GeekBrains

Тригонометрические функции

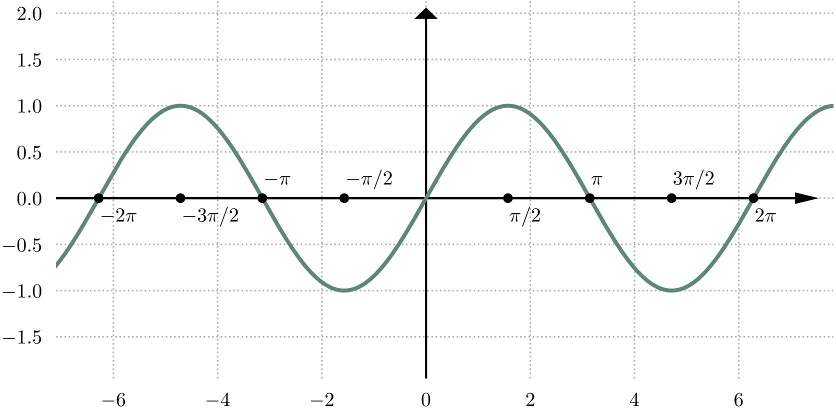
Базовая математика / Урок 5

В этом уроке

- Тригонометрические функции: свойства и их графики
- Формулы приведения
- Тригонометрические уравнения

Основные тригонометрические функции

$y = \sin(x)$



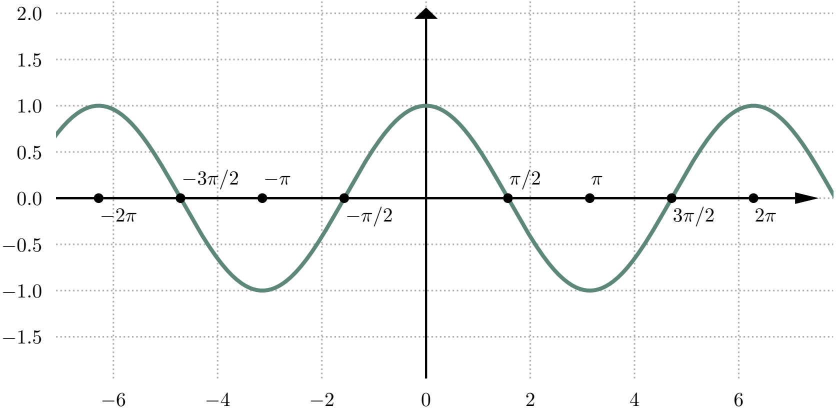
1. Область определения функции — множество всех действительных чисел: $D(y) = \mathbb{R}$.
2. Множество значений — интервал $[-1; 1]$: $E(y) = [-1; 1]$.
3. Функция $y = \sin(\alpha)$ — нечётная: $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$.
4. Функция периодическая, самый маленький неотрицательный период соответствует 2π: $\sin(\alpha + 2\pi) = \sin(\alpha)$.
5. График функции пересекает ось Ox при $\alpha = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Свойства синуса

6. Промежутки знакопостоянства: $y > 0$ при $\alpha \in (2\pi n; \pi + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$ и $y < 0$ при $\alpha \in (\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$.
7. Функция является непрерывной, и у нее есть производная с любым значением аргумента: $(\sin\alpha)' = \cos\alpha$.
8. Функция $y = \sin\alpha$ возрастает при $\alpha \in (-\pi/2 + 2\pi n; \pi/2 + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$, и убывает при $\alpha \in (\pi 2 + 2\pi n; 3\pi 2 + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$.
9. Минимум функции при $\alpha = -\pi/2 + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, а максимум при $\alpha = \pi/2 + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Основные тригонометрические функции

