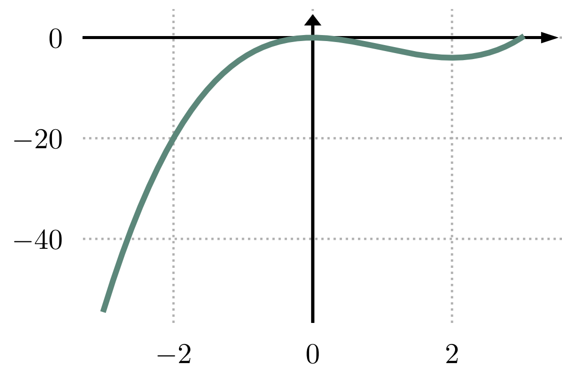
Базовая математика

Урок 7. Критические точки функции: максимумы и минимумы. Применение производной к исследованию функции

Рассмотрим рисунок:



На нем изображен график функции $y = x^3 - 3x^2$. Рассмотрим некоторый интервал, содержащий точку $x = 0$, например от -1 до 1. Такой интервал еще называют *окрестностью* точки $x = 0$. Как видно на графике, в этой окрестности функция $y = x^3 - 3x^2$ принимает наибольшее значение именно в точке $x = 0$.

В таком случае точку $x = 0$ называют точкой *максимума* функции. По аналогии с этим, точку $x = 2$ называют точкой *минимума* функции $y = x^3 - 3x^2$, потому что существует такая окрестность этой точки, в которой значение в этой точке будет минимальным среди всех других значений из этой окрестности.

Определение 1. Точка x_0 называется *точкой максимума* функции $f(x)$, если существует окрестность точки x_0, такая, что для всех x, не равных x_0, из этой окрестности, выполняется неравенство

$$f(x) < f(x_0)$$

Точка x_0 называется *точкой минимума* функции $f(x)$, если существует окрестность точки x_0, такая, что для всех x, не равных x_0, из этой окрестности, выполняется неравенство

$$f(x) > f(x_0)$$

В точках максимума и минимума функций значение производной функции равно нулю. Но это не достаточное условие для существования в точке максимума или минимума функции.

Например, функция $y = x^3$ в точке $x = 0$ имеет производную, равную нулю. Но точка $x = 0$ не является точкой минимума или максимума функции. Как известно, функция $y = x^3$ возрастает на всей числовой оси.

Таким образом, точки минимума и максимума всегда будут находиться среди корней уравнения $f'(x) = 0$, но не все корни этого уравнения будут являться точками максимума или минимума.

Определение 2. Точки, в которых значение производной функции равно нулю, называются *стационарными точками.*

Отметим, что точки максимума или минимума могут иметься и в точках, в которых производной у функции вообще не существует. Например, функция $y = |x|$ в точке $x = 0$ имеет минимум, но производной в этой точке не существует. Эта точка будет являться *критической точкой* функции.

При исследовании функции очень часто приходится применять производные. Одной из основных задач при исследовании функции является определение промежутков возрастания и убывания функции. Это исследование очень легко можно произвести с помощью производной функции.

Признак возрастания функции. Если $f'(x) > 0$ на некотором промежутке, то функция $f(x)$ возрастает на данном промежутке.

Признак убывания функции. Если $f'(x) < 0$ на некотором промежутке, то функция $f(x)$ убывает на данном промежутке.

Пример 1. Найти промежутки возрастания и убывания функции $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$.

Решение. Найдем производную этой функции:

$$f'(x) = (x^3 - 2x^2 + x)' = 3x^2 - 4x + 1$$

Найдем стационарные точки, то есть точки, в которых производная равна нулю. Для этого решим уравнение $f'(x) = 0$:

$$3x^2 - 4x + 1 = 0$$

Это несложное квадратное уравнение решаем любым из известных вам способов, получаем два корня:

$$x_1 = \frac{1}{3},\ x_2 = 1$$

Определим знак производной в промежутках, на которые эти два корня разбили всю числовую ось. Для этого разложим квадратный трёхчлен на множители:

$$f'(x) = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x - 1)$$

Производная положительна на промежутке $x < \frac{1}{3}$ и на промежутке $x > 1$, значит, функция на этих промежутках *возрастает*. На промежутке от $\frac{1}{3}$ до 1 производная отрицательна, следовательно, в этом интервале функция *убывает.*

Ответ: при $x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right] \cup [1; +\infty)$ функция возрастает; при $x \in \left[\frac{1}{3}; 1\right]$ функция убывает.

