Базовая математика

Урок 1. Квадратный трёхчлен и его корни. Квадратичная функция

Квадратным трёхчленом называют трёхчлен вида

$$ax^2 + bx + c,$$

где $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, а x — переменная. Числа a, b, c называются коэффициентами. Число a называется *старшим коэффициентом*, число b — коэффициентом при x, число c — *свободным членом.*

Определение 1. *Корнем* квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ называют любое значение переменной x, такое, что квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ обращается в ноль.

Для того, чтобы найти корни квадратного трёхчлена, необходимо решить квадратное уравнение вида:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Для решения можно использовать один из известных способов.

Способ 1. Нахождение корней квадратного трёхчлена с помощью дискриминанта.

1. Найти значение дискриминанта по формуле:

$$D = b^2 - 4ac$$

2. В зависимости от значения дискриминанта вычислить корни по формулам:
   - Если $D > 0$, то квадратный трёхчлен имеет два корня, которые можно найти по формуле:

     $$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

   - Если $D = 0$, то квадратный трёхчлен имеет один корень, который можно найти по формуле:

     $$x = \frac{-b}{2a}$$

   - Если $D < 0$, то квадратный трёхчлен не имеет действительных корней.

Пример 1. Определите, сколько корней имеет квадратный трёхчлен

$$-3x^2 + 2x + 8,$$

и найдите их.

Решение. Для того, чтобы определить, сколько корней имеет квадратный трёхчлен, необходимо посчитать дискриминант:

$$D = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 8 = 4 + 96 = 100$$

Квадратный трёхчлен $-3x^2 + 2x + 8$ имеет два корня, так как $D > 0$:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2 + 10}{-6} = -\frac{8}{6} = -1\frac{1}{3},$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2 - 10}{-6} = 2$$

Ответ: квадратный трёхчлен $-3x^2 + 2x + 8$ имеет два корня: $x_1 = -1\frac{1}{3}$, $x_2 = 2$.

Способ 2. Теорема Виета.

Теорема 1 (Виет)**.** Корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ являются решениями системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

Значимость теоремы Виета заключается в том, что, не зная корней квадратного трёхчлена, мы легко можем вычислить их сумму и произведение, то есть простейшие симметричные многочлены от двух переменных: $x_1 + x_2$ и $x_1 x_2$. Теорема Виета позволяет угадывать целые корни квадратного трёхчлена.

Справедлива и

Теорема 2 (Обратная теорема Виета)**.** Если пара чисел (u, v) является решением системы уравнений

$$\begin{cases} u + v = \dfrac{-b}{a} \\ u \cdot v = \dfrac{c}{a}, \end{cases}$$

то эти числа u и v являются корнями квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Пример 2. С помощью теоремы Виета найдите корни квадратного трёхчлена

$$x^2 + 6x - 7$$

Решение. Согласно теореме Виета:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -6 \\ x_1 \cdot x_2 = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -7 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = -7$, $x_2 = 1$.

Способ 3. Нахождение корней квадратного трёхчлена выделением полного квадрата.

Рассмотрим этот способ на примере *приведённого* квадратного трёхчлена. *Приведённое квадратное уравнение* — уравнение у которого старший коэффициент равен единице.

Пример 3. С помощью выделения полного квадрата найдите корни квадратного трёхчлена

$$x^2 + 4x - 5$$

Решение. Решим следующее квадратное уравнение $x^2 + 4x - 5 = 0$. Преобразуем это уравнение:

$$x^2 + 4x = 5$$

В левой части уравнения стоит многочлен $x^2 + 4x$. Для того, чтобы представить его в виде квадрата суммы, нам необходимо, чтобы там был еще один коэффициент, равный 4. Добавим и вычтем из этого выражения 4, получим:

$$(x^2 + 4x + 4) - 4 = 5$$

То, что в скобках, можно представить в виде квадрата двучлена:

$$(x + 2)^2 - 4 = 5$$

$$(x + 2)^2 = 9$$

Данное уравнение распадается на два случая: либо $x + 2 = 3$, либо $x + 2 = -3$. В первом случае получаем $x = 1$, а во втором — $x = -5$.

Ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = -5$.

Очень важной является формула разложения квадратного трёхчлена на множители. Чтобы получить эту формулу, проведём следующие вычисления, основой которых является теорема Виета:

$$a(x-x_1)(x-x_2) = a(x_2-xx_1-xx_2+x_1x_2) = a(x^2-x(x_1+x_2)+x_1x_2) = a(x^2+b/a\cdot x+c/a) = ax^2+bx+c$$

Таким образом, если дискриминант квадратного трёхчлена неотрицателен, то квадратный трёхчлен раскладывается на множители:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

где x_1, x_2 — корни квадратного трёхчлена.

Пример 4. Сократите дробь:

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$$

Решение. Разложим сначала квадратный трёхчлен, стоящий в числителе дроби, на множители. Найдём дискриминант квадратного уравнения $x^2 - 5x + 6 = 0$:

$$D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1$$

Так как дискриминант больше нуля, квадратное уравнение имеет два действительных корня:

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = 4/2 = 2$$

$$x_2 = \frac{5 + \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = 6/2 = 3$$

Значит, справедливо разложение:

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3),$$

откуда

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} = \frac{(x - 2)(x - 3)}{x - 3} = x - 2$$

Ответ: $x - 2$.

