Базовая математика

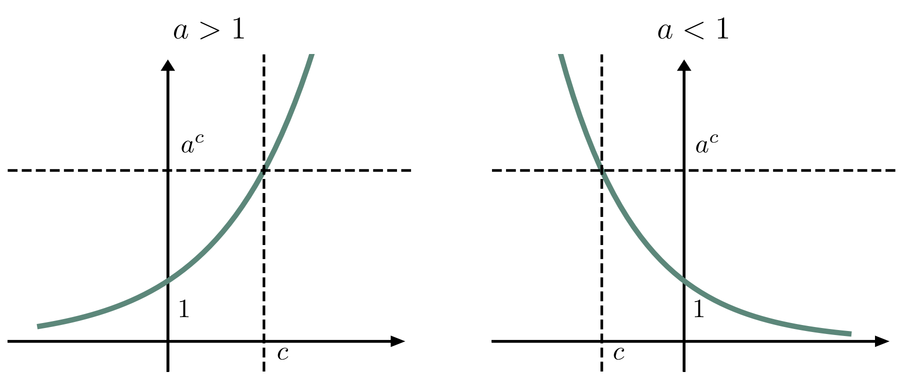
Урок 10. Показательная функция: график и основные свойства функции

Определение 1. Функция, заданная формулой $y = a^x$ (где $a > 0$, $a \neq 1$), называется *показательной функцией* с основанием a.

Свойства показательной функции.

1. Областью определения показательной функции является множество вещественных чисел.
2. Областью значений показательной функции является множество всех положительных вещественных чисел. Иногда это множество для краткости записи обозначают как $\mathbb{R}_+$.
3. Если в показательной функции основание а больше единицы, то функция является возрастающей на всей области определения. Если в показательной функции для основания a выполнено условие $0 < a < 1$, то функция убывает.
4. Справедливы все основные свойства степеней:
   - $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
   - $a^x / a^y = a^{x-y}$
   - $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$
   - $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$
   - $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

   Данные равенства справедливы для всех действительных значений x и y.
5. График показательной функции всегда проходит через точку с координатами $(0; 1)$.
6. В зависимости от того, возрастает или убывает показательная функция, её график имеет один из двух видов:



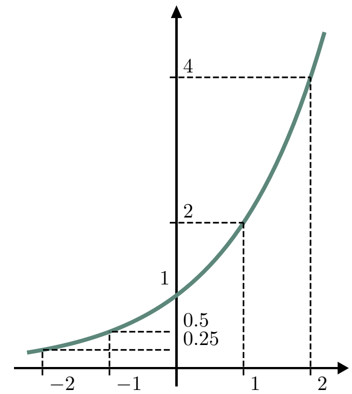
7. Показательная функция не имеет точек экстремума, другими словами, она не имеет точек минимума и максимума. Если рассматривать функцию на каком-либо конкретном отрезке, то минимальное и максимальное значения функция будет принимать на концах этого промежутка.

8. Функция не является чётной или нечётной. Показательная функция — это функция общего вида. Это видно из графиков: ни один из них не симметричен ни относительно оси Oy, ни относительно начала координат.

Пример 1. Построим график функции $y = 2^x$, использовав рассмотренные свойства и найдя несколько точек, принадлежащих графику.

Решение. График функции $y = 2^x$ проходит через точку $(0; 1)$ и расположен выше оси Ox. Если $x < 0$ и убывает, то график быстро приближается к оси Ox (но не пересекает её). Если $x > 0$ и возрастает, то график быстро поднимается вверх.

Такой вид имеет график любой функции $y = a^x$, если $a > 1$.

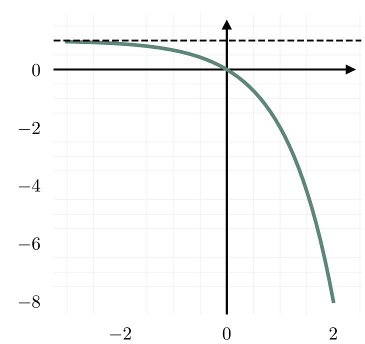


Пример 2. Исследовать функцию $y = -3^x + 1$.

