

## Геометрическая прогрессия

Базовая математика / Урок 4



- Определение геометрической прогрессии
- Сумма  $n$  первых членов геометрической прогрессии
- Сумма бесконечной геометрической прогрессии

Геометрическая прогрессия — это числовая последовательность, первый член которой отличен от нуля, а каждый следующий член равен предыдущему члену, умноженному на одно и то же не равное нулю число:

$$b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$$

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{b_{n+1}}{b_n} = q$$

Геометрическая прогрессия — это числовая последовательность, первый член которой отличен от нуля, а каждый следующий член равен предыдущему члену, умноженному на одно и то же не равное нулю число:

$$b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$$

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{b_{n+1}}{b_n} = q$$

Если  $q > 0$ ,  $q \neq 1$ , то прогрессия является монотонной последовательностью.

$(b_n)$  — геометрическая прогрессия тогда и только тогда, когда  $b_{n+1}^2 = b_n \cdot b_{n+2}$ .

Формула  $n$ -ого члена геометрической прогрессии:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

## Пример 1

Вычислить первые пять членов геометрической прогрессии и написать формулу нахождения  $n$ -го члена, если  $b_1 = 8$  и  $q = 0.5$ .

Решение:

①  $b_1 = 8$

②  $b_2 = b_1 \cdot q = 8 \cdot 0.5 = 4$

③  $b_3 = b_2 \cdot q = 4 \cdot 0.5 = 2$

④  $b_4 = b_3 \cdot q = 2 \cdot 0.5 = 1$

⑤  $b_5 = b_4 \cdot q = 1 \cdot 0.5 = 0.5$

⑥  $b_n = b_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow b_n = 8 \cdot 0.5^{n-1}$

Ответ:  $b_1 = 8$ ;  $b_2 = 4$ ;  $b_3 = 2$ ;  $b_4 = 1$ ;  $b_5 = 0.5$ ;  
 $b_n = 8 \cdot 0.5^{n-1}$ .

Первый вариант

$$S_n = \frac{b_n \cdot q - b_1}{q - 1}$$

Второй вариант

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

## Пример 2

Вычислить сумму первых пяти членов геометрической прогрессии, если  $b_1 = 8$  и  $q = 0.5$ .

Решение:

① С помощью первой формулы  $S_n = \frac{b_n \cdot q - b_1}{q - 1}$  для  $n = 5$ ,  $b_1 = 8$ ,  $q = 0.5$ :

$$b_n = b_5 = b_1 \cdot q^{n-1} = 8 \cdot 0.5^4 = 0.5$$

$$S_5 = \frac{0.5 \cdot 0.5 - 8}{0.5 - 1} = 15.5$$

② С помощью второй формулы  $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$ :

$$S_5 = \frac{8 \cdot (0.5^5 - 1)}{0.5 - 1} = 15.5$$

Ответ: 15.5.



Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия — это геометрическая прогрессия, у которой  $|q| < 1$ .

Сумма всех членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна:

$$S = \frac{b_1}{1 - q}$$

Выразить бесконечную периодическую дробь  $0.131313\dots$  рациональным числом.

Решение:

Запишем периодическую дробь в следующем виде:


$$0.131313\dots = \frac{13}{100} + \frac{13}{10000} + \frac{13}{1000000} + \dots = \frac{13}{100} \cdot \left(1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{10000} + \dots\right)$$

Используя формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$S = \frac{b_1}{1 - q}$  со знаменателем  $q = \frac{1}{100}$ , получаем:

$$0.131313\dots = \frac{13}{100} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{13}{100} \cdot \frac{1}{\frac{99}{100}} = \frac{13}{99}$$

Ответ:  $\frac{13}{99}$ .



Спасибо за внимание