Базовая математика

Урок 7. Критические точки функции: максимумы и минимумы. Применение производной к исследованию функции

Разбор домашнего задания

Задание 1. Найти экстремумы функции $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3$ и построить её график.

Решение. Найдем производную функции:

$$f'(x) = 3x^2 - 8x$$

Необходимое условие экстремума — равенство нулю производной. Найдём корни уравнения $3x^2 - 8x = 0$:

$$x(3x - 8) = 0$$

$$x_1 = 0,\ x_2 = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$$

Две точки делят ось Ox на три интервала:

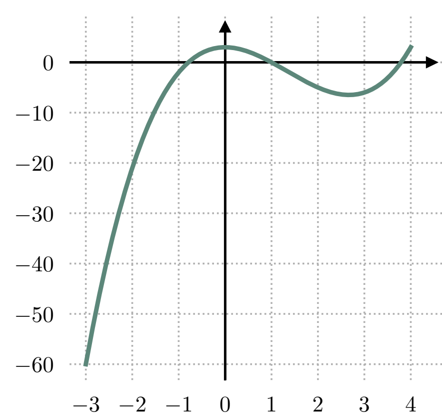
$$(-\infty; 0) \cup \left(0; 2\frac{2}{3}\right) \cup \left(2\frac{2}{3}; +\infty\right)$$

Для определения знака производной в каждом интервале можно, например, подставить какую-нибудь точку из каждого интервала:

$$f'(-1) = 3(-1)^2 - 8(-1) = 3 + 8 = 11 > 0$$

$$f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 8 \cdot 1 = -5 < 0$$

$$f'(3) = 3 \cdot 3^2 - 8 \cdot 3 = 27 - 24 = 3 > 0$$



Знаки производной:

$(-\infty; 0)$	$(0; 2\frac{2}{3})$	$(2\frac{2}{3}; +\infty)$
$+$	$-$	$+$

Ответ: $x = 0$ — точка максимума, $x = 2\frac{2}{3}$ — точка минимума.

Задание 2. Найти экстремумы функции $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ и построить её график.

Решение. Найдем производную функции:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$$

Необходимое условие экстремума — равенство нулю производной. Найдём корни уравнения $3x^2 - 6x - 9 = 0$:

$$D = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-9) = 36 + 108 = 144$$

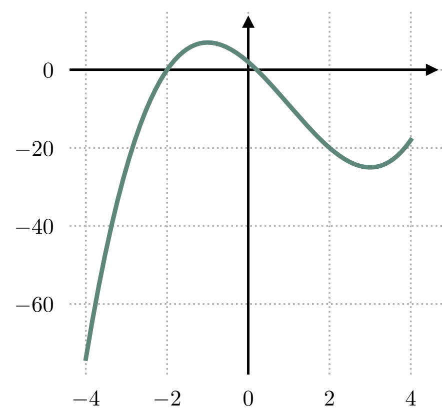
$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{6 + 12}{6} = 3$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{6 - 12}{6} = -1$$

Две точки делят ось Ox на три интервала:

$$(-\infty; -1) \cup (-1; 3) \cup (3; +\infty)$$

Для определения знака производной в каждом интервале можно, например, подставить какую-нибудь точку из каждого интервала:



$$f'(-2) = 3(-2)^2 - 6(-2) - 9 = 15 > 0$$

$$f'(0) = 3 \cdot 0^2 - 6 \cdot 0 - 9 = -9 < 0$$

$$f'(4) = 3 \cdot 4^2 - 6 \cdot 4 - 9 = 15 > 0$$

Знаки производной:

$(-\infty; -1)$	$(-1; 3)$	$(3; +\infty)$
$+$	$-$	$+$

Ответ: $x = -1$ — точка максимума, $x = 3$ — точка минимума.