Помимо, определения промежутков возрастания и убывания функции, с помощью производной при исследовании функции находят точки максимума и минимума этой функции. Точки максимума и минимума функции называют еще точками *экстремума.*

Для отыскания точек экстремума существует отдельный признак.

Достаточное условие существования экстремума в точке. Пусть $f(x)$ некоторая дифференцируемая на интервале $(a; b)$ функция, точка $x_0 \in (a; b)$ и $f'(x_0) = 0$. Тогда:

1. Если при переходе через стационарную точку x_0 производная функции $f(x)$ меняет знак, с «плюса» на «минус», то точка x_0 *является точкой максимума* функции.
2. Если при переходе через стационарную точку x_0 производная функции $f(x)$ меняет знак, с «минуса» на «плюс», то точка x_0 *является точкой минимума* функции.

Пример 2. Найти экстремумы функции $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$.

Решение. Мы нашли две стационарные точки:

$$x_1 = \frac{1}{3},\ x_2 = 1$$

Так как слева от точки $x = \frac{1}{3}$ функция возрастает, а справа убывает, точка $x = \frac{1}{3}$ будет являться точкой *максимума*. Точка $x = 1$ будет являться точкой *минимума*, так как слева от неё функции убывает, а справа возрастает.

Посчитаем значение функции в точках максимума и минимума:

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} = -\frac{4}{27},\ \ f(1) = 0$$

Пример 3. Найти промежутки возрастания и убывания функции $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$.

Решение. Найдём производную функции:

$$f'(x) = \left(\frac{x^2}{x-1}\right)' = \frac{(x^2)'(x-1) - x^2(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

Найдём значения x, при которых $f'(x) = 0$:

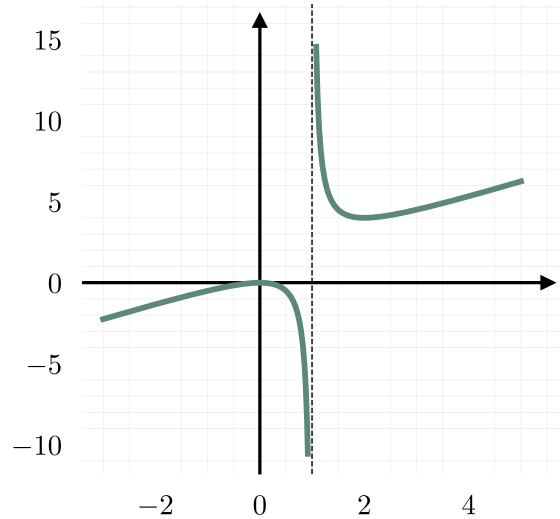
$$\frac{x(x-2)}{(x-1)^2} = 0$$

Это точки $x = 0$, $x = 2$. Кроме того, точка $x = 1$ не принадлежит области определения. Эти точки делят числовую прямую на четыре интервала:

$$(-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 2) \cup (2; \infty)$$

Знак первого интервала положительный (например,можно подставить $f'(-1) = 0.75$). Второго — отрицательный, третьего — отрицательный, четвёртого — положительный.

$(-\infty;0)$	$(0;1)$	$(1;2)$	$(2;\infty)$
$+$	$-$	$-$	$+$



Значит, производная меняет знак только в точках $x = 0$ и $x = 2$. В точке $x = 0$ она меняет знак с положительного на отрицательный, значит, это точка максимума со значением функции $f(0) = 0$. В точке $x = 2$ она меняет знак с отрицательного на положительный, значит, это точка минимума со значением функции $f(2) = 4$.

Ответ: $x = 0$ — точка максимума; $x = 2$ — точка минимума.

Домашнее задание

1. Найти экстремумы функции $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3$ и построить её график.
2. Найти экстремумы функции $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ и построить её график.