

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра теоретических основ компьютерной
безопасности и криптографии

Лабораторная работа №5. Интерполяция таблично заданных функций

ОТЧЁТ

ПО ДИСЦИПЛИНЕ

«ПРОГРАММНЫЕ СРЕДСТВА РЕШЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ»

студента 4 курса 431 группы

специальности 10.05.01 Компьютерная безопасность

факультета компьютерных наук и информационных технологий

Серебрякова Алексея Владимировича

Преподаватель

доцент

А. С. Гераськин

подпись, дата

Саратов 2023

5.2.1. Задание к лабораторной работе

Функция $y = f(x)$ задана таблично в узлах

$x_0 \ x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4$

$y_0 \ y_1 \ y_2 \ y_3 \ y_4$.

1. Построить интерполяционный многочлен Лагранжа.

Вычислить $L_4(x_1+x_2)$. Построить график многочлена Лагранжа.

2. Построить таблицы конечных и разделенных разностей.

3. Построить полином Ньютона и вычислить значение $N_4(x_1+x_2)$.

Построить график многочлена Ньютона.

4. Построить интерполяционные сплайны линейный и квадратичный. Построить графики сплайнов.

5. На одном чертеже с графиком полиномов построить графики сплайнов.

Функция $y = f(x)$ задана таблично в узлах

13	x: 0,351	0,867	1,315	2,013	2,859
	y: 0,605	0,218	0,205	1,157	5,092

1. Построим интерполяционный многочлен Лагранжа 4-й степени $L_4(x)$ в виде линейной комбинации $L_4(x) = \sum_{i=0}^4 p_i(x)f(x_i)$

Вычислим базисные векторы:

$$p_0(x) = 0.4823 * (x - 0.867)(x - 1.315)(x - 2.013)(x - 2.859)$$

$$p_1(x) = -1.8950 * (x - 0.351)(x - 1.315)(x - 2.013)(x - 2.859)$$

$$p_2(x) = 2.1485 * (x - 0.351)(x - 0.867)(x - 2.013)(x - 2.859)$$

$$p_3(x) = -0.8891 * (x - 0.351)(x - 0.867)(x - 1.315)(x - 2.859)$$

$$p_4(x) = 0.1532 * (x - 0.351)(x - 0.867)(x - 1.315)(x - 2.013)$$

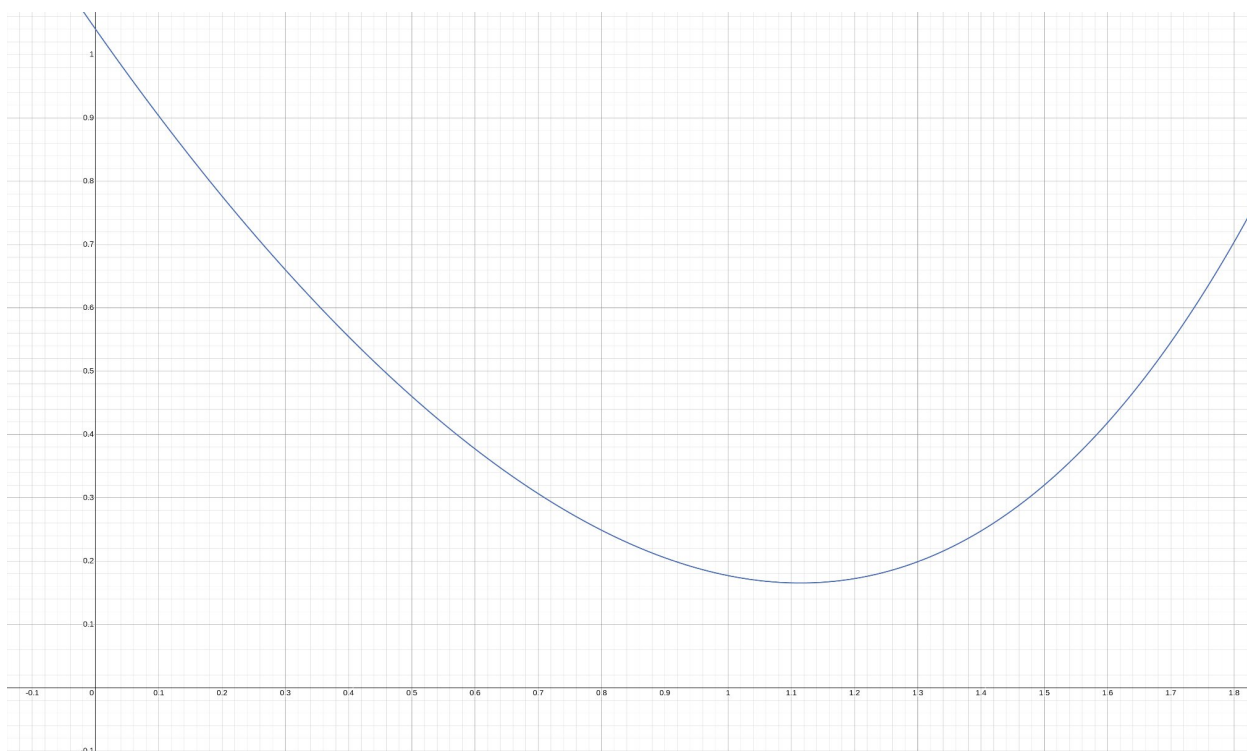
Тогда интерполяционный многочлен Лагранжа 4-й степени будет иметь вид:

