GeekBrains

Основы высшей математики

Вспомним школьную математику, познакомимся с концептами аналитической геометрии и статистики

Карина Боровлёва

Научный сотрудник, Институт физики Земли им. О. Ю. Шмидта РАН

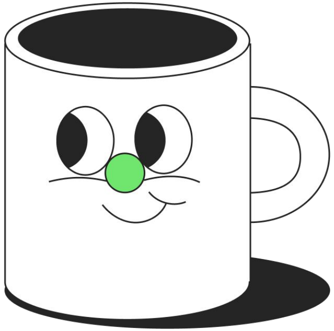
Специалист в теоретической физике и высшей математике
с прикладным опытом. Применяла знания в индустрии,
в лабораториях, призёр профильных турниров.

💥 International Physicists' Tournament:
- – Paris 2016 – 3 место
- – Gothenburg 2017 – 5 место, приз «Лучший докладчик»
- – Moscow 2018 – 4 место

💥 Всероссийский Студенческий Турнир Физиков:
- – 2015 – 3 место
- – 2016 – 2 место, приз «Лучший докладчик»
- – 2017 – 1 место, приз «Лучший докладчик»

Что будет на уроке сегодня

- 📌 Школьная математика
- 📌 Математический анализ
- 📌 Линейная алгебра
- 📌 Аналитическая геометрия
- 📌 Статистика



Зачем нужна математика? И какая?

Самые важные разделы:

- Линейная алгебра
- Теория вероятностей и математическая статистика
- Математический анализ и методы оптимизации
- Временные ряды

$$c_y = \frac{\sum_{j \in Region} G(j) \cdot y(j)}{\sum_{j \in Region} G(j)} \tag{3b}$$

where $G(j)$ is the gradient magnitude of pixel j and the index j runs over the pixels in the region; $x(j)$ and $y(j)$ are image pixel in the X and Y directions, respectively. The main rectangle's angle is set to the angle of the eigenvector associated with the smallest eigenvalue of the matrix, namely,

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} M^{xx} & M^{xy} \\ M^{yx} & M^{yy} \end{pmatrix} \tag{4}$$

where $M^{xx} = \frac{\sum_{j \in Region} G(j) \cdot (x(j) - C_x)^2}{\sum_{j \in Region} G(j)}$; $M^{xy} = M^{yx} = \frac{\sum_{j \in Region} G(j) \cdot (x(j) - C_x)(y(j) - C_y)}{\sum_{j \in Region} G(j)}$; $M^{yy} = \frac{\sum_{j \in Region} G(j) \cdot (y(j) - C_y)^2}{\sum_{j \in Region} G(j)}$.

The next step is to validate the correctness of a rectangle, which can be determined by the number of false alarms (NFAs) associated with the rectangle.

$$NFA = \left(m_{row} n_{col}\right)^{5/2} \gamma \cdot \sum_{j=k}^{n} (nj)\,(p)^j (1-p)^{n-j} \tag{5}$$

where n_{col} and m_{row} are the number of columns and rows of processing image; the maximum width of the rectangle is $\sqrt{m_{row} n_{col}}$, then the possible number of rectangles equals to $(m_{row} n_{col})^{5/2}$; $p = \tau/\pi, \tau$ is the angle tolerance and set to 22.5° or $\pi/8$ in this algorithm; the term γ is used to reflect the number of different p values potentially tried, in which each rectangle with each p value is a different test; $\binom{n}{j} = \frac{(n+1)!}{(j+1)!(n-j+1)!}$, n stands for the total number of image pixels inside the rectangle and j represents the number of p-aligned points inside the rectangle.

The first step of line segments matching algorithm is to select cable edges for following cable displacements calculation. In general, lengths of detected cable edges are longer than those of other line segments, hence cable edