содержит четыре значащих цифры, т. е. в полученном значении следует сохранить четыре значащие цифры. Округляя с двумя запасными цифрами, получаем 0,096534 (запасные цифры выделены) и заносим результаты в таблицу.

Рассмотрим $c - a^2$: $4,711 - 0,096534 = 4,614466$. Воспользуемся правилом, что при сложении и вычитании приближенных чисел в результате следует сохранять столько десятичных знаков, сколько их в приближенном данном с наименьшим количеством десятичных знаков. Число 4,711 содержит три десятичных знака, число 0,096534 – четыре десятичных знака, т. е. в полученном значении следует сохранить два десятичных знака. Округляя с двумя запасными цифрами, получаем 4,61446 (запасные цифры выделены) и заносим результаты в таблицу.

Рассмотрим Z : $Z = \frac{c + \sin b}{c - a^2} = \frac{5,3579}{4,61446} = 1,161109..$ Воспользуемся правилом, что при умножении и делении в результате следует сохранять столько значащих цифр, сколько их имеет приближенное данное с наименьшим числом значащих цифр. Число 5,3579 содержит две значащих цифры, число 4,61446 – два десятичных знака, т. е. в полученном значении следует сохранить две значащие цифры. Округляя с двумя запасными цифрами, получаем 1,1611 (запасные цифры выделены) и заносим результаты в таблицу.

2.2) «Метод строгого учета границ абсолютных погрешностей»

Проведем пошаговые вычисления по методу строгого учета границ предельных абсолютных погрешностей в предположении, что исходные данные a , b и c имеют предельные абсолютные погрешности $\Delta a = 0,00005$, $\Delta b = 0,005$, $\Delta c = 0,0005$ (т. е. у a , b и c все цифры верны в узком смысле).

Промежуточные результаты вносятся в таблицу после округления до одной запасной цифры (с учетом вычисленной параллельно величины погрешности); значения погрешностей для удобства округляются (с возрастанием) до двух значащих цифр.

a	0,3107	Δa	0,00005
b	13,27	Δb	0,005
c	4,711	Δc	0,0005
$\sin b$	0,6469	$\Delta \sin b$	0,0038
$c + \sin b$	5,3579	$\Delta(c + \sin b)$	0,0043
a^2	0,096534	Δa^2	0,000031
$c - a^2$	4,61446	$\Delta(c - a^2)$	0,000469
Z	1,16110	ΔZ	0,00012

Прокомментируем ход вычислений.

Рассмотрим $\sin b$: $\sin 13,27 = 0,64698934\dots$. Подсчитаем предельную абсолютную погрешность:

$$\Delta(\sin b') = |\cos b| * \Delta b = 0,762499 * 0,005 = 0,0038124952029 \approx 0,0038.$$

Судя по ее величине, в полученном значении в узком смысле верны два знака после запятой. Округляя с двумя запасными цифрами, получаем 0,6469 (запасные цифры выделены) и заносим результаты в таблицу.

Рассмотрим $c + \sin b$: $4,711 + 0,6469 = 5,3579$. Подсчитаем предельную абсолютную погрешность:

$$\Delta c + \Delta(\sin b') = 0,0005 + 0,0038 = 0,0043.$$

Судя по ее величине, в полученном значении в узком смысле верны два знака после запятой. Округляя с двумя запасными цифрами, получаем 5,3579 (запасные цифры выделены) и заносим результаты в таблицу.

Рассмотрим a^2 : $0,3107^2 = 0,09653449$. Подсчитаем предельную абсолютную погрешность:

$$\Delta a * a + a * \Delta b = 0,00005 * 0,3107 + 0,3107 * 0,00005 = 0,00003107 \approx 0,000031$$

Судя по ее величине, в полученном значении в узком смысле верны четыре знака после запятой. Округляя с двумя запасными цифрами, получаем 0,096534 (запасные цифры выделены) и заносим результаты в таблицу.

Рассмотрим $c - a^2$: $4,711 - 0,096534 = 4,614466$. Подсчитаем предельную абсолютную погрешность:

$$\Delta c - \Delta a * a - a * \Delta b = 0,0005 - 0,000031 = 0,000469$$

Судя по ее величине, в полученном значении в узком смысле верны три знака после запятой. Округляя с двумя запасными цифрами, получаем 0,09653 (запасные цифры выделены) и заносим результаты в таблицу.

