Базовая математика

Урок 5. Тригонометрические функции: свойства и их графики

Разбор домашнего задания

Задание 1. Найти множество значений функции $y = 3 + \sin x \cos x$.

Решение. Воспользуемся формулой синуса двойного угла:

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

Имеем:

$$y = 3 + \sin x \cos x = 3 + \frac{1}{2} \sin 2x$$

Функция $\sin 2x$ принимает значения из промежутка $[-1; 1]$:

$$-1 \leq \sin 2x \leq 1 \,\Big|\, \cdot \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \sin 2x \leq \frac{1}{2} \,\Big|\, + 3$$

$$3 - \frac{1}{2} \leq 3 + \frac{1}{2} \sin 2x \leq 3 + \frac{1}{2}$$

Получаем, что функция $y = 3 + \sin x \cos x$ принимает значения из интервала $[2.5; 3.5]$.

Ответ: $y \in [2.5; 3.5]$.

Задание 2. Решить уравнение $2\cos^2 x - 5 \sin x + 1 = 0$.

Решение. Заменим $\cos^2 x$ на $1 - \sin^2 x$, получим:

$$2(1 - \sin^2 x) - 5 \sin x + 1 = 0$$

$$2 \sin^2 x + 5 \sin x - 3 = 0$$

Заменим $\sin x$ на t:

$$2t^2 + 5t - 3 = 0$$

Решаем уравнение:

$$D = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 25 + 24 = 49$$

$$t_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-5 + 7}{4} = 0.5,\ t_2 = \frac{-5 - 7}{4} = -3$$

Получаем два уравнения:

$$\sin x = -3, \ \sin x = 0.5$$

Первое уравнение решений не имеет. Решим второе:

$$x = (-1)^n \arcsin 0.5 + \pi n, \ n \in \mathbb{Z}$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \ n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \ n \in \mathbb{Z}$.

Задание 3. Решить уравнение $6 \sin^2 x + 2 \sin^2 2x = 5$.

Решение. Использовать формулу синуса двойного угла тут — плохая идея, поскольку в результате получим четвёртые степени. Наоборот, попробуем свести всё к двойным углам. Для этого воспользуемся формулой косинуса двойного угла и преобразуем её:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (1 - \sin^x) - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

Подставим это выражение в уравнение, получим:

$$6 \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} + 2(1 - \cos^2 2x) = 5$$

$$3 - 3 \cos 2x + 2 - 2 \cos^2 2x = 5$$

$$2 \cos^2 2x + 3 \cos 2x = 0$$

$$\cos 2x \cdot (2 \cos 2x + 3) = 0$$

Итак, имеем два уравнения:

$$\cos 2x = 0, \ \cos 2x = -\frac{3}{2}$$

Второе решений не имеет. Решим первое:

$$2x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \ n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \ n \in \mathbb{Z}$.