Основы математики - Оксана Шилова

Урок 2 Системы уравнений.

• 2 или более уравнений наз-ся системой уравнений

• решением системы уравнений наз-ся пара чисел (x_0, y_0) такая, что подстановке в каждое ур-е системы, мы получаем тождество. У нек-х систем будет решение, у нек-х решений может не быть.

• Решение квадратных уравнений типа $ax^2+bx+c=0$

Дискриминант: $D = b^2 - 4ac$

- если $D<0$, корней (решений) нет;
- если $D=0$, есть один корень;
- если $D>0$, есть 2 различных корня

• если $a>1$ → уравнение неприведенное

• если $a=1$ → ур-е приведенное

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2 \cdot a}$$ - формула корней

Урок 1 Квадратный трехчлен - ax^2+bx+c

Теорема Виета $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$

Метод выделения полного квадрата

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$x^2 + 4x - 3 = 0$

$x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 - 2^2 - 3 = (x+2)^2 - 7$

$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$

$(x+2)^2 - 7 = 0 \Rightarrow (x+2)^2 = 7 \Rightarrow x+2 = \pm\sqrt{7} \Rightarrow$

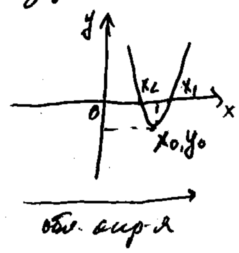
$\Rightarrow x_1 = \sqrt{7} - 2$

$x_2 = -\sqrt{7} - 2$

Разложение квадратного трехчлена на множители

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ 1) найти дискриминант

Квадратичная функция $y = x^2 - 4x + 3$



обл. знач

1) обл-ть определения функции : $x \in (-\infty; +\infty)$
2) область знач-я ф-и : $y \in (-1; +\infty)$

вершина параболы $(x_0; y_0)$

$x_0 = -\frac{b}{2a}$ $x_0 = \frac{4}{2} = 2$; $y_0 = -1$

3) нули функции (пересечение с OX): $x_1 = 3$, $x_2 = 1$ $(3;0)$ $(1;0)$
4) ось симметрии (x_0) - x коорд-та вершины параболы $(x_0 = 2)$
5) наиб/наим. знач-е ф-и: $y_0 = -1$ (наим.)
6) возр и убыв. ф-и: убыв $x \in (-\infty; 2]$

возр. $x \in [2; +\infty)$

Вершина параболы: $(x_0; y_0)$

$y = 2x^2 - 12x + 10$

$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-12)}{2 \cdot 2} = 3$

$y_0 = 2 \cdot 3^2 - 12 \cdot 3 + 10 = -8$

~~Верш. пар. (3; -8)~~

Урок 3 Последовательности

- возрастающая послед-ть $a_n < a_{n+1}$, где $n \in N$
- убывающая посл-ть $a_n > a_{n+1}$
- возрастающие и убывающие посл-ти наз-ся монотонными

Послед-ть Фибоначчи $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, где $n \in N$, $a_1 = a_2 = 1$
(каждое последующее число, начиная с 3-го, явл-ся суммой 2-х предыд-х)
(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13...)

Общая формула арифметич прогрессии: $a_n = a_1 + d \cdot (n-1)$, где
d - разность, n - порядковый номер члена)

Сумма первых n членов арифм прогрессии: $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$

$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$

$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ (среднее арифметич двух соседних чисел)

Урок 4 Геометрическая прогрессия

Общая формула геом. прогр-и $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, где q - знаменатель

Сумма первых n членов геом. пр-и: $S_n = \frac{b_n \cdot q - b_1}{q-1}$ $\quad S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1}$

Бесконечно убывающая геом. пр-я $|q| < 1$

Сумма членов бесконечно уб-й геом. пр-и $S = \frac{b_1}{1-q}$

$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$ (среднее геометрич двух соседних чисел)

$q = \frac{b_{n+1}}{b_n}$

Урок 5 Тригонометрические функции

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	

30° 45° 60° 90° $\pi = 180°$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\sin(-x) = -\sin x$

$\cos(-x) = \cos x$

$\arcsin(-x) = -\arcsin x$

$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$

$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$; $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$

$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$ $\qquad x \neq \pi n$

$1 + \operatorname{tg}^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$; $t \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$

$1 + \operatorname{ctg}^2 t = \frac{1}{\sin^2 t}$; $t \neq \pi k$

$\arccos a = t \quad \cos t = a \quad (\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}; \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2})$

Тригонометрич. уравнения

1) $\sin x = a$, $a \in [-1; 1]$; $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$; $n \in Z$ + частные случаи

$\sin x = 0$; $\sin x = 1$, $\sin x = -1$

$x = \pi n$; $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$; $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$

$\sin x = -\frac{1}{2}$

$x = (-1)^n \cdot \arcsin(-\frac{1}{2}) + \pi n$;

$x = (-1)^{n+1} \cdot \arcsin(\frac{1}{2}) + \pi n$;

$x = (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$

$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$x = \pm \arccos(-\frac{\sqrt{2}}{2}) + 2\pi n$

$x = \pm (\pi - \arccos \frac{\sqrt{2}}{2}) + 2\pi n$

$x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$

2) $\cos x = a$ $x = \pm \arccos a + 2\pi n$, $n \in Z$ + частные случаи

$a \in [-1; 1]$

$\cos x = 0$; $\cos x = 1$; $\cos x = -1$

$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$; $x = 2\pi n$; $x = \pi + 2\pi n$

3) $\operatorname{tg} x = a$

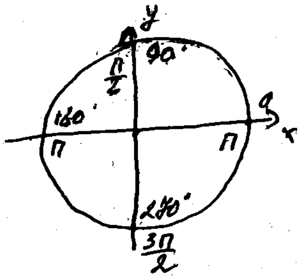
$x = \operatorname{arctg} a + \pi n$

4) $\operatorname{ctg} x = a$

$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n$

Формулы приведения

		$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0



$\sin 750° = \sin(2 \cdot 360° + 30°) = \sin 30° = \frac{1}{2}$

$\sin 120° = \sin(90° + 30°) =$

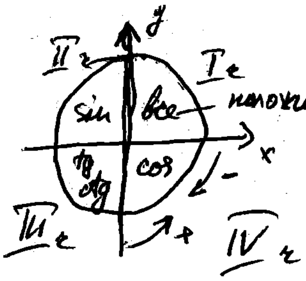
II ч знак + меняется ли

$= \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin 120° = \sin(180° - 60°) =$

II ч + не мен-ся

$= \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$



$\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{tg} x = 1$; $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}$; $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ } формула

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ } двойного угла

Урок 6 Производная функция

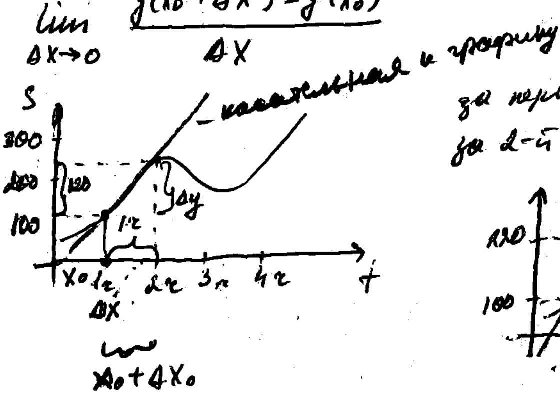
Производная - скорость изменения функции

$f(x)$ - ф-я (y) $f'(x)$ - производная (y') $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ - изм-е y (ф-и) / - изм-е x (аргумента)

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

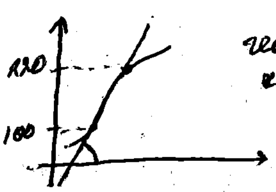
$A \xrightarrow{70 км/ч} B$ (700 км) $S = 700$ км $v = \frac{S}{t} = 70$ км/ч

$t = 10$ ч



за первый час = 100 км $v_{ср} = 100$ км/ч

за 2-й ч = 120 км $v_{ср} = 120$ км/ч $(\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{120}{1})$



геометрич. смысл производной - угол касательной к оси - $\operatorname{tg}\alpha$ (tg угла)

Формула приращения аргумента (x):

$\Delta x = x - x_0$

Формула приращения функции:

$\Delta f = f(x) - f(x_0)$

Вычисление производной

1) $f(x)=x$ найти $f'(x)$

$f'(x)=x'=1$ (по ф-ле $(x)'=1$)

2) $f(x)=x+2$; $f'(x)=(x+2)'$ - берем производную от $(x+2)$

$\underline{(u+v)'=u'+v'}$ - правило

3) $y=2x+3$; y'-?

$y'=(2x+3)'=(2x)'+3'=2x'+0=2\cdot1=2$

$\underline{(u\cdot v)'=u'v+u\cdot v'}$ - правило

константу C можно вынести за ( ) $\Rightarrow$

$(x+2)'=x'+2'=1+0=1$

по ф-ле $(x)'=1$

$2'$ - производная постоянного числа (C)

$c'=0$

$\underline{(Cx)'=Cx'}$

4) $y=x^5-3x^2+7$; y'-?

