Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии

Лабораторная работа №2. Методы решения системы линейных алгебраических уравнений

ОТЧЁТ

ПО ДИСЦИПЛИНЕ

«ПРОГРАММНЫЕ СРЕДСТВА РЕШЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ»

студента 4 курса 431 группы

специальности 10.05.01 Компьютерная безопасность

факультета компьютерных наук и информационных технологий

Серебрякова Алексея Владимировича

Преподаватель

доцент ___________ А. С. Гераськин

подпись, дата

Саратов 2023

Задание:

13	$5{,}554 \cdot x_1 + 0{,}252 \cdot x_2 + 0{,}496 \cdot x_3 + 0{,}237 \cdot x_4 = 0{,}442$ $0{,}580 \cdot x_1 + 4{,}953 \cdot x_2 + 0{,}467 \cdot x_3 + 0{,}028 \cdot x_4 = 0{,}464$ $0{,}319 \cdot x_1 + 0{,}372 \cdot x_2 + 8{,}935 \cdot x_3 + 0{,}520 \cdot x_4 = 0{,}979$ $0{,}043 \cdot x_1 + 0{,}459 \cdot x_2 + 0{,}319 \cdot x_3 + 4{,}778 \cdot x_4 = 0{,}126.$

2.3.1. Задание к лабораторной работе

Дана система четырех уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4. \end{cases}$$

1. Решите систему уравнений методом Гаусса.

2. Для матрицы системы найдите обратную.

3. Зная, что свободные члены исходной системы имеют абсолютную погрешность 0,001, найдите оценку абсолютной и относительной погрешности решения.

4. Преобразуйте систему к виду, необходимому для применения метода простой итерации. Выбрав в качестве начального приближения $\bar{x}^0 = \bar{0}$, найдите k_0 – необходимое число итеративных шагов для решения системы методом простой итерации с точностью 0,01.

5. Сделав k_0 итеративных шагов, найдите приближенное решение системы МПИ. Определите уточненную оценку погрешности решения.

6. Преобразуйте систему к виду, необходимому для применения метода (по варианту).

Метод по вариантам:

1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31 – метод Якоби;

2, 5, 8, 11, 14, 17, 20 ,23, 26, 29, 32 – метод Зейделя;

3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33 – метод релаксации.

Найдите приближенное решение системы с точностью 0,001.

Решение:

Данное задание была решено программным методом. В качестве решения будут рассмотрены входные/выходные данные на каждом этапе работы программы.

1. Решим исходную СЛУ методом Гаусса.

Вход: построчно введеные коэффициенты исходной СЛУ

```
5.554     0.252     0.496     0.237     0.442
 0.58     4.953     0.467     0.028     0.464
0.319     0.372     8.935      0.52     0.979
0.043     0.459     0.319     4.778     0.126
```

Обозначим строки СЛУ через a,b,c,d. Тогда можно ее привести к треугольному виду следующим образом:

- b = b + a * (- 0.580 / 5.554); c = c + a * (- 0.319 / 5.554); d = d + a * (- 0.043 / 5.554)
- c = c + b * (2.351 / 4.932); d = d + b * (- 0.41 / 4.932);
- d = d + c * (- 0.623 / 8.884);

Далее вычисляются корни, путем простых подстановок.

Выход: значения корней данной СЛУ с точностью до 4 знаков после запятой

```
x1 = 0.0664

x2 = 0.0761

x3 = 0.1034

x4 = 0.0116
```

2. Для матрицы системы найдем обратную. Чтобы найти обратную матрицу, нужно четыре раза решить исходную систему (с помощью того же метода Гаусса), в которой столбик свободных членов поочередно заменяется столбиками (1,0,0,0) / (0,1,0,0) / (0,0,1,0) / (0,0,0,1). Полученные решения системы заносим в соответствующие столбики обратной матрицы.

