GeekBrains

Квадратный трёхчлен и его корни. Квадратичная функция

Базовая математика / Урок 1

В этом уроке

- Квадратный трёхчлен
- Квадратное уравнение
- Квадратичная функция

Квадратным трёхчленом называют трёхчлен вида

$$ax^2 + bx + c,$$

где $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, а x — переменная.

a, b, c — коэффициенты; a — старший коэффициент, c — свободный член.

Квадратным трёхчленом называют трёхчлен вида

$$ax^2 + bx + c,$$

где $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, а x — переменная.

a, b, c — коэффициенты; a — старший коэффициент, c — свободный член.

Корнем квадратного трёхчлена называется любое значение переменной x, такое, что квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ обращается в нуль.

Нахождение корней квадратного трёхчлена

1. С помощью дискриминанта
2. С помощью теоремы Виета
3. Выделением полного квадрата

С помощью дискриминанта

1. Найти значение дискриминанта по формуле:

$$D = b^2 - 4ac$$

2. В зависимости от значения дискриминанта вычислить корни по формулам:
   - Если $D > 0$, то квадратный трёхчлен имеет два корня, которые можно найти по формуле:

   $$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

   - Если $D = 0$, то квадратный трёхчлен имеет один корень, который можно найти по формуле:

   $$x = \frac{-b}{2a}$$

   - Если $D < 0$, то квадратный трёхчлен не имеет действительных корней.

Пример 1

Определите, сколько корней имеет квадратный трёхчлен

$$-3x^2 + 2x + 8,$$

и найдите их.

Решение примера 1

$D = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 8 = 4 + 96 = 100$

Квадратный трёхчлен $-3x^2 + 2x + 8$ имеет два корня, так как $D > 0$:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2 + 10}{-6} = -\frac{8}{6} = -1\frac{1}{3},$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2 - 10}{-6} = 2$$

Ответ: квадратный трёхчлен $-3x^2 + 2x + 8$ имеет два корня: $x_1 = -1\frac{1}{3}$, $x_2 = 2$.

Теорема (Виет)

Корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ являются решениями системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

Пример 2

С помощью теоремы Виета найдите корни квадратного трёхчлена $x^2 + 6x - 7$.

Пример 2

С помощью теоремы Виета найдите корни квадратного трёхчлена $x^2 + 6x - 7$.

Решение:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -6 \\ x_1 \cdot x_2 = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -7 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = -7$, $x_2 = 1$.

Пример 3

Найти корни квадратного трёхчлена $x^2 + 4x - 5$.

Решение:

1. $x^2 + 4x - 5 = 0 \Rightarrow x^2 + 4x = 5$
2. $(x^2 + 4x + 4) - 4 = 5$
3. $(x + 2)^2 - 4 = 5$
4. $(x + 2)^2 = 9$
5. $x + 2 = \pm\sqrt{9} = \pm 3$
6. $x_1 = 1,\ x_2 = -5$

Ответ: $x_1 = 1,\ x_2 = -5$.

GeekBrains

Формула разложения квадратного трёхчлена

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Пример 4

Сократите дробь: $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$.

Решение:

1. $x^2 - 5x + 6 = 0$
2. $D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1$
3. $x_1 = \dfrac{5 - \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \dfrac{4}{2} = 2$, $x_2 = \dfrac{5 + \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \dfrac{6}{2} = 3$
4. $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$
5. $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} = \dfrac{(x - 2)(x - 3)}{x - 3} = x - 2$

Ответ: $x - 2$.

Квадратичная функция

Квадратичная функция

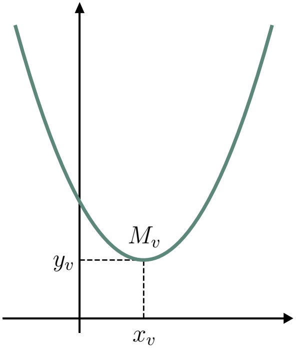
Функция вида

$$y = ax^2 + bx + c,$$

где a, b, c — некоторые вещественные числа, причем $a \neq 0$, а x, y — переменные, называется квадратичной функцией.

