

Базовая математика

Урок 12. Понятие об обратной функции

Определение 1. Функцию $y = f(x)$, $x \in X$, называют *обратимой*, если любое своё значение она принимает только в одной точке множества X (иными словами, если разным значениям аргумента соответствуют разные значения функции).

Теорема 1. Строго монотонная функция обратима.

Функция является обратимой в том и только в том случае, если любая прямая, перпендикулярная оси ординат, имеет с её графиком не более одной общей точки.

Пусть $y = f(x)$, $x \in X$ — обратимая функция и $E(f) = Y$. Поставим в соответствие каждому y из Y единственное значение x , при котором $f(x) = y$ (т.е. единственный корень уравнения $f(x) = y$ относительно переменной x). Таким образом получим функцию, которая определена на Y , а X — область её значений. Эту функцию обозначают

$$x = f^{-1}(y), y \in Y$$

и называют *обратной* по отношению к функции $y = f(x)$, $x \in X$.

Теорема 2. Если функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) на множестве X , а Y — область значений функции, то обратная функция $x = f^{-1}(y)$, $y \in Y$ возрастает (убывает) на множестве Y .

Нахождение формулы для функции, обратной данной. Пользуясь формулой $y = f(x)$, следует выразить x через y , а в полученной формуле $x = g(y)$ заменить x на y , а y на x .

Пример 1. Дана функция $y = x^2$, $x \in [0; +\infty)$. Найти обратную функцию.

Решение.

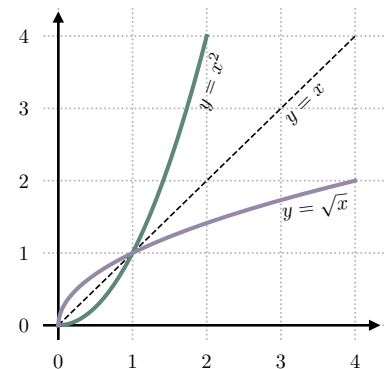
Заданная функция возрастает на промежутке $[0; +\infty)$, значит, она имеет обратную функцию. Из уравнения $y = x^2$ находим: $x = \sqrt{y}$ или $x = -\sqrt{y}$. Промежутку $[0; +\infty)$ принадлежат лишь значения функции $x = \sqrt{y}$. Это и есть обратная функция, которая определена на промежутке $[0; +\infty)$.

Поменяв местами x и y , получим:

$$y = \sqrt{x}, x \in [0; +\infty)$$

График этой функции получается из графика функции $y = x^2$, $x \in [0; +\infty)$ с помощью симметрии относительно прямой $y = x$ (см. рисунок).

Ответ: $y = \sqrt{x}$.



Пример 2. Выяснить, обратима ли функция $f(x) = 5x - 2$, и если обратима, то найти обратную.

Решение. Заданная функция возрастает на промежутке $(-\infty; +\infty)$, значит, она имеет обратную функцию. Из уравнения $y = 5x - 2$ находим: $x = (y + 2)/5$. Поменяв местами x и y , получаем:

$$y = (x + 2)/5$$

Ответ: $y = (x + 2)/5$.

Домашнее задание

1. Найти функцию, обратную для функции $y = 3x + 2$.
2. Найти функцию, обратную для функции $y = 2^x$.