

解集合プログラミングを用いた グラフ彩色問題の解法に関する考察

春田 穂高

番原研究室

2021 年度番原研中間発表会
2021 年 12 月 3 日

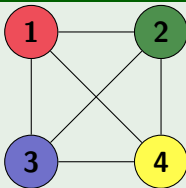
グラフ彩色問題 (graph coloring)

グラフ彩色問題の定義

与えられたグラフ $G = (V, E)$ と色数 k に対して、以下の制約を満たす解が存在するかを判定する問題。

- 各頂点は少なくとも1つの色で塗られる。
- $(u, v) \in E$ である $u, v \in V$ について、 u と v は異なる色で塗られる。

グラフ彩色問題の例



解集合プログラミング (Answer Set Programing)

- ASP 言語は一階論理に基づいた知識表現言語の一種である。
- ASP システムは、安定モデル意味論 [Gelfond and Lifschitz '88] に基づく解集合を計算するシステムである。
- 近年、SAT 技術を利用した高速な ASP システムが開発され、様々な分野への実用的応用が急速に拡大している。

グラフ彩色問題に対して ASP を用いる利点

- ASP 言語の高い表現力により、記号上の制約を簡潔に記述できる。
- 充足不能コアなどの SAT 技術を利用した最適値探索が可能。

目的

グラフ彩色問題に対して，ASP を利用して符号化を提案し，実験，評価する．

研究内容

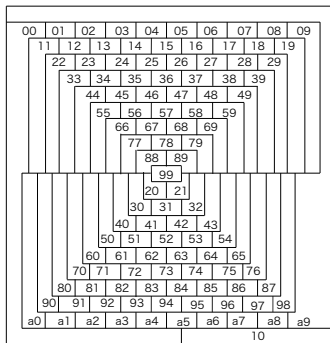
- McGregor グラフにおいて 4 種の彩色問題に対する 4 つの符号化の実装.
 - グラフ彩色問題を解く符号化
 - ある色の彩色数を最大化，最小化した際の符号化
 - 多色で彩色される頂点数を最大化した際の符号化
- 各符号化について McGregor グラフで実験．

McGregor グラフ

McGregor グラフ

- オーダー n を決定することで決定されるグラフ。
- 頂点数 $N = n * (n + 1)$ 個，辺数 $3N - 6$ 個からなるグラフ。
- 頂点は $(j, k) (0 \leq j \leq n) (0 \leq k < n)$ で表される。

オーダー $n = 10$ の McGregor グラフ



ASP 符号化 (1/2)

グラフ彩色問題を解く符号化

- 頂点 X について、色 K で彩色する $color(X, K)$ を生成する.
 - 隣接する頂点について、同じ色で彩色しない制約を導入する.
- この符号化を $color$ とする.

多色で塗ることのできる頂点数を最大化した際の符号化

- 頂点 X について、色 K で彩色する $color(X, K)$ を生成する.
 - 隣接する頂点について、同じ色で彩色しない制約を導入する.
 - ある頂点 X について、複数の色で塗られている場合、 $mult(X)$ を生成する.
 - $mult(X)$ について、その頂点 X の数を**最大化**する制約を導入する.
- この符号化を $mult$ とする.

ある色の彩色数を最小化した際の符号化

- ある色に対して彩色数を**最小化**する制約を導入する.
符号化 `color` にこの制約を追加した符号化を `minimize` とする.

ある色の彩色数を最大化した際の符号化

- ある色に対して彩色数を**最大化**する制約を導入する.
符号化 `color` にこの制約を追加した符号化を `maximize` とする.

実験内容 (1/3)

color

- 使用問題: 138 問
The Art of Computer Programming で解説されている
McGregor グラフの定義に基づいて作成したオーダー
 $3 \leq n \leq 140$ のグラフ
- 色数: 4 色
- ASP システム: *clingo-5.5.0*
 - オプション: *trendy*
- 制限時間: 1800 秒/問
- 実験環境: Mac mini(3.2GHz 64GB)

結果, 138 問中オーダー $3 \leq n \leq 138$ のグラフにおいて 4 色での解が見つかった.