$y = \cos(x)$



Свойства косинуса

GeekBrains

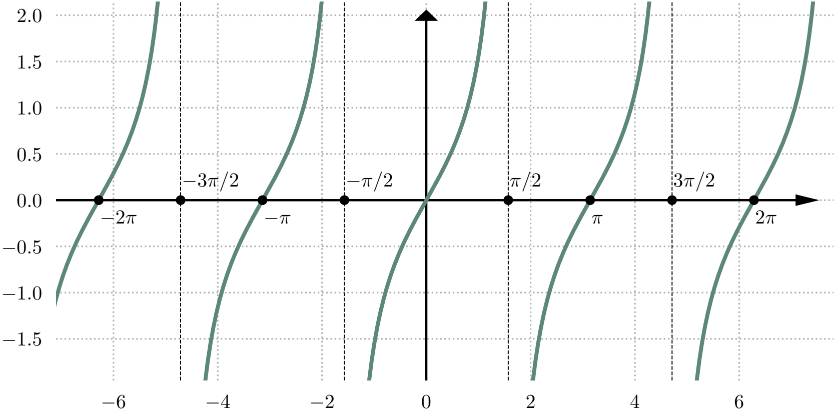
1. Область определения функции — множество всех действительных чисел: $D(y) = \mathbb{R}$.
2. Множество значений — интервал $[-1; 1]$: $E(y) = [-1; 1]$.
3. Функция $y = \cos(\alpha)$ — чётная: $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$.
4. Функция периодическая, самый маленький неотрицательный период соответствует 2π: $\cos(\alpha + 2\pi) = \cos(\alpha)$.
5. График функции пересекает ось Ox при $\alpha = \pi/2 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Свойства косинуса

6. Промежутки знакопостоянства: $y > 0$ при $\alpha \in (-\pi/2 + 2\pi n; \pi/2 + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$ и $y < 0$ при $\alpha \in (\pi/2 + 2\pi n; 3\pi/2 + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$.
7. Функция является непрерывной, у нее есть производная с любым значением аргумента: $(\cos\alpha)' = -\sin\alpha$.
8. Функция $y = \cos\alpha$ возрастает при $\alpha \in (-\pi + 2\pi n; 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$, и убывает при $\alpha \in (2\pi n; \pi + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$.
9. У функции есть минимум при $\alpha = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, а максимум при $\alpha = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Основные тригонометрические функции

$y = \operatorname{tg}(x)$

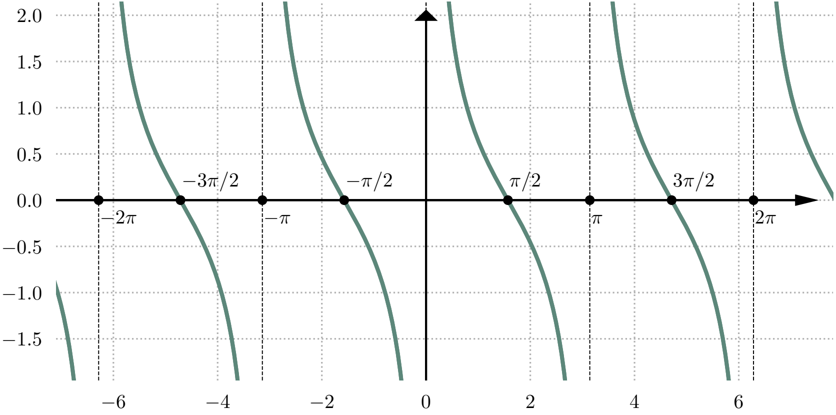


Свойства тангенса

1. Область определения функции — множество действительных чисел: $D(y) = R$, исключая числа $\alpha = \pi/2 + \pi n$.
2. Множество значений — множество действительных чисел: $E(y) = \mathbb{R}$.
3. Функция $y = \operatorname{tg}(\alpha)$ — нечётная: $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$.
4. Функция периодическая, самый маленький неотрицательный период соответствует π: $\operatorname{tg}(\alpha + \pi) = \operatorname{tg}(\alpha)$.

