



**Universität
Zürich** ^{UZH}

Psychologisches Institut

Theoretische Grundlagen

Lineare Einfachregression und Strukturgleichungsmodelle

Alain Masato Stocker

2021

INHALT

| | | |
|-------|--|----|
| 1 | Theoretische Grundlagen | 3 |
| 1.1 | Lineare Einfachregression | 3 |
| 1.1.1 | Einführung in die lineare Einfachregression | 3 |
| 1.1.2 | Zufällige Messfehler in der linearen Einfachregression | 6 |
| 1.2 | Strukturgleichungsmodelle..... | 11 |
| 1.2.1 | Modellspezifikation durch Pfaddiagramme..... | 12 |
| 1.2.2 | Modellidentifikation und Parameterschätzung | 17 |
| 2 | Literaturverzeichnis | 21 |

1 THEORETISCHE GRUNDLAGEN

Im vorliegenden Kapitel sollen die theoretischen Grundlagen der linearen Einfachregression sowie von SEMs leicht verständlich und möglichst ohne komplexe mathematische Abhandlungen erörtert werden. Entsprechend wird neben den Grundkenntnissen aus einer einführenden Statistikvorlesung kein Vorwissen vorausgesetzt.

1.1 LINEARE EINFACHREGRESSION

1.1.1 Einführung in die lineare Einfachregression

Im Folgenden wird lediglich eine kurze Zusammenfassung zur linearen Regression mit Fokus auf messfehlerbehaftete Daten vorgestellt.¹

Ziel der linearen Einfachregression ist es, eine Variable anhand einer anderen Variable vorherzusagen (Field et al., 2012, S. 246). Eine solche Vorhersage ist besonders dann sinnvoll, wenn eine der beiden Variablen einfacher, schneller oder kostengünstiger zu messen ist als die andere (Bortz & Schuster, 2010, S. 183). Bei der vorhergesagten Variable handelt es sich dabei um das sogenannte *Kriterium*, während die für die Vorhersage genutzte Variable als *Prädiktor* bezeichnet wird (Sedlmeier & Renkewitz, 2013, S. 237). Sofern ein linearer Zusammenhang zwischen Prädiktor und Kriterium besteht, kann die Beziehung zwischen den beiden Variablen in der Gesamtheit durch ein Modell in Form einer Geraden – der sogenannten *wahren Regressionsgeraden* – beschrieben werden (Bortz & Schuster, 2010, S. 192):

$$y = \beta_0 + \beta_1 * x \tag{1}$$

Formel (1) besagt, dass in der Gesamtpopulation das Kriterium y aus dem Achsenabschnitt β_0 addiert mit dem Produkt der Steigung β_1 und dem Prädiktor x hervorgeht.

¹ Für eine ausführlichere Einführung in die lineare Einfachregression für Psychologen und Sozialwissenschaftler ohne mathematischen Hintergrund sei eine Lektüre der Arbeiten von Bortz und Schuster (2010, S. 183–198), Field et al. (2012, S. 245–260), Sedlmeier und Renkewitz (2013, S. 235–266) oder James et al. (2017, S. 59–71) empfohlen.

Wenn also die beiden Regressionskoeffizienten β_0 und β_1 bekannt sind, kann durch Einsetzen des gemessenen Wertes von x die Ausprägung von y vorhergesagt werden. Um β_0 und β_1 zu ermitteln, müssten bei sämtlichen Mitgliedern der Grundgesamtheit deren Werte für den Prädiktor sowie das Kriterium erfasst werden. Anschließend könnten die einzelnen Datenpunkte in ein Streudiagramm eingetragen und eine den Zusammenhang optimal abbildende Gerade durch die Punktwolke gelegt werden, wobei diese Gerade den Zusammenhang genau dann optimal abbildet, wenn sie die Summe der quadrierten Vorhersagefehler minimiert (siehe Sedlmeier & Renkewitz, 2013, S. 243–246). Dabei stellen die wahren Regressionskoeffizienten β_0 sowie β_1 den Achsenabschnitt respektive die Steigung der Geraden dar. Der Achsenabschnitt β_0 gibt den vorhergesagten Wert von y an, wenn der Prädiktor x exakt null beträgt. Dieser Wert ist häufig nicht sinnvoll interpretierbar und deshalb selten von Interesse (Bortz & Schuster, 2010, S. 188). Die Steigung β_1 repräsentiert den wahren, in der Grundgesamtheit effektiv vorhandenen Zusammenhang zwischen dem Prädiktor x und dem Kriterium y und kann so interpretiert werden, dass sich bei einem Anstieg von x um eine Einheit der Wert von y um den Betrag der Steigung verändert (Bortz & Schuster, 2010, S. 188).

Da eine Erfassung von x und y für die gesamte Grundgesamtheit in der Praxis nicht umsetzbar ist, handelt es sich bei der wahren Regressionsgeraden um eine rein theoretische Gerade, deren Eigenschaften in Wirklichkeit nicht bekannt sind. Zur Ermittlung der Regressionsgeraden wird stattdessen eine repräsentative Eichstichprobe verwendet (Bortz & Schuster, 2010, S. 184). Die daraus resultierende *geschätzte* Regressionsgerade ist eine auf den Stichprobendaten basierende Approximation der wahren Regressionsgeraden in der Grundgesamtheit und kann wie folgt beschrieben werden (Bortz & Schuster, 2010, S. 187):

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 * x \quad (2)$$

Die Werte der beiden Schätzer $\hat{\beta}_0$ und $\hat{\beta}_1$ können mit einer mathematischen Formel basierend auf den Messdaten der Eichstichprobe bestimmt werden (siehe Bortz & Schuster, 2010, S. 186). Die Gleichung der Regressionsgeraden \hat{y} in Formel (2) ermöglicht die Berechnung eines beliebigen Punktes auf der Geraden, indem das Produkt

aus der geschätzten Steigung $\hat{\beta}_1$ und dem Prädiktor x mit dem geschätzten Achsenabschnitt $\hat{\beta}_0$ addiert wird. Die Steigung $\hat{\beta}_1$ ist dabei von besonderem Interesse. Sie steht für die durch eine Eichstichprobe ermittelte Beziehung zwischen Prädiktor und Kriterium, welche eine Schätzung der wahren Beziehung β_1 in der Grundgesamtheit darstellt. Mit Hilfe der geschätzten Regressionsgeraden können nun die Werte des Kriteriums für Personen vorhergesagt werden, welche nicht zur Eichstichprobe gehören, indem deren Messwerte für x in Formel (2) eingefügt werden (Bortz & Schuster, 2010, S. 184).