алгебр. сумма $(u+v)'=u'+v'$

$y'=(x^5)'-(3x^2)'+7'=5x^4-3\cdot2x+0=5x^4-6x$

5) $y=2x^3-3x^2+\frac{1}{2}x^4-5$;

$y'=(2x^3-3x^2+\frac{1}{2}x^4-5)'=(2x^3)'-(3x^2)'+(\frac{1}{2}x^4)'-5'=$

$=2\cdot3x^2-3\cdot2x+\frac{1}{2}4x^3-5'=6x^2-6x+2x^3$

$\underline{(x^n)'=n\cdot x^{n-1}}$ - правило

$\underline{(Cx^n)'=C\cdot n\cdot x^{n-1}}$ - правило

1) $y=x^2(x-3)$; y'-?

$(x^2\cdot(x-3))'=(x^2)'(x-3)+x^2(x-3)'=2x(x-3)+x^2\cdot(x'-3')=2x(x-3)+x^2\cdot1=2x^2-6x+x^2=\underline{3x^2-6x}$

2-й вариант:

$y=x^2(x-3)=x^3-3x^2$; $(x^3-3x^2)'=(x^3)'-(3x^2)'=3x^2-3\cdot2x=\underline{3x^2-6x}$

2) $(x^3-2)(2x^3-1)=y$; $y=2x^6+x^3-4x^3-2=2x^6-3x^3-2$;

$(2x^6-3x^3-2)'=(2x^6)'-(3x^3)'-2'=2\cdot6\cdot x^5-3\cdot3x^2-0=12x^5-9x^2$

3) $y=\frac{1+2x}{3-5x}$; y'-? $y'=\left(\frac{1+2x}{3-5x}\right)'=\frac{(1+2x)'(3-5x)-(1+2x)(3-5x)'}{(3-5x)^2}=\frac{(0+2\cdot1)(3-5x)-(1+2x)(0-5)}{(3-5x)^2}=$

$\underline{\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-u\cdot v'}{v^2}}$ - правило

$=\frac{2(3-5x)+5(1+2x)}{(3-5x^2)}=\frac{6-10x+5+10x}{(3-5x)^2}=\frac{11}{(3-5x)^2}$

1) $y=\frac{7}{4x^4}-\frac{2}{3x^3}+\frac{5}{2}x^2+2x^3-3x^4$; y'-?

$\underline{\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}}$ - правило

$y'=\left(\frac{7}{4x^4}\right)'-\left(\frac{2}{3x^3}\right)'+\left(\frac{5}{2}x^2\right)'+(2x^3)'-(3x^4)'=$

$\left(\frac{7}{4x^4}\right)'=\frac{7}{4}x^{-4}$

$=\left(\frac{7}{4}x^{-4}\right)'-\left(\frac{2}{3}x^{-3}\right)'+\left(\frac{5}{2}x^2\right)'+(2x^3)'-(3x^4)'=$

$\underline{(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}}$ - правило

$=\frac{7}{4}\cdot(-4)x^{-4-1}+\frac{2}{3}\cdot3x^{-3-1}+\frac{5}{2}\cdot2x+2\cdot3x^2-3\cdot4x^3=-7x^{-5}+2x^{-4}+5x+6x^2-12x^3=$

$=-\frac{7}{x^5}+\frac{2}{x^4}+5x+6x^2-12x^3$

2) $\left(\frac{3}{x}+x\right)(\sqrt{x}+1)=y$; y'-? $(u\cdot v)'=u'v+u\cdot v'$

$\left(\frac{3}{x}+x\right)'(\sqrt{x}+1)+\left(\frac{3}{x}+x\right)(\sqrt{x}+1)'=\left(-\frac{3}{x^2}+1\right)(\sqrt{x}+1)+\left(\frac{3}{x}+x\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+0\right)=\left(-\frac{3}{x^2}+1\right)(\sqrt{x}+1)+\left(\frac{3}{x}+x\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\frac{1}{x}$

Производная сложной функции

1) $y=(2x+1)^3$ $\quad y'-?$ $\quad (a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$y=(2x)^3+3(2x)^2\cdot 1+3\cdot 2x\cdot 1^2+1^3=8x^3+12x^2+6x+1$

$y'=(8x^3)'+(12x^2)'+(6x)'+1'=8\cdot 3x^2+24x+6=6(4x^2+4x+1)$

2) $y=(5x^2+7)^5$ – сложная ф-я: $(\ )^5$ - 1я ф-я $(5x^2+7)$ - 2-я ф-я

$y=f(u)$; $u=g(x) \Rightarrow \underline{y=f(g(x))}$

$u=g(x)=5x^2+7$ $\qquad f(g(x))$ – внешняя ф-я

$\qquad\qquad\qquad\qquad g(x)$ - внутр ф-я

$\underline{y'=f'(g(x))\cdot g'(x)}$ – правило

$y'=((5x^2+7)^5)'$; $(5x^2+7)^5$; $x\to x^2\to 5\cdot x^2\to 5x^2+7\to(5x^2+7)^5$

$y'=5\underbrace{(5x^2+7)^4}_{f(g(x))}\cdot\underbrace{(5x^2+7)'}_{g(x)}=5(5x^2+7)^4\cdot 10x=50x(5x^2+7)^4$

Вычисление производных

правила

1. $(u\pm v)'=u'\pm v'$
2. $(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'$
3. $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$

формулы

1. $c'=0$ (const)
2. $x'=1$
3. $(7x)'=7\cdot x'$

   $(Cx)'=Cx'$
4. $(x^n)'=n\cdot x^{n-1}$
5. $(Cx^n)'=C\cdot n\cdot x^{n-1}$
6. $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

   $x^{\frac{2}{6}}=\sqrt[6]{x^2}$
7. $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$
8. $(\sin x)'=\cos x$
9. $(\cos x)'=-\sin x$
10. $(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$
11. $(\operatorname{ctg} x)'=\frac{1}{-\sin^2 x}$

---

1) $y=\sin^5 x$; $\quad x\to\sin x\to\sin^5 x$ – $(a^n)'=n\cdot a^{n-1}$

$y'=(\sin^5 x)'=5\sin^4 x\cdot(\sin x)'=5\sin^4 x\cdot\cos x$

2) $y=\sqrt{\operatorname{tg}x}$; $\quad x\to\operatorname{tg}x\to\sqrt{\operatorname{tg}x}$ $\qquad (\sqrt{\operatorname{tg}x})'=\frac{1}{2\sqrt{\operatorname{tg}x}}$; $(\operatorname{tg}x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$

$y'=(\sqrt{\operatorname{tg}x})'=\frac{1}{2\sqrt{\operatorname{tg}x}}\cdot(\operatorname{tg}x)'=\frac{1}{2\sqrt{\operatorname{tg}x}}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}$

3) $y=\cos^2 x$; $y'=2\cos x\cdot(\cos x)'=2\cos x\cdot(-\sin x)=-2\cos x\cdot\sin x=-\sin 2x$ $\quad (x\to\cos x\to\cos^2 x)$

4) $y=\cos x^2$; $\quad x\to x^2\to\cos x^2$; $y'=-\sin x^2\cdot(x^2)'=-2\cdot x(\sin x^2)$

1) $y=\sin(5x+3)$; $y'=(\sin(5x+3))'=\cos(5x+3)\cdot(5x+3)'=\cos(5x+3)\cdot 5=5\cdot\cos(5x+3)$

2) $y=(12x-5)^8$; $y'=((12x-5)^8)'=8\cdot(12x-5)^7\cdot(12x-5)'=8\cdot(12x-5)^7\cdot 12=96(12x-5)^7$

3) $y=\sqrt{0{,}5x+3}$; $y'=(\sqrt{0{,}5x+3})'=\frac{1}{2\sqrt{0{,}5x+3}}\cdot(0{,}5x+3)'=\frac{1}{2\sqrt{0{,}5x+3}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4\sqrt{0{,}5x+3}}$

4) $y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$; $y'=-\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)'=-2\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

1) $y=\sqrt{\cos 3x}$; $y'=(\sqrt{\cos 3x})'=\frac{1}{2\sqrt{\cos 3x}}\cdot(\cos 3x)'=\frac{1}{2\sqrt{\cos 3x}}\cdot(-\sin 3x)\cdot(3x)'=-\frac{1}{2\sqrt{\cos 3x}}\cdot(\sin 3x)\cdot 3=$

$=-\frac{3\sin 3x}{2\sqrt{\cos 3x}}$

2) $y=\sin^6\left(\frac{x}{3}\right)$; $y'=\left(\sin^6\left(\frac{x}{3}\right)\right)'=6\sin^5\frac{x}{3}\left(\sin\frac{x}{3}\right)'=6\sin^5\frac{x}{3}\cdot\cos\frac{x}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)'=6\sin^5\frac{x}{3}\left(\cos\frac{x}{3}\right)\cdot\frac{1}{3}=$

$=\frac{6}{3}\sin^5\left(\frac{x}{3}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{3}\right)=2\sin^5\frac{x}{3}\cdot\cos\frac{x}{3}$

