# Базовая математика

## Урок 13. Пределы

## Разбор домашнего задания

**Задание 1.** Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^{n+1}+2\cdot 4^n}{4^{n+1}-5}$.

*Решение.* Посмотрим, какие показательные последовательности есть в пределе:

$$3^n,\ 4^n$$

Выберем последовательность с наибольшим основанием, т. е. $4^n$. В целях устранения неопределённости поделим числитель и знаменатель на $4^n$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}+2\cdot 4^n}{4^{n+1}-5} = \lim_{n\to\infty} \frac{3\cdot 3^n+2\cdot 4^n}{4\cdot 4^n-5} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(3\cdot 3^n+2\cdot 4^n\right)/4^n}{\left(4\cdot 4^n-5\right)/4^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n+2}{4-5/4^n}$$

В полученном выражении можно сделать несколько упрощений. Во-первых, последовательность $\left(\frac{3}{4}\right)^n$ является бесконечно убывающей геометрической прогрессией, поэтому стремится к нулю. Во-вторых, стремится к нулю константа, делённая на возрастающую геометрическую прогрессию, т. е. $5/4^n \to 0$. Имеем:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n+2}{4-5/4^n} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

*Ответ*: $\frac{1}{2}$.

**Задание 2.** Вычислить $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$.

*Решение.* Имеем неопределённость вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Воспользуемся правилом Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)'}{x'} = \lim_{x\to 0} \cos x = 1$$

*Ответ*: 1.

**Задание 3.** Вычислить $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2-3x+1}{2x-2}$.

*Решение.* Имеем неопределённость вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Чтобы избавиться от неопределённости, преобразуем функцию, разложив на множители числитель и знаменатель. Решим уравнение:

$$2x^2-3x+1=0$$

$$x_1 = 1,\ x_2 = 0.5$$

Следовательно, имеет место разложение:

$$\frac{2x^2 - 3x + 1}{2x - 2} = \frac{2(x-1)(x-0.5)}{2(x-1)} = x - 0.5$$

Итак, предел:

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{2x - 2} = \lim_{x\to 1}(x - 0.5) = 0.5$$

*Ответ*: 0.5.