GeekBrains

Понятие о приращении функции и приращении аргумента. Понятие о производной

Базовая математика / Урок 6

В этом уроке

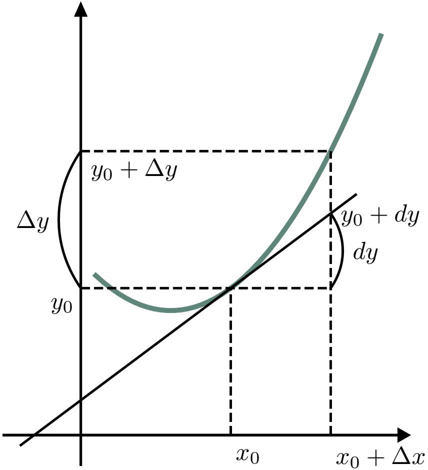
- Понятие о приращении функции и аргумента
- Понятие производной
- Физический и геометрический смысл производной
- Правила вычисления производных
- Таблица производных

Приращение аргумента:

$$\Delta x = x_1 - x_0$$

Приращение функции:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$



Пример 1

Найти приращение аргумента x, если он переходит от значения 5 к значению 5.4.

Решение:
Искомое приращение: $\Delta x = 5.4 - 5 = 0.4$.

Ответ: $\Delta x = 0.4$.

Пример 2

Найти приращение аргумента Δx и приращение функции Δf в точке x_0, если $f(x) = x^2$, $x_0 = 2$ и 1) $x = 1.9$ 2) $x = 2.1$.

Решение:

Воспользуемся формулами, приведенными выше:

1. $\Delta x = x - x_0 = 1.9 - 2 = -0.1 \Rightarrow \Delta f = f(1.9) - f(2) = 1.9^2 - 2^2 = -0.39$.
2. $\Delta x = x - x_0 = 2.1 - 2 = 0.1 \Rightarrow \Delta f = f(2.1) - f(2) = 2.1^2 - 2^2 = 0.41$.

Ответ:

1. $\Delta x = -0.1$, $\Delta f = -0.39$,
2. $\Delta x = 0.1$, $\Delta f = 0.41$.

Производная функции

Производная функции $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{\Delta f}{\Delta x} \text{ при } \Delta x \to 0$$

Важно не забывать указать, в какой точке рассматривается производная:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \text{ при } \Delta x \to 0$$

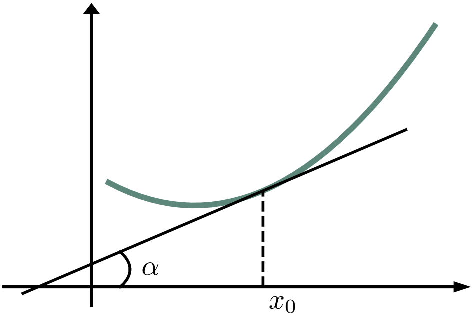
Смысл производной

Физический:

$$v(t) = S'(t)$$

Геометрический:

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$$



Правила вычисления производных

1. Константу можно выносить за знак производной:

$$(c \cdot u(x))' = c \cdot u'(x),\ c = const$$

2. Производная суммы/разности двух функций равна сумме/разности производных от каждой из функций:

$$(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x)$$

3. Производная произведения:

$$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

4. Производная частного:

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)},\ v(x) \neq 0$$

5. Производная сложной функции равна производной этой функции по промежуточному аргументу u, умноженной на производную от промежуточного аргумента u по основному аргументу x: $y = y(u)$ и $u = u(x)$ имеют производные соответственно в точках $u_0 = u(x0)$ и x_0. Тогда

$$y(u(x))'\Big|_{x=x_0} = y'(u)\Big|_{u=u_0} \cdot u'(x)\Big|_{x=x_0}$$

Таблица производных

1. $c' = 0, \ c = const$
2. $x' = 1$
3. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$
4. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$
5. $(e^x)' = e^x$
6. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$
7. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
8. $(\sin x)' = \cos x$
9. $(\cos x)' = -\sin x$
10. $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
11. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
12. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
13. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
15. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
16. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$
17. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$
18. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$
19. $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
20. $(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$

Пример 3

Найти производную функции $y = (x-3)(3x+6)$ в точке $x_0 = 2$.

Решение:

1. $y' = (x-3)'(3x+6) + (x-3)(3x+6)' = 1 \cdot (3x+6) + (x-3) \cdot 3 =$
   $= 3x + 6 + 3x - 9 = 6x - 3$
2. Подставляем в полученное выражение точку $x_0 = 2$:

$$y'(x_0) = 6 \cdot 2 - 3 = 12 - 3 = 9$$

Ответ: 9.

Пример 4

Найти производную функции $y = \dfrac{2x-3}{4+5x}$.

Решение:

1. $y' = \dfrac{(2x-3)'(4+5x)-(2x-3)(4+5x)'}{(4+5x)^2}$
2. Далее по правилу производной суммы:
$$y' = \frac{(2x-3)'(4+5x)-(2x-3)(4+5x)'}{(4+5x)^2} = \frac{2\cdot(4+5x)-(2x-3)\cdot 5}{(4+5x)^2} =$$
$$= \frac{8+10x-10x+15}{(4+5x)^2} = \frac{23}{(4+5x)^2}$$

Ответ: $\dfrac{23}{(4+5x)^2}$.

Пример 5

Найти производную функции $y = \dfrac{\sqrt{x}}{1-3x}$.

Решение:

1. $y' = \dfrac{(\sqrt{x})'(1-3x) - \sqrt{x}(1-3x)'}{(1-3x)^2} = \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(1-3x) - \sqrt{x}(-3)}{(1-3x)^2} = \dfrac{\frac{1-3x}{2\sqrt{x}} + 3\sqrt{x}}{(1-3x)^2}$
2. Умножаем числитель и знаменатель на $2\sqrt{x}$:
$$\frac{\frac{1-3x}{2\sqrt{x}} + 3\sqrt{x}}{(1-3x)^2} = \frac{1-3x+6(\sqrt{x})^2}{2\sqrt{x}(1-3x)^2} = \frac{1-3x+6x}{2\sqrt{x}(1-3x)^2} = \frac{1+3x}{2\sqrt{x}(1-3x)^2}$$

Ответ: $\dfrac{1+3x}{2\sqrt{x}(1-3x)^2}$.

Пример 6

Найти производную функции $y = x\cos x - \dfrac{e^x}{x} + 4$.

Решение:

$$y' = \left(x\cos x - \frac{e^x}{x} + 4\right)' = (x\cos x)' - \left(\frac{e^x}{x}\right)' + (4)' =$$

$$= x'\cdot\cos x + x\cdot(\cos x)' - \frac{(e^x)'\cdot x - e^x\cdot(x)'}{x^2} = 1\cdot\cos x + x(-\sin x) - \frac{e^x\cdot x - e^x\cdot 1}{x^2} =$$

$$= \cos x - x\sin x - \frac{xe^x - e^x}{x^2} = \cos x - x\sin x - \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

Ответ: $\cos x - x\sin x - \dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$.

Спасибо за внимание