# Базовая математика

## Урок 14. Векторы в пространстве и действия над ними

**Определение 1.** *Вектор* — это направленный прямолинейный отрезок, то есть отрезок, имеющий определённую длину и определённое направление.

Пусть точка $A$ — начало вектора, а точка $B$ — его конец. Тогда вектор обозначается символом $\overline{AB}$ или $\overline{a}$.

Вектор $\overline{BA}$ называется противоположным вектору $\overline{AB}$ и может быть обозначен $-\overline{a}$.

Сформулируем ряд базовых определений.

**Определение 2.** *Длиной* или *модулем* вектора $\overline{AB}$ называется длина отрезка и обозначается $|\overline{AB}|$.

Для нахождения длины вектора на плоскости по его координатам, требуется рассмотреть прямоугольную декартову систему координат $Oxyz$. Пусть в ней задан некоторый вектор $\overline{AB}$ с координатами $(x; y; z)$. Тогда формула для нахождения длины вектора:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

**Определение 3.** Вектор нулевой длины (его суть — точка) называется *нулевым* и обозначается как $\overline{0}$. Нулевой вектор не имеет направления.

**Определение 4.** Вектор единичной длины называется *единичным*. Единичные векторы обычно обозначают $\overline{e}$. Единичный вектор, направление которого совпадает с направлением заданного вектора $\overline{a}$, называется *ортом* вектора $\overline{a}$.

**Определение 5.** Векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ называются *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Обозначение: $\overline{a}||\overline{b}$.

Коллинеарные векторы могут иметь совпадающие или противоположные направления. Нулевой вектор считают коллинеарным любому вектору.

**Определение 6.** Векторы называются *равными* ($\overline{a} = \overline{b}$), если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют одинаковые длины.

Пусть в трёхмерном пространстве заданы векторы

$$\overline{a} = (x_1; y_1; z_1), \overline{b} = (x_2; y_2; z_2), \overline{c} = (x_3; y_3; z_3)$$

Имеют место следующие операции над ними:

- линейные: сложение, вычитание, умножение на число и проектирование вектора на ось или другой вектор
- нелинейные: скалярное произведение векторов

**Основные операции над векторами**.

1. Сложение двух векторов производится покоординатно:

$$\overline{a} + \overline{b} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_3)$$

Данная формула имеет место для произвольного конечного числа слагаемых. Геометрически два вектора складываются по двум правилам:

   (a) *Правило треугольника.* Откладываем второй вектор от конца первого. Тогда вектор суммы двух векторов имеет начало в начале первого вектора, а конец — в конце второго вектора. Если векторов больше двух, следует последовательно отложить каждый следующий вектор от конца предыдущего. Тогда сумма векторов — вектор с началом в начале первого вектора и концом в конце последнего.

   (b) *Правило параллелограмма.* Параллелограмм строится на векторах-слагаемых как на сторонах, приведённых к одному началу. Теперь диагональ параллелограмма, исходящая из их общего начала, является суммой векторов.

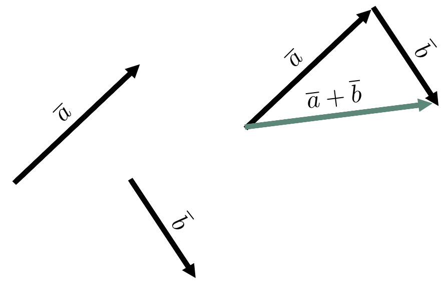


Рис. 1: Правило треугольника

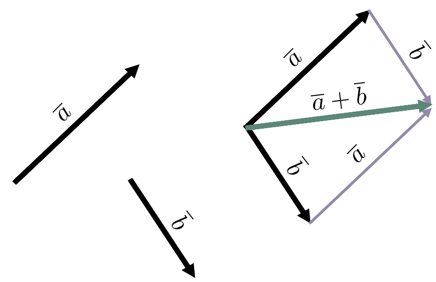


Рис. 2: Правило параллелограмма

2. Вычитание двух векторов производится покоординатно, аналогично сложению:

$$\overline{a} - \overline{b} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_3)$$

Важным следствием вычитания векторов является следующее: если известны координаты начала и конца вектора, то для вычисления координат вектора необходимо из координат его конца вычесть координаты его начала.