In Sozialwissenschaften handelt es sich bei Zusammenhängen zwischen zwei Variablen im Gegensatz zu Naturwissenschaften nicht um deterministische Beziehungen, sondern um stochastische (siehe Sedlmeier & Renkewitz, 2013, S. 238–243). Somit liegen die empirisch erfassten Datenpunkte nicht exakt auf der geschätzten Regressionsgeraden, sondern weichen zufällig entlang der y-Achse nach oben oder unten von ihr ab. Soll nun ein empirisch ermittelter Datenpunkt einer Person n beschrieben werden, geschieht dies mit folgender Gleichung:

$$y_n = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 * x_n + \hat{e}_n \quad (3)$$

Der tatsächlich beobachtete Datenpunkt y_n von Person n entspricht deren vorhergesagtem Punkt auf der geschätzten Regressionsgeraden addiert mit dem Fehlerterm \hat{e}_n (engl. *error*), welcher in der Literatur häufig mit $\hat{\epsilon}_i$ (Epsilon) bezeichnet wird.² Der Fehlerterm \hat{e}_n wird Residuum genannt und beschreibt für eine Person n die zufällige Abweichung des empirischen Datenpunktes entlang der y-Achse vom vorhergesagten Punkt auf der geschätzten Regressionsgeraden. Residuen repräsentieren den Anteil der Kriteriumsvariable, der nicht durch den Prädiktor vorhergesagt werden kann und stattdessen auf Messfehler oder nicht mit dem Prädiktor zusammenhängende Einflussgrößen zurückzuführen ist (James et al., 2017, S. 63).

² In der vorliegenden Arbeit wird jedoch auf die gängige Bezeichnung verzichtet und stattdessen eine an Sedlmeier und Renkewitz (2013) angelehnte Notation verwendet, da der griechische Buchstabe ϵ sowie der Index i in einem späteren Kapitel andere Bedeutungen erhalten werden und dies zu Verwirrung führen könnte.

1.1.2 Zufällige Messfehler in der linearen Einfachregression

Gemäss der Voraussetzung messfehlerbefreiter Daten (Malinvaud, 1980, S. 83; Berry, 1993, S. 12) sollten für die Schätzung von Regressionskoeffizienten sowohl Prädiktor als auch Kriterium frei von etwaigen Messfehlern sein. Während damit sowohl systematische als auch unsystematische Messfehler gemeint sind, befasst sich vorliegende Arbeit ausschliesslich mit Letztgenannten. Für den Umgang mit systematischen Messfehlern im Zusammenhang mit Regressionsmodellen sei Berry (1993, S. 51–57) empfohlen.

In der Klassischen Testtheorie werden Messfehler als zufällige Abweichung vom wahren Wert betrachtet (Bühner, 2011, S. 47). Der wahre Wert bezeichnet dabei die tatsächliche Ausprägung einer Person auf einem Merkmal (Eid et al., 2017, S. 843). Diese bleibt bei wiederholter Messung konstant (Bortz & Schuster, 2010, S. 42–44). Ein Messwert u_n von Person n setzt sich somit gemäss der Klassischen Testtheorie wie folgt zusammen (Eid et al., 2017, S. 847):

$$u_n = \tau_n + RME_n \quad (4)$$

Ein empirisch beobachteter Wert u_n von Person n enthält gemäss Formel (4) neben der wahren Merkmalsausprägung τ_n stets einen zufälligen Messfehler RME_n (engl. *random measurement error*). Dieser zufällige Messfehler RME_n nimmt über unendlich viele Messungen desselben Merkmals von Person n einen Mittelwert von null an und ist in der Regel normalverteilt, wodurch sich dessen Effekt auf u_n ausmittelt (siehe Bühner, 2011, S. 41–51; Eid et al., 2017, S. 846–849). Der Mittelwert des beobachteten Wertes u_n über unendlich viele Messungen – auch Erwartungswert genannt – entspricht folglich dem wahren Wert τ_n . In der Praxis sind unendlich viele Messungen nicht umsetzbar, weshalb die Messwerte einer einzelnen Person jeweils um den Betrag des Messfehlers RME_n verfälscht sind. Da diese Messfehler jedoch bei jedem Mitglied einer Stichprobe auftreten und deren wahren Werte zufällig nach oben oder unten verfälschen, lässt sich daraus schlussfolgern, dass sich auf Ebene der Stichprobe die Auswirkungen von Messfehlern ausmitteln (siehe Bühner, 2011, S. 47–48).

Mit Hinblick auf die lineare Einfachregression stellt sich nun die Frage, was die Konsequenzen sind, wenn die Voraussetzung der messfehlerfreien Daten respektive perfekten Reliabilität ignoriert wird. Autoren wie Cochran (1968), Berry (1993, S. 51) oder Hutcheon et al. (2010) unterscheiden zur Beantwortung dieser Frage zwischen Messfehlern auf dem Prädiktor und Messfehlern auf dem Kriterium. Dieser Ansatz wurde für die vorliegende Arbeit übernommen.

1.1.2.1 Zufällige Messfehler auf der Kriteriumsvariable

Formel (3) beschreibt einen empirisch ermittelten Datenpunkt y_n der Person n . Wenn dieser nun mit einem zufälligen Messfehler auf der Kriteriumsvariable behaftet ist, verändert sich dessen Berechnung wie folgt (Hutcheon et al., 2010):

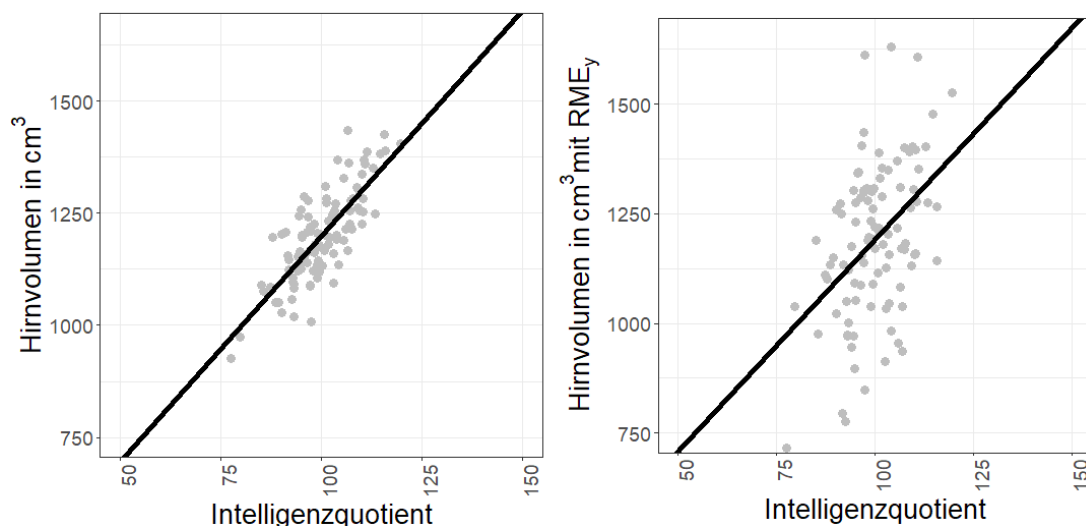
$$y_n = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 * x_n + \hat{e}_n + RME_{y_n} \quad (5)$$

Zum vorhergesagten Wert auf der geschätzten Regressionsgeraden und der zufälligen vertikalen Abweichung davon wird nun ein weiterer Wert hinzuaddiert. Es handelt sich hierbei um RME_{y_n} , dem zufälligen Messfehler von Person n auf der Kriteriumsvariable y . Mathematisch hat die Addition von RME_{y_n} zur Folge, dass sich das Residuum \hat{e}_n vergrößert, wodurch sich der Anteil der nicht durch den Prädiktor erklärbaren Varianz im Regressionsmodell erhöht (Hutcheon et al., 2010). Praktisch bedeutet dies eine Zunahme der vertikalen Streuung entlang der y-Achse für die empirisch ermittelten Datenpunkte. Die Schätzung des Regressionskoeffizienten $\hat{\beta}_1$ wird jedoch durch die grössere vertikale Streuung der Datenpunkte gemäss Hutcheon et al. (2010) nicht beeinflusst. Dies lässt sich in Abbildung 1 beobachten, welche zu Anschauungszwecken erfundene Messdaten zu Intelligenz und Hirngrösse von 25 Personen einer Eichstichprobe sowie die dazugehörige geschätzten Regressionsgeraden zeigt. Das linksseitige Panel zeigt die Datenpunkte ohne Messfehler, während das Panel rechts exakt dieselben Daten zeigt, jedoch mit einem zufälligen Messfehler auf der Kriteriumsvariable, beispielsweise durch leichte Bewegungen des Kopfes während der Messung im MRT-Gerät verursacht. Wie von Hutcheon et al. (2010) beschrieben, ist die geschätzte Regressionsgerade im Panel rechts nahezu identisch mit derjenigen aus dem Panel links, obwohl rechts die Datenpunkte deutlich stärker vertikal streuen.

Gemäss Hutcheon et al. (2010), Formel (5) sowie den Beispieldaten aus Abbildung 1 vergrössern sich bei Messwerten mit Fehlern auf der Kriteriumsvariable die Residuen. Es entsteht also eine stärkere Abweichung der Datenpunkte von deren vorhergesagten Werten auf der geschätzten Regressionsgeraden. Folglich fällt auch der Determinationskoeffizient R^2 niedriger aus, da die Gesamtvarianz des Kriteriums durch die stärkere vertikale Streuung ansteigt, während die Parameter der Regressionsgeraden praktisch unverändert bleiben, wodurch der Anteil der durch das Regressionsmodell erklärten Varianz sinkt. Die geschätzte Regressionsgerade beschreibt somit den Zusammenhang zwischen Prädiktor und Kriterium schlechter.

Abbildung 1

Streudiagramm mit geschätzter Regressionsgeraden und zufälligen Messfehlern auf dem Kriterium



Anmerkung. Daten zu Anschauungszwecken frei erfunden.

Gemäss den Ausführungen von Hutcheon et al. (2010) fällt der Standardfehler (engl. *standard error*, *SE*) von $\hat{\beta}_1$ grösser aus, wenn die Werte des Kriteriums mit einem zufälligen Messfehler behaftet sind. Die Schätzung des Regressionskoeffizienten $\hat{\beta}_1$ ist somit theoretisch betrachtet im Mittel zwar korrekt, jedoch umso unpräziser, je grösser die Messfehler auf der Kriteriumsvariable – und damit einhergehend die Residuen – ausfallen (Hutcheon et al., 2010).

1.1.2.2 Zufällige Messfehler auf der Prädiktorvariable

Die in Formel (3) präsentierte Berechnung eines beliebigen Datenpunktes verändert sich bei zufälligen Messfehlern auf der Prädiktorvariable wie folgt (Fuller & Hidiroglou, 1978):

$$y_n = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 * u_n + \hat{e}_n$$

(6)

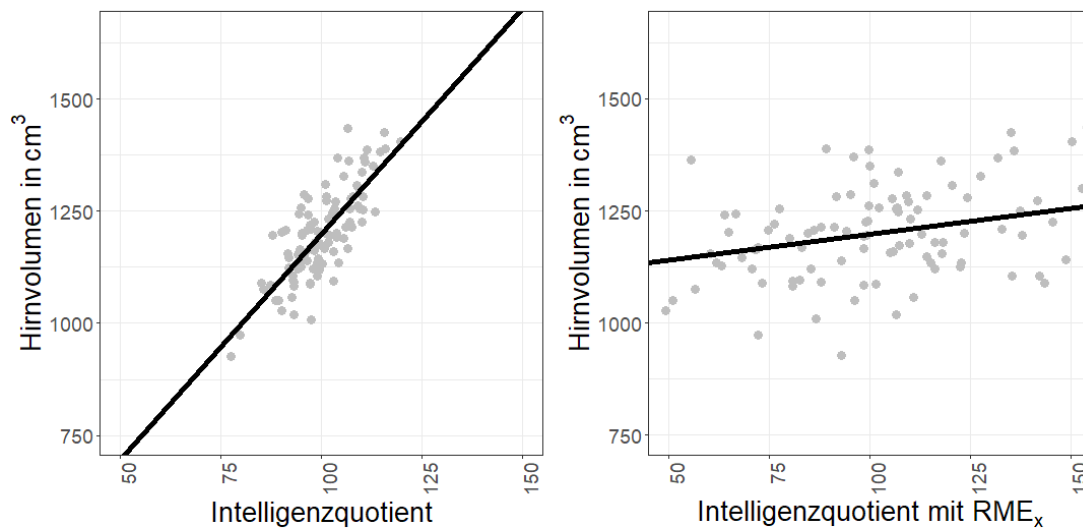
$$\text{mit } u_n = x_n + RME_x$$

Die gemessene Ausprägung einer Person n auf der Prädiktorvariable x entspricht nun nicht mehr x_n . Stattdessen wird dieser Messwert nun mit u_n bezeichnet und setzt sich aus der Summe der tatsächlichen Ausprägung x_n sowie eines zufälligen Messfehlers RME_{x_n} zusammen. Die gemessenen Werte u_n des Prädiktors x streuen somit entlang der x-Achse in die Breite, wodurch die geschätzte Regressionsgerade immer weiter abflacht und deren Steigung $\hat{\beta}_1$ auf null zugeht (Carroll, 2014). Diese Abflachung der geschätzten Regressionsgeraden aufgrund eines messfehlerbehafteten Prädiktors ist ein seit längerer Zeit bekanntes Phänomen und wird im Englischen *attenuation*, *attenuation to the null* oder *regression dilution bias* genannt (Hutcheon et al., 2010; Carroll, 2014).

Abbildung 2 ist analog zu Abbildung 1 aufgebaut, mit dem Unterschied, dass das rechte Panel nun die Daten mit einem Messfehler auf der Prädiktorvariable zeigt. Eine mögliche Ursache für Messfehler bei der Erfassung des Intelligenzquotienten könnten beispielsweise die Motivation, gesundheitliche Verfassung, Raumtemperatur oder zahlreiche weitere Einflussfaktoren während der Durchführung des Intelligenztests sein. Es ist ersichtlich, dass im Panel rechts aufgrund der Messfehler die einzelnen Datenpunkte stärker horizontal streuen und die geschätzte Regressionsgerade deutlich abgeflacht ist. Der wahre Zusammenhang zwischen Intelligenz und Hirngröße in der Grundgesamtheit wird im rechten Panel also deutlich unterschätzt.

