GeekBrains

Формула Ньютона–Лейбница. Примеры вычисления интегралов

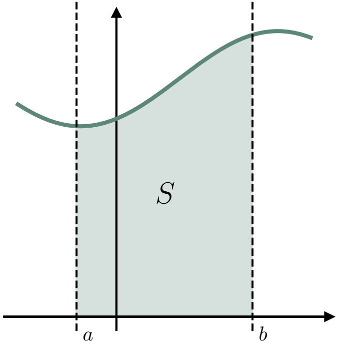
Базовая математика / Урок 9

В этом уроке

- Определение определенного интеграла
- Формула Ньютона–Лейбница
- Площадь фигуры

Пусть функция $f(x)$ — непрерывная и неотрицательная на $[a;b]$, $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$ на $[a;b]$. Тогда:

$$S = F(b) - F(a)$$



Пусть функция $f(x)$ — непрерывная и неотрицательная на $[a; b]$, $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$ на $[a; b]$.

Формула Ньютона–Лейбница:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Пример 1

Вычислить определенный интеграл $\int_1^2 2x^2dx$.

Решение:

$$\int_1^2 2x^2dx = 2 \cdot \int_1^2 x^2dx = \frac{2}{3}x^3\Big|_1^2 = \frac{2}{3}(2^3 - 1^3) = \frac{2}{3}(8-1) = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$$

Ответ: $4\frac{2}{3}$.

Пример 2

Вычислить определенный интеграл $\int_{-1}^{2} x^2 dx$.

Решение:

$$\int_{-1}^{2} x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{2} = \frac{2^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = 3$$

Ответ: 3.

Пример 3

Вычислить определенный интеграл $\int_0^{\pi} \sin x dx$.

Решение:

$$\int_0^{\pi} \sin x dx = (-\cos x)\Big|_0^{\pi} = -\cos\pi + \cos 0 = 2$$

Ответ: 2.

Плодащь фигуры

1. Если непрерывная кривая задана уравнением $y = f(x)$, $f(x) \geq 0$, то:

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

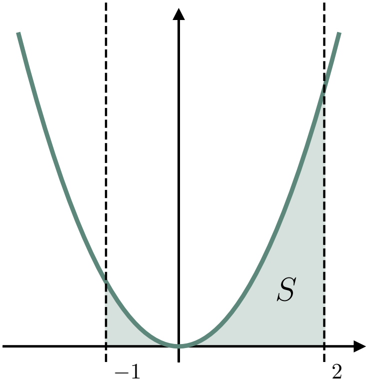
Пример 4

Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2$, прямыми $x = -1$, $x = 2$ и осью Ox.

Решение:

$$S = \int_{-1}^{2} x^2 dx = \frac{x^3}{3}\bigg|_{-1}^{2} = \frac{2^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = 3$$

Ответ: 3.



Плодащь фигуры

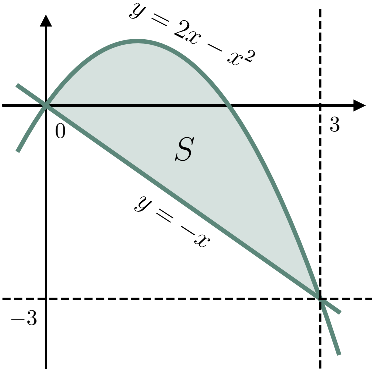
GeekBrains

2. Если S ограничена графиками непрерывных функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ и двумя прямыми $x = a$, $x = b$ и $f(x) \leq g(x)$ при $a \leq x \leq b$, то:

$$S = \int_a^b (g(x) - f(x))dx$$

Пример 5

Вычислить площадь сегмента, отсекаемого прямой $y = -x$ от параболы $(x-1)^2 = -(y-1)$.



Решение:

1. $\begin{cases} y = 2x - x^2 \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0; y_1 = 0 \\ x_2 = 3; y_2 = -3 \end{cases}$

2. $$S = \int_0^3 (2x - x^2 - (-x))dx =$$
$$= \int_0^3 (3x - x^2)dx = \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^3 = \frac{9}{2} = 4.5$$

Ответ: 4.5.

3. Если криволинейная трапеция ограничена кривой $x = \varphi(y)$, прямыми $y = c$, $y = d$ и отрезком $[c; d]$ оси Oy, то:

$$S = \int_c^d \varphi(y) dy$$

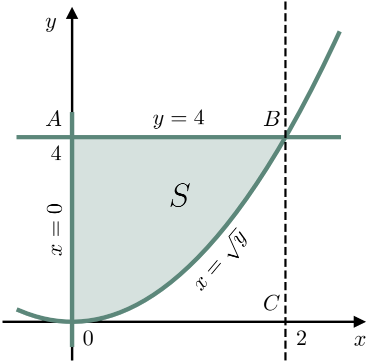
Пример 6

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $x = \sqrt{y}$, $x = 0$, $y = 4$.

Решение:

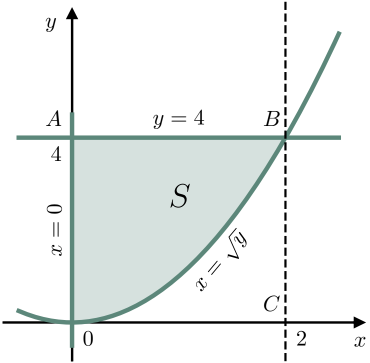
1. $S = S_{OABC} - S_{OBC}$
2. $\begin{cases} y = 4 \\ x = \sqrt{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$
3. $S_{OABC} = \displaystyle\int_0^2 4\,dx = 8$, $S_{OBC} = \displaystyle\int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3}$
4. $S = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$

Ответ: $16/3$.



Пример 6

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $x = \sqrt{y}$, $x = 0$, $y = 4$.



Альтернативное решение:

1. $\begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt{y} \end{cases} \Rightarrow y = 0$
2. Интегрируем по y:
$$S = \int_0^4 \sqrt{y}dy = \frac{2y\sqrt{y}}{3}\Bigg|_0^4 = \frac{2 \cdot 4 \cdot 2}{3} - 0 = \frac{16}{3}$$

Ответ: $16/3$.

Спасибо за внимание