Базовая математика

Урок 6. Понятие о приращении функции, приращении аргумента. Понятие о производной

Изучая поведение функции $y = f(x)$ около конкретной точки x_0, важно знать, как меняется значение функции при изменении значения аргумента. Для этого используют понятия *приращений* аргумента и функции.

Пусть задана некоторая функция $y = f(x)$. Возьмём какое-нибудь значение x_0 из области определения этой функции: $x_0 \in D[f]$. Соответствующее значение функции в этой точке будет равно $y_0 = f(x_0)$.

Определение 1. *Приращением аргумента* называется разность между двумя значениями аргумента: «новым» и «старым». Обычно обозначается как $\Delta x = x_1 - x_0$.

Определение 2. *Приращением функции* $y = f(x)$ в точке x_0, соответствующее приращению аргумента $\Delta x = x - x_0$, называется величина:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

Как видно из Рисунка 1, приращение показывает изменение ординаты и абсциссы точки. А отношение приращения функции к приращению аргумента определяет угол наклона секущей, проходящей через начальное и конечное положение точки.

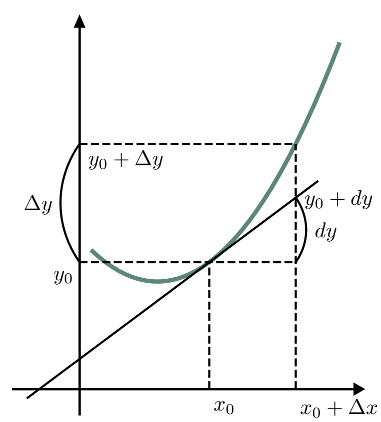


Рис. 1: Приращения

Пример 1. Найти приращение аргумента x, если он переходит от значения 5 к значению 5.4.

Решение. Искомое приращение: $\Delta x = 5.4 - 5 = 0.4$.

Ответ: $\Delta x = 0.4$.

Пример 2. Найти приращение аргумента Δx и приращение функции Δf в точке x_0, если $f(x) = x^2$, $x_0 = 2$ и 1) $x = 1.9$ 2) $x = 2.1$.

Решение. Воспользуемся формулами, приведенными выше:

1. $\Delta x = x - x_0 = 1.9 - 2 = -0.1 \Rightarrow \Delta f = f(1.9) - f(2) = 1.9^2 - 2^2 = -0.39$.
2. $\Delta x = x - x_0 = 2.1 - 2 = 0.1 \Rightarrow \Delta f = f(2.1) - f(2) = 2.1^2 - 2^2 = 0.41$.

Ответ:

1. $\Delta x = -0.1$, $\Delta f = -0.39$,
2. $\Delta x = 0.1$, $\Delta f = 0.41$.

Определение 3. *Производная функции* — это отношение приращения функции к приращению аргумента при бесконечно малом приращении аргумента.

Итак, производная функции $f(x)$ — это отношение Δf к Δx при $\Delta x \to 0$:

$$f'(x) = \frac{\Delta f}{\Delta x} \text{ при } \Delta x \to 0$$

В разных точках при одном и том же приращении аргумента приращение функции будет разным. Значит, и производная в каждой точке своя. Поэтому когда пишем производную, надо указывать, в какой точке:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \text{ при } \Delta x \to 0$$

Обратите внимание: приращение аргумента стремится к нулю, но нуля не достигает, иными словами, величина бесконечно мала, но не равна нулю!

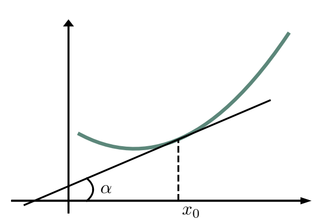
Если функция $f(x)$ имеет производную в точке x, то эта функция называется *дифференцируемой в этой точке*. Если функция $f(x)$ имеет производную в каждой точке некоторого промежутка, то эта функция *дифференцируема на этом промежутке*. Операция нахождения производной называется *дифференцированием*.

Физический смысл производной. Если положение точки при её движении задаётся функцией пути $S(t)$, где t — время движения, то производная функции S есть мгновенная скорость движения в момент времени t:

$$v(t) = S'(t)$$

Таким образом, скорость есть производная от пути по времени.

Геометрический смысл производной. Производная в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в этой точке. Производная функции в точке численно равна тангенсу угла наклона касательной к графику функции в данной точке:



Правила вычисления производных.

1. Константу можно выносить за знак производной:

$$(c \cdot u(x))' = c \cdot u'(x), \ c = const$$

2. Производная суммы/разности двух функций равна сумме/разности производных от каждой из функций:

$$(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x)$$

3. Производная произведения:

$$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

4. Производная частного:

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)},\ v(x) \neq 0$$

5. Производная *сложной функции* равна производной этой функции по промежуточному аргументу u, умноженной на производную от промежуточного аргумента u по основному аргументу x: $y = y(u)$ и $u = u(x)$ имеют производные соответственно в точках $u_0 = u(x0)$ и x_0. Тогда

$$y(u(x))'\big|_{x=x_0} = y'(u)\big|_{u=u_0} \cdot u'(x)\big|_{x=x_0}$$

Таблица производных.

