Базовая математика

Урок 8. Первообразная. Основное свойство первообразной. Три правила нахождения первообразных

Разбор домашнего задания

Задание 1. Найти общий вид первообразных для функции $f(x) = \dfrac{1}{(7-3x)^5}$.

Решение. Воспользуемся третьим правилом нахождения первообразной: если функция $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$, то функция $\frac{1}{k}\cdot F(k\cdot x+b)$ — первообразная для функции $f(k\cdot x+b)$. В этих обозначениях $f(x) = \dfrac{1}{x^5}$, $k = -3$, $b = 7$.

Вычислим первообразную от функции $\dfrac{1}{x^5}$. Первообразная от x^n равна $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ (при условии, что $n \neq -1$). В нашем случае $n = -5$. Имеем:

$$\frac{x^{-5+1}}{-5+1} = -\frac{1}{4x^4}$$

Наконец, по формуле выше получаем:

$$F(x) = -\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{4(7-3x)^4}\right) + C = \frac{1}{12(7-3x)^4} + C$$

Ответ: $F(x) = \frac{1}{12(7-3x)^4} + C$.

Задание 2. Найти общий вид первообразных для функции $f(x) = \sqrt{7x+1}$.

Решение. Как и ранее, используем третье правило нахождения первообразной. В его обозначениях $f(x) = \sqrt{x}$, $k = 7$, $b = 1$.

Поскольку $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, первообразная этой функции равна

$$\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{x\sqrt{x}}{\frac{3}{2}} = \frac{2x\sqrt{x}}{3}$$

По формуле выше получаем:

$$F(x) = \frac{1}{7}\cdot\frac{2(7x+1)\sqrt{7x+1}}{3} + C = \frac{2}{21}(7x+1)\sqrt{7x+1} + C$$

Ответ: $F(x) = \frac{2}{21}(7x+1)\sqrt{7x+1} + C$.

Задание 3. Найти общий вид первообразных для функции $f(x) = \sin(3x-2)$.

Решение. Опять воспользуемся третьим правилом вычисления первообразной: $f(x) = \sin x$, $k = 3$, $b = -2$.

Первообразная от функции $\sin x$ равна $-\cos x$. Имеем:

$$F(x) = \frac{1}{3} \cdot (-\cos(3x-2)) + C$$

Ответ: $F(x) = -\frac{1}{3} \cdot \cos(3x-2) + C$.

Задание 4. Найти общий вид первообразных для функции $f(x) = \dfrac{1}{7-3x}$.

Решение. В обозначениях третьего правила: $f(x) = \frac{1}{x}$, $k = -3$, $b = 7$.

Первообразная от функции $\frac{1}{x}$ равна $\ln x$. Имеем:

$$F(x) = -\frac{1}{3} \cdot \ln(7-3x) + C$$

Ответ: $F(x) = -\frac{1}{3} \cdot \ln(7-3x) + C$.

Задание 5. Вычислить $\displaystyle\int \left(x^2 + \sin x\right) dx$.

Решение. Интеграл от суммы равен сумме интегралов. Имеем:

$$\int \left(x^2 + \sin x\right) dx = \int x^2\, dx + \int \sin x\, dx = \frac{x^3}{3} - \cos x + C$$

Ответ: $F(x) = \frac{x^3}{3} - \cos x + C$.