МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии

Лабораторная работа №4. Решение систем нелинейных уравнений

ОТЧЁТ

ПО ДИСЦИПЛИНЕ

«ПРОГРАММНЫЕ СРЕДСТВА РЕШЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ»

студента 4 курса 431 группы

специальности 10.05.01 Компьютерная безопасность

факультета компьютерных наук и информационных технологий

Серебрякова Алексея Владимировича

Преподаватель

доцент ___________ А. С. Гераськин

подпись, дата

Саратов 2023

4.2.1. Задание к лабораторной работе

1. Локализуйте корни системы уравнений графически.

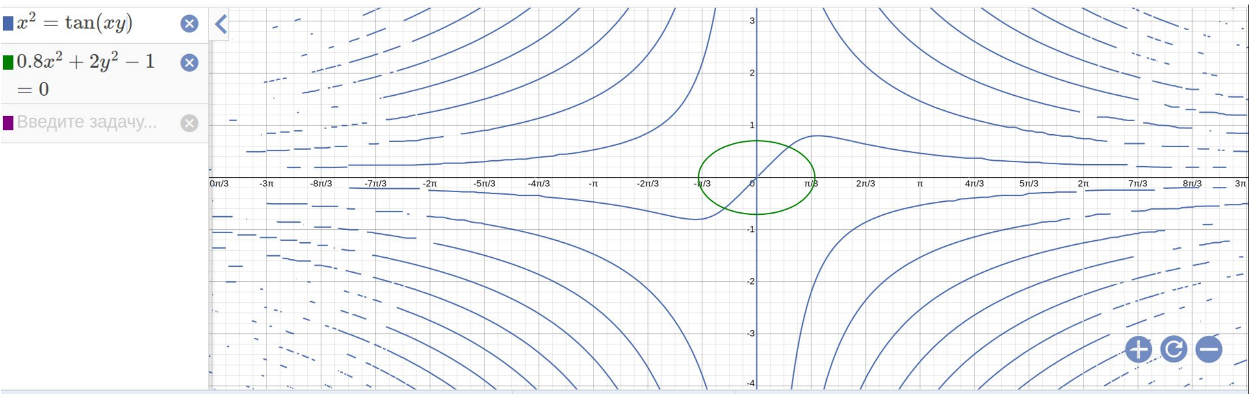
2. Найдите с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$ все корни системы нелинейных уравнений, используя методы Ньютона и наискорейшего спуска.

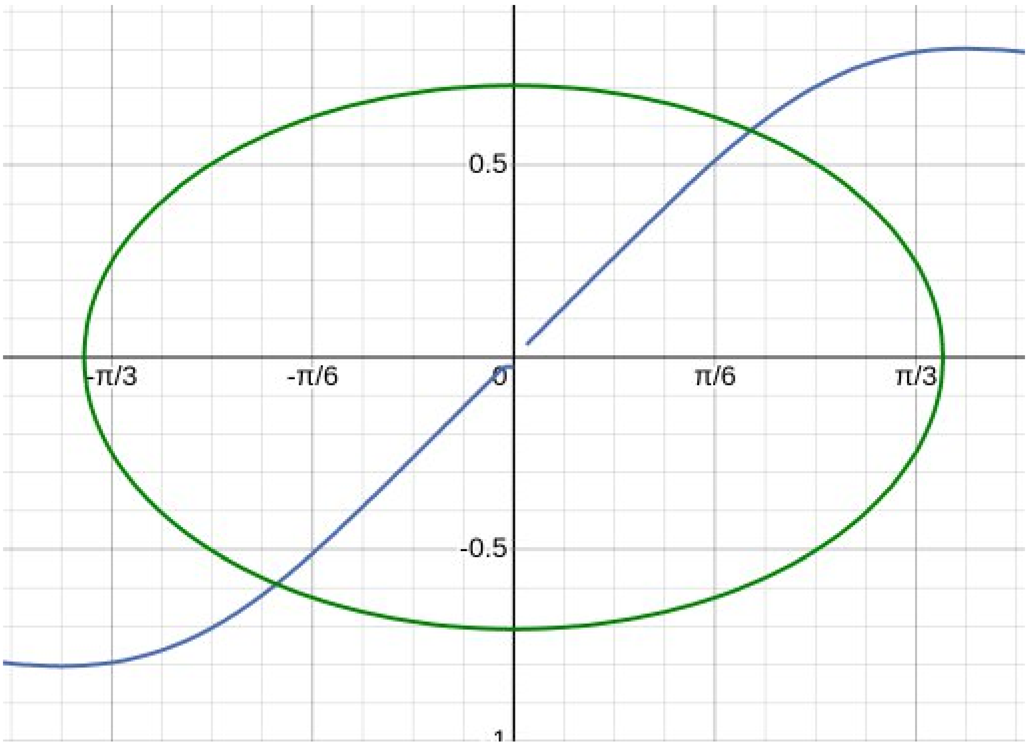
13 Вариант :