$$\begin{aligned}
 L_4(x) &= 0.2918 * (x - 0.867)(x - 1.315)(x - 2.013)(x - 2.859) + (-0.4131) * (x - 0.351)(x - 1.315)(x - 2.013)(x - 2.859) + \\
 &+ 0.4404 * (x - 0.351)(x - 0.867)(x - 2.013)(x - 2.859) + (-1.0287) * (x - 0.351)(x - 0.867)(x - 1.315)(x - 2.859) + \\
 &+ 0.7803 * (x - 0.351)(x - 0.867)(x - 1.315)(x - 2.013)
 \end{aligned}$$

Вычислим значение полинома в точке:

$$L_4(x_1 + x_2) = L_4(0.867 + 1.315) = 2.182$$

Построим график многочлена Лагранжа:



2. Построим таблицы конечных и разделенных разностей.

Таблица конечных разностей

x_k	y_k	Δy_k	$\Delta^2 y_k$	$\Delta^3 y_k$	$\Delta^4 y_k$
0.351	0.605	-0.387,	0.374	0.591	1.427
0.867	0.218	-0.013	0.965	2.018	
1.315	0.205	0.952	2.983		
2.013	1.157	3.935			
2.859	5.092				

Таблица разделенных разностей

x_k	y_k	1го порядка	2го порядка	3го порядка	4го порядка
0.351	0.605	-0.75	0.7479	0.2813	0.0707
0.867	0.218	-0.029	1.2154	0.4587	
1.315	0.205	1.3639	2.1291		
2.013	1.157	4.6513			
2.859	5.092				

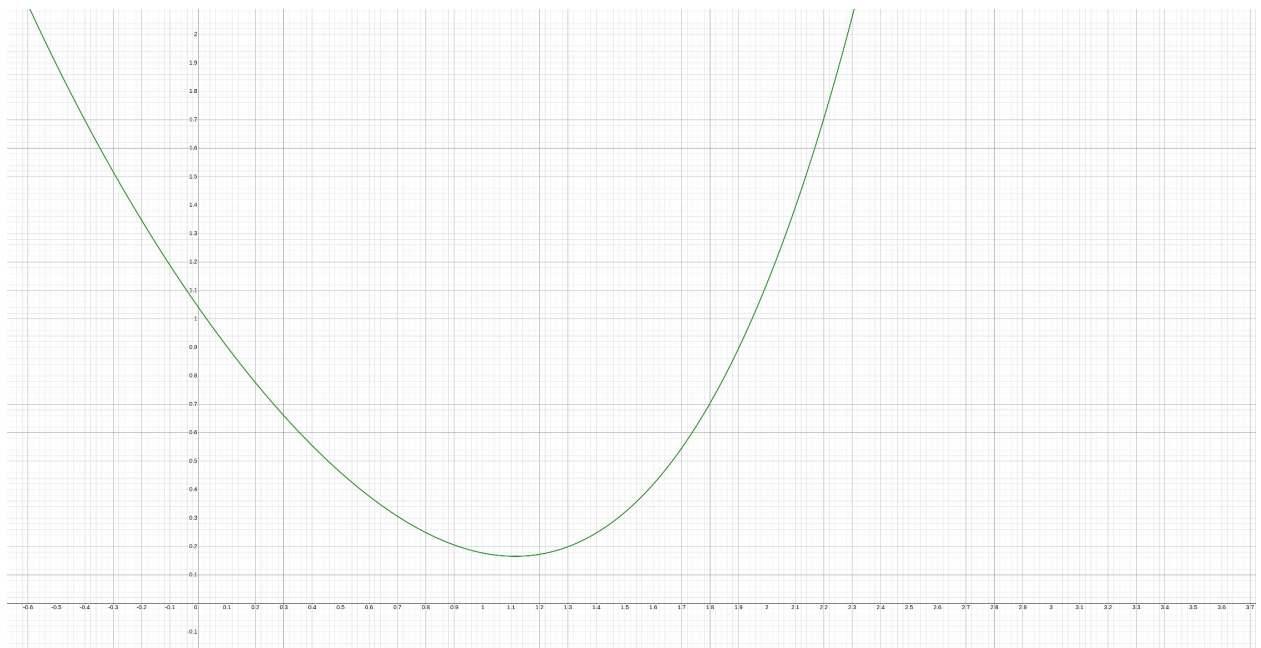
3. Построим полином Ньютона, используя таблицу разделенных разностей:

$$\begin{aligned}
 N_4(x) &= 0.605 - 0.7500(x - 0.351) + 0.7479(x - 0.351)(x - 0.867) + 0.2813(x - 0.351)(x - 0.867)(x - 1.315) \\
 &\quad + 0.0707(x - 0.351)(x - 0.867)(x - 1.315)(x - 2.013)
 \end{aligned}$$

Вычислим значение полинома Ньютона в точке:

$$N_4(x_1 + x_2 = 2.182) = 1.6447$$

Построим график многочлена Ньютона:



4. Построим интерполяционные сплайны линейный и квадратичный.

Кусочно-линейная аппроксимация

$$\begin{cases} a_1x + b_1, 0,351 \leq x \leq 0,867 \\ a_2x + b_2, 0,867 \leq x \leq 1,315 \\ a_3x + b_3, 1,315 \leq x \leq 2,013 \\ a_4x + b_4, 2,013 \leq x \leq 2,859 \end{cases}$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов строим систему:

$$\begin{cases} \begin{cases} 0,351a_1 + b_1 = 0,605 \\ 0,867a_1 + b_1 = 0,218 \end{cases} \\ \begin{cases} 0,867a_1 + b_1 = 0,218 \\ 1,315a_1 + b_1 = 0,205 \end{cases} \\ \begin{cases} 1,315a_1 + b_1 = 0,205 \\ 2,013a_1 + b_1 = 1,157 \end{cases} \\ \begin{cases} 2,013a_1 + b_1 = 1,157 \\ 2,859a_1 + b_1 = 5,092 \end{cases} \end{cases}$$

Решая каждую подсистему отдельно, получим:

$$a_1 = -0.75; b_1 = 0.868$$

$$a_2 = -0.029; b_2 = 0.243$$

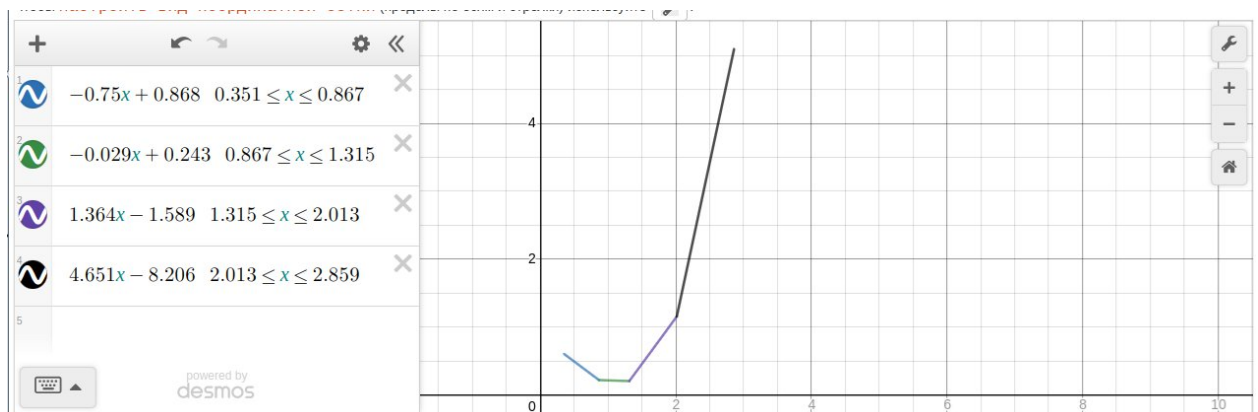
$$a_3 = 1.364; b_3 = -1.589$$

$$a_4 = 4.651; b_4 = -8.206$$

Тогда линейный сплайн имеет вид

$$\begin{cases} -0.75x + 0.868, 0.351 \leq x \leq 0.867 \\ -0.029x + 0.243, 0.867 \leq x \leq 1.315 \\ 1.364x - 1.589, 1.315 \leq x \leq 2.013 \\ 4.651x - 8.206, 2.013 \leq x \leq 2.859 \end{cases}$$

Построим график линейного сплайна



Кусочно-квадратичная аппроксимация

$$\varphi(x) = \begin{cases} a_1x^2 + b_1x + c_1, x \in [0.351, 1.315] \\ a_2x^2 + b_2x + c_2, x \in [1.315, 2.859] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} 0.123a_1 + 0.351b_1 + c_1 = 0.605 \\ 0.752a_1 + 0.867b_1 + c_1 = 0.218 \\ 1.729a_1 + 1.315b_1 + c_1 = 0.205 \end{cases} \\ \begin{cases} 1.729a_2 + 1.315b_2 + c_2 = 0.205 \\ 4.052a_2 + 2.013b_2 + c_2 = 1.157 \\ 8.174a_2 + 2.859b_2 + c_2 = 5.092 \end{cases} \end{cases}$$

Решая каждую подсистему отдельно, получим:

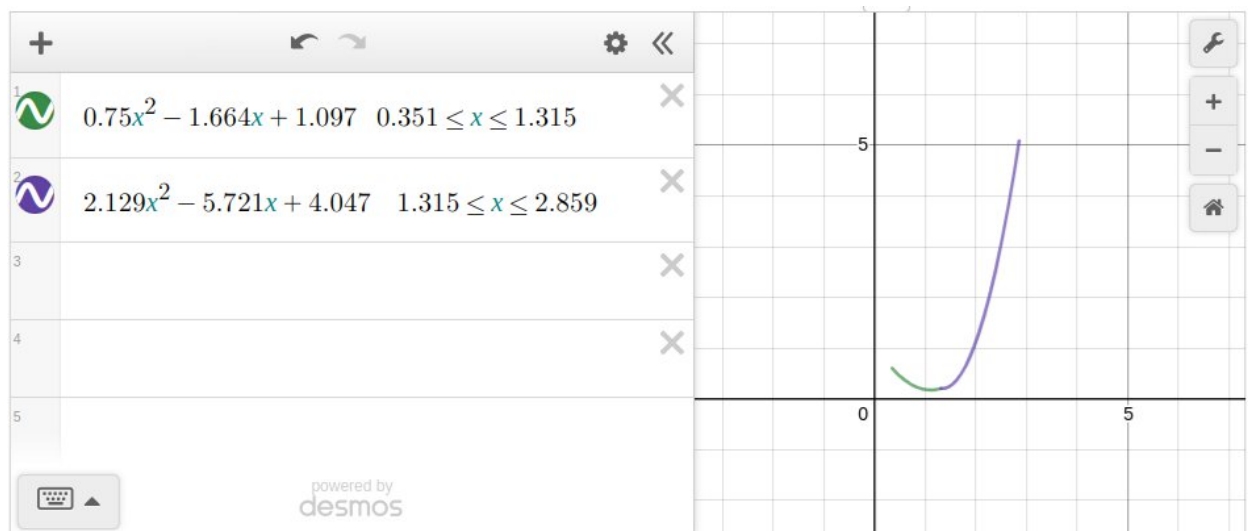
$$a_1 = 0.75; b_1 = -1.664; c_1 = 1.097$$

$$a_2 = 2.129; b_2 = -5.721; c_2 = 4.047$$

Тогда квадратичный сплайн имеет вид:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0.75x^2 - 1.664x + 1.097, & x \in [0.351, 1.315] \\ 2.129x^2 - 5.721x + 4.047, & x \in [1.315, 2.859] \end{cases}$$

Построим график квадратичного сплайна



5. На одном чертеже с графиком полиномов построим графики сплайнов