Графиком квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ является парабола $y = ax^2$, сдвинутая так, чтобы её вершина попала в точку $M_v(x_v; y_v)$, где

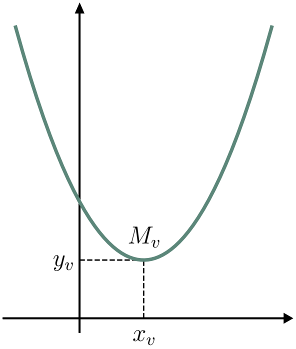
$$x_v = -\frac{b}{2a}, \; y_v = -\frac{D}{4a}$$



Здесь $D = b^2 - 4ac$ — дискриминант.

Общий вид параболы

- $a > 0$ — ветви параболы направлены вверх
- $a < 0$ — ветви параболы направлены вниз



Пересечение параболы с осью Ox

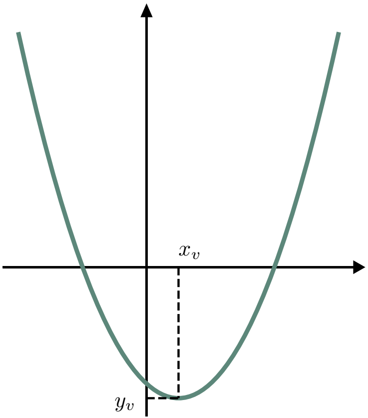
- Если квадратный трёхчлен имеет два различных корня (дискриминант положителен), то парабола пересекает ось Ox в точках с координатами $(x_1; 0)$ и $(x_2; 0)$.
- Если квадратный трёхчлен имеет два совпавших корня (дискриминант равен 0), то парабола касается оси Ox в точке с координатой $(x_v; 0)$. В этом случае $x_1 = x_2 = x_v = -b/2a$
- Если квадратный трёхчлен корней не имеет (дискриминант отрицателен), то парабола ось Ox вообще не пересекает.

Квадратичную функцию $y = ax^2 + bx + c$ всегда можно преобразовать к виду:

$y = a \cdot (x + k)^2 + p$, где $k = \dfrac{b}{2a}$, $p = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$.

Пример 5

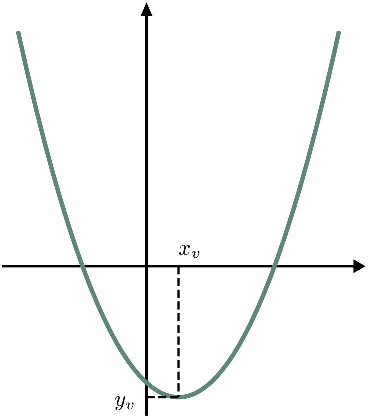
Определить знаки коэффициентов a, b, c, исходя из расположения параболы $ax^2 + bx + c$, изображенной на рисунке справа, относительно осей координат.



Решение примера 5

- Поскольку ветви параболы направлены вверх, то $a > 0$.
- Поскольку парабола пересекает ось Oy в точке с отрицательной ординатой, то $c < 0$.
- Поскольку $x_v > 0$ то, в силу того, что $a > 0$, заключаем, что $b < 0$.

Ответ: $a > 0$, $b < 0$, $c < 0$.



Пример 6

Найти координаты точек пересечения графиков функций $y = 4 - x$ и $y = x^2 - 3x + 2$.

Решение примера 6

Координаты (x, y) каждой точки пересечения графиков указанных функций удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} y = 4 - x \\ y = x^2 - 3x + 2 \end{cases}$$

Поэтому $x^2 - 3x + 2 = 4 - x$, что эквивалентно $x^2 - 2x - 2 = 0$.

1. $D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 4 + 8 = 12$
2. $x_1 = \dfrac{2 - \sqrt{12}}{2 \cdot 1} = 1 - \sqrt{3} \approx -0.73,\ y_1 = 4 - x_1 = 4 + 0.73 = 4.73$
3. $x_2 = \dfrac{2 + \sqrt{12}}{2 \cdot 1} = 1 + \sqrt{3} \approx 2.73,\ y_2 = 4 - x_2 = 4 - 2.73 = 1.27$

Ответ: $(-0.73; 4.73)$, $(2.73; 1.27)$.

Спасибо за внимание