1) $y = \sin 4x - \cos^3(4x)$; $y' = (\sin 4x - \cos^3 4x)' = (\sin 4x)' - (\cos^3 4x)' =$

$(\sin 4x)' = (\cos 4x) \cdot (4x)' = 4\cos 4x$

$(\cos^3 4x)' = 3\cos^2 4x \cdot (\cos 4x)' = 3\cos^2 4x \cdot (-\sin 4x) \cdot (4x)' = 12\cos^2 4x(-\sin 4x)$

$y' = 4\cos 4x + 12\cos^2 4x \cdot \sin 4x = 4\cos 4x(1 + 3\cdot\cos 4x \cdot \sin 4x)$

2) $y = \sqrt{4x + \sin 6x}$; $y' = (\sqrt{4x+\sin 6x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{4x+\sin 6x}} \cdot (4x + \sin 6x)' = \dfrac{1}{2\sqrt{4x+\sin 6x}} \cdot (4 + \cos 6x \cdot (6x)') =$

$= \dfrac{4 + 6\cos 6x}{2\sqrt{4x+\sin 6x}} = \dfrac{2(2+3\cos 6x)}{2\sqrt{4x+\sin 6x}} = \dfrac{2+3\cos 6x}{\sqrt{4x+\sin 6x}}$

1) $y = \dfrac{\sin 3x}{\sqrt{x-1}}$; $y' = \left(\dfrac{\sin 3x}{\sqrt{x-1}}\right)' = \dfrac{(\sin 3x)'\sqrt{x-1} - \sin 3x(\sqrt{x-1})'}{(\sqrt{x-1})^2} = \dfrac{3\cos 3x \cdot \sqrt{x-1} - \sin 3x \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}\overset{1}{(x-1)'}}{x-1} =$

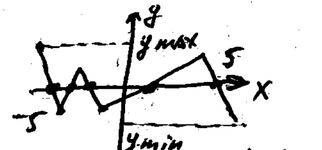
$= \dfrac{3\cos 3x\sqrt{x-1} - \dfrac{\sin 3x}{2\sqrt{x-1}}}{x-1} = \dfrac{6\cos 3x(x-1) - \sin 3x}{2\sqrt{x-1}\cdot(x-1)}$

2) $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ y' при $x = \dfrac{\pi}{12}$

$y' = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)' = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right)\cdot\left(\overset{3}{3x} - \overset{\text{число}}{\dfrac{\pi}{4}}\right)' = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot 3 \cdot \cos\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right) =$

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot 3\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\underbrace{\cos 0}_{1} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

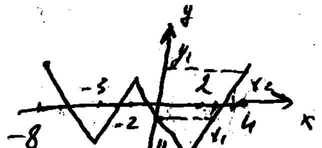
Урок 7 Критические значения функции



нули ф-и
$x_1 = 5$, $x_2 = -3{,}2$
$x_3 = 1{,}9$, $x_4 = 0{,}8$
$x_5 = 5$

- нули ф-и (точки пересечения с OX) $f(x) = 0$, $y = 0$
- экстремумы (точки максимума, точки минимума)
- когда ф ↓ ↑ x_{min} ($x_{min} = 4$, $y_{min} = -1$)
- когда ф ↑ ↓ x_{max} ($x_{max} = -3$, $y_{max} = 4$)
- наибольшее и наименьшее знач-е ф-и (y_{max}, y_{min})

промежутки возрастания и убывания ф-и



$f(x)$ убывает $x \in [-8; -3] \cup (-2; 2)$

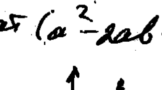
$f(x)$ возрастает $x \in (-3; -2) \cup (2; +\infty)$ точка справа не фикс-на

Если $x_1 \cancel{>} x_2$, а $f(x_1) > f(x_2)$, то ф-я возрастает

Если $x_1 > x_2$, а $f(x_1) > f(x_2)$, то ф-я убывает

$y = x^2 - 6x + 5$ выделить квадрат $(a^2 - 2ab + b^2)$

$y = x^2 - 2\cdot 3x + 9 - 9 + 5 = (x-3)^2 - 4$



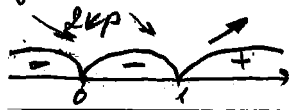
вершина параболы $(3; -4)$

возр. $x \in (3; +\infty)$ уб. $x \in (-\infty; 3)$

Опр-е пром-в возр-а и уб-я ф-и

$y = \dfrac{1}{4}x^4 - \dfrac{1}{3}x^3 - 25$; $y' = x^3 - x^2 - 0 = x^2(x-1)$ y ↑ $x \in [1; +\infty)$

$y' = 0$; $x^2(x-1) = 0$; $x^2 = 0$ $x - 1 = 0$ y ↓ $x \in (-\infty; 1]$ (вкл 0)



$x = 0$ $x = 1$

корень двойной кратности (четной) - знак не меняется

$x^2 \to \frac{x^3}{3}$; потому что, если $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{3x^2}{3} = x^2$
первообр-я

$f(x)$ $F(x)$

$F(x)$ – первообразная; $f(x)$ – ф-я

$f(x)$	$F(x)$
C	$Cx + C$
$x^n, n \neq$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x + C$
$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$\ln\lvert x\rvert + C$ натур логарифм

1) $f(x) = 3x^6 + \frac{1}{x}$; $F(x) = \frac{3}{7}x^7 + \ln|x| + C$

$f(x) = 3x^6 \to F(x) = 3 \cdot \frac{x^7}{7} = \frac{3}{7}x^7$

$g(x) = \frac{1}{x} \to G(x) = \ln|x|$

2) $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3}{\sqrt{x}} = \frac{1}{3}x^3 + 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$

$F(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^4}{4} + 3 \cdot 2\sqrt{x} + C = \frac{x^4}{12} + 6\sqrt{x} + C$

3) $f(x) = \frac{x+1}{x} = \frac{x}{x} + \frac{1}{x} = \underset{\text{const}}{1} + \frac{1}{x}$

$F(x) = 1 \cdot x + \ln|x| + C$

1) $f(x) = x + 1$; $F(x)$ – ? график кот-й проходит через точку $M(\overset{x}{-2}; \overset{y}{3})$

$F(x) = \frac{x^2}{2} + 1x + C \Rightarrow 3 = \frac{(-2)^2}{2} + 1(-2) + C \Rightarrow 3 = 2 - 2 + C \Rightarrow C = 3$

$F(x) = \frac{x^2}{2} + 1x + 3$

2) $f(x) = 1 + x + \cos 2x$; $F(x)$ – ? если $\underset{F(x)}{F(0) = 1}$

$F(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\sin 2x + C$

$1 = 0 + \frac{0}{2} + \frac{1}{2}\sin 2 \cdot 0 + C \Rightarrow 1 = \frac{1}{2}\sin 0 + C \Rightarrow 1 = C$

$F(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\sin 2x + 1$

<u>Правила для вычисления первообр-й</u>

1) если $F(x)$ яв-ся первообр-й для $f(x)$, а $G(x)$ яв-ся первообр. для $g(x)$, то

$f(x) \pm g(x) = F(x) \pm G(x)$

2) $k f(x) \to k \cdot F(x)$

3) $f(kx + b) \to \frac{1}{k} F(kx + b)$

---

1) $f(x) = (x+1)(x+3) = x^2 + 3x + 1x + 3 = x^2 + 4x + 3$; $F(x) = \frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} + 3x + C = \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x + C$

2) $f(x) = 9x^2 + \sin 3x$; $F(x) = 9\frac{x^3}{3} + \left(-\cos 3x \cdot \frac{1}{3}\right) + C = 3x^3 - \frac{1}{3}\cos 3x + C$

3) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{5 - 2x}} + \sin 5x + 1$; $F(x) = 2\sqrt{5-2x} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{5}\cos 5x + x + C = -\sqrt{5-2x} - \frac{1}{5}\cos 5x + x + C$

$f(kx + b) \to \frac{1}{k} F(kx + b)$

4) $f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$; $F(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + C$

2) $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 9$ $\qquad 5x^{2\prime}$

$y' = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 5x^2(x^2 - 4x + 3) =$ (разл-е кв. трехчлена на множ-ли $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$)

$= 5x^2(x-1)(x-3)$; $5x^2(x-1)(x-3) = 0$

2кр

$+ \quad 0 \quad + \quad 1 \quad - \quad 3 \quad +$

$y \nearrow x \in (-\infty; 1]$ или $[3; +\infty)$; $y \searrow x \in [1; 3]$

---

1) $y = (x+1)^2(x-2)^3$; $y' = ((x+1)^2)'(x-2)^3 + (x+1)^2((x-2)^3)' = 2(x+1)(x-2)^3 + (x+1)^2 \cdot 3(x-2)^2 =$

$((x+1)^2)' = 2(x+1)(x+1)' = 2(x+1)$

$((x-2)^3)' = 3(x-2)^2(x-2)' = 3(x-2)^2$

$= (x+1)(x-2)^2(2(x-2) + 3(x+1)) = (x+1)(x-2)^2(5x-1)$;

