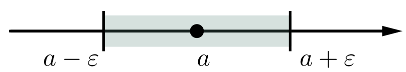
Базовая математика

Урок 13. Пределы

Предел последовательности

Определение 1. Пусть a — точка на прямой, $\varepsilon > 0$. Тогда интервал $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ называют *окрестностью* точки a.

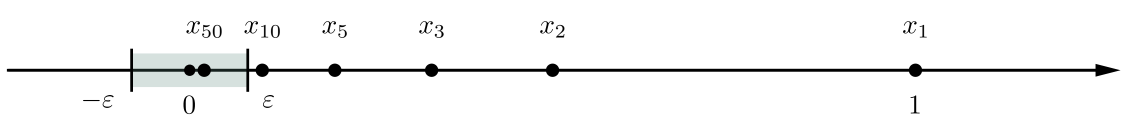


Пример 1. Рассмотрим последовательность:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

Возьмём произвольную окрестность точки 0: $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Каким бы маленьким ни было число ε, всегда можно подобрать такое n_0, чтобы для любого $n > n_0$ число x_n лежало в этой окрестности:

$$n_0 = 1/\varepsilon \Rightarrow x_n \in (-\varepsilon, \varepsilon) \text{ для всех } n > n_0$$



Говорят, что *предел последовательности* $\{1/n\}$ равен 0.

Определение 2. Число a называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $n_0 \in \mathbb{N}$, такое, что для всех $n > n_0$ верно:

$$|x_n - a| < \varepsilon \text{ или } a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$

Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} = a$ или $x_n \to a$.

Последовательность, имеющая конечный предел, называется *сходящейся*, в противном случае — *расходящейся*.

Основные свойства пределов последовательностей.

1. Если последовательность сходится, то только к одному пределу.
2. Если последовательность сходится, то она ограничена.

3. *Теорема Вейерштрасса*: если последовательность монотонна и ограничена, то она сходится.
4. Постоянный множитель c можно выносить за знак предела:

$$\lim_{n\to\infty}(c\cdot y_n) = c\cdot\lim_{n\to\infty} y_n$$

5. Если существуют конечные пределы последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, то:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} \text{ при условии, что } \lim_{n\to\infty} y_n \neq 0$$

6. Если существуют конечные пределы последовательностей $\{y_n\}$ и $\{y_n^p\}$, то

$$\lim_{n\to\infty} y_n^p = \left(\lim_{n\to\infty} y_n\right)^p$$

Формулы вычисления пределов последовательностей.

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, если $|q| < 1$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} C = C$, если $C = const$
4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{k}{n^m} = 0$

При вычислении пределов часто появляются выражения, значение которых не определено. Такие выражения называют *неопределенностями*. Пример:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+n}{1+n^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

Другие неопределённости:

$$\left[\frac{0}{0}\right],\ \left[\frac{\infty}{\infty}\right],\ [0\cdot\infty],\ [1^\infty],\ [0^0],\ [\infty^0]$$

Избавиться от неопределённостей часто можно путём упрощения функций. Например, можно разложить что-нибудь на множители, преобразовать что-нибудь с помощью формул сокращённого умножения или тригонометрических формул, домножить на сопряжённое и др.

Если предел при раскрытии неопределенности существует, то говорят, что функция *сходится* к указанному значению, если такого предела не существует, то говорят, что функция *расходится*.

Пример 2. Найти предел последовательности $x_n = \dfrac{2}{n} - \dfrac{5}{n^2} + 3$ при $n \to \infty$.

Решение. С помощью правила предела суммы получаем:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n} - \frac{5}{n^2} + 3\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n} - \lim_{n\to\infty}\frac{5}{n^2} + \lim_{n\to\infty} 3 = 0 + 0 + 3 = 3$$

Ответ: 3.

Пример 3. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+3}{n^2+4}$.