Решение.

1. Область определения функции — все действительные числа.
2. Найдём множество значений функции. Так как $3^x > 0$, то $-3^x < 0$, значит, $-3^x + 1 < 1$, то есть множество значений функции $y = -3^x + 1$ представляет собой промежуток $(-\infty; 1)$.
3. Так как функция $y = 3^x$ монотонно возрастает, то функция $y = -3^x$ монотонно убывает. Значит, и функция $y = -3^x + 1$ также монотонно убывает.
4. Эта функция будет иметь корень:

$$-3^x + 1 = 0 \Rightarrow 3^x = 1 \Rightarrow x = 0$$



5. Для этой функции горизонтальной *асимптотой* будет прямая $y = 1$.

Замечание. Асимптота — это прямая, к которой неограниченно близко приближается график функции при удалении его переменной точки в бесконечность.

Пример 3. Найти множество значений функции $y = 3^{x+1} - 3$.

Решение. Так как $3^{x+1} > 0$, то $3^{x+1} - 3 > -3$. Итак, множество значений: $(-3; \infty)$.

Ответ: $(-3; \infty)$.

Решение показательных уравнений

Простейший вид показательного уравнения:

$$a^x = b, \text{ где } a > 0,\ a \neq 1$$

Из свойств показательной функции мы знаем, что её область значений ограничена положительными вещественными числами. Тогда если $b \leq 0$, уравнение не имеет решений.

Теперь допустим, что $b > 0$. Если в показательной функции основание a больше единицы, то функция возрастает на всей области определения. Если в показательной функции для основания a выполнено условие $0 < a < 1$, то функция убывает на всей области определения.

Исходя из этого, получаем, что уравнение $a^x = b$ имеет один единственный корень при $b > 0$ и положительном a, не равном единице. Чтобы его найти, необходимо представить b в виде: $b = a^c$.

Тогда очевидно, что c будет являться решением уравнения:

$$a^x = b = a^c$$

Пример 4. Решить уравнение $5^{x^2-2x-1} = 25$.

Решение. Представим 25 как 5^2, получим:

$$5^{x^2-2x-1} = 5^2$$

Это равносильно:

$$x^2 - 2x - 1 = 2$$

Решаем полученное квадратное уравнение любым из известных способов. Получаем два корня: $x_1 = 3$ и $x_2 = -1$.

Ответ: 3; −1.

Пример 5. Решить уравнение $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$.

Решение. Выполнив замену $t = 2^x$, получим следующее квадратное уравнение:

$$t^2 - 5t + 4 = 0$$

Решаем это уравнение любым из известных способов. Получаем корни $t_1 = 1$, $t_2 = 4$. Теперь применяем обратную замену, получаем два уравнения:

$$2^x = 1,\ 2^x = 4$$

Ответ: 0; 2.

Решение показательных неравенств

Решение простейших показательных неравенств основывается на тех же свойствах возрастания и убывания функции. Если в показательной функции основание a больше единицы, то функция возрастает на всей области определения. Если в показательной функции для основания a выполнено условие $0 < a < 1$, то функция убывает на всей области определения.

Пример 6. Решить неравенство $(0.5)^{7-3x} < 4$.

Решение. Заметим, что

$$4 = (0.5)^{-2}$$

Значит, неравенство можно переписать: $(0.5)^{7-3x} < (0.5)^{-2}$ Основание показательной функции 0.5 меньше единицы, следовательно, она убывает. Значит, переходя от показательных функций к их степеням, нужно поменять знак неравенства на противоположный:

$$7 - 3x > -2$$

Отсюда получаем, что $x < 3$.

Ответ: $x < 3$.

Замечание. Если бы в неравенстве основание было больше единицы, то при избавлении от основания знак неравенства менять было бы не нужно.

Домашнее задание

1. Построить график функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.
2. Решить уравнение $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{16}{81}$.
3. Решить неравенство $2^{2x-4} > 64$.