$(x+1)(x-2)^2(5x-1) = 0$; $x = -1$, $x = 2$ (2кр), $x = \frac{1}{5}$

$+ \quad -1 \quad - \quad \frac{1}{5} \quad + \quad 2 \text{ (2кр)} \quad +$

$y \nearrow x \in (-\infty; -1]$ или $x \in [\frac{1}{5}; +\infty)$

$y \searrow x \in [-1; \frac{1}{5}]$

1) $y = x^2 + \frac{2}{x}$; $y' = 2x + (-2x^{-2}) = 2x - \frac{2}{x^2} = \frac{2x^3 - 2}{x^2} = \frac{2(x^3-1)}{x^2} =$

$= \frac{2(x-1)(x^2+x+1)}{x^2}$

$f'(x) = 0$; $\frac{2(x-1)(x^2+x+1)}{x^2} = 0$; $x \neq 0$, $x = 1$, $x^2 + x + 1 = 0$ $(D<0)$ $\varnothing$ ~~нет решений~~ пустое мн-во

$- \quad 0 \quad - \quad 1 \quad +$

$y \nearrow x \in [1; +\infty)$

$x \in (-\infty; 0)$ или $(0; +1]$

2) $f(x) = -x^3 - 7x + 8$; $f'(x) = -3x^2 - 7$; $-3x^2 - 7 = 0$; $-3x^2 = 7$; $3x^2 = -7$ $\varnothing$

методом подбора получаем:

$f(x)$ монотонно убывает на пром-ке от $-\infty$ до $+\infty$ (R)

Критическая точка

$x = x_0$ - критич. точка для ф-и $f(x)$, если $f'(x) = 0$. Если $f'(x)$ - не сущ-т, данная точка тоже яв-ся критич. точкой

Также и для $f'(x) = \infty$

1) $y = x^4 - 2x^2$; $y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) =$

$= 4x(x-1)(x+1)$

$y' = 0$; $4x(x-1)(x+1) = 0$; $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$ - критич. точки

2) $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$; $f'(x) = (x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$; $f(x) = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$; $\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} = 0$; $x \neq 0$ кр. точка $x = 0$

3) $y = x + \cos x$; $y' = (x + \cos x)' = 1 - \sin x$; $1 - \sin x = 0$; $\sin x = 1$; $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ - множ-во значений $n \in Z$

Урок 8. Первообразная

$f(x) = x^2$; $f'(x) = (x^2)' = 2x$

$x = \frac{(x^2)'}{2}$; $x = \left(\frac{x^2}{2}\right)'$ последующая ф.

предшествующая ф.

// скорости предшествует ускорение

Для $f(x)$ найдётся новая ф-я $F(x)$, причем такая, что $F'(x) = f(x)$, то

ф-я $F(x)$ - первообразная

Неопределенный интеграл

Если для ф-и $f(x)$ сущ-т первообр-я $F(x)+C$, то множ-во первообразных будет составлять (наз-ся) неопределенным интегралом $\int f(x)dx$

$f(x)$	$F(x)$
$\int x^n dx,\ n\neq -1$	$= \frac{x^{n+1}}{n+1}+C$
$\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx$	$= 2\sqrt{x}+C$
$\int \sin x\cdot dx$	$= -\cos x+C$
$\int \cos x\cdot dx$	$= \sin x+C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x}\cdot dx$	$= \operatorname{tg} x+C$
$\int \frac{1}{\sin^2 x}\cdot dx$	$= -\operatorname{ctg} x+C$
$\int \frac{1}{x}dx$	$= \ln\lvert x\rvert+C$

Свойства:

1) $\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx = F(x)+G(x)+C$

2) $\int \underset{\text{число}}{k} f(x)dx = k\int f(x)dx = k\cdot F(x)+C$

3) $\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b)$

1) $\int \left(3x^5+\frac{7}{2\sqrt{x}}\right)dx = \int 3x^5dx + \int \frac{7}{2\sqrt{x}}dx =$
$= 3\frac{x^6}{6} + \int \frac{7}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}dx = \frac{x^6}{2}+\frac{7}{2}2\sqrt{x}+C = \frac{1}{2}x^6+7\sqrt{x}+C$

2) $\int (8\sin x-5x^7+3)dx = -8\cos x - 5\frac{x^8}{8}+3x+C =$
$= -8\cos x - \frac{5}{8}x^8+3x+C$

3) $\int (\cos 4x+2x^{-7}+3)dx = \frac{1}{4}\sin 4x + 2\frac{x^{-6}}{-6}+3x+C = \frac{1}{4}\sin x - \frac{1}{3}x^{-6}+3x+C$

4) $\int (3x-2)^2dx = \int (9x^2-12x+4)dx$

5) $\int 2\sqrt{x} = \int 2\cdot x^{\frac{1}{2}} = 2\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C$

Урок 9. Определенный интеграл. Формула Ньютона-Лейбница

Опр-й интеграл отлич-ся от неопр-го тем, что у него задан интервал (от a до b)

$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$ – значение первообразной в точке a и b,
$\quad\quad\quad\quad\quad\;\; \| $
$\quad\quad\quad\;\; F(b)-F(a)$

$\int$ – множ-во функций; $\int_a^b$ – опр-е число

1) $\int_{-1}^{2}(x^2-2)dx = \frac{x^3}{3}-2x\Big|_{-1}^{2} = F(b)-F(a) = \frac{2^3}{3}\cdot(-2)\cdot 2 - \left(\frac{-1^3}{3}-2(-1)\right) = \frac{8}{3}-4+\frac{1}{3}-2 = \frac{9}{3}-6 = -3$

(на пром-ке от -1 до 2)

Свойства определенного интеграла (Ф-ла Ньютона-Лейбница)

1) $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$

2) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

3) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, где c – промеж. точка м/у a и b

$\boxed{*\ \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}}$

1) $\int_{-3}^{2}(2x-3)dx = 2\frac{x^2}{2}-3x\Big|_{-3}^{2} = \underset{F(b)}{(2^2-3\cdot 2)} - \underset{F(a)}{((-3)^2-3(-3))} = 4-6-18 = -20$

2) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\cos x\,dx = \sin x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} = \sin\frac{5\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{6} = \sin(150^\circ)-\sin(30^\circ) = \cos(60^\circ)-\sin(30^\circ) = \frac{1}{2}-\frac{1}{2} = 0$

3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\frac{x}{2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2\frac{x}{2}}{2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(1-\cos x)dx = \frac{1}{2}(x-\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{2}(0-\overset{0}{\sin 0}) =$
$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-1\right) = \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2} = \frac{\pi-2}{4}$

1) $\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{4x-3}}dx = 2\sqrt{4x-3}\cdot\frac14\Big|_1^3 = \frac{\sqrt{4x-3}}{2}\Big|_1^3 = \frac{\sqrt{4\cdot3-3}}{2} - \frac{\sqrt{4\cdot1-3}}{2} = \frac32-\frac12 = 1$

1) $\int_0^1 \frac{x^3+x^2+x+1}{x+1}dx = \int_0^1 \frac{x^2(x+1)+(x+1)}{x+1}dx = \int_0^1\frac{\cancel{(x+1)}(x^2+1)}{\cancel{x+1}}dx = \int_0^1 (x^2+1)dx =$

$= \frac{x^3}{3}+x\Big|_0^1 = \frac{1^3}{3}+1-\left(\frac{0^3}{3}+0\right) = 1\frac13$

2) $\int_3^5 \frac{x^2-5x+6}{x-2}dx = \int_3^5 \frac{\cancel{(x-2)}(x-3)}{\cancel{x-2}}dx = \int_3^5(x-3)dx = \frac{x^2}{2}-3x\Big|_3^5 = \frac{25}{2}-15-\left(\frac92-9\right) = -15+9+\frac{16}{2} = -6+8=2$

$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$

теорема Виета $x_1=-2$

$x_2=-3$

Нахождение объема через интеграл: $V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$

Площадь через интеграл: $S=\int_a^b (f_2(x)-f_1(x))dx$, a, b – точки пересечения графиков

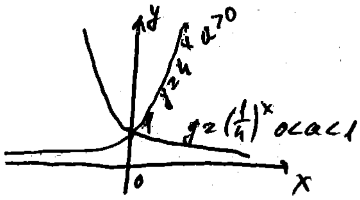
f_2 сверху, f_1 снизу

Урок 10. Показательная функция

$y=a^x$ – показ. ф-я

1) $a\neq1$

2) $a>0$



3) $a>1$, ф-я возрастает

4) $0<a<1$, ф-я убывает

5) $x\in R$

6) $y\in(0;+\infty)$

7) график ф-и проходит через точку $(0;1)$

Показательные уравнения

Методы решения!