3. Умножение вектора на число $\lambda$ покоординатно:

$$\lambda \cdot \overline{a} = (\lambda x_1; \lambda y_1; \lambda z_1)$$

При $\lambda > 0$ вектор $\lambda \cdot \overline{a}$ сонаправлен; $\lambda < 0$ — вектор $\lambda \cdot \overline{a}$ противоположно направлен; $|\lambda| > 1$ — длина вектора $\overline{a}$ увеличивается в $\lambda$ раз; $|\lambda| < 1$ — длина вектора $\overline{a}$ уменьшается в $\lambda$ раз.

**Определение 7.** *Скалярным произведением* векторов $\overline{a} \cdot \overline{b}$ называется число (скаляр), равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos \widehat{ab},$$

где $\widehat{ab}$ — угол между векторами.

Скалярное произведение двух векторов, заданных своими координатами, равно сумме произведений их одноимённых координат:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

Зная скалярное произведение векторов, можно вычислить угол между ними. Если заданы два ненулевых вектора с координатами

$$\overline{a} = (x_1; y_1; z_1),\ \overline{b} = (x_2; y_2; z_2),$$

то косинус угла $\widehat{ab}$ между ними:

$$\cos \widehat{ab} = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|\overline{a}| \cdot |\overline{b}|}$$

Необходимым и достаточным условием перпендикулярности двух векторов является равенство нулю их скалярного произведения.

**Пример 1.** Вычислить: $\overline{a} + \overline{b}$; $\overline{a} - \overline{b}$; $\lambda\overline{a} + \mu\overline{b}$, если $\overline{a} = (1; 2; 5)$, $\overline{b} = (4; 8; 1)$, $\lambda = 3$; $\mu = 1/2$.

*Решение.*

1. $\overline{a} + \overline{b} = (1 + 4; 2 + 8; 5 + 1) = (5; 10; 6)$
2. $\overline{a} - \overline{b} = (1 - 4; 2 - 8; 5 - 1) = (-3; -6; 4)$
3. $\lambda\overline{a} = 3 \cdot (1; 2; 5) = (3; 6; 15)$
   $\mu\overline{b} = 1/2 \cdot (4; 8; 1) = (2; 4; 1/2)$
   $\Rightarrow \lambda\overline{a} + \mu\overline{b} = (3 + 2; 6 + 4; 15 + 1/2) = (5; 10; 15.5)$

**Пример 2.** Найти длину вектора $\overline{a} = (2; 4)$.

*Решение.*

$$|\overline{a}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16} = 2\sqrt{5}$$

*Ответ*: $2\sqrt{5}$.

**Пример 3.** Найти длину вектора $\overline{a} = (2; 4; 4)$.

*Решение.*

$$|\overline{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2^2 + 4^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16 + 16} = \sqrt{36} = 6$$

*Ответ*: 6.

**Пример 4.** Найти угол между векторами $\overline{a} = (3; 4; 0)$ и $\overline{b} = (4; 4; 2)$.

*Решение.* Найдём скалярное произведение векторов:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = 3 \cdot 4 + 4 \cdot 4 + 0 \cdot 2 = 12 + 16 + 0 = 28$$

Найдём длины векторов:

$$|\overline{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$\left|\overline{b}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{4^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{16 + 16 + 4} = \sqrt{36} = 6$$

Итак, угол между векторами:

$$\cos \widehat{ab} = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|\overline{a}| \cdot \left|\overline{b}\right|} = \frac{28}{5 \cdot 6} = \frac{14}{15}$$

$$\widehat{ab} = \arccos \frac{14}{15}$$

*Ответ*: $\arccos \dfrac{14}{15}$.

# Домашнее задание

1. Вычислить: a) $\overline{a} + \overline{b}$; b) $\overline{a} - \overline{b}$; c) $\lambda\overline{a} + \mu\overline{b}$, если $\overline{a} = (4; 2; 6)$, $\overline{b} = (3; -1; 1)$, $\lambda = 1/2$; $\mu = -1$.
2. Найти длину вектора $\overline{a}$, если: a) $\overline{a} = (1; -3; 3)$, b) $\overline{a} = (0; -4; 6)$.
3. Найти угол между векторами $\overline{a} = (1; 2; -5)$ и $\overline{b} = (4; 8; 1)$.