GeekBrains

# Пределы

Базовая математика / Урок 13

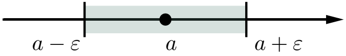
# В этом уроке

- Определение пределов последовательности и функции, свойства пределов
- Виды неопределенностей и способы их устранения

## Предел последовательности

# Окрестность точки

Пусть $a$ — точка на прямой, $\varepsilon > 0$. Тогда интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ — окрестность точки $a$.



## Пример 1

Рассмотрим последовательность:

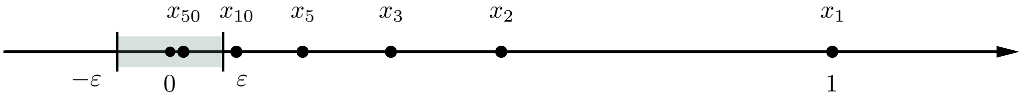
$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

Возьмём произвольную окрестность точки $0$: $(-\varepsilon, \varepsilon)$.

Каким бы маленьким ни было число $\varepsilon$, всегда можно подобрать такое $n_0$, чтобы для любого $n > n_0$ число $x_n$ лежало в этой окрестности:

$$n_0 = 1/\varepsilon \Rightarrow x_n \in (-\varepsilon, \varepsilon) \text{ для всех } n > n_0$$

Говорят, что предел последовательности $\{1/n\}$ равен $0$.



# Понятие предела последовательности

Число $a$ называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $n_0 \in \mathbb{N}$, такое, что для всех $n > n_0$ верно:

$$|x_n - a| < \varepsilon \text{ или } a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$

Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} = a$ или $x_n \to a$.

Последовательность, имеющая конечный предел, называется сходящейся, в противном случае — расходящейся.

1. Если последовательность сходится, то только к одному пределу.
2. Если последовательность сходится, то она ограничена.
3. Теорема Вейерштрасса: если последовательность монотонна и ограничена, то она сходится.
4. Постоянный множитель $c$ можно выносить за знак предела:

$$\lim_{n\to\infty}(c\cdot y_n) = c\cdot\lim_{n\to\infty} y_n$$

# Основные свойства пределов последовательностей

5. Если существуют конечные пределы последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, то:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} \text{ при условии, что } \lim_{n\to\infty} y_n \neq 0$$

6. Если существуют конечные пределы последовательностей $\{y_n\}$ и $\{y_n^p\}$, то

$$\lim_{n\to\infty} y_n^p = \left(\lim_{n\to\infty} y_n\right)^p$$

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, если $|q| < 1$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} C = C$, если $C = const$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{k}{n^m} = 0$

# Неопределённости

Пример:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+n}{1+n^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

Другие неопределённости:

$$\left[\frac{0}{0}\right],\ \left[\frac{\infty}{\infty}\right],\ [0\cdot\infty],\ [1^{\infty}],\ [0^0],\ [\infty^0]$$

## Пример 2

Найти предел последовательности $x_n = \frac{2}{n} - \frac{5}{n^2} + 3$ при $n \to \infty$.

Решение:

$$\lim_{n\to\infty} \left( \frac{2}{n} - \frac{5}{n^2} + 3 \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} - \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n^2} + \lim_{n\to\infty} 3 = 0 + 0 + 3 = 3$$

*Ответ*: $3$.

## Пример 3

Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+3}{n^2+4}$.

Решение:

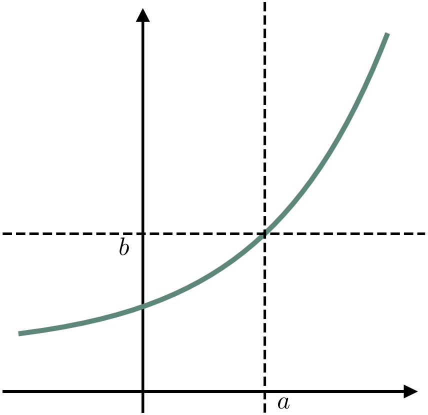
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3}{n^2+4} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2/n^2+3/n^2}{n^2/n^2+4/n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+3/n^2}{1+4/n^2} = \frac{2}{1} = 2$$

*Ответ*: 2.

# Предел функции

Пределы бывают:

- на бесконечности:
  1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$
  2. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$
  3. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = b$ $\left(\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b\right)$
- в конечной точке: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$



# Непрерывность

Функцию $y = f(x)$ называют непрерывной в точке $x = a$, если выполняется соотношение:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Функцию $y = f(x)$ называют непрерывной на промежутке $X$, если она непрерывна в каждой точке промежутка $X$.

Функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x = a$, если в этой точке выполняется следующее условие: если $\Delta x \to 0$, то $\Delta y \to 0$.

## Правило Лопиталя

Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ и $g'(x) \neq 0$. Тогда:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

## Пример 4

Вычислить $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$.

Решение:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = \left[\dfrac{0}{0}\right]$
2. По правилу Лопиталя:
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(e^x - 1)'}{x'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = e^0 = 1$$

*Ответ*: 1.

GeekBrains

# Спасибо за внимание