1) одинак. основания $2^x=8 \Rightarrow 2^x=2^3\Rightarrow x=3$

2) Введение новой переменной

3) графич. сп-б $y=2^x=8=y$ найти точку пересечения графиков

Осн. св-ва степеней:

1. $a^x\cdot a^y=a^{x+y}$
2. $\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$
3. $(a\cdot b)^x=a^x\cdot b^x$
4. $\left(\frac ab\right)^x=\frac{a^x}{b^x}$
5. $(a^x)^y=a^{x\cdot y}$ 6. $a^0=1$

$2^x=0{,}25 \Rightarrow 2^x=\frac14\Rightarrow 2^x=2^{-2}\Rightarrow x=-2$

$3^x=5^{2x}\Rightarrow 3^x=25^x \Rightarrow |:25^x \Rightarrow \frac{3^x}{25^x}=1\Rightarrow \left(\frac{3}{25}\right)^x=1\Rightarrow \left(\frac3{25}\right)^x=\left(\frac3{25}\right)^0\Rightarrow x=0$

$2^x+2^{x+1}=12\Rightarrow 2^x+2^x\cdot2^1=12\Rightarrow 2^x=t\Rightarrow t+2t=12\Rightarrow 3t=12\Rightarrow t=4\Rightarrow 2^x=4\Rightarrow x=2$

или

$2^x+2^x\cdot2=12\Rightarrow 2^x(1+2)=12\Rightarrow 2^x\cdot3=12\Rightarrow 2^x=4\Rightarrow x=2$

5) $2\cdot2^{2x}-3\cdot2^x-2=0$; $2^x=t$; $2t^2-3t-2=0$; $D=25$; $t_1=\frac{3-5}{4}=-\frac12$; $t_2=2$; $2^x=-\frac12<0$ $\varnothing$

$2^x=2$; $x=1$

1) $6^{x+1}\cdot\sqrt[3]{6}=216$; $6^{x+1}\cdot6^{\frac13}=216$; $6^{x+1+\frac13}=6^3$; $x+1+\frac13=3$; $x=1\frac23$

2) $2^x\cdot2^2-2^x\cdot2^3-2^x\cdot2^4=5^{x+1}-5^x\cdot5^2$; $2^x(2^2-2^3-2^4)=5^x(5^1-5^2)$; $2^x(-20)=5^x(-20)\ |:-20$

$2^x=5^x\ |:5^x$ $\frac{2^x}{5^x}=1$; $\left(\frac25\right)^x=1$; $x=0$

3) $2\cdot9^x-3^{x+1}-9=0$; $2\cdot3^{2x}-3^x\cdot3^1-9=0$; $3^x=t$; $2t^2-3t-9=0$; $D=81$; $t_1=\frac{3-9}{4}=-\frac32<0$ $\varnothing$

$t_2=\frac{3+9}{4}=3$; $3^x=3$; $x=1$

Показательные неравенства

$a^{f(x)} > a^{g(x)}$ $(a^{f(x)} \geq a^{g(x)})$ $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ $(a^{f(x)} \leq a^{g(x)})$

Если $a>1$, то знак нер-ва не меняется, т.е.

1) $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Rightarrow f(x) > g(x)$ 2) $a^{f(x)} < a^{g(x)} \Rightarrow f(x) < g(x)$

$a^{f(x)} \geq a^{g(x)} \Rightarrow f(x) \geq g(x)$ $a^{f(x)} \leq a^{g(x)} \Rightarrow f(x) \leq g(x)$

Если $0<a<1$, то знак нерав-ва меняется на противоположный

1) $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Rightarrow f(x) < g(x)$ 2) $a^{f(x)} < a^{g(x)} \Rightarrow f(x) > g(x)$

$a^{f(x)} \geq a^{g(x)} \Rightarrow f(x) \leq g(x)$ $a^{f(x)} \leq a^{g(x)} \Rightarrow f(x) \geq g(x)$

1) $3^x > \frac{1}{27}$; $3^x > 3^{-3}$; $(3>1)$; $x>-3$

2) $(\frac{1}{5})^{3-x} < 25$; $5^{-3+x} < 25$; $5^{-3+x} < 5^2$; $-3+x<2$; $x<5$

или

$(\frac{1}{5})^{3-x} < (\frac{1}{5})^{-2}$; $0<\frac{1}{5}<1$; $3-x>-2$; $-x>-5$; $x<5$

1) $5^{x^2+4x} < 0{,}2^{-4x-9}$; $5^{x^2+4x} < (\frac{1}{5})^{-4x-9}$; $5^{x^2+4x} < 5^{-1\cdot(-4x-9)}$; $x^2+4x<4x+9$;

$x^2+4x-4x-9<0$; $x^2-9<0$; $(x-3)(x+3)<0$ -3 3 <0 $-3<x<3$

$x \in (-3;3)$

2) $4^x \cdot 2^{x^2} \geq 8$; $2^{2x} \cdot 2^{x^2} \geq 2^3$; $2^{(2x+x^2)} \geq 2^3$; $2x+x^2 \geq 3$; $x^2+2x-3 \geq 0$; $x_1=1$, $x_2=-3$

-3 ≥ 0 ≥ 0 $x \in (-\infty;-3] \cup [1;+\infty)$

$x \leq -3$; $x \geq 1$

Решение с-бом замены переменной! замена нер $\rightarrow$ решить нер-во относ. нов. пер. $\rightarrow$ обратн замена учитыв. ОДЗ

1) $9^x - 3^x - 6 > 0$

$(3^x)^2 - 3^x - 6 > 0$; $3^x = t > 0$; $t^2 - t - 6 > 0$; $t_1=-2$, $t_2=3$ -2 0 3 $t<-2$ – прям не рассм-м

$t>3$

$3^x > 3 \Rightarrow x>1$; $x \in (1;+\infty)$

2) $36^x - 4\cdot 6^x - 12 \leq 0$; $(6^x)^2 - 4\cdot 6^x - 12 \leq 0$, $6^x = t$; $t^2-4t-12 \leq 0$; $t_1=-2$, $t_2=6$

$t>0$ -2 0 6 нер-во <0 $0 \leq t \leq 6$; $6^x \leq 6$; $x \leq 1$, $x \in (-\infty;1]$

1) $23^{x^2-4} < 24^{x^2-4} \,|\, : 24^{x^2-4}$; $\frac{23^{x^2-4}}{24^{x^2-4}} < 1$; $(\frac{23}{24})^{x^2-4} < (\frac{23}{24})^0$; $\frac{23}{24} < 1$; $x^2-4>0$;

$(x-2)(x+2)>0$ -2 2 нер-во >0 $x \in (-\infty;-2) \cup (2;+\infty)$

2) $5^{x-3} + 5^{x-2} + 5^{x-1} \geq 155$; $5^x \cdot 5^{-3} + 5^x \cdot 5^{-2} + 5^x \cdot 5^{-1} \geq 155$; $5^x = t$; $t\cdot\frac{1}{125} + t\cdot\frac{1}{25} + t\cdot\frac{1}{5} \geq 155$

или $5^x(\frac{1}{125}+\frac{1}{25}+\frac{1}{5}) \geq 155$; $5^x \cdot \frac{31}{125} \geq 155$; $5^x \geq 155 \cdot \frac{125}{31}$; $5^x \geq 5^4$; $x \geq 4$

1) $2^{2x}+2>3\cdot 2^x$; $2^{2x}-3\cdot 2^x+2>0$; $2^x=t$; $t>0$; $t^2-3t+2>0$; $t_1=1$, $t_2=2$

0 1 2

$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} t<1 \\ t>0 \end{cases} \quad 0<t<1 \\ \begin{cases} t>2 \\ t>0 \end{cases} \quad t>2 \end{array}\right.$ совокупность $\left[\begin{array}{l} 0<2^x<1 \\ 2^x>2 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 2^x<1 \; ; \; 2^x<2^0 \; ; \; x<0 \\ 2^x>2 \quad x>1 \end{array}\right.$

0 1

$x\in(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$

---

1) $|3^{3x^2-29}-42|\leq 39$; $-39\leq 3^{3x^2-29}-42\leq 39$; $-39+42\leq 3^{3x^2-29}\leq 39+42$; $3\leq 3^{3x^2-29}\leq 81$

$3^1\leq 3^{3x^2-29}\leq 3^4$; $1\leq 3x^2-29\leq 4$; $30\leq 3x^2\leq 33$; $10\leq x^2\leq 11$

$\begin{cases} x^2\geq 10 \\ x^2\leq 11 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2-10\geq 0 \\ x^2-11\leq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} (x-\sqrt{10})(x+\sqrt{10})\geq 0 \\ (x-\sqrt{11})(x+\sqrt{11})\leq 0 \end{cases}$

$-\sqrt{11}$ $-\sqrt{10}$ $\sqrt{10}$ $\sqrt{11}$ + − +

$x\in[-\sqrt{11};-\sqrt{10}]\cup[\sqrt{10};\sqrt{11}]$

Урок 11 Логарифмы и их св-ва

$\log_2 4$ - логарифм 4 по основанию 2 $\quad \log_2 4=2$

$2^x=5$; $x=\log_2 5$

$\log_b a=c$; $b^c=a$, $a>0$ (аргумент) (основание логарифма) $b>0$, $b\neq 1$

1) $\log_2 8=3 \quad 2^x=8$, $x=3$ $\qquad$ 2) $\log_5 125=3 \quad 5^x=125$; $x=3$

3) $\log_7 343=3 \quad 7^x=343$, $x=3$ $\qquad$ 4) $\log_2 \frac{1}{4}=-2 \quad 2^x=\frac{1}{4}$; $x=-2$