Вход: матрица СЛУ

Выход: последовательный вывод решений 4 модифицированных СЛУ и обратная матрица

```
x1 = 0.1815

x2 = -0.0207

x3 = -0.0057

x4 = 0.0008


x1 = -0.0078

x2 = 0.2036

x3 = -0.0071

x4 = -0.019
```

```
x1 = -0.0094

x2 = -0.0095

x3 = 0.113

x4 = -0.0066

x1 = -0.0079

x2 = 0.0009

x3 = -0.012

x4 = 0.2101


    0.1815   -0.0078   -0.0094   -0.0079
   -0.0207    0.2036   -0.0095    0.0009
   -0.0057   -0.0071     0.113    -0.012
    0.0008    -0.019   -0.0066    0.2101
```

3. Зная, что свободные члены исходной системы имеют абсолютную погрешность 0,001, найдем оценку абсолютной и относительной погрешности решения

Вход: матрицы исходной СЛУ и обратная к ней матрица

Выход: оценки норм (обозначены как ||A||), абсолютная (DEL(x)) и относительные (del(x)) погрешности

```
||A|| = 10.146

||A^-1 = 0.1853

||b|| = 0.979


del(b) = 0.00102145

DEL(x) <= 0.0001853

del(x) <= 0.00192038
```

4. Преобразуем систему к виду, необходимому для применения метода простой итерации.

Вход: матрица СЛУ

Выход: не предусмотрен (программа продолжает работу и переходит к следующему пункту задания, если возможно применение метода простой итерации)

По сути внутри данной проверки происходит следующее:

Обе части первого уравнения разделим на 5,554, второго – 4,953, третьего – на 8,935, четвертого – на 4,778, и система примет вид

x1 = – 0,0352·x2 – 0,2105·x3 – 0,0067·x4 + 0,1401

x2 = – 0,4122·x1 – 0,2654·x3 – 0,0783·x4 + 0,0893 x3 =– 0,0803·x1 – 0,0948·x2 – 0,1144·x4 + 0,0692

x4= – 0,0162·x1 – 0,1022·x2 – 0,0385·x3 + 0,0347.

Вычислим ||B||, чтобы обосновать возможность решения системы методом итерации.

||c|| = 1.3782

||B|| = max{0,2341; 0,5938; 0,2396; 0,1602} = 0,5938 < 1

5. Выбрав в качестве начального приближения x[0] = 0, найдем k[0] необходимое число итеративных шагов для решения системы методом простой итерации с точностью 0,001

Вход: матрица СЛУ

Выход: Итеративные шаги и погрешность приближенного решения

Внутри программы решается данное неравенство для вычисления количества шагов

Решим неравенство $\frac{\|B\|^k}{1-\|B\|} \cdot \|\bar{x}^1 - \bar{x}^0\| < \varepsilon$.

(0,5938)^k / (1-0,5938) * 1.3782 < 0.01

k > 7.6459 => k = 8

```
x1
0.0796
0.0937
0.1096
0.0264


x2
0.0644
0.0739
0.1013
0.0094


x3
0.0668
0.0766
0.1037
0.012


x4
0.0663
0.076
0.1033
0.0115
```

```
x5
0.0664
0.0761
0.1034
0.0116


x6
0.0664
0.0761
0.1034
0.0116


x7
0.0664
0.0761
0.1034
0.0116
```

```
x8
0.0664
0.0761
0.1034
0.0116



DEL(x^8) <= 0
```

6. Алгоритм Якоби

Вход: матрица СЛУ

Выход: таблица В и таблица результатов

```
  0.0796   -0.0454   -0.0893   -0.0427
  0.0937   -0.1171   -0.0943   -0.0057
  0.1096   -0.0357   -0.0416   -0.0582
  0.0264    -0.009   -0.0961   -0.0668


       0         0         0         0
  0.0796    0.0844    0.1032    0.0107
  0.0661    0.0762    0.1034    0.0116
  0.0664    0.0761    0.1034    0.0116
```