5. График функции пересекает ось Ox при $\alpha = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
6. Промежутки знакопостоянства: $y > 0$ при $\alpha \in (\pi n; \pi/2 + \pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$ и $y < 0$ при $\alpha \in (-\pi/2 + \pi n; \pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$.
7. Функция является непрерывной, есть производная с любым значением аргумента из области определения: $(\operatorname{tg} x)' = 1/\cos^2 x$.
8. Функция $y = \operatorname{tg} \alpha$ возрастает при $\alpha \in (-\pi/2 + \pi n; \pi/2 + \pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

$y = \operatorname{ctg}(x)$



Свойства котангенса

1. Область определения функции — множество действительных чисел: $D(y) = \mathbb{R}$, исключая числа $\alpha = \pi n$.
2. Множество значений — множество действительных чисел: $E(y) = \mathbb{R}$.
3. Функция $y = \operatorname{ctg}(\alpha)$ — нечётная: $\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$.
4. Функция периодическая, самый маленький неотрицательный период равен π: $\operatorname{ctg}(\alpha + \pi) = \operatorname{ctg}(\alpha)$.

Свойства котангенса

5. График функции пересекает ось Ox при $\alpha = \pi/2 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
6. Промежутки знакопостоянства: $y > 0$ при $\alpha \in (\pi n; \pi/2 + \pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$ и $y < 0$ при $\alpha \in (\pi/2 + \pi n; \pi(n+1))$, $n \in \mathbb{Z}$.
7. Функция является непрерывной, есть производная в любом значении аргумента из области определения: $(\operatorname{ctg} x)' = -1/\sin^2 x$.
8. Функция $y = \operatorname{ctg} \alpha$ убывает при $\alpha \in (\pi n; \pi(n+1))$, $n \in \mathbb{Z}$.

Тождества тригонометрических функций

1. $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$
2. $\operatorname{tg} t = \dfrac{\sin t}{\cos t},\ t \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k$
3. $\operatorname{ctg} t = \dfrac{\cos t}{\sin t},\ t \neq \pi k$
4. $\operatorname{tg} t \cdot \operatorname{ctg} t = 1,\ t \neq \dfrac{\pi k}{2}$
5. $1 + \operatorname{tg}^2 t = \dfrac{1}{\cos^2 t},\ t \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k$
6. $1 + \operatorname{ctg}^2 t = \dfrac{1}{\sin^2 t},\ t \neq \pi k$

Правило приведения

GeekBrains

- Для выражений $\pi + t$, $\pi - t$, $2\pi + t$, $2\pi - t$:
  - В приведенном выражении следует сохранить тригонометрическую функцию преобразуемого выражения.
  - Перед полученной функцией следует поставить тот знак, который имела бы преобразуемая функция при условии, что $0 < t < \pi/2$.
- Для выражений $\pi/2 + t$, $\pi/2 - t$, $3\pi/2 + t$, $3\pi/2 - t$:
  - В приведенном выражении следует изменить тригонометрическую функцию преобразуемого выражения на противоположную.
  - Перед полученной функцией следует поставить тот знак, который имела бы преобразуемая функция при условии, что $0 < t < \pi/2$.