Осн. логарифм. тождество

$b^{\log_b a}=a$ $\qquad$ $\ln C$ - натуральный логарифм

$\log_{10} b=\lg b$ - десятичный логарифм $\qquad$ $\log_e C=\ln C$

Свойства логарифма

1) $\log_a a=1$; $a^1=a$
2) $\log_a 1=0$; $a^0=1$
3) $\log_a b^n=n\log_a b$
4) $\log_{a^k} b=\frac{1}{k}\log_a b$
5) $\log_a b+\log_a c=\log_a(b\cdot c)$
6) $\log_a b-\log_a c=\log_a\left(\frac{b}{c}\right)$
7) $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$
8) $\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$

$\log_2 0{,}125=\log_2\frac{125}{1000}=\log_2\frac{1}{8}=-3$

4) $\log_4 8=\frac{3}{2} \qquad 4^x=8$; $(2^2)^x=2^3$; $2^{2x}=2^3$; $2x=3$; $x=\frac{3}{2}$

5) $\log_2 7-\log_2 63+\log_2 36=\log_2\frac{7}{63}\cdot 36=\log_2 4=2$

$2^x=7 \quad 2^x=63 \quad 2^x=36$

3+4 св-ва: $\log_{a^k} b^n=\frac{n}{k}\log_a b$

$\boxed{\begin{array}{l} a^{\log_a b}=b \\ \log_a a^n=n \end{array}}$

1) $\log_5 22-\log_5 11-\log_5 10=\log_5\frac{22}{11}-\log_5 10=\log_5\frac{2}{10}=-1$

2) $2\log_{\frac{1}{5}} 0{,}4-\log_{\frac{1}{5}} 28+\frac{3}{2}\log_{\frac{1}{5}}\sqrt[3]{49}=2\log_{\frac{1}{5}}\frac{2}{5}+\log_{\frac{1}{5}} 28+\frac{3}{2}\log_{\frac{1}{5}} 7^{\frac{2}{3}}=\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{2}{5}\right)^2-\log_{\frac{1}{5}} 28+\log_{\frac{1}{5}} 7^{\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}}=$

$=\log_{\frac{1}{5}}\left(\left(\frac{2}{5}\right)^2:28\cdot 7\right)=\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{4}{25}\cdot\frac{1}{28}\cdot\frac{7}{1}\right)=\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{25}=2$

1) $9^{\log_3 4} = 3^{2\log_3 4} = 3^{\log_3 4^2} = 4^2 = 16$

$a^{\log_a b} = b$; $n\log_a b = \log_a b^n$; $\log_{a^n} b = \frac{1}{n}\log_a b$; $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$; $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

2) $6\cdot 7^{\log_7 5} = 6\cdot 5 = 30$

3) $\log_{0,25} 2 \cdot \log_4 8 = \log_{\frac14} 2\cdot \log_4 8 = \log_{2^{-2}} 2 \cdot \log_{2^2} 2^3 = -\frac12 \underbrace{\log_2 2}_{1}\cdot \frac{3}{2}\underbrace{\log_2 2}_{1} = -\frac12\cdot 1\cdot\frac12\cdot 3\cdot 1 = -\frac34$

1) $\log_{\frac{\sqrt{6}}{2}}\frac{8}{27} = \log_{\sqrt{\frac{6}{4}}}\left(\frac23\right)^3 = \log_{\sqrt{\frac32}}\left(\frac23\right)^3 = \log_{(\frac32)^{\frac12}}\left(\frac23\right)^3 = \log_{(\frac32)^{\frac12}}\left(\frac32\right)^{-3} = -3\cdot 2\log_{\frac32}\frac32 = -3\cdot 2 = -6$

2) $\log_{3\sqrt2}\frac{1}{18} = \log_{\sqrt{2\cdot 9}}\frac{1}{18} = \log_{\sqrt{18}}\frac{1}{18} = \log_{18^{\frac12}} 18^{-1} = -1\cdot 2\log_{18}18 = -2$

3) $\frac{\log_3 25}{\log_3 5} = \log_5 25 = \log_5 5^2 = 2$

1) $\log_5 7\cdot\log_7 25 = \log_5 7\,(2\log_7 5) = 2\log_5 7\cdot\frac{1}{\log_5 7} = 2$

2) $\frac{6^{\log_{12}432}}{6^{\log_{12}3}} = 6^{\log_{12}432-\log_{12}3} = 6^{\log_{12}\frac{432}{3}} = 6^{\log_{12}144} = 6^2 = 36$, $\log_{12}144 = 2$

$\boxed{\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}}$; $\boxed{\log_a b - \log_a c = \log_a\frac{b}{c}}$

3) $(1-\log_2 12)(1-\log_6 12) = (\log_2 2-\log_2 12)(\log_6 6-\log_6 12) = \log_2\frac16\cdot\log_6\frac12 = \log_2 6\cdot\log_6 2 =$

$1 = \log_2 2$

$= \log_2 6\cdot\frac{1}{\log_2 6} = 1$

1) $\frac{\log_2 49}{\log_{18}7} - 4\log_2 1,5 = \log_2 49\cdot\frac{1}{\log_{18}7} - 4\log_2 1,5 = \log_2 49\cdot\log_7 18 - 4\log_2 1,5 =$

$= \log_7 18\cdot\log_2 49 - 4\log_2 1,5 = \log_2 49^{\log_7 18} - 4\log_2 1,5 = \log_2 7^{\log_7 18^2} - 4\log_2 1,5 = \log_2 18^2 - 4\log_2 1,5 =$

число

$\boxed{a^{\log_a b} = b}$

$= 2\log_2 18 - 2\log_2 2,25 = 2(\log_2 18 - \log_2 2,25) = 2\log_2\frac{18}{2,25} = 2\log_2\frac{18\cdot 100}{225} =$

$= 2\log_2 8 = 2\cdot 3 = 6$

1) $\frac{\log_3 18}{\log_{18}3} - \log_3 2\cdot\log_3 162 = \log_3 18\cdot\log_3 18 - \log_3 2\cdot\log_3(81\cdot 2) = \log_3^2 \underbrace{18}_{9\cdot 2} - \log_3 2\cdot(\underbrace{\log_3 81}_{4}+\log_3 2) =$

$= \log_3^2 18 - \log_3 2\,(4+\log_3 2) = (\underbrace{\log_3 9}_{2}+\log_3 2)^2 - 4\log_3 2 - \log_3^2 2 = 4 + \cancel{4\log_3 2} + \cancel{\log_3^2 2} - \cancel{4\log_3 2} -$

$- \cancel{\log_3^2 2} = 4$

$\log_{10} a = \lg a$; $\log_e a = \ln a$

1) $\log_{50} 8$ $\quad \lg 5 = a \quad \lg 2 = c$

$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$; $\log_{50}8 = \frac{\log_{10}8}{\log_{10}50} = \frac{\lg 8}{\lg 50} = \frac{\lg 2^3}{\lg(5\cdot 10)} = \frac{3\lg 2}{\lg 5+\lg 10} = \frac{3c}{a+1}$

2) $\log_2\log_5\sqrt[8]{5} = \log_2\log_5 5^{\frac18} = \log_2\frac18 = -3$

3) $\log_{\frac{8}{27}} \underset{5^2}{\log_{25}} \underset{5^3}{125} = \log_{\frac{8}{27}} \cdot \frac{3}{2} \underbrace{\log_5 5}_{1} = \log_{\frac{8}{27}} \frac{3}{2} = \log_{(\frac{3}{2})^{-3}} \frac{3}{2} = -\frac{1}{3}$

Логарифмическая функция

$y = \log_a x \quad x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1$

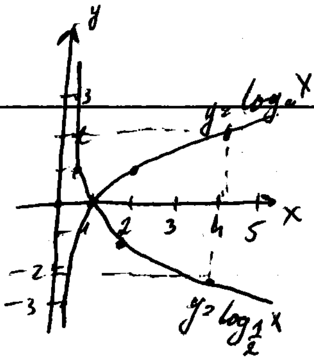
$y = \log_2 x$

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	-3	-2	-1	0	1	2

$\log_2 \frac{1}{8} = -3$

$y = \log_{\frac{1}{2}} x \quad (0 < a < 1)$

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	3	2	1	0	-1	-2



Св-ва лог. ф-и

1) $D(y)$ – обл-ть опр-я $x \in (0; \infty)$

2) $E(y)$ – обл-ть значений $y \in (-\infty; +\infty)$

3) ф-я возрастает при $x \in (0; +\infty)$, когда $a > 1$

ф-я убывает при $x \in (0; +\infty)$, когда $0 < a < 1$

Логарифмическое уравнение

$\log_a x = b \ ,\ a > 0\ ,\ a \neq 1\ ,\ x > 0$

$\log_a \underbrace{x}_{f(x)} = \log_a \underbrace{a^b}_{g(x)}$

$\log_a f(x) = \log_a g(x)$

$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$

$\log_a x = \log_a a^b$

$\begin{cases} x = a^b \\ x > 0 \end{cases}$

1) $\log_5 (4+x) = 2$; $\log_5 (4+x) = \log_5 5^2$ $\begin{cases} 4+x = 5^2 \\ 4+x > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 4+x = 25 \\ x > -4 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 21 \\ x > -4 \end{cases}$ Ответ: 21

