Логарифмы и их свойства

Базовая математика / Урок 11

В этом уроке

- Понятие логарифма. Основные свойства логарифмической функции
- График и основные свойства логарифмической функции
- Решение логарифмический уравнений

Определение логарифма

Логарифм b по основанию a:

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b,$$

где $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$.

Логарифм b по основанию a:

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b,$$

где $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$.

Основное логарифмическое тождество:

$$a^{\log_a b} = b$$

Пример 1

Найти x: $\log_8 x = 2$.

Решение:

По определению логарифма: $8^2 = x \Rightarrow x = 64$.

Ответ: 64.

Основные свойства логарифма

1. $\log_a(1) = 0$
2. $\log_a(a) = 1$
3. $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(x)$
4. $\log_a(x/y) = \log_a(x) - \log_a(y)$
5. $\log_a(x^p) = p \cdot \log_a(x)$

Формула перехода к новому основанию

Формула перехода к новому основанию:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

для $x, a, b > 0$, $a, b \neq 1$.

Определения

Логарифмы основанием которых является число 10, называются десятичными логарифмами. Их обозначают $\lg b$.

Логарифмы, основанием которых является число e, называются натуральными логарифмами. Обозначаются $\ln b$.

1. $\lg 2 + \lg 5 = \lg(2 \cdot 5) = \lg 10 = 1$
2. $\log_{23} 46 - \log_{23} 2 = \log_{23} 23 = 1$
3. $\log_2 2^{1/7} = 1/7 \cdot log_2 2 = 1/7 \cdot 1 = 1/7$

Логарифмическая функция

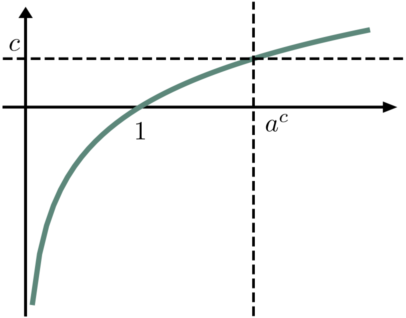
$$f(x) = \log_a x$$

Основные свойства:

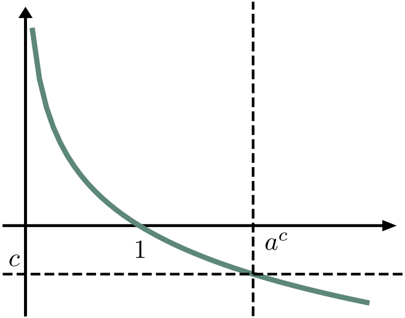
1. $D(f) = (0; +\infty)$; $E(f) = (\infty; +\infty)$.
2. $f(x)$ возрастает при $a > 1$; $f(x)$ убывает при $0 < a < 1$.
3. График логарифмической функции всегда проходит через точку $(1; 0)$.
4. Функция не является четной или нечетной.
5. Функция не имеет точек максимума и минимума.

Логарифмическая функция

$a > 1$



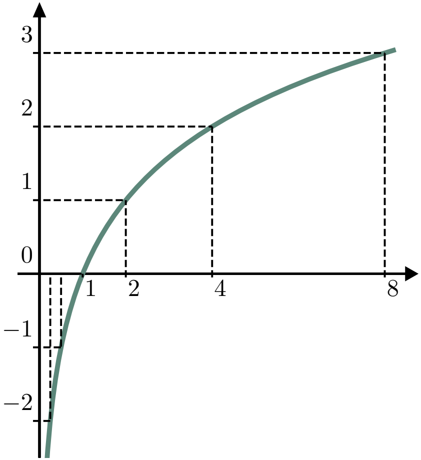
$a < 1$



Пример 3

Построим функцию $y = \log_2 x$.

x	$1/4$	$1/2$	1	2	4	8
y	-2	-1	0	1	2	3



$$\log_a x = b, \text{ где } a, x > 0,\ a \neq 1$$

$$\log_a x = b, \text{ где } a, x > 0, \ a \neq 1$$

Пример 4

Решить уравнение $\log_2 x = 3$.

Решение:

1. ОДЗ: $x > 0$
2. $\log_2 x = 3 \Rightarrow x = 2^3 = 8$

Ответ: 8.

Логарифмирование

Логарифмирование — переход от уравнения $f(x) = g(x)$ к уравнению

$$\log_a f(x) = \log_a g(x)$$

Логарифмирование

Логарифмирование — переход от уравнения $f(x) = g(x)$ к уравнению

$$\log_a f(x) = \log_a g(x)$$

Пример 5

Решить уравнение $2^x = 3$.

Решение:

1. $\log_2(2^x) = \log_2 3$
2. $x \cdot \log_2 2 = \log_2 3$
3. $x = \log_2 3$

Ответ: $\log_2 3$.

Пример 6

Решить уравнение $2\log_4^2 x - 5\log_4 x = -2$.

Решение:

1. Обозначим $\log_4 x = t$.
2. $2t^2 - 5t + 2 = 0 \Rightarrow t_1 = 1/2;\ t_2 = 2$
3. Вернемся к замене: $x = 4^t$.
4. $x_1 = 4^{1/2} = 2;\ x_2 = 4^2 = 16$
5. Оба корня принадлежат ОДЗ: $x > 0$.

Ответ: $2,\ 16$.

GeekBrains

Спасибо за внимание