GeekBrains

Последовательности: виды числовых последовательностей и примеры

Базовая математика / Урок 3

В этом уроке

- Понятие числовой последовательности
- Способы задания числовой последовательности
- Свойства числовых последовательностей
- Арифметическая прогрессия

Основные определения

Функции, областью определения которых является множество натуральных чисел или его часть, называются числовыми последовательностями.

Общий вид последовательности: (a_n), или $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$.

Пример 1

В последовательности, где общая формула имеет вид $a_n = 3n$, выписать: 1) первые четыре члена; 2) двадцатый член.

Решение:

1. Если $n = 1$, то $a_1 = 3 \cdot 1 = 3$,
   $a_2 = 3 \cdot 2 = 6$,
   $a_3 = 3 \cdot 3 = 9$,
   $a_4 = 3 \cdot 4 = 12$.
2. Если $n = 20$, то $a_{20} = 3 \cdot 20 = 60$.

Последовательность называется возрастающей, если для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $a_n < a_{n+1}$.

Последовательность называется убывающей, если для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $a_n > a_{n+1}$.

Возрастающие и убывающие последовательности называются монотонными.

Пример 2

Определите, является ли монотонной (возрастающей или убывающей) последовательность, заданная формулой: $a_n = \dfrac{n}{n+1}$.

Решение:

$a_{n+1} - a_n = \dfrac{n+1}{n+2} - \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)\cdot(n+2)} > 0$, то есть $a_n < a_{n+1}$.

Основные определения

Последовательность называется ограниченной сверху, если существует такое число $M \in \mathbb{R}$, что $a_n \leq M$. При этом число M называется верхней границей последовательности.

Последовательность называется ограниченной снизу, если существует такое число $m \in \mathbb{R}$, что $a_n \geq m$. Число m называется нижней границей последовательности.

Последовательность называется ограниченной, если она одновременно ограничена и сверху, и снизу.

Пример 3

- Последовательность, заданная формулой $a_n = n$ $(1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,\ \ldots)$, ограничена снизу, но не ограничена сверху.
- Последовательность, заданная формулой $a_n = (-1)^n \cdot n$ $(-1,\ 2,\ -3,\ 4,\ \ldots,\ (-1)^n \cdot n,\ \ldots)$, не ограничена ни сверху, ни снизу.

Как задаются последовательности

1. Аналитически. Например, последовательность натуральных чисел:

$$a_n = n,\ n \in \mathbb{N}$$

2. Рекуррентно. Например, последовательность Фибоначчи:

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n,\ n \in \mathbb{N},\ a_1 = a_2 = 1$$

3. Описательно (простым перечислением всех элементов последовательности).

Аналитическая формула арифметической прогрессии:

$$a_n = a_1 + d \cdot (n - 1)$$

Сумма первых n элементов арифметической последовательности:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Пример 4

Дана арифметическая прогрессия (a_n), где $a_1 = 0$, $d = 2$. Найдите девятый член прогрессии.

Решение:
Используем общую формулу $a_n = a_1 + d \cdot (n-1)$:

$$a_9 = 0 + 2 \cdot (9-1) = 16$$

Ответ: 16.

Пример 5

Дана арифметическая прогрессия (a_n), где $a_1 = 0$, $d = 2$. Найдите сумму первых четырёх членов последовательности.

Решение:
Используем общую формулу $a_n = a_1 + d \cdot (n - 1)$:

$$a_4 = 0 + 2 \cdot (4 - 1) = 6$$

$$S_4 = \frac{(a_1 + a_4) \cdot 4}{2} = (0 + 6) \cdot 2 = 12$$

Ответ: 12.

Спасибо за внимание