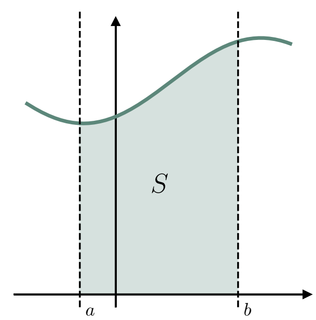
Базовая математика

Урок 9. Формула Ньютона–Лейбница. Примеры вычисления интегралов

Пусть на некотором отрезке $[a;b]$ оси Ox задана некоторая непрерывная функция $f(x)$. Положим, что эта функция не меняет своего знака на всем отрезке.



Теорема 1. Если $f(x)$ есть непрерывная и неотрицательная на некотором отрезке $[a;b]$ функция, а $F(x)$ есть её некоторая первообразная на этом отрезке, то площадь криволинейной трапеции S, ограниченная осью Ox, кривой $y = f(x)$ и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$, равна приращению первообразной на данном отрезке:

$$S = F(b) - F(a)$$

Значение площади S из теоремы выше называется *определённым интегралом* функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ и обозначается:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Итак, справедлива *формула Ньютона–Лейбница*:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \tag{1}$$

Выражение $F(b) - F(a)$ часто обозначают следующим образом:

$$F(x)\Big|_a^b$$

Формула Ньютона-Лейбница применяется для вычисления интегралов. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Вычислить определенный интеграл $\displaystyle\int_1^2 2x^2\,dx$.

Решение.

$$\int_1^2 2x^2\,dx = 2\cdot\int_1^2 x^2\,dx = \frac{2}{3}x^3\Big|_1^2 = \frac{2}{3}(2^3 - 1^3) = \frac{2}{3}(8-1) = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$$

В первом равенстве мы выносим константу за знак интеграла. Далее, чтобы посчитать первообразную от функции x^2, можно воспользоваться табличной формулой:

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$$

Поскольку речь идёт об определённом интеграле, записываем приращение функции x^3 на отрезке $[1;2]$ в соответствии с формулой Ньютона–Лейбница (1).

Ответ: $4\dfrac{2}{3}$.

Пример 2. Вычислить определенный интеграл $\displaystyle\int_{-1}^{2} x^2\,dx$.

Решение. Находим первообразную для подынтегральной функции x^2. Одной из первообразных будет являться функция $\dfrac{x^3}{3}$. Используем формулу Ньютона–Лейбница (1):

$$\int_{-1}^{2} x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2} = \frac{2^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = 3$$

Ответ: 3.

Пример 3. Вычислить определенный интеграл $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \sin x\,dx$.

Решение. Находим первообразную для подынтегральной функции $\sin x$. Одной из первообразных будет являться функция $-\cos x$. Теперь по формуле Ньютона–Лейбница:

$$\int_{0}^{\pi} \sin x\,dx = (-\cos x)\Big|_{0}^{\pi} = -\cos\pi + \cos 0 = 2$$

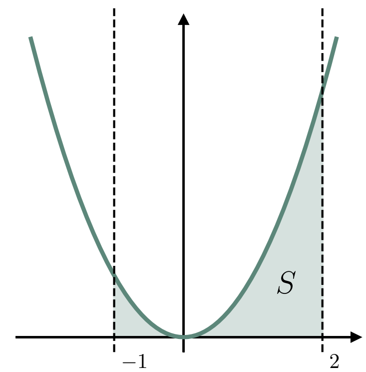
Ответ: 2.

Площадь фигуры

Случай 1. Ранее мы сформулировали Теорему 1: если непрерывная кривая задана уравнением $y = f(x)$, $f(x) \geq 0$, то площадь криволинейной трапеции S, ограниченная осью Ox, кривой $y = f(x)$ и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$, равна:

$$S = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

Пример 4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2$, прямыми $x = -1$, $x = 2$ и осью Ox.



Решение.

