GeekBrains

Векторы в пространстве и действия над ними

Базовая математика / Урок 14

В этом уроке

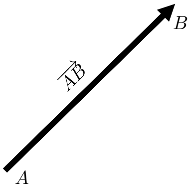
- Основные определения: вектор, нулевой и единичный вектор, коллинеарные и равные вектора
- Определение длины вектора и ее нахождение
- Основные операции над векторами
- Скалярное произведение

Вектор

Вектор — это направленный прямолинейный отрезок, то есть отрезок, имеющий определенную длину и определенное направление.

Длиной вектора $\overline{AB}$ называется длина отрезка AB. Обозначение: $|\overline{AB}|$.

$$|\overline{AB}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

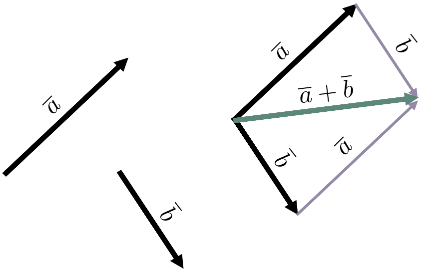


Основные определения

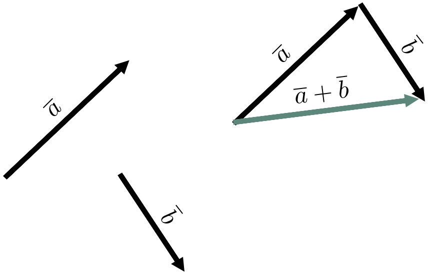
1. Нулевой вектор: $\overline{0}$
2. Единичный вектор: $\overline{e}$
3. Коллинеарные векторы: $\overline{a}||\overline{b}$
4. Равные векторы: $\overline{a} = \overline{b}$

Операции над векторами

1. Если $\overline{c} = \overline{a} \pm \overline{b}$, то $\overline{c} = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2)$.
2. $\lambda \cdot \overline{a} = (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot y_1, \lambda \cdot z_1)$.



(a) Правило параллелограмма



(b) Правило треугольника

GeekBrains

Скалярное произведение:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot \left|\overline{b}\right| \cdot \cos \widehat{ab}$$

Если $\overline{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\overline{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$$

Пример 1

Вычислить: $\overline{a}+\overline{b}$; $\overline{a}-\overline{b}$; $\lambda\overline{a}+\mu\overline{b}$, если $\overline{a}=(1;2;5)$, $\overline{b}=(4;8;1)$, $\lambda=3$; $\mu=1/2$.

Решение:

1. $\overline{a}+\overline{b}=(1+4;2+8;5+1)=(5;10;6)$
2. $\overline{a}-\overline{b}=(1-4;2-8;5-1)=(-3;-6;4)$
3. $\lambda\overline{a}=3\cdot(1;2;5)=(3;6;15)$
   $\mu\overline{b}=1/2\cdot(4;8;1)=(2;4;1/2)$
   $\Rightarrow \lambda\overline{a}+\mu\overline{b}=(3+2;6+4;15+1/2)=(5;10;15.5)$

Пример 2

Найти длину вектора $\overline{a} = (2; 4)$.

Решение:
$|\overline{a}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16} = 2\sqrt{5}$.

Ответ: $2\sqrt{5}$.

Пример 3

Найти длину вектора $\overline{a} = (2; 4; 4)$.

Решение:
$|\overline{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2^2 + 4^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16 + 16} = \sqrt{36} = 6$.

Ответ: 6.

Пример 4

Найти угол между векторами $\overline{a} = (3; 4; 0)$ и $\overline{b} = (4; 4; 2)$.

Решение:

1. $\overline{a} \cdot \overline{b} = 3 \cdot 4 + 4 \cdot 4 + 0 \cdot 2 = 12 + 16 + 0 = 28$
2. $|\overline{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$
3. $\left|\overline{b}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{4^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{16 + 16 + 4} = \sqrt{36} = 6$
4. $\cos \widehat{ab} = \dfrac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|\overline{a}| \cdot \left|\overline{b}\right|} = \dfrac{28}{5 \cdot 6} = \dfrac{14}{15}$
5. $\widehat{ab} = \arccos \dfrac{14}{15}$

Ответ: $\arccos \dfrac{14}{15}$.

GeekBrains

Спасибо за внимание