Квадратичная функция

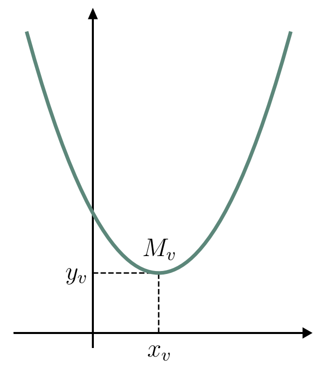
Функция вида

$$y = ax^2 + bx + c,$$

где a, b, c — некоторые вещественные числа, причем a отлично от нуля, а x, y — переменные, называется *квадратичной функцией*. Графиком квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ является парабола $y = ax^2$, сдвинутая так, чтобы её вершина попала в точку $M_v(x_v; y_v)$, где

$$x_v = -\frac{b}{2a},\ y_v = -\frac{D}{4a}$$

(здесь D — дискриминант).



Формулу для y_v запоминать не нужно. Значение y_v вычисляется при помощи подстановки координаты вершины x_v в формулу $y = ax^2+bx+c$.

Общий вид параболы представлен на рисунке справа.

Парабола $y = ax^2 + bx + c$ пересекает ось Oy в точке с координатами $(0, c)$. При $a > 0$ ветви параболы направлены вверх, при $a < 0$ — вниз. В случае $a > 0$ функция $y = ax^2 + bx + c$ в точке x_v достигает наименьшего значения, случае $a < 0$ — наибольшего.

Если квадратный трёхчлен имеет два различных корня (дискриминант положителен), то парабола пересекает ось Ox в точках с координатами $(x_1; 0)$ и $(x_2; 0)$.

Если квадратный трёхчлен имеет два совпавших корня (дискриминант равен 0), то парабола касается оси Ox в точке с координатой $(x_v; 0)$. В этом случае $x_1 = x_2 = x_v = -b/2a$.

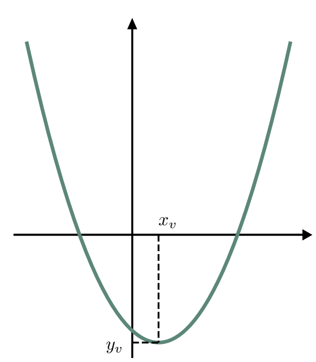
Если квадратный трёхчлен корней не имеет (дискриминант отрицателен), то парабола ось Ox вообще не пересекает.

Квадратичную функцию $y = ax^2 + bx + c$ всегда можно преобразовать к виду

$$y = a(x + k)^2 + p,$$

где $k = \frac{b}{2a}$, $p = \frac{4ac-b^2}{4a}$. Для этого необходимо выделить полный квадрат. Обратите внимание, что точка с координатами $(-k; p)$ является вершиной параболы. График квадратичной функции $y = a(x + k)^2 + p$ можно получить из графика функции $y = ax^2$ с помощью параллельного переноса.

Пример 5. Определить знаки коэффициентов a, b, c, исходя из расположения параболы $ax^2 + bx + c$, изображенной на рисунке справа, относительно осей координат.



Решение. Поскольку ветви параболы направлены вверх, то $a > 0$. Поскольку парабола пересекает ось Oy в точке с отрицательной ординатой, то $c < 0$. Поскольку $x_v > 0$ то, в силу того, что $a > 0$, заключаем, что $b < 0$.

Ответ: $a > 0$, $b < 0$, $c < 0$.

Пример 6. Найти координаты точек пересечения графиков функций $y = 4 - x$ и $y = x^2 - 3x + 2$.

Решение. Координаты (x, y) каждой точки пересечения графиков указанных функций удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} y = 4 - x \\ y = x^2 - 3x + 2 \end{cases}$$

Поэтому $x^2 - 3x + 2 = 4 - x$, что эквивалентно $x^2 - 2x - 2 = 0$. Решаем уравнение:

$$D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 4 + 8 = 12$$

$$x_1 = \frac{2 - \sqrt{12}}{2 \cdot 1} = 1 - \sqrt{3} \approx -0.73,\ y_1 = 4 - x_1 = 4 + 0.73 = 4.73$$

$$x_2 = \frac{2 + \sqrt{12}}{2 \cdot 1} = 1 + \sqrt{3} \approx 2.73,\ y_2 = 4 - x_2 = 4 - 2.73 = 1.27$$

Ответ: $(-0.73; 4.73)$, $(2.73; 1.27)$.

Домашнее задание

1. Определите, сколько корней имеет квадратный трёхчлен $3x^2 - 4x + 5$, и найдите их, если это возможно.
2. Определите, сколько корней имеет квадратный трёхчлен $2x^2 + 6x - 3$, и найдите их, если это возможно.
3. Сократите дробь: $\dfrac{x^2 - 7x + 12}{2x - 6}$.
4. По теореме Виета найдите корни квадратного трёхчлена $x^2 - 2x - 3$.
5. Найдите координаты точек пересечения графиков функций $y = 3x^2 - 7x - 2$ и $y = 2x^2 - 5x + 6$.