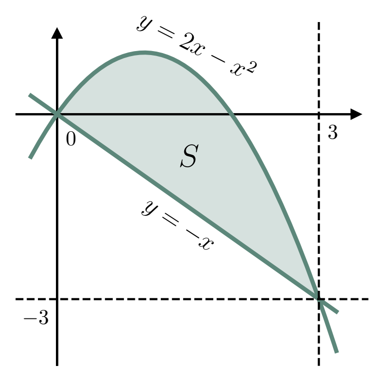
$$S = \int_{-1}^{2} x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\bigg|_{-1}^{2} = \frac{2^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = 3$$

Ответ: 3.

Случай 2. Если площадь S ограничена графиками непрерывных функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ и двумя прямыми $x = a$, $x = b$ и $f(x) \le g(x)$ при $a \le x \le b$, то:

$$S = \int_a^b (g(x) - f(x))\,dx$$

Пример 5. Вычислить площадь сегмента, отсекаемого прямой $y = -x$ от параболы $(x-1)^2 = -(y-1)$.



Решение. Найдём точки пересечения параболы и прямой, т.е. решим систему уравнений:

$$y = 2x - x^2,\ y = -x$$

Решения системы:

$$x_1 = 0,\ y_1 = 0;\ \ x_2 = 3,\ y_2 = -3$$

По рисунку видно, что функция $y = 2x - x^2$ находится выше, чем функция $y = -x$. Поэтому для нахождения площади примем $g(x) = 2x - x^2$, $f(x) = -x$. Итак, искомая площадь:

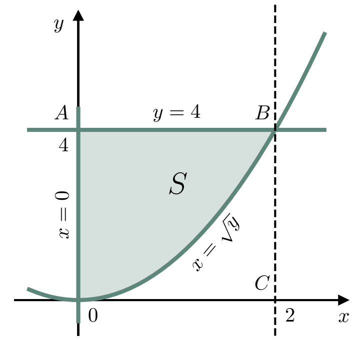
$$S = \int_0^3 (2x - x^2 - (-x))\,dx = \int_0^3 (3x - x^2)\,dx = \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\bigg|_0^3 = \frac{9}{2} = 4.5$$

Ответ: 4.5.

Случай 3. Если криволинейная трапеция ограничена кривой $x = \varphi(y)$, прямыми $y = c$, $y = d$ и отрезком $[c;d]$ оси Oy, то площадь такой трапеции вычисляется по формуле:

$$S = \int_c^d \varphi(y)dy$$

Пример 6. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $x = \sqrt{y}$, $x = 0$, $y = 4$.



Решение. В принципе эту задачу можно решить и интегрированием по x. Заметим, что

$$S = S_{OABC} - S_{OBC},$$

где $OABC$ — квадрат, OBC — криволинейный треугольник.

Найдём координату точки B с помощью системы:

$$\begin{cases} y = 4 \\ x = \sqrt{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$$

Итак, найдём нужные площади:

$$S_{OABC} = \int_0^2 4\,dx = 8,\ S_{OBC} = \int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3}$$

Теперь искомая площадь:

$$S = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$$

Отметим, что в данном случае по y интегрировать проще. Чтобы сделать это, нам не хватает только нижнего предела интегрирования. Найдём его из системы:

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt{y} \end{cases} \Rightarrow y = 0$$

Итак, интегрируем по y:

$$S = \int_0^4 \sqrt{y}\,dy = \frac{2y\sqrt{y}}{3}\Bigg|_0^4 = \frac{2 \cdot 4 \cdot 2}{3} - 0 = \frac{16}{3}$$

Ответ: $\frac{16}{3}$.

Домашнее задание

1. Вычислить интеграл $\int_0^2 \left(x^3 - x^2\right)\,dx$.
2. Вычислить интеграл $\int_0^1 \left(\sqrt[3]{x} - \sqrt{x}\right)\,dx$.
3. Вычислить интеграл $\int_{-1}^1 \left(4x^3 + 5x^4\right)\,dx$.
4. Найти площадь фигуры, ограниченной линией $3x^2 + 2y - 4 = 0$ и осью Ox.