Abbildung 2

Streudiagramm mit geschätzter Regressionsgeraden und zufälligen Messfehlern auf dem Prädiktor



Anmerkung. Daten zu Anschauungszwecken frei erfunden.

Gemäss Cochran (1968), Fuller (1987, S. 3), Liu und Salvendy (2009), Hutcheon et al. (2010) oder Carroll (2014) kann der aufgrund eines messfehlerbehafteten Prädiktors unterschätzte Regressionskoeffizient $\hat{\beta}_1$ wie folgt berechnet werden:

$$\hat{\beta}_1 = \beta_1 * R_x \quad (7)$$

Der geschätzte Regressionskoeffizient $\hat{\beta}_1$ entspricht also der Steigung der wahren Regressionsgeraden multipliziert mit der Reliabilität R_x des Prädiktors, welcher in diesem Zusammenhang im Englischen auch *attenuation factor* (Carroll, 2014) oder *reliability ratio* (Fuller, 1987) genannt wird. Die Reliabilität R_x misst dabei den Anteil der Varianz der wahren Werte x an der Varianz der tatsächlich gemessenen Werte u . Es folgt daraus, dass die Reliabilität des Prädiktors umso geringer wird, je grösser die Streuung der Messfehler im Vergleich zur natürlichen Streuung des Prädiktors ausfällt, was wiederum eine stärkere Abschwächung des geschätzten Zusammenhangs $\hat{\beta}_1$ in Richtung null zur Folge hat. Kurzum: Grosse Messfehler führen zu einer starken Abflachung der geschätzten Regressionsgeraden.

Eine Abflachung der geschätzten Regressionsgeraden hat zur Folge, dass ein tatsächlich in der Grundgesamtheit existierender Zusammenhang zwischen Prädiktor und Kriterium nur in abgeschwächter Form oder gar nicht gefunden wird (Hutcheon et

al., 2010). Somit fällt die statistische Power solcher Untersuchungen niedriger aus (Carroll, 2014), was dazu führen kann, dass Alternativhypothesen fälschlicherweise abgelehnt werden.

1.2 STRUKTURGLEICHUNGSMODELLE

Im folgenden Kapitel werden lediglich Aspekte von SEMs thematisiert, die relevant für das Verständnis der im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Monte-Carlo-Simulationen sind.³

Bei SEMs handelt es sich um eine Familie statistischer Verfahren zur Überprüfung von Hypothesen über Beziehungen zwischen Variablen (Steinmetz, 2015, S. 4). Dabei wird ein Modell spezifiziert, das die einzelnen Variablen sowie deren theoretisch angenommenen Zusammenhänge untereinander mit Hilfe mathematischer Gleichungen abbildet. Anschliessend können die Varianzen und Kovarianzen empirisch erhobener Daten zur Schätzung der Ausprägung von Modellparametern genutzt werden. Bei Modellparametern handelt es sich dabei um Zusammenhänge zwischen Variablen sowie um die Varianzen einzelner latenter Variablen, deren Ausprägungen unbekannt sind. Die Variablen eines solchen Modells können abhängig oder unabhängig, kategorial oder metrisch sowie manifest – ein Synonym für beobachtbar – oder latent sein (Schinka et al., 2003, S. 607). Damit wäre bereits ein erster entscheidender Unterschied zu einfachen linearen Regressionsmodellen gefunden, welche sich bekanntlich lediglich mit den Zusammenhängen zwischen latenten Variablen in Form eines Kriteriums und eines Prädiktors befassen (Field et al., 2012, S. 246). Ein weiterer wichtiger Unterschied findet sich in der Eigenschaft von SEMs, Messfehler explizit als festen Bestandteil eines Modells zu berücksichtigen und dadurch die Bereinigung von messfehlerbedingten Effekten auf Schätzungen zu ermöglichen, was

³ Für eine ausführlichere Einführung in SEMs sei die Lektüre von Bollen (1989), Schinka et al. (2003, S. 607–629), Raykov und Marcoulides (2006), Bagozzi und Yi (2012), Hoyle (2012) oder Kline (2016) empfohlen. Mit Hinblick auf die praktische Anwendung von SEMs in R R Core Team (2021) sowie durch das R-Paket lavaan Rosseel (2012) sei darüber hinaus auf Steinmetz (2015) und Rosseel (2021) verwiesen. Eine kostenlose und frei zugängliche Alternative zu den bereits genannten Werken findet sich bei Hallquist (2017), welcher sämtliche Unterlagen seiner Vorlesung zu SEMs an der Penn State University inklusive den dazugehörigen R-Skripts und Demonstrationen online auf GitHub zur Verfügung gestellt hat.

in der Literatur immer wieder als Vorteil angepriesen wird (siehe Nachtigall et al., 2003; Schinka et al., 2003, S. 609; Raykov & Marcoulides, 2006, S. 1; Eid et al., 2017, S. 966). Aufgrund dieser Eigenschaft wird beispielsweise von Ree und Carretta (2006) oder Shear und Zumbo (2013) für messfehlerbehaftete Daten auf SEMs als Alternative zu herkömmlichen Regressionsmodellen oder bekannten Verfahren zum Ausgleich des *regression dilution bias* hingewiesen (siehe Knuiman et al., 1998; Frost & Thompson, 2000). Weiter können SEMs nicht nur Querschnittsdaten zugrundeliegende Zusammenhänge modellieren, sondern können über mehrere Stichproben oder für rekursive Strukturen, Mehrebenenanalysen, Mediatoranalysen, Längsschnittdaten sowie Wachstumsraten in konfirmatorischer und explorativer Manier verwendet werden. Eine einsteigerfreundliche Auflistung der zahlreichen Möglichkeiten von SEMs sowie dazugehörige Empfehlungen weiterführender Literatur findet sich in Bagozzi und Yi (2012).

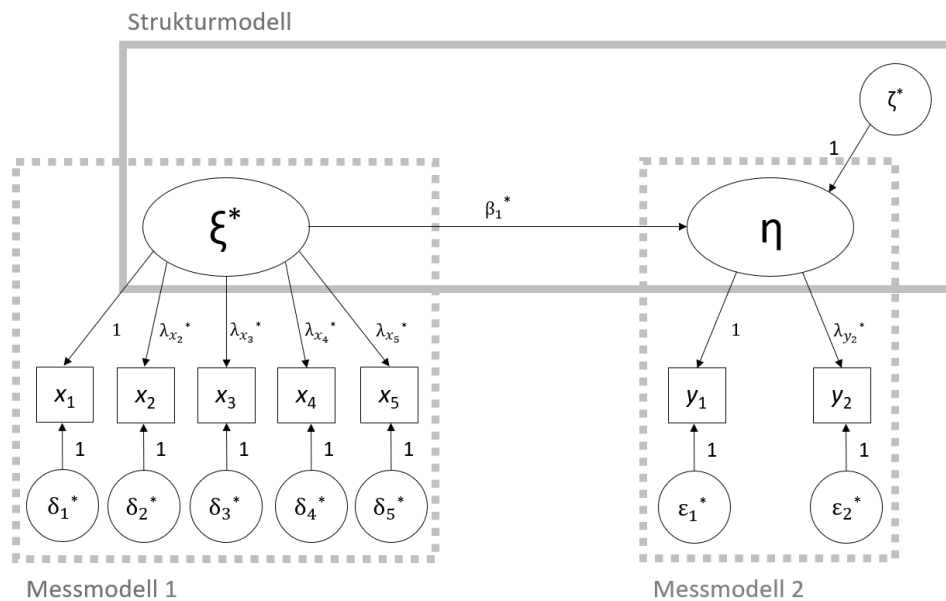
1.2.1 Modellspezifikation durch Pfaddiagramme

