GeekBrains

Критические точки функции: максимумы и минимумы. Применение производной к исследованию функции

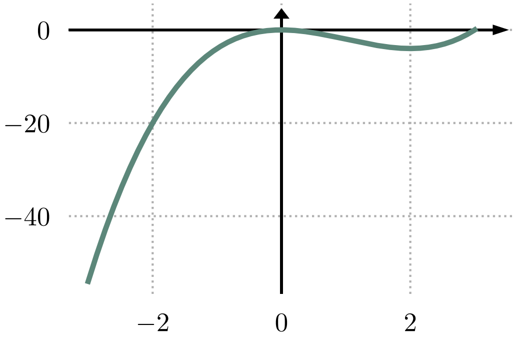
Базовая математика / Урок 7

В этом уроке

- Критические точки функции: максимумы и минимумы
- Применение производной для исследования функций на монотонность и экстремумы

Рассмотрим функцию:

$$y = x^3 - 3x^2$$



Основные определения

Точка x_0 называется точкой максимума функции $f(x)$, если существует окрестность точки x_0, такая, что для всех x, не равных x_0, из этой окрестности, выполняется неравенство

$$f(x) < f(x_0)$$

Точка x_0 называется точкой минимума функции $f(x)$, если существует окрестность точки x_0, такая, что для всех x, не равных x_0, из этой окрестности, выполняется неравенство

$$f(x) > f(x_0)$$

Точки, в которых значение производной функции равно нулю, называются стационарными точками.

Признаки монотонности

Признак возрастания функции

Если $f'(x) > 0$ на некотором промежутке, то функция $f(x)$ возрастает на данном промежутке.

Признак убывания функции

Если $f'(x) < 0$ на некотором промежутке, то функция $f(x)$ убывает на данном промежутке.

Пример 1

Найти промежутки возрастания и убывания функции $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$.

Решение:

1. $f'(x) = (x^3 - 2x^2 + x)' = 3x^2 - 4x + 1$
2. Решим уравнение $f'(x) = 0$.
3. $x_1 = 1/3,\ x_2 = 1$

Ответ: при $x \in (-\infty; 1/3] \cup [1; +\infty)$ функция возрастает; при $x \in [1/3; 1]$ функция убывает.

Достаточное условие экстремума в точке

Пусть $f(x)$ некоторая дифференцируемая на интервале $(a;b)$ функция, точка $x_0 \in (a;b)$ и $f'(x_0) = 0$. Тогда:

1. если при переходе через стационарную точку x_0 производная функции $f(x)$ меняет знак, с «плюса» на «минус», то точка x_0 является точкой максимума функции.
2. если при переходе через стационарную точку x_0 производная функции $f(x)$ меняет знак, с «минуса» на «плюс», то точка x_0 является точкой минимума функции.

GeekBrains

Пример 2

Найти экстремумы функции $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$.

Решение:

1. $f'(x) = (x^3 - 2x^2 + x)' = 3x^2 - 4x + 1$
2. Решим уравнение $f'(x) = 0$.
3. $x_1 = 1/3,\ x_2 = 1$

Ответ: в точке $x_1 = 1/3$ — максимум; в точке $x_2 = 1$ — минимум.

Пример 3

Найти промежутки возрастания и убывания функции $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$.

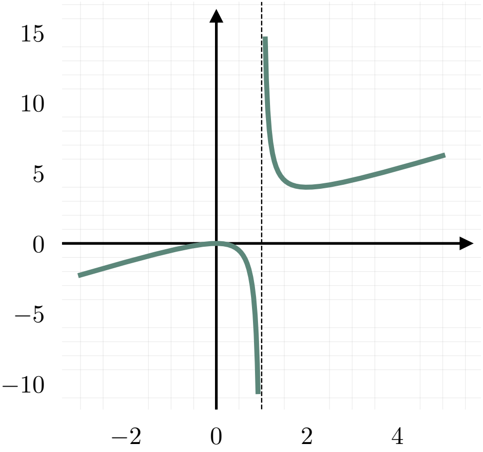
Решение:

1. $f'(x) = \left(\dfrac{x^2}{x-1}\right)' = \dfrac{(x^2)'(x-1) - x^2(x-1)'}{(x-1)^2} = \dfrac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$
2. Точки, в которых $f'(x) = 0$ (или не существует):

$(-\infty; 0)$	$(0; 1)$	$(1; 2)$	$(2; \infty)$
$+$	$-$	$-$	$+$

Продолжение примера 3

Ответ: $x = 0$ — точка максимума;
$x = 2$ — точка минимума.



GeekBrains

Спасибо за внимание