Формулы приведения

$\cos(\pi+t) = -\cos t$	$\cos(2\pi+t) = \cos t$	$\cos(\pi/2+t) = -\sin t$	$\cos(3\pi/2+t) = \sin t$
$\sin(\pi+t) = -\sin t$	$\sin(2\pi+t) = \sin t$	$\sin(\pi/2+t) = \cos t$	$\sin(3\pi/2+t) = -\cos t$
$\operatorname{tg}(\pi+t) = \operatorname{tg} t$	$\operatorname{tg}(2\pi+t) = \operatorname{tg} t$	$\operatorname{tg}(\pi/2+t) = -\operatorname{ctg} t$	$\operatorname{tg}(3\pi/2+t) = -\operatorname{ctg} t$
$\operatorname{ctg}(\pi+t) = \operatorname{ctg} t$	$\operatorname{ctg}(2\pi+t) = \operatorname{ctg} t$	$\operatorname{ctg}(\pi/2+t) = -\operatorname{tg} t$	$\operatorname{ctg}(3\pi/2+t) = -\operatorname{tg} t$
$\cos(\pi-t) = -\cos t$	$\cos(2\pi-t) = \cos t$	$\cos(\pi/2-t) = \sin t$	$\cos(3\pi/2-t) = -\sin t$
$\sin(\pi-t) = \sin t$	$\sin(2\pi-t) = -\sin t$	$\sin(\pi/2-t) = \cos t$	$\sin(3\pi/2-t) = -\cos t$
$\operatorname{tg}(\pi-t) = -\operatorname{tg} t$	$\operatorname{tg}(2\pi-t) = -\operatorname{tg} t$	$\operatorname{tg}(\pi/2-t) = \operatorname{ctg} t$	$\operatorname{tg}(3\pi/2-t) = \operatorname{ctg} t$
$\operatorname{ctg}(\pi-t) = -\operatorname{ctg} t$	$\operatorname{ctg}(2\pi-t) = -\operatorname{ctg} t$	$\operatorname{ctg}(\pi/2-t) = \operatorname{tg} t$	$\operatorname{ctg}(3\pi/2-t) = \operatorname{tg} t$

Пример 1

Найти область определения функции $y = \sin 3x + \operatorname{tg} 2x$.

Решение:

- Выражение $\sin 3x$ имеет смысл при любом значении x.
- Выражение $\operatorname{tg} 2x$ — при $2x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, т.е. $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

1. $\sin x = a$ при $|a| \leq 1 \Leftrightarrow x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.
2. $\cos x = a$ при $|a| \leq 1 \Leftrightarrow x = \pm \arccos a + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.
3. $\operatorname{tg} x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.
4. $\operatorname{ctg} x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Пример 2

Решите уравнение: $2\cos^2 x + 5\sin x = 5$.

Решение:

1. $2(1 - \sin^2 x) + 5\sin x = 5$
2. $2\sin^2 x - 5\sin x + 3 = 0$
3. $\sin x = t \Rightarrow 2t^2 - 5t + 3 = 0$
4. $2t^2 - 5t + 3 = 0 \Rightarrow t_1 = 3/2,\ t_2 = 1$
5. $\sin x = 3/2$ невозможно, поэтому $\sin x = 1$

Ответ: $x = \pi/2 + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Пример 3

Решите уравнение: $\sin 2x = \cos x$.

Решение:

1. $2\sin x \cos x = \cos x$
2. $2\sin x \cos x - \cos x = 0$
3. $\cos x(2\sin x - 1) = 0$
4. $\cos x = 0$ **или** $2\sin x - 1 = 0$

Ответ:

$x_1 = \pi/2 + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

$x_2 = (-1)^n \pi/6 + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

GeekBrains

Пример 4

Решите уравнение: $\sin^2 x + 2\sin x \cos x - 3\cos^2 x = 0$.

Решение:

1. Разделим обе части уравнения на $\cos^2 x$: $\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x - 3 = 0$
2. $\operatorname{tg} x = t \Rightarrow t^2 + 2t - 3 = 0$
3. $t^2 + 2t - 3 = 0 \Rightarrow t_1 = -3,\ t_2 = 1$
4. $\operatorname{tg} x = -3 \Rightarrow x_1 = \operatorname{arctg}(-3) + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$
5. $\operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow x_2 = \pi/4 + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

Ответ:

$x_1 = \operatorname{arctg}(-3) + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

$x_2 = \pi/4 + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

Введение дополнительного угла

Пример 5

Решите уравнение: $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 2$.

Решение:

1. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \dfrac{1}{2}\cos x = 1$
2. $\cos\dfrac{\pi}{6}\sin x + \sin\dfrac{\pi}{6}\cos x = 1$
3. $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) = 1 \Rightarrow x + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$
4. $x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

Ответ: $x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

GeekBrains

Спасибо за внимание