Решение. Имеем неопределённость вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. В подобных случаях применяют искусственный приём: делят числитель и знаменатель дроби почленно на наивысшую из имеющихся степеней переменной n. В данном примере разделим числитель и знаменатель дроби почленно на n^2. Получим:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3}{n^2+4} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2/n^2+3/n^2}{n^2/n^2+4/n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+3/n^2}{1+4/n^2} = \frac{2}{1} = 2$$

Ответ: 2.

Предел функции

Понятие предела функции является обобщением понятия предела последовательности, так как предел последовательности можно рассматривать как предел функции $x_n = f(n)$ целочисленного аргумента n.

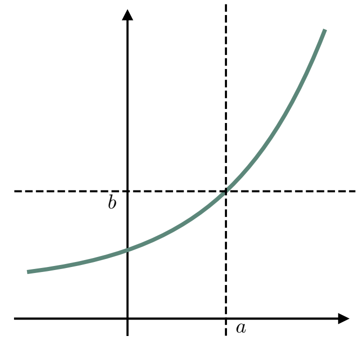
Рассмотрим несколько видов записи предела функции на бесконечности:

1. Дана функция $y = f(x)$, в области определения которой содержится луч $[a; +\infty)$, и пусть прямая $y = b$ является горизонтальной асимптотой графика функции $y = f(x)$. В этом случае используется запись:
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$$
(читают: предел функции $y = f(x)$ при стремлении x к плюс-бесконечности равен b).
2. Если дана функция $y = f(x)$, в области определения которой содержится луч $(-\infty; a]$, и прямая $y = b$ является горизонтальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, то в этом случае используется запись:
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$$
(читают: предел функции $y = f(x)$ при стремлении x к минус-бесконечности равен b).
3. Если одновременно выполняются соотношения $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$, то можно объединить их одной записью:
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = b$$
Но обычно используют более экономную запись:
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b$$
(читают: предел функции $y = f(x)$ при стремлении x к бесконечности равен b). В этом случае прямая $y = b$ является горизонтальной асимптотой графика функции $y = f(x)$ как бы с двух сторон.

Рассмотрим функцию, график которой изображён на рисунке справа. Для заданного случая предел функции $y = f(x)$ при стремлении x к a равен b. Обозначение: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.

Содержательный смысл приведённой выше записи заключается в следующем: если значения аргумента выбираются всё ближе и ближе к значению $x = a$, то значения функции всё меньше и меньше отличаются от предельного значения b.

Вычисление предела функции на бесконечности осуществляется по тем же правилам, что и вычисление предела последовательности.



Определение 3. Функцию $y = f(x)$ называют *непрерывной* в точке $x = a$, если выполняется соотношение:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Иными словами, функцию $y = f(x)$ называют непрерывной в точке $x = a$, если предел функции $y = f(x)$ при стремлении x к a равен значению функции в точке $x = a$.

Определение 4. Функцию $y = f(x)$ называют *непрерывной на промежутке* X, если она непрерывна в каждой точке промежутка X.

Функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x = a$, если в окрестности этой точки выполняется следующее условие: если $\Delta x \to 0$, то $\Delta y \to 0$. Иными словами, функция непрерывна в точке a, если в окрестности этой точки малые изменения значения x приводят к малым изменениям значений функции $y = f(x)$.

Теорема (Правило Лопиталя)**.** Допустим, что функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и имеют производные в некоторой окрестности точки a (за исключением, может быть, самой точки a), к тому же $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ и $g'(x) \neq 0$. Если существует предел (конечный или бесконечный) отношения производных $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то справедливо следующее равенство:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Правило Лопиталя подходит для раскрытия неопределённостей вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ и $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Пример 4. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$.

Решение. Имеет место неопределённость вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Воспользуемся правилом Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(e^x - 1)'}{x'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = e^0 = 1$$

Ответ: 1.

Домашнее задание

1. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^{n+1} + 2 \cdot 4^n}{4^{n+1} - 5}$.
2. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$.
3. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{2x - 2}$.