13	$\tan(x_1 x_2) - x_1^2 = 0$ $0.8x_1^2 + 2x_2^2 - 1 = 0$

$$\begin{cases} tan\,(xy) - x^2 = 0 \\ 0.8x^2 + 2y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

1. Построим графики функций:





Система имеет 1 корень на отрезке единичной дины $x_1 \epsilon\, [-1;0]$ и $x_2 \epsilon [-1;0]$

2. Построим итерационный процесс Ньютона и найдем с точностью до 6 знаков после запятой корень линейных уравнений методом Ньютона.

$$\bar{x}^{(k+1)} = \bar{x}^{(k)} - \left[J(\bar{x}^{(k)})\right]^{-1} \cdot F(\bar{x}^{(k)}) .$$

Найдем якобиан J

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

системы

$$\begin{cases} f\,(x_1,x_2) = tan\,(x_1 x_2) - {x_1}^2 = 0 \\ f\,(x_1,x_2) = 0.8{x_1}^2 + 2{x_2}^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Получим

$$J = \begin{bmatrix} -2x_1 + x_2(tan(x_1 x_2)^2 + 1) & x_1(tan(x_1 x_2)^2 + 1) \\ 1.6x_1 & 4x_2 \end{bmatrix}$$

Выберем начальное приближение

$$\bar{x}^{(0)} = \binom{-1}{0}$$

Вычислять будем до выполнения условия

$$\left\| \bar{x}^{k} - \bar{x}^{k-1} \right\| \le \varepsilon = 0{,}000\ 001$$

Найдем значение якобиана в выбранной точке, получим

$$J = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1.6 & 0 \end{bmatrix}$$

Обратная матрица к якобиану

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -0.625 \\ -1 & -1.25 \end{pmatrix}$$

Значение функции F:

$$F = \begin{pmatrix} -1 \\ -0.1999999996 \end{pmatrix}$$

Выполним первую итерацию:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.25 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.125 \\ -1.25 \end{pmatrix}$$

Внесем вычисления в таблицу:

k	$\bar{x}^k$	$\|\bar{x}^k - \bar{x}^{k-1}\|$
0	$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$	
1	$\begin{pmatrix} -1.125 \\ -1.25 \end{pmatrix}$	0.125
2	$\begin{pmatrix} -1.862043 \\ -0.357164 \end{pmatrix}$	0.737043
3	$\begin{pmatrix} -1.12374 \\ -0.476653 \end{pmatrix}$	0.738303
4	$\begin{pmatrix} -0.78131 \\ -0.55588 \end{pmatrix}$	0.34243
5	$\begin{pmatrix} -0.646181 \\ -0.584017 \end{pmatrix}$	0.135129
6	$\begin{pmatrix} -0.618367 \\ -0.589396 \end{pmatrix}$	0.027814
7	$\begin{pmatrix} -0.617116 \\ -0.589634 \end{pmatrix}$	0.001251
8	$\begin{pmatrix} -0.617113 \\ -0.589634 \end{pmatrix}$	3.e-06
9	$\begin{pmatrix} -0.617113 \\ -0.589634 \end{pmatrix}$	0

3. Построим итерационный процесс метода наискорейшего спуска

$$\begin{pmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{k} \\ x_2^{k} \end{pmatrix} - \alpha_k \begin{pmatrix} \Phi'_{x_1}(x_1^k, x_2^k) \\ \Phi'_{x_2}(x_1^k, x_2^k) \end{pmatrix}.$$

Построим функцию $\Phi(x_1;x_2)$

$\Phi(x_1;x_2) = f_1^2(x_1,x_2) + f_2^2(x_1,x_2) = (-x\text{^}2\ +\ tan(x*y))\text{^}2\ +\ 4.0*(-0.5\ +\ y\text{^}2\ +\ 0.4*x\text{^}2)\text{^}2$

$$\left(-x^2+\tan(xy)\right)^2+4\left(\frac{2x^2}{5}+y^2-\frac{1}{2}\right)^2$$

Найдем частную производную $\Phi'_{x_1}(x_1;x_2)$

$$\frac{32x\left(\frac{2x^2}{5}+y^2-\frac{1}{2}\right)}{5}+\left(2y\left(\tan^2(xy)+1\right)-4x\right)\left(-x^2+\tan(xy)\right)$$

Найдем частную производную $\Phi'_{x_2}(x_1;x_2)$

$$2x\left(-x^{2}+\tan\left(xy\right)\right)\left(\tan^{2}\left(xy\right)+1\right)+16y\left(\frac{2x^{2}}{5}+y^{2}-\frac{1}{2}\right)$$

Путем перебора выбираем наилучший шаговый множитель $\alpha = 0.13$ который оставим постоянным. На первой итерации получим $\begin{pmatrix} -0.5632 \\ -0.26 \end{pmatrix}$ и только после 57 итераций получим ответ:

$$\begin{pmatrix} -0.61711843 \\ -0.58963237 \end{pmatrix}$$