1) $\log_2 (x^2+4x+11) = \log_{0,5} \frac{1}{8}$; $\log_{0,5} \frac{1}{8} = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8} = \log_{2^{-1}} \frac{1}{8}$

$\log_2 (x^2+4x+11) = \log_{2^{-1}} 2^{-3}$; $\log_2 (x^2+4x+11) = \log_2 2^3$;

$\begin{cases} x^2+4x+11 = 8 \\ x^2+4x+11 > 0 \end{cases}$ $x^2+4x+11-8 = 0$; $x^2+4x+3 = 0$; $x_1 = -1$, $x_2 = -3$

2) $\log_{0,5} (5x^2+9x+2) = \log_3 \frac{1}{9}$; $\log_{2^{-1}} (5x^2+9x+2) = \log_3 9^{-1}$; $-1 \log_2 (5x^2+9x+2) = -\log_3 9 \ |:-1$

$\log_2 (5x^2+9x+2) = 2 = \log_2 2^2$

1) $\lg (x^2-x) = 1 - \lg 5$; $\lg (x^2-x) = \lg 10 - \lg 5$; $\lg (x^2-x) = \lg \frac{10}{5}$; $\lg (x^2-x) = 2$; $x^2-x = 2$;

$x^2-x-2 = 0$; $x_1 = -1$, $x_2 = 2$

или

$\lg (x^2-x) + \lg 5 = 1$; $\lg ((x^2-x) \cdot 5) = \lg 10$; $(x^2-x) \cdot 5 = 10$

2) $\log_6 (x^2-2x) = 1 - \log_6 2$; $\log_6 (x^2-2x) = \log_6 6 - \log_6 2$; $\log_6 (x^2-2x) = \log_6 \frac{6}{2}$; $x^2-2x = 3$;

$x^2-2x-3 = 0$; $x_1 = -1$; $x_2 = 3$

3) $5 \log_{\sqrt{5}} x - \log_5 x = 18$; $5 \cdot 2 \log_5 x - \log_5 x = 18$; $9 \log_5 x = 18$; $\log_5 x = 2$; $x = 25$

1) $\log_3 (x-2) + \log_3 (x+2) = \log_3 (2x-1)$; $\log_3 ((x-2)(x+2)) = \log_3 (2x-1)$

$\begin{cases} (x-2)(x+2) = 2x-1 \\ x-2 > 0 \quad x > 2 \\ x+2 > 0 \\ 2x-1 > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 - 4 - 2x + 1 = 0 \\ x > 2 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 - 2x - 3 = 0 \\ x > 2 \end{cases}$ $x_1 = -1$, $x_2 = 3$

Ответ: $x = 3$

2) $\log_2 182 - 2\log_2\sqrt{5-x} = \log_2(11-x)+1$

$\log_2 182 - 2\cdot\frac{1}{2}\log_2(5-x) = \log_2((11-x)\cdot 2)$; $\log_2\frac{182}{5-x} = \log_2((11-x)\cdot 2)$; $\frac{182}{5-x} = (11-x)\cdot 2$

$5-x>0,\ -x>-5,\ x<5$ $\qquad \frac{182}{5-x} = \frac{(11-x)\cdot 2}{1}$; $182=(11-x)(5-x)\cdot 2$; $(11-x)(5-x)=91$

$-x>-11,\ x<11$ $\qquad x_1=18,\ \underline{x_2=-2}$ Ответ: $x=-2$

<u>Метод введения новой переменной</u>

1) $\log_2^2 x - 4\log_2 x + 3 = 0$; $(\log_2 x)^2 - 4\log_2 x + 3 = 0$; $\log_2 x = t$; $t^2-4t+3=0$

$t_1=1,\ t_2=3$; $\log_2 x = 1$; $x=2$; $\log_2 x = 3$; $x=8$; $x>0$ Ответ: $x=2,\ x=8$

2) $2\log_x 27 - 3\log_{27} x = 1$; $2\cdot\frac{1}{\log_{27} x} - 3\log_{27} x = 1$; $\log_{27} x = t$; $\frac{2}{t} - 3t = 1 \ |\cdot t$

$2-3t^2-t=0$; $3t^2+t-2=0$; $D=25,\ t_1=-1,\ t_2=\frac{2}{3}$

$\log_{27} x = -1,\ x=\frac{1}{27}$; $\log_{27} x = \frac{2}{3}$; $x = 27^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^2} = \sqrt[3]{(3^3)^2} = 9$; Ответ: $\frac{1}{27}$; 9

1) $\log_{0,5}^2 4x + \log_2\frac{x^2}{8} = 8$; $\log_{\frac{1}{2}}^2 4x + \log_2\frac{x^2}{8} = 8$; $(\log_{\frac{1}{2}} 4 + \log_{\frac{1}{2}} x)^2 + (\log_2 x^2 - \log_2 8) = 8$

$(-2-\log_2 x)^2 + (\log_2 x^2 - 3) = 8$; $\underline{4+4\log_2 x} + \log_2^2 x \ \underline{+2\log_2 x} - 3 = 8$; $\log_2^2 x + 6\log_2 x - 7 = 0$

$(-a-b)^2 = (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ $\qquad \log_2 x = t$; $t^2+6t-7=0$; $t_1=1,\ t_2=-7$

$\log_2 x = 1,\ x=2$; $\log_2 x = -7,\ x=\frac{1}{128}$; $4x>0,\ x>0$; $\frac{x^2}{8}>0,\ x>0$ Ответ: $x_1=2,\ x_2=\frac{1}{128}$

1) $\log_{x-3}(4x-15)=2$; $\log_{x-3}(4x-15) = \log_{x-3}(x-3)^2$; $4x-15=(x-3)^2$; $4x-15=x^2-6x+9$;

$x^2-10x+24=0$; $D=100-4\cdot 24=4$, $x_1=\frac{10-2}{2}=4$, $x_2=\frac{10+2}{2}=6$

$\begin{cases} 4x-15=(x-3)^2 \\ 4x-15>0 \\ x-3>0 \\ x-3\neq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1=4,\ x_2=6 \\ x>\frac{15}{4}=3\frac{3}{4} \\ x>3 \\ x\neq 4 \end{cases}$ Ответ: $x=6$

$\log_a f(x) = b$, $f(x)>0$; $\log_a f(x) = \log_a a^b$

$a>0$

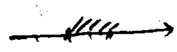
$a\neq 1$

1) $\log_3 \underbrace{\log_2\log_2 x}_{a} = 0$; $\log_3 a = 0$; $\log_2(\log_2 x) = 3^0$; $\log_2(\log_2 x)=1$; $\log_2 x = 2^1$; $\log_2 x = 2$, $x=4$

2) $\begin{cases} \log_5(x+y)=1 \\ \log_6 x + \log_6 y = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=5^1 \\ \log_6 xy = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases}$ $x_1=2,\ y_1=3$ $\quad x_2=3,\ y_2=2$

Ответ: $(2;3)(3;2)$

1) $\lg(3-x) = \lg(x+2)$ $\quad \begin{cases} 3-x=x+2 \\ 3-x>0 \\ x+2>0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x=1 \\ -x>-3 \\ x>-2 \end{cases}$ $\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ x<3 \\ x>-2 \end{cases}$



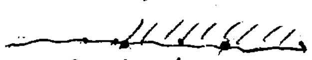
Ответ: $x=\frac{1}{2}$

2) $\ln(3x-5)=0$ $\qquad$ Ответ: $x=2$

$\ln(3x-5) = \ln e^0$ $\quad \begin{cases} 3x-5=1 \\ 3x-5>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=2 \\ x>\frac{5}{3} \end{cases}$

3) $\lg(x+1) + \log_{10}(x-1) = \lg 3$; $\lg((x+1)(x-1)) = \lg 3$; $\begin{cases} (x+1)(x-1)=3 \\ x+1>0 \\ x-1>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2-1=3 \\ x>-1 \\ x>1 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2=4 \\ x>-1 \\ x>1 \end{cases}$

$x_1=2,\ \cancel{x_2=-2}$ $\qquad$ Ответ: $x=2$



Урок 12. Обратная функция

1) $y = x + 6$ чтобы найти обр. ф-ю, нужно выразить x через y

$x = y - 6$ меняем местами x и y →

$y = x - 6$

2) $y = 2x + 1$; $2x = y - 1 \;|:2$; $x = \frac{y-1}{2}$; $y = \frac{x-1}{2} = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$; $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

3) $y = \frac{3}{2x-1}$; $\frac{y}{1} = \frac{3}{2x-1}$; $y(2x-1) = 3$; $2x - 1 = \frac{3}{y}$; $2x = \frac{3}{y} + 1$; $x = \frac{3}{2y} + \frac{1}{2}$

$x^2 = 4$
$x = \sqrt{4}$

1) $y = x^2 - 4x + 3$; $y = x^2 - \underset{(2 \cdot 2x)}{4x} + 4 - 4 + 3 = (x-2)^2 - 1$; $(x-2)^2 = y + 1$; $x - 2 = \sqrt{y+1}$;

выражаем x через y $x = \sqrt{y+1} + 2$; $y = \sqrt{x+1} + 2$

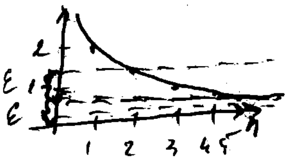
2) $y = \frac{3}{2x-1}$; $y(2x-1) = 3$; $(2x-1) = \frac{3}{y}$; $2x = \frac{3}{y} + 1$; $x = \frac{3}{2y} + \frac{1}{2}$; $y = \frac{3}{2x} + \frac{1}{2}$

Обр. ф-я исп-ся для решения тригонометрич. ур-й

Урок 13 Пределы

$\{a_n\}$ – послед-ть, ф-я заданная на мн-ве натур. чисел

дана послед-ть, выраж-я формулой $x_n = \frac{n+1}{n}$, $x_1 = 2$, $x_2 = 1{,}5$, $x_3 = \frac{4}{3}$, $x_4 = \frac{5}{4}$, $x_5 = \frac{6}{5}$, ...



