Базовая математика

Урок 2. Системы уравнений

Два или более уравнений могут быть рассмотрены вместе в виде *системы.*

Решением системы двух уравнений называется пара чисел (x_0, y_0), которая каждое уравнение системы обращает в тождество. Решить систему — значит, найти все её решения.

У некоторых систем существует решение, у других — нет.

Далее рассмотрим на примерах несколько методов решения систем.

Способ 1. Метод подстановки:

1. Выражаем одно неизвестное через другое, воспользовавшись одним из заданных уравнений. Обычно выбирают то уравнение, где это делается проще. Возьмём, например, первое уравнение системы и выразим x через y.
2. Подставляем во второе уравнение системы вместо x полученное равенство.

Пример 1. Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 5x - 2y = 11 \end{cases}$$

Решение. В данном случае нам все равно, какое из заданных уравнений использовать для нашей цели. Возьмём, например, первое уравнение системы, и выразим x через y:

$$x = (12 - 3y)/2$$

Подставим во второе уравнение системы вместо x полученное равенство:

$$5 \cdot (12 - 3y)/2 - 2y = 11$$

Получили линейное уравнение относительно переменной y. Решим это уравнение. Домножим это равенство на 2, чтобы избавиться от дроби в левой части равенства:

$$5 \cdot (12 - 3y) - 4y = 22 \Rightarrow 60 - 15y - 4y = 22 \Rightarrow 19y = 38 \Rightarrow y = 2$$

Подставим найденное значение $y = 2$ в равенство, выражающее x, получим:

$$x = (12 - 3 \cdot 2)/2 = 6/2 = 3$$

Ответ: $x = 3$, $y = 2$.

Способ 2. Метод алгебраического сложения.

Способ уравнивания коэффициентов при неизвестных состоит в том, чтобы исходную систему привести к такой эквивалентной системе, где коэффициенты при x или y были бы одинаковы.

Алгоритм решения системы двух уравнений с двумя переменными x, y методом сложения:

1. Уравнять модули коэффициентов при одном из неизвестных.
2. Сложить или вычесть уравнения.
3. Решить полученное уравнение с одной переменной.
4. Подставить поочерёдно каждый из найденных на третьем шаге корней уравнения в одно из уравнений исходной системы, найти второе неизвестное.
5. Записать ответ в виде пар значений, например, (x, y), которые были найдены.

Пример 2. Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 5x - 3y = 17 \\ 2x + 5y = 13 \end{cases}$$

Решение.

1. Для приравнивания коэффициентов (например, при y) надо найти НОД$(3; 5) = 15$, где 3 и 5 — коэффициенты при y в уравнениях системы. Затем разделим 15 на 3 — коэффициент при y в первом уравнении, получим 5. Делим 15 на 5 — коэффициент при y во втором уравнении, получаем 3. Следовательно, первое уравнение системы умножаем на 5. а второе на 3:

$$\begin{cases} 5x - 3y = 17 \mid \cdot 5 \\ 2x + 5y = 13 \mid \cdot 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 25x - 15y = 85 \\ 6x + 15y = 39 \end{cases}$$

2. Так как коэффициенты при y имеют противоположные знаки, складываем почленно уравнения системы:

$$\begin{cases} 25x - 15y = 85 \\ \qquad\qquad\qquad + \\ 6x + 15y = 39 \end{cases} \Rightarrow \; 31x = 124 \Rightarrow x = 4$$

3. Для нахождения соответствующего значения y подставим значение x в любое исходное уравнение системы (обычно подставляют в то уравнение системы, где отыскание значения y проще). В исходной системе уравнения одинаковы по сложности, поэтому подставим значение $x = 4$ во второе уравнение, чтобы не делать лишней операции деления на -1:

$$2 \cdot 4 + 5y = 13 \Rightarrow 5y = 13 - 8 = 5 \Rightarrow y = 1$$

Таким образом, найдена пара значений $x = 4$, $y = 1$, которая является решением заданной системы.

