Базовая математика

Урок 8. Первообразная. Основное свойство первообразной. Три правила нахождения первообразных

Определение 1. Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на данном промежутке, если для любого x из данного промежутка:

$$F'(x) = f(x)$$

Теорема 1. Любая первообразная для некоторой функции $f(x)$ на промежутке A может быть записана в виде:

$$F(x) + C,$$

где $F(x)$ — одна из первообразных для данной функции $f(x)$ на промежутке A, а C — некоторая произвольная постоянная.

Теорема, приведённая выше, называется ещё *основным свойством первообразной*. Разберём её более подробно, так как в ней скрываются целых два свойства первообразной функции:

1. При подстановке любого числа вместо C в эту формулу получим первообразную функции $f(x)$ на промежутке A.
2. Если взять любую первообразную $F(x)$ для функции $f(x)$ на некотором промежутке A, то для этой производной можно подобрать некоторое число C, такое, что для любого x будет выполняться следующее равенство:

$$F(x) = f(x) + C$$

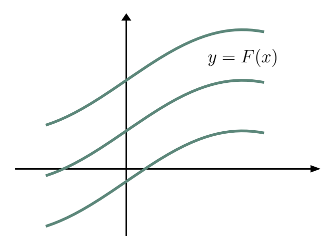

Рис. 1: Первообразные

Геометрическая интерпретация. Графики всех первообразных данной функции $f(x)$ получаются из графика какой-либо одной первообразной параллельными переносами вдоль оси Oy (см. Рис. 1).

Пример 1. Найти общий вид первообразных для функции $f(x) = -x^3$ на всей числовой оси.

Решение. Одной из первообразных будет являться функция $-\dfrac{x^4}{4}$, так как

$$\left(-\frac{x^4}{4}\right)' = -x^3$$

Следовательно, по теореме об основном свойстве первообразной, представленной выше, общий вид первообразных для функции $f(x) = -x^3$ будет следующий:

$$F(x) = -\frac{x^4}{4} + C$$

Ответ: $F(x) = -\dfrac{x^4}{4} + C$.

При нахождении первообразных функции $f(x)$ промежуток, на котором задана функция $f(x)$, обычно не указывают для краткости записи. При этом, всегда имеются ввиду такие промежутки, чтобы они были как можно большей длины.

Основные правила нахождения первообразных.

1. Если F есть первообразная для некоторой функции f, а G есть первообразная для некоторой функции g, то $F + G$ будет являться первообразной для $f + g$.
   Действительно, по определению первообразной:
   $$F' = f,\ G' = g,$$
   поэтому далее по правилу вычисления производной для суммы функций будем иметь:
   $$(F + G)' = F' + G' = f + g$$
2. Если F есть первообразная для некоторой функции f, а k — некоторая постоянная, то $k \cdot F$ есть первообразная для функции $k \cdot f$.
   Это правило следует из правила вычисления производной сложной функции. Имеем:
   $$(k \cdot F)' = k \cdot F' = k \cdot f$$
3. Если F есть некоторая первообразная для функции f, а k и b есть некоторые постоянные, причём k не равняется нулю, то $\dfrac{1}{k} \cdot F(k \cdot x + b)$ будет первообразной для функции $f(k \cdot x + b)$.
   Данное правило следует из правила вычисления производной сложной функции:
   $$\left(\frac{1}{k} \cdot F(k \cdot x + b)\right)' = \frac{1}{k} \cdot F'(k \cdot x + b) \cdot k = f(k \cdot x + b)$$

Функция	**Первообразная**
$k = const$	$kx + C$
$x^n,\ n \neq -1$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln x + C$
e^x	$e^x + C$
a^x	$\dfrac{a^x}{\ln a} + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$

Таблица 1: Таблица первообразных

Пример 2. Найти общий вид первообразных для функции $f(x) = 5\cos x$ на всей числовой оси.

Решение. Для функции $\cos x$ одна из первообразных будет являться функция $\sin x$. Если теперь воспользоваться вторым правилом, то будем иметь:

$$F(x) = 5\sin x + C$$

Ответ: $F(x) = 5\sin x + C$.

Пример 3. Найти одну из первообразных для функции $f(x) = \sin(3x-2)$.

Решение. Найдём общий вид первообразной с использованием третьего правила. Получим выражение для первообразной:

$$F(x) = -\frac{1}{3} \cdot \cos(3x-2) + C$$

Подставим, например, $C = 0$.

Ответ: $F(x) = -\frac{1}{3} \cdot \cos(3x-2)$.

Пример 4. Выяснить, является ли функция $F(x) = x^3 - 3x + 1$ первообразной для функции $f(x) = 3(x^2-1)$.

Решение.

$$F'(x) = (x^3 - 3x + 1)' = 3x^2 - 3 = 3(x^2-1) = f(x)$$

Ответ: функция $F(x) = x^3 - 3x + 1$ является первообразной для функции $f(x) = 3(x^2-1)$.

Пример 5. Для функции $f(x) = 4 - x^2$ найти первообразную, график которой проходит через точку $(-3; 9)$.

Решение. Найдём все первообразные функции $f(x)$:

$$F(x) = 4x - \frac{x^3}{3} + C$$

Найдём число C, такое, чтобы график функции $y = 4x - \frac{x^3}{3} + C$ проходил через точку $(-3; 9)$. Для этого подставим в уравнение $x = -3$, $y = 9$. Получим:

$$9 = -12 - \frac{3^3}{3} + C \Rightarrow 9 = -12 + 9 + C \Rightarrow C = 12$$

Ответ: $F(x) = 4x - \frac{x^3}{3} + 12$.

Определение 2. Совокупность всех первообразных функции $f(x)$, определённых на заданном промежутке, называется *неопределённым интегралом* от функции $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)dx$. То есть

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Знак $\int$ называется интегралом, $f(x)dx$ — подынтегральным выражением, $f(x)$ — подынтегральной функцией, а x — переменной интегрирования.

Операция нахождения первообразной или неопределённого интеграла от функции $f(x)$ называется *интегрированием* функции $f(x)$. Интегрирование представляет собой операцию, обратную дифференцированию.

Свойства неопределённого интеграла.

1. Дифференциал от неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению:

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$$

2. Производная от неопределённого интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

3. Неопределённый интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс произвольная постоянная:

$$\int dF(x) = \int f'(x)dx = F(x) + C$$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак неопределённого интеграла или вносить под знак интеграла:

$$\int \alpha \cdot f(x)dx = \alpha \int f(x)dx$$

5. Неопределённый интеграл от суммы (разности) двух и больше функций равен сумме (разности) неопределённых интегралов от этих функций:

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

6. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то и

$$\int f(u)du = F(u) + C,$$

   где функция $u = \varphi(x)$ — произвольная функция с непрерывной производной.

Пример 6. Вычислить $\displaystyle\int \cos(x+2)dx$.

Решение.

$$\int \cos(x+2)dx = \int \cos(x+2)d(x+2) = \sin(x+2) + C$$

Ответ: $\sin(x+2) + C$.

Домашнее задание

1. Найти общий вид первообразных для функции $f(x) = \dfrac{1}{(7-3x)^5}$.
2. Найти общий вид первообразных для функции $f(x) = \sqrt{7x+1}$.
3. Найти общий вид первообразных для функции $f(x) = \sin(3x-2)$.
4. Найти общий вид первообразных для функции $f(x) = \dfrac{1}{7-3x}$.
5. Вычислить $\displaystyle\int \left(x^2 + \sin x\right) dx$.