число a явл-ся пределом послед-ти a_n при n стремящейся к ∞, если для любого как угодно малого положит. ε (эпсилон) больше 0, сущ-т такое число N, что ~~для~~ любого число n, кот-е больше N, будет вып-ся нерав-во $|a_n - a| < \varepsilon$

$a = \lim a_n$, $n \to \infty$

Св-во числ. послед-ти:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$

2) если сущ-т $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$

$\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0}$ $\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \ldots \frac{1}{10000} \ldots$

1) $a_n = \frac{3n+4}{2n+1}$; $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n+4}{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{3n}{n} + \frac{4}{n}}{\frac{2n}{n} + \frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3 + \overset{\to 0}{\frac{4}{n}}}{2 + \underset{\to 0}{\frac{1}{n}}} = \frac{3}{2}$

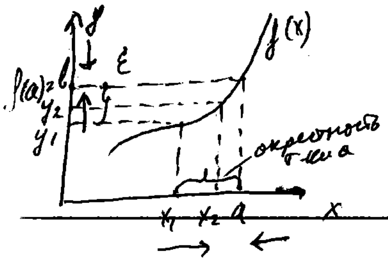
2) предел послед-ти? $3,\ 2\frac{1}{2},\ 2\frac{1}{3},\ 2\frac{1}{4},\ 2\frac{1}{5}, \ldots$ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2 + \frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} 2 + \lim\limits_{n\to\infty} \overset{\to 0}{\frac{1}{n}} = 2$

$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5$

$2 + \frac{1}{1} \quad 2 + \frac{1}{2} \quad 2 + \frac{1}{3} \quad 2 + \frac{1}{4} \quad 2 + \frac{1}{5}$

$\cancel{2 + \frac{1}{n}} \quad 2 + \frac{1}{n}$

Предел функции



$f(a)=b$ когда $x\to a$, то $y \to b$

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$

Если для любого сколько угодно малого положит. ε (эпсилон) >0 найдется окрестность точки $x=a$, кроме $x\neq a$ и вып-ся рав-во $|f(x)-b|<\varepsilon$

$y=x^2$, $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$

Свойства пределов функции

$y=f(x)$

1) $\lim\limits_{x\to a} C = C$

2) $\lim\limits_{x\to a} [k\cdot f(x)] = k\lim\limits_{x\to a} f(x)$

3) если предел ф-и сущ-т, для $f(x)$ и $g(x)$, то $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$

4) —"—, $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$

5) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$; $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$

1) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-2x^2+x-2}{x^3+x^2-8x+4} = \left[\dfrac{0}{0}\right]$ - неопределенность при подстановке $x=2$

$$
\begin{array}{r|l}
x^3+x^2-8x+4 & x-2 \\
-\;x^3-2x^2 & x^2+3x-2 \\
3x^2-8x & \\
-\;3x^2-6x & \\
-2x+4 & \\
-2x+4 & \\
0 &
\end{array}
$$

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2(x-2)+(x-2)}{(x-2)(x^2+3x-2)} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\cancel{(x-2)}(x^2+1)}{\cancel{(x-2)}(x^2+3x-2)} =$

$= \dfrac{2^2+1}{2^2+3\cdot 2-2} = \dfrac{5}{8}$

1) $\lim\limits_{x\to -2}(5x^2+2x-1) = 5\cdot(-2)^2+2\cdot(-2)-1 = 20-4-1=15$

2) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{5x+1}{2x^3+x^2-2} = \dfrac{5\cdot 1+1}{2\cdot 1^3+1^2-2} = 6$

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x^3-x^2} = \left[\dfrac{0}{0}\right]$ - неопр-ть ; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x^2(x-1)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{1}{-1} = -1$

4) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2-6x+5}{x^2-25} = \left[\dfrac{0}{0}\right]$; $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\cancel{(x-5)}(x-1)}{\cancel{(x-5)}(x+5)} = \lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x-1}{x+5} = \dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5}$

$x^2-6x+5=0$, $x_1=5$, $x_2=1$

Вычисление пределов ф-и на ∞

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad (\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^n} = 0)$

2) $\lim\limits_{x\to\infty} x = \infty$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0, \ |x|<1$

4) $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = \infty$

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5x^4-2x+3}{x^2-3x^4} =$ — нужно разделить на переменную в наиб. степень

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{5x^4}{x^4} - \frac{2x}{x^4} + \frac{3}{x^4}}{\frac{x^2}{x^4} - \frac{3x^4}{x^4}} = \lim_{x\to\infty} \frac{5 - \frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^4}}{\frac{1}{x^2} - 3} = \lim_{x\to\infty} \frac{5-0+0}{0-3} = \frac{-5}{3}$$

1) $$\lim_{x\to\infty} \frac{7x^3 - x^2+3x+1}{10x^3+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{7x^3}{x^3} - \frac{x^2}{x^3} + \frac{3x}{x^3} + \frac{1}{x^3}}{\frac{10x^3}{x^3} + \frac{x}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{7 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{10 + \frac{1}{x^2}} = \frac{7}{10}$$

2) $$\lim_{x\to\infty} \frac{x\sqrt[3]{x^3+1}+1}{\sqrt{2x^4+3x-2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\sqrt[3]{x^3(1+\frac{1}{x^3})}+1}{\sqrt{x^4(2+\frac{3}{x^3}-\frac{2}{x^4})}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}+1}{x^2\sqrt{2+\frac{3}{x^3}-\frac{2}{x^4}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}+\frac{1}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\sqrt{2+\frac{3}{x^3}-\frac{2}{x^4}}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \begin{cases} n<m; & 0 \ (\lim) \\ n>m; & \infty \\ n=m; & \frac{a}{b} \end{cases}$$

1) $$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{3+x}-2}{x-1} = \frac{0}{0}; \quad \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{3+x}-2)(\sqrt{3+x}+2)}{(x-1)(\sqrt{3+x}+2)} = \frac{3+x-2^2}{(x-1)(\sqrt{3+x}+2)} = \frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}(\sqrt{3+x}+2)} =$$

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{3+x}+2} = \frac{1}{4}$$

2) $$\lim_{x\to 8} \frac{x^2-8x}{\sqrt{x+1}-3} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 8} \frac{(x^2-8x)(\sqrt{x+1}+3)}{(\sqrt{x+1}-3)(\sqrt{x+1}+3)} = \lim_{x\to 8} \frac{(x^2-8x)(\sqrt{x+1}+3)}{x+1-9} = \frac{x\cancel{(x-8)}(\sqrt{x+1}+3)}{\cancel{x-8}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} x(\sqrt{x+1}+3) = 48$$

Первый замечательный предел

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$; $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$; $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 1$; $\lim (k\cdot f(x)) = k\cdot \lim f(x)$

1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{tg x}{x} = 1$

2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin ax}{x} = a$

3) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$

4) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

1) $$\lim_{x\to 0} \frac{tg x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x\cdot \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1\cdot 1 = 1$$

2) $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} \overset{1-\cos^2 x = \sin^2 x}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\cos x} = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

1) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{5 \sin 5x}{5x} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x\to 0} 5 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{5x} = \frac{1}{2}\cdot 5 = \frac{5}{2}$$

2) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 9x}{\sin 5x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 9x \cdot 9x}{9x \cdot \sin 5x} = \lim_{x\to 0} \frac{9x}{\sin 5x} = \lim_{x\to 0} \frac{9\cdot 5x}{5\cdot \sin 5x} = \lim_{x\to 0} \frac{9}{5} = \frac{9}{5}$$

1) $$\lim_{x\to 0} \frac{tg x - \sin x}{x^3} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x - \sin x\cdot\cos x}{\cos x}}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \sin x\cdot \cos x}{x^3\cdot \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x(1-\cos x)}{x\cdot x^2\cdot \cos x} =$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}}_{1} \cdot \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}}_{\frac{1}{2}} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\underset{1}{\cos 0}} = \frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$