Ответ: $x = 4$, $y = 1$.

Иногда задаются системы уравнений, где нет необходимости в уравнивании коэффициентов при неизвестных. Почленное сложение или вычитание уравнений системы приводит к простейшему решению.

Например, решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 13 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$$

Складывая почленно уравнения заданной системы, получим:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 13 \\ \qquad\qquad\qquad + \\ x + 2y = 7 \end{cases} \Rightarrow \; 4x = 20 \Rightarrow x = 5$$

Подставив вместо x значение 5 во второе уравнение исходной системы, находим соответствующее значение y:

$$5 + 2y = 7 \Rightarrow 2y = 2 \Rightarrow y = 1$$

Таким образом, решением системы является $x = 5$, $y = 1$.

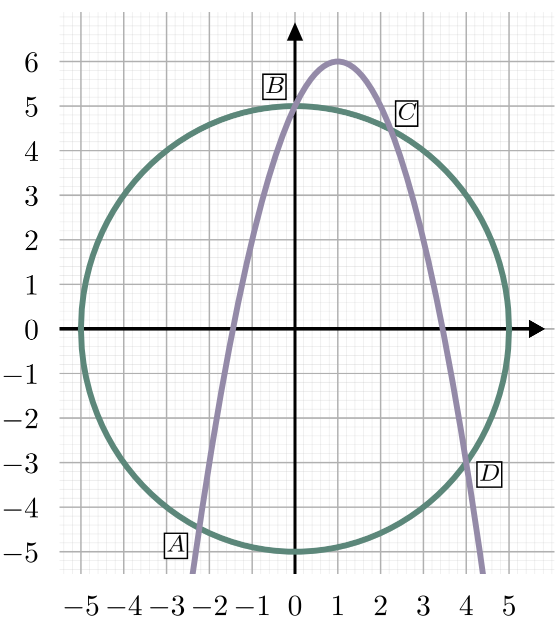
Способ 3. Графический метод решения.

1. Строим график первого уравнения.
2. Строим график второго уравнения.
3. Находим точки пересечения графиков (координаты каждой точки пересечения служат решением системы уравнений).

Пример 3. Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y = -x^2 + 2x + 5 \end{cases}$$

Решение. Построим графики первого и второго уравнений в одной системе координат. Графиком первого уравнения является окружность с центром в начале координат и радиусом 5. Графиком второго уравнения является парабола с ветвями, опущенными вниз. Полученные кривые изображены на рисунке ниже.



Все точки графиков удовлетворяют каждый своему уравнению. Нам же необходимо найти такие точки, которые удовлетворяют как первому, так и второму уравнению. Очевидно, что это точки, в которых эти два графика пересекаются.

Используя наш рисунок, находим приблизительные значения координат, в которых эти точки пересекаются. Получаем следующие результаты:

$$A(-2,2; -4,5), B(0; 5), C(2,2; 4,5), D(4; -3)$$

Значит, наша система уравнений имеет четыре решения:

$$x_1 \approx -2,2; y_1 \approx -4,5$$

$$x_2 \approx 0; y_2 \approx 5$$

$$x_3 \approx 2,2; y_3 \approx 4,5$$

$$x_4 \approx 4, y_4 \approx -3$$

Если подставить данные значения в уравнения нашей системы, то можно увидеть, что первое и третье решение являются приближенными, а второе и четвертое — точными.

Графический метод часто используется, чтобы оценить количество корней и примерные их границы. Решения получаются чаще приближенными, чем точными.

Домашнее задание

1. Решите систему уравнений методом сложения:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 21 \\ x^2 + y^2 = 29 \end{cases}$$

2. Решите систему уравнений графическим методом:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y - x = -3 \end{cases}$$

3. Решите систему уравнений методом подстановки:

$$\begin{cases} xy = -6 \\ x - y = 5 \end{cases}$$