Am Anfang einer jeden Analyse mit SEMs steht die Modellspezifikation (siehe Kline, 2016, S. 118). Im Rahmen der Modellspezifikation werden die Bestandteile eines theoretischen Modells oder einer hypothetischen Annahme definiert und in Verbindung zueinander gebracht. Im Anschluss daran können die zu schätzenden Parameter, beispielsweise Zusammenhänge zwischen latenten Variablen, anhand bestimmter Regeln festgelegt werden (siehe Raykov & Marcoulides, 2006, S. 16–20). Kline (2016, S. 119) betont, dass es sich bei der Modellspezifikation um den wichtigsten Schritt handelt, da sämtliche nachfolgenden Prozesse davon abhängen, wie gut das SEM die den Hypothesen zugrundeliegende Theorie abbildet. Das Ergebnis einer solchen Modellspezifikation kann durch ein Gleichungssystem oder ein Pfaddiagramm dargestellt werden. Abbildung 3 zeigt ein solches Pfaddiagramm.⁴

⁴ Das Pfaddiagramm folgt bei der Benennung der einzelnen Variablen den gängigen Konventionen der Software LISREL (engl. *linear structural relations*) nach Jöreskog und Sörbom (2001). Diese setzt auf eine Mischung aus griechischen und lateinischen Buchstaben für die Notation von Gleichungen und Matrizen. Alternativ dazu existiert gemäss Bagozzi und Yi (2012) die sogenannte Bentler-Weeks-Konvention nach Bentler und Weeks (1980), welche ausschliesslich lateinische Buchstaben zur Notation von Gleichungen verwendet. Eine übersichtliche Gegenüberstellung der beiden Konventionen in Form einer Tabelle sowie eine detaillierte Erläuterung, nach welchem Schema die jeweiligen Parameter zu benennen sind, findet sich in Bagozzi und Yi (2012).

Abbildung 3

Beispiel eines einfachen Pfaddiagramms



Sowohl ξ (ξ_i) als auch η (Eta) stellen latente Variablen dar, die jeweils durch Ellipsen repräsentiert werden. Der unidirektionale Pfeil von ξ in Richtung η deutet eine Regressionsbeziehung zwischen den beiden Variablen an, wobei η mit β_1 auf ξ regressed. Unter beiden latenten Variablen befinden sich mehrere Quadrate. Diese stehen für manifeste Variablen, also beobachtbare Größen, die als Indikatoren für die latente Variable genutzt werden können. Welche latenten Variablen von einer beliebigen manifesten Variable abgebildet werden, kann an den Faktorladungen λ (Lambda) der manifesten Variable erkannt werden. Diese unidirektionalen Pfeile haben ihren Ursprung in mindestens einer latenten Variable und deuten auf die manifeste Variable. Neben den beiden latenten Variablen sowie den manifesten Variablen sind weitere Variablen abgebildet, welche alle durch Kreise dargestellt werden und mit den griechischen Buchstaben δ (Delta), ε (Epsilon) und ζ (Zeta) gekennzeichnet sind. Hierbei handelt es sich um Fehlerterme. Je nach Konvention können diese auch lediglich durch einen unidirektionalen Pfeil angedeutet werden, der auf eine Variable weist. Bei Fehlertermen handelt es sich stets um latente Variablen, weil sie nie direkt erfasst werden können (Raykov & Marcoulides, 2006, S. 18). Weiter werden deren Faktorladungen häufig weggelassen, da diese immer exakt 1 betragen. Die Fehlerterme der manifesten Variablen stellen Messfehler dar, während Fehlerterme der latenten Variablen für den theoretischen Fehler stehen (Bagozzi & Yi, 2012). Theoretische Fehler

werden auch Störgrössen (engl. *disturbances*) genannt und können gemäss Raykov und Marcoulides (2006, S. 18–19) verstanden werden als unerklärte Varianz in der latenten Variable, welche nicht durch andere Variablen im Pfaddiagramm erklärt werden kann. Im Falle des Modells in Abbildung 3 könnten neben ξ auch weitere Einflussfaktoren bei der Ausprägung von η eine Rolle spielen. Da diese jedoch nicht Teil des Modells sind, kann lediglich ein Teil der Varianz von η aufgeklärt werden – nämlich durch ξ . Der Rest wird dem theoretischen Fehler ζ zugeschrieben. Beim gezeigten Modell in Abbildung 3 handelt es sich um eine einfache Struktur, bei der jede manifeste Variable lediglich auf eine einzige latente Variable lädt. Es wären jedoch auch komplexere Modelle denkbar, bei der beispielsweise bestimmte manifeste Variablen auf mehrere latente Variablen laden. Auch könnten Variablen durch einen bidirektionalen Pfeil miteinander verbunden sein, was auf eine Kovarianz hindeutet.

Für das Verständnis von Pfaddiagrammen sowie deren Übersetzung in Gleichungssysteme ist die Unterscheidung zwischen sogenannten endogenen und exogenen Variablen von zentraler Bedeutung. *Endogene Variablen* sind ein im Kontext von SEMs häufig verwendetes Synonym für abhängige Variablen und können in Pfaddiagrammen daran erkannt werden, dass sie mindestens einen unidirektionalen Pfeil aufweisen, der auf sie zeigt (Raykov & Marcoulides, 2006, S. 13). Mit anderen Worten handelt es sich bei endogenen Variablen um Grössen, deren Varianz durch andere Variablen im Modell erklärt werden kann. In Abbildung 3 stellt η eine latente endogene Variable dar, deren Varianz sich durch ξ sowie den Fehlerterm ζ aufklären lässt. Bei den Variablen x_1 bis x_5 sowie y_1 und y_2 hingegen handelt es sich um manifeste endogene Variablen, deren Varianzen durch die latente Variable sowie den Messfehler erklärt werden können. Neben endogenen Variablen existieren auch unabhängige Variablen, die *exogene Variablen* genannt werden und ausschliesslich über Pfeile, welche von ihnen wegzeigen, verfügen (Raykov & Marcoulides, 2006, S. 13). In Abbildung 3 existieren mehrere latente exogene Variablen, nämlich ξ sowie sämtliche Fehlerterme. Ihre Varianzen lassen sich nicht durch andere Variablen im Modell erklären, können jedoch zusammen mit den Regressionskoeffizienten und Faktorladungen geschätzt werden.