minimize,maximize

- 使用問題: 18 問
The Art of Computer Programming で解説されている
McGregor グラフの定義に基づいて作成したオーダー
 $3 \leq n \leq 20$ のグラフ
- 色数: 4 色
- ASP システム: *clingo-5.5.0*
 - strategy: *BB, USC*
 - オプション: *trendy*
- 制限時間: 1800 秒/問
- 実験環境: Mac mini(3.2GHz 64GB)

mult

- 使用問題: 13 問
The Art of Computer Programming で解説されている
McGregor グラフの定義に基づいて作成したオーダー
 $3 \leq n \leq 15$ のグラフ
- 色数: 4 色
- ASP システム: *clingo-5.5.0*
 - strategy: *BB, USC*
 - オプション: *trendy*
- 制限時間: 1800 秒/問
- 実験環境: Mac mini(3.2GHz 64GB)

実験結果 (1/3)

minimize

符号化 minimize の実験結果

- BB 法と USC 法の両方において以下の結果の通りになった。

order	BB	USC	order	BB	USC
3	2	2	12	9	9
4	2	2	13	10	10
5	3	3	14	12	12
6	4	4	15	13	49
7	5	5	16	19	12
8	7	7	17	21	13
9	7	7	18	19	14
10	7	7	19	20	58
11	8	8	20	22	59

- USC 法の結果が優れていた。

実験結果 (2/3)

maximize

符号化 maximize の実験結果

- BB 法と USC 法の両方において以下の結果の通りになった。

order	BB	USC	order	BB	USC
3	4	4	12	48	50
4	6	6	13	56	58
5	10	10	14	56	68
6	13	13	15	70	77
7	17	17	16	71	88
8	23	23	17	75	99
9	28	28	18	91	111
10	35	35	19	92	123
11	42	42	20	109	137

- USC 法の結果が優れていた。

実験結果 (3/3)

mult

符号化 mult の実験結果

- BB 法と USC 法の両方において以下の結果の通りになった。

order	BB	USC	order	BB	USC
3	1	1	10	23	23
4	3	3	11	27	29
5	4	4	12	33	36
6	7	7	13	38	15
7	9	9	14	44	11
8	13	13	15	49	20
9	18	18			

- USC 法の結果が優れていた。

まとめと今後の課題

まとめ

- McGregor グラフにおいて 4 種の彩色問題に対する 4 つの符号化を実装した.
 - **color**: グラフを彩色する符号化
 - **minimize**: ある色の彩色数を最小化する符号化
 - **maximize**: ある色の彩色数を最大化する符号化
 - **mult**: 多色で彩色される頂点を最大化する符号化
- 各符号化について McGregor グラフで実験.
 - **minimize**, **maximize**, **mult** の最適化問題では USC 法がより大きいオーダーで最適値を示した.

今後の課題

- より大きいサイズのグラフでの実験.
- より長い制限時間内での実験.
- McGregor グラフ以外のグラフに対しての実験.

補足

minimize

符号化 minimize の実験結果

- BB 法と USC 法の両方において以下の結果の通りになった.

order	optimization	BB	USC	order	optimization	BB	USC
3	2	0.002	0.002	12	9	166.314	0.351
4	2	0.003	0.003	13	10	1172.519	0.288
5	3	0.013	0.003	14	12	-	132.131
6	4	0.049	0.006	15	-	-	-
7	5	0.197	0.024	16	12	-	1.930
8	7	0.941	0.095	17	13	-	56.514
9	7	1.316	0.025	18	14	-	74.041
10	7	1.436	0.023	19	-	-	-
11	8	14.002	0.185	20	-	-	-

maximize

符号化 maximize の実験結果

- BB 法と USC 法の両方において以下の結果の通りになった.

order	optimization	BB	USC	order	optimization	BB	USC
3	4	0.002	0.002	12	50	-	0.077
4	6	0.003	0.003	13	58	-	0.043
5	10	0.005	0.003	14	68	-	0.099
6	13	0.003	0.005	15	77	-	1.433
7	17	1.041	0.007	16	88	-	0.555
8	23	69.767	0.009	17	99	-	1.046
9	28	-	0.016	18	111	-	0.287
10	35	-	0.017	19	123	-	1.954
11	42	-	0.026	20	137	-	1.083

mult

符号化 mult の実験結果

- BB 法と USC 法の両方において以下の結果の通りになった.

order	optimization	BB	USC	order	optimization	BB	USC
3	1	0.003	0.004	12	36	-	196.726
4	3	0.016	0.009	13	-	-	-
5	4	0.099	0.084	14	-	-	-
6	7	0.291	0.829	15	-	-	-
7	9	0.812	7.530	16	-	-	-
8	13	3.483	15.040	17	-	-	-
9	18	203.468	39.851	18	-	-	-
10	23	-	126.909	19	-	-	-
11	29	-	1006.760	20	-	-	-