1. $c' = 0,\ c = const$
2. $x' = 1$
3. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$
4. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$
5. $(e^x)' = e^x$
6. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$
7. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
8. $(\sin x)' = \cos x$
9. $(\cos x)' = -\sin x$
10. $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
11. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
12. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
13. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
15. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
16. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$
17. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$
18. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$
19. $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
20. $(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$

Пример 3. Найти производную функции $y = (x-3)(3x+6)$ в точке $x_0 = 2$.

Решение. Определяем части выражения функции: всё выражение представляет произведение, а его сомножители — суммы, во второй из которых одно из слагаемых содержит постоянный множитель. Применяем правило произведения: производная произведения двух функций равна сумме произведений каждой из этих функций на производную другой.

$$y' = (x-3)'(3x+6) + (x-3)(3x+6)'$$

Далее применяем правило суммы: производная алгебраической суммы функций равна алгебраической сумме производных этих функций.

$$y' = (x-3)'(3x+6) + (x-3)(3x+6)' = 1 \cdot (3x+6) + (x-3) \cdot 3 = 3x + 6 + 3x - 9 = 6x - 3$$

Подставляем в полученное выражение точку $x_0 = 2$:

$$y'(x_0) = 6 \cdot 2 - 3 = 12 - 3 = 9$$

Ответ: 9.

Пример 4. Найти производную функции $y = \dfrac{2x-3}{4+5x}$.

Решение. От нас требуется найти производную частного. Применяем формулу дифференцирования частного: производная частного двух функций равна дроби, числитель которой есть разность произведений знаменателя на производную числителя и числителя на производную знаменателя, а знаменатель есть квадрат прежнего числителя. Получаем:

$$y' = \frac{(2x-3)'(4+5x) - (2x-3)(4+5x)'}{(4+5x)^2}$$

Далее применяем правило производной для суммы:

$$y' = \frac{(2x-3)'(4+5x)-(2x-3)(4+5x)'}{(4+5x)^2} = \frac{2\cdot(4+5x)-(2x-3)\cdot 5}{(4+5x)^2} = \frac{8+10x-10x+15}{(4+5x)^2} = \frac{23}{(4+5x)^2}$$

Ответ: $\dfrac{23}{(4+5x)^2}$.

Пример 5. Найти производную функции $y = \dfrac{\sqrt{x}}{1-3x}$.

Решение. В данной функции видим частное, делимое которого — квадратный корень из независимой переменной. По правилу дифференцирования частного и табличному значению производной квадратного корня получаем:

$$y' = \frac{(\sqrt{x})'(1-3x)-\sqrt{x}(1-3x)'}{(1-3x)^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(1-3x)-\sqrt{x}(-3)}{(1-3x)^2} = \frac{\frac{1-3x}{2\sqrt{x}}+3\sqrt{x}}{(1-3x)^2}$$

Чтобы избавиться от дроби в числителе, умножаем числитель и знаменатель на $2\sqrt{x}$:

$$\frac{\frac{1-3x}{2\sqrt{x}}+3\sqrt{x}}{(1-3x)^2} = \frac{1-3x+6(\sqrt{x})^2}{2\sqrt{x}(1-3x)^2} = \frac{1-3x+6x}{2\sqrt{x}(1-3x)^2} = \frac{1+3x}{2\sqrt{x}(1-3x)^2}$$

Ответ: $\dfrac{1+3x}{2\sqrt{x}(1-3x)^2}$.

Пример 6. Найти производную функции $y = x\cos x - \dfrac{e^x}{x} + 4$.

Решение.

$$y' = \left(x\cos x - \frac{e^x}{x} + 4\right)' = (x\cos x)' - \left(\frac{e^x}{x}\right)' + (4)' =$$

$$= x'\cdot\cos x + x\cdot(\cos x)' - \frac{(e^x)'\cdot x - e^x\cdot(x)'}{x^2} = 1\cdot\cos x + x(-\sin x) - \frac{e^x\cdot x - e^x\cdot 1}{x^2} =$$

$$= \cos x - x\sin x - \frac{xe^x - e^x}{x^2} = \cos x - x\sin x - \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

Ответ: $\cos x - x\sin x - \dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$.

Домашнее задание

1. Найти приращение аргумента Δx и приращение функции Δf в точке x_0, если $f(x) = 2x^2 - 3$, $x_0 = 1$, $x = 2$.
2. Найти приращение аргумента Δx и приращение функции Δf в точке x_0, если $f(x) = x^3 + 1$, $x_0 = -1$, $x = 3$.
3. Найти производную функции $y = 2x^2 - 3\sin x$.
4. Найти производную функции $y = x^2 \sin x$.
5. Найти производную функции $y = 3x^4 - \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ и вычислить $y'(1)$.