Wie in Abbildung 3 ersichtlich, können SEMs jeweils in zwei Modelltypen aufgeteilt werden: Strukturmodelle und Messmodelle. Strukturmodelle bilden die Zusammenhänge zwischen latenten Variablen ab, während Messmodelle die Beziehungen zwischen latenten und manifesten Variablen repräsentieren (Nachtigall et al., 2003). Je nach Forschungsfrage kann es vorkommen, dass lediglich ein Modelltyp von Interesse ist. So kann zum Beispiel mit einem Messmodell die den beobachteten Daten zugrundeliegende Faktorenstruktur untersucht werden, wobei dann von einer *konfirmatorischen Faktorenanalyse* gesprochen wird (Nachtigall et al., 2003). Eine andere Möglichkeit wäre die Untersuchung von Zusammenhängen zwischen latenten Variablen, wodurch eher das Strukturmodell mit seinen Regressionskoeffizienten und Kovarianzen von Interesse wäre. Somit lassen sich SEMs auf flexible Art und Weise zur Beantwortung von Forschungsfragen unterschiedlichster Natur sowie zur Darstellung und Untersuchung von simplen bis hin zu äusserst komplexen Modellen einsetzen. Die Unterscheidung zwischen Struktur- und Messmodell hilft dabei bei Überlegungen zum Aufbau von theoretischen Modellen sowie der visuellen Repräsentation komplexer Sachverhalte und den dazugehörigen Hypothesen.

Bei Pfaddiagrammen handelt es sich um nichts anderes als eine leicht verständliche Darstellungsweise von mathematischen Gleichungen. Diese werden im Englischen auch *model definition equations* genannt und zeigen die Zusammensetzung jeder endogenen Variable im Modell auf (Raykov & Marcoulides, 2006, S. 15). Dabei enthalten sie exakt dieselbe Information wie ein Pfaddiagramm. Das in Abbildung 3 präsentierte Modell könnte somit alternativ auch wie folgt dargestellt werden:

| | | |
|----------------|--|-----|
| Strukturmodell | $\eta = \xi * \beta_1 + \zeta$ | |
| | $x_1 = \xi * \lambda_{x_1} + \delta_1$ | |
| | $x_2 = \xi * \lambda_{x_2} + \delta_2$ | |
| Messmodell 1 | $x_3 = \xi * \lambda_{x_3} + \delta_3$ | |
| | $x_4 = \xi * \lambda_{x_4} + \delta_4$ | |
| | $x_5 = \xi * \lambda_{x_5} + \delta_5$ | (8) |
| | $y_1 = \eta * \lambda_{y_1} + \varepsilon_1$ | |
| Messmodell 2 | $y_2 = \eta * \lambda_{y_2} + \varepsilon_2$ | |

Gemäss den LISREL-Konventionen nach Jöreskog und Sörbom (2001) kann das hier präsentierte Gleichungssystem auch in Form einer Matrixschreibweise dargestellt werden, was deutlich effizienter ist und kurz am Beispiel von y_1 und y_2 gezeigt werden soll:

$$Y = \eta\lambda_y + \varepsilon$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = [\eta] \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_{y_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Für detailliertere Informationen bezüglich der Matrixschreibweise im Zusammenhang mit der LISREL-Konvention für SEMs seien Bollen (1989, S. 10–20) oder Raykov und Marcoulides (2006, S. 64–67) empfohlen. Für die praktische Anwendung von SEMs sowie das Verständnis der vorliegenden Arbeit sind Kenntnisse in der Matrixschreibweise oder gar der linearen Algebra allerdings nicht vonnöten.

Bei näherer Betrachtung von Abbildung 3 fällt auf, dass nicht alle Variablen über einen Fehlerterm verfügen. So weisen die Fehlerterme selbst keine eigenen Fehlerterme auf und auch ξ scheint gemäss dem Pfaddiagramm fehlerfrei zu sein. Hierbei handelt es sich um eine Konsequenz der strikten Befolgung der Regeln zur Bestimmung der zu schätzenden Parameter – *unbekannte Parameter* oder *Modellparameter* genannt (siehe Raykov & Marcoulides, 2006, S. 16–22):

1. Alle Varianzen exogener Variablen sind Modellparameter. Fehlerterme zählen dabei als latente exogene Variablen und werden sämtlichen endogenen Variablen hinzugefügt.
2. Alle Kovarianzen zwischen endogenen Variablen sind Modellparameter.
3. Alle Faktorladungen, die latente mit manifesten Variablen verbinden, sind Modellparameter.
4. Alle Regressionskoeffizienten zwischen manifesten oder latenten Variablen sind Modellparameter.
5. Die Varianzen endogener Variablen, die Kovarianzen zwischen endogenen Variablen sowie die Kovarianzen zwischen endogenen und exogenen Variablen sind niemals Modellparameter.

6. Für jede latente Variable im Modell muss eine Skala definiert werden, indem entweder deren Varianz oder eine beliebige Regression oder Faktorladung auf 1 fixiert wird. Die Fixierung der Varianz ist lediglich bei exogenen latenten Variablen möglich. Diese Normierungsbedingung ist notwendig, da latente Variablen über keine natürliche Skala verfügen.

Modellparameter werden in Pfaddiagrammen jeweils mit einem Asterisk gekennzeichnet. Anhand der Asteriske sowie der auf 1 fixierten Faktorladungen kann somit in Abbildung 3 die Umsetzung der oben gelisteten Regeln nachvollzogen werden. Zuletzt sei erwähnt, dass sich Parameter gemäss Bortz und Schuster (2010, S. 449) in drei Arten einteilen lassen. Bei einem *festen Parameter* handelt es sich um einen Parameter, der auf einen beliebigen Wert fixiert wurde. Ein Beispiel hierfür findet sich in der oben aufgeführten Regel 6. Die zweite Art wird *restringierte Parameter* genannt. Hierbei handelt es sich um Parameter, deren Wert an den Wert eines anderen Parameters geknüpft wird, indem diese beispielsweise gleichgesetzt werden. Parameter, die keinen Fixierungen oder Restriktionen unterliegen, werden als *freie Parameter* bezeichnet. Mit Ausnahme der durch Regel 6 fixierten Parameter ist zu beachten, dass für feste oder restringierte Parameter stets eine theoretische Basis vorhanden sein sollte, welche eine Manipulation der Parameter unterstützt und begründet. Darüber hinaus sei angemerkt, dass feste Parameter logischerweise keine Modellparameter darstellen, da deren Wert durch die Fixierung bekannt ist.

1.2.2 Modellidentifikation und Parameterschätzung

Nach der sorgfältigen Spezifikation des Modells basierend auf theoretischen und empirischen Erkenntnissen sowie der Bestimmung von unbekannten Parametern folgt die sogenannte Modellidentifikation und anschliessende Parameterschätzung (siehe Kline, 2016, S. 118).

Zum Verständnis der Modellidentifikation muss zuerst etwas vorgegriffen und das Grundprinzip der Parameterschätzung für SEMs erörtert werden. Im Gegensatz zu herkömmlichen Regressionsmodellen sowie anderen statistischen Verfahren werden in SEMs zur Parameterschätzung keine Rohdaten in Form von reinen Messwerten verwendet. Stattdessen nutzt das SEM die Varianz-Kovarianz-Matrix der empirisch

erfassten Daten. Es handelt sich hierbei um eine Matrix, die sämtliche auf Messwerten basierenden Kovarianzen zwischen den manifesten Variablen deren Varianzen beinhaltet. Diese Matrix wird *Kovarianzmatrix der Stichprobe* genannt und mit S bezeichnet.

Basierend auf algebraischen Rechenregeln für Varianzen und Kovarianzen lassen sich aus dem spezifizierten Modell in Form eines Pfaddiagramms oder Gleichungssystems gewisse Implikationen über die Varianzen und Kovarianzen der manifesten Variablen herleiten (Raykov & Marcoulides, 2006, S. 22). Ein vertieftes Verständnis der Einzelheiten dieser Herleitung stellt keine Voraussetzung für die praktische Anwendung von SEMs durch das R-Paket *lavaan* – dieses nimmt die Herleitung automatisch vor – oder die Lektüre der vorliegenden Arbeit dar, weshalb an dieser Stelle auf eine detaillierte Erörterung verzichtet und stattdessen auf die Erklärungen von Raykov und Marcoulides (2006, S. 22–27) verwiesen wird. Die aus dem Modell hergeleiteten Implikationen lassen sich in einer sogenannten *modellimplizierten Parametermatrix* anordnen, welche dieselbe Anzahl Zeilen und Spalten wie die Kovarianzmatrix der Stichprobe S aufweist. Die modellimplizierte Parametermatrix wird meist mit Σ bezeichnet und beinhaltet Formeln bestehend aus den (unbekannten) Modellparametern, wobei diese Formeln jeweils angeben, wie die Kovarianz zwischen zwei manifesten Variablen respektive die Varianz einer manifesten Variable zu berechnen ist.

Werden nun die beiden Matrizen Σ sowie S einander gegenübergestellt und durch ein Gleichheitszeichen getrennt, entsteht ein Gleichungssystem. Auf der Seite von Σ stehen aus unbekannten Parametern bestehende Formeln zur Berechnung der Varianzen und Kovarianzen aller manifesten Variablen des Modells. Auf der anderen Seite steht S mit den empirisch erfassten und damit bekannten Werten ebendieser Varianzen und Kovarianzen. Sofern nun das Modell überidentifiziert ist, lassen sich die Gleichungen auflösen und somit die Werte der unbekannten Parameter schätzen, wobei keine eindeutige Lösung existiert. Zur Erklärung der Modellidentifikation soll ein Beispiel dienen, welches aus Kline (2016, S. 145–148) stammt:

| | | |
|---------------------|---|------|
| Unteridentifiziert | $a + b = 6$ | |
| Genau identifiziert | $a + b = 6$ $2a + b = 10$ | (10) |
| Überidentifiziert | $a + b = 6$ $2a + b = 10$ $3a + b = 12$ | |

Ein Modell, das mehr unbekannte Parameter als Beobachtungen – damit ist die Anzahl Varianzen und Kovarianzen in S gemeint – aufweist, gilt im Kontext von SEMs als *unteridentifiziert*. Die Differenz zwischen der Anzahl unbekannter Parameter und der Anzahl Beobachtungen wird *Freiheitsgrade des Modells* genannt und mit df (engl. *degrees of freedom*) bezeichnet, wobei im Falle unteridentifizierter Modelle $df < 0$ gilt (Kline, 2016, S. 128). Die modellimplizierte Parametermatrix Σ beinhaltet in solchen Fällen mehr unbekannte Parameter als die Varianz-Kovarianz-Matrix der Stichprobe S bekannte Werte enthält. Durch die Gegenüberstellung von Σ und S entsteht somit ein Gleichungssystem, das mathematisch nicht lösbar ist. Wenn ein Modell hingegen genau gleich viele unbekannte Parameter wie empirisch erfasste Werte aufweist, wird von einem *genau identifizierten* Modell gesprochen. In solchen Fällen existiert exakt eine eindeutige Lösung. Das Modell stellt damit keine Vereinfachung der empirischen Daten dar, sondern ein exaktes Abbild davon. Das Testen von Hypothesen oder ein Vergleich von Modellen ist somit nicht möglich. In *überidentifizierten* Modellen hingegen existieren mehr Beobachtungen als unbekannte Parameter. Somit können keine eindeutigen Lösungen für die einzelnen Parameter in Σ gefunden werden. Eine optimale Lösung sollte die Werte in Σ so schätzen, dass einzelnen Zellen in Σ den dazugehörigen empirischen Werten in S so nahe wie möglich kommen. Um dies zu ermöglichen, muss ein Modell überidentifiziert sein. Zwar existieren je nach Daten und Anwendungsbereich des SEMs Ausnahmen, doch gilt als Faustregel, dass die Anzahl Freiheitsgrade im Normalfall positiv und so gross wie möglich sein sollte (Raykov & Marcoulides, 2006, S. 42). Die Anzahl Freiheitsgrade df kann mit Hilfe von folgender Formel berechnen, wobei p für die Anzahl manifester Variablen im Modell

steht und q die Anzahl unbekannter Parameter darstellt (Raykov & Marcoulides, 2006, S. 36):

$$df = \frac{p(p+1)}{2} - q \quad (11)$$

Computerprogramme gehen zur Parameterschätzung in einem iterativen Verfahren vor, wobei die Werte der unbekannten Parameter so lange verändert werden, bis die Distanz zwischen Σ und S nicht weiter bedeutend verringert werden kann (Raykov & Marcoulides, 2006, S. 32–34; Bortz & Schuster, 2010, S. 450). Die Distanz besteht aus einer einzelnen Zahl, die angibt, wie gross die Unterschiede zwischen den beiden Matrizen sind. Gemäss Raykov und Marcoulides (2006, S. 28) wird diese Differenz im Kontext von SEMs *Fit-Funktion* genannt und kann lediglich Werte ≥ 0 annehmen, wobei eine Ausprägung von exakt null bedeutet, dass Σ und S identisch sind. Bei grossen Unterschieden zwischen Σ und S hingegen fällt der resultierende Wert der *Fit-Funktion* entsprechend hoch aus. Raykov und Marcoulides (2006, S. 28–32) weisen diesbezüglich darauf hin, dass zwischen vier verschiedenen Fit-Funktionen unterschieden werden kann, welche die Distanz zwischen Σ und S jeweils anders berechnen, andere Methoden der Parameterschätzung verwenden und unterschiedliche Annahmen zur Verteilung der Messwerte treffen. In der Praxis ist die von normalverteilten Daten ausgehende Maximum-Likelihood-Schätzung weit verbreitet, die beispielsweise im R-Paket *lavaan* standardmässig eingesetzt wird (Rosseel, 2021).

Zuletzt sei erwähnt, dass die Anpassungsgüte des gesamten Modells mit der χ^2 -Statistik geprüft werden kann, welche die Nullhypothese prüft, dass sich Σ und S nicht bedeutend unterscheiden (Bagozzi & Yi, 2012). Ein nicht-signifikantes Ergebnis ist dabei erwünscht. Eine Auflistung alternativer Methoden zur Prüfung der Anpassungsgüte findet sich in Bagozzi und Yi (2012), während für detailliertere Informationen zu den einzelnen Methoden Kline (2016, S. 262–299) empfohlen sei.

2 LITERATURVERZEICHNIS

- Bagozzi, R. P. & Yi, Y. (2012). Specification, evaluation, and interpretation of structural equation models. *Journal of the Academy of Marketing Science*, 40(1), 8–34. <https://doi.org/10.1007/s11747-011-0278-x>
- Bentler, P. M. & Weeks, D. G. (1980). Linear structural equations with latent variables. *Psychometrika*, 45(3), 289–308.
- Berry, W. D. (1993). *Understanding regression assumptions*. Sage.
- Bollen, K. A. (1989). *Structural equations with latent variables*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. Wiley. <https://doi.org/10.1002/9781118619179>
- Bortz, J. & Schuster, C. (2010). *Statistik für Human- und Sozialwissenschaftler* (7. Aufl.). Springer-Lehrbuch. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-12770-0>
- Bühner, M. (2011). *Einführung in die Test- und Fragebogenkonstruktion* (3. Aufl.). PS Psychologie. Pearson Studium.
- Carroll, R. J. (2014). Measurement Error in Epidemiologic Studies. In N. Balakrishnan, T. Colton, B. Everitt, W. Piegorsch, F. Ruggeri & J. L. Teugels (Hg.), *Wiley StatsRef: Statistics Reference Online* (Bd. 28, S. 273). John Wiley & Sons. <https://doi.org/10.1002/9781118445112.stat05178>
- Cochran, W. G. (1968). Errors of Measurement in Statistics. *Technometrics*, 10(4), 637–666. <https://doi.org/10.1080/00401706.1968.10490621>
- Eid, M., Gollwitzer, M. & Schmitt, M. (2017). *Statistik und Forschungsmethoden* (5., korrigierte Auflage). Beltz.
- Field, A., Miles, J. & Field, Z. (2012). *Discovering statistics using R*. Sage.
- Frost, C. & Thompson, S. G. (2000). Correcting for regression dilution bias: comparison of methods for a single predictor variable. *Journal of the Royal Statistical Society: Series A (Statistics in Society)*, 163(2), 173–189. <https://doi.org/10.1111/1467-985X.00164>
- Fuller, W. A. (1987). *Measurement Error Models*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. John Wiley & Sons, Inc. <https://doi.org/10.1002/9780470316665>

- Fuller, W. A. & Hidiroglou, M. A. (1978). Regression Estimation after Correcting for Attenuation. *Journal of the American Statistical Association*, 73(361), 99–104.
<https://doi.org/10.1080/01621459.1978.10480011>
- Hallquist, M. (2017). *PSY 597 - Structural Equation Modeling*. Penn State University.
<https://psu-psychology.github.io/psy-597-SEM/>
- Hoyle, R. H. (Hg.). (2012). *Handbook of structural equation modeling*. Guilford Press.
- Hutcheon, J. A., Chiolero, A. & Hanley, J. A. (2010). Random measurement error and regression dilution bias. *BMJ (Clinical research ed.)*, 340, c2289.
<https://doi.org/10.1136/bmj.c2289>
- James, G., Witten, D., Hastie, T. & Tibshirani, R. (2017). *An Introduction to Statistical Learning: With applications in R* (8. Aufl.). *Springer Texts in Statistics*. Springer.
- Jöreskog, K. G. & Sörbom, D. (2001). *LISREL 8: User's Reference Guide* (2. Aufl.). Scientific Software International.
- Kline, R. B. (2016). *Principles and practice of structural equation modeling* (4. Aufl.). The Guilford Press.
- Knuiman, M. W., Divitini, M. L., Buzas, J. S. & Fitzgerald, P. E.B. (1998). Adjustment for Regression Dilution in Epidemiological Regression Analyses. *Annals of Epidemiology*, 8(1), 56–63. [https://doi.org/10.1016/S1047-2797\(97\)00107-5](https://doi.org/10.1016/S1047-2797(97)00107-5)
- Liu, Y. & Salvendy, G. (2009). Effects of measurement errors on psychometric measurements in ergonomics studies: Implications for correlations, ANOVA, linear regression, factor analysis, and linear discriminant analysis. *Ergonomics*, 52(5), 499–511. <https://doi.org/10.1080/00140130802392999>
- Malinvaud, E. (1980). *Statistical methods of econometrics* (3. Aufl.). *Studies in Mathematical and Managerial Economics: Bd. 6*. North Holland.
- Nachtigall, C., Kroehne, U., Funke, F. & Steyer, R. (2003). (Why) Should We Use SEM? Pros and cons of structural equation modeling. *Methods Psychological Research Online*, 8(2), 1–22.
- R Core Team. (2021). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*.
<https://www.R-project.org/>

- Raykov, T. & Marcoulides, G. A. (2006). *A first course in structural equation modeling* (2nd ed.). Lawrence Erlbaum Associates.
- Ree, M. J. & Carretta, T. R. (2006). The Role of Measurement Error in Familiar Statistics. *Organizational Research Methods*, 9(1), 99–112.
<https://doi.org/10.1177/1094428105283192>
- Rosseel, Y. (2012). lavaan: An R Package for Structural Equation Modeling. *Journal of Statistical Software*, 48(2), 1–36. <https://www.jstatsoft.org/v48/i02/>
- Rosseel, Y. (2021). *The lavaan tutorial*. Department of Data Analysis: Ghent University.
- Schinka, J. A., Velicer, W. F. & Weiner, I. B. (2003). *Research methods in psychology. Handbook of Psychology: / Irving B. Weiner, editor-in-chief ; Vol. 2*. John Wiley & Sons.
- Sedlmeier, P. & Renkewitz, F. (2013). *Forschungsmethoden und Statistik für Psychologen und Sozialwissenschaftler* (2. Aufl.). *Always Learning*. Pearson.
- Shear, B. R. & Zumbo, B. D. (2013). False Positives in Multiple Regression. *Educational and Psychological Measurement*, 73(5), 733–756.
<https://doi.org/10.1177/0013164413487738>
- Steinmetz, H. (2015). *Sozialwissenschaftliche Forschungsmethoden. Lineare Strukturgleichungsmodelle: Eine Einführung mit R* (B. Kittel, C. Strobl, G. Tutz, H. Hinz, I. Borg, J. Reinecke, K.-U. Schnapp, M. Spieß, P. Sedlmeier, R. Schnell, R. Oesterreich, S. Liebig, U. Jirjahn & W. Matiaske, Hg.). Rainer Hampp Verlag.