Рассмотрим Z : $Z = \frac{c + \sin b}{c - a^2} = \frac{5,3579}{4,61446} = 1,161109\dots$. Подсчитаем предельную абсолютную погрешность:

$$\frac{\Delta(c + \sin b) * (c - a^2) + (c + \sin b) * \Delta(c - a^2)}{(c - a^2)^2} = \frac{0,0043 * 4,61446 + 5,3579 * 0,000469}{4,61446^2}$$

$$= \frac{0,0025128551}{21,2932410916} = 0,000118011865323 \approx 0,00012$$

Судя по ее величине, в полученном значении в узком смысле верны три знака после запятой. Округляя с двумя запасными цифрами, получаем 1,16110 (запасные цифры выделены) и заносим результаты в таблицу.

2.3) «Способ границ»

Нижняя и верхняя границы значений a , b и c определены из условия, что в исходных данных $a = 0,3107$, $b = 13,27$ и $c = 4,711$ все цифры верны в узком смысле ($\Delta a = 0,00005$, $\Delta b = 0,005$, $\Delta c = 0,0005$), т. е.

$$0,31065 < a < 0,31175; 13,265 < b < 13,275; 4,7105 < c < 4,7115$$

При выполнении промежуточных вычислений и округлении результатов будем использовать все рекомендации правил подсчета цифр с одним важным дополнением: округление нижних границ ведется по недостатку, а верхних – по избытку. Окончательные результаты округляются по этому же правилу до последней верной цифры.

	НГ	ВГ
a	0,31065	0,31175
b	13,265	13,275
c	4,7105	4,7115
$\sin b$	0,6431	0,6507
$c + \sin b$	5,3536	5,3622
a^2	0,096503	0,10080
$c - a^2$	4,61399	4,61070
Z	1,1602	1,16299

Прокомментируем ход вычислений.

Рассмотрим $\sin b$:

$$\text{НГ}_{\sin b} = \sin \text{НГ}_b = \sin 13,265 = 0,643168778773 \approx 0,6431$$

$$\text{ВГ}_{\sin b} = \sin \text{ВГ}_b = \sin 13,275 = 0,650793737408 \approx 0,6507$$

Рассмотрим $c + \sin b$:

$$\text{НГ}_{c + \sin b} = \text{НГ}_c + \text{НГ}_{\sin b} = 4,7105 + 0,6431 = 5,3536 \approx 5,3536$$

$$\text{ВГ}_{c + \sin b} = \text{ВГ}_c + \text{ВГ}_{\sin b} = 4,7115 + 0,6507 = 5,3622 \approx 5,3622$$

Рассмотрим a^2 :

$$\text{НГ}_{a^2} = \text{НГ}_a * \text{НГ}_a = 0,31065 * 0,31065 = 0,0965034225 \approx 0,096503$$

$$\text{ВГ}_{a^2} = \text{ВГ}_a * \text{ВГ}_a = 0,31175 * 0,31175 = 0,10080625 \approx 0,10080$$

Рассмотрим $c - a^2$:

$$\text{НГ}_{c-a^2} = \text{НГ}_c - \text{НГ}_{a^2} = 4,7105 - 0,096503 = 4,613997 \approx 4,61399$$

$$\text{ВГ}_{c-a^2} = \text{ВГ}_c - \text{ВГ}_{a^2} = 4,7115 - 0,10080 = 4,61070 \approx 4,61070$$

Рассмотрим Z :

$$\text{НГ}_Z = \frac{\text{НГ}_{c+\sin b}}{\text{НГ}_{c-a^2}} = \frac{5,3536}{4,61399} = 1,16029726983 \approx 1,1602$$

$$\text{ВГ}_Z = \frac{\text{ВГ}_{c+\sin b}}{\text{ВГ}_{c-a^2}} = \frac{5,3622}{4,61070} = 1,16299043529 \approx 1,16299$$

Таким образом, результат вычислений значения Z по методу границ имеет вид

$$1,160 < Z < 1,1629$$

2.4) Вычисляя значение величины Z тремя разными способами, получили следующие результаты:

$$Z \approx 1,16$$

$$Z = 1,161 \pm 0,00012$$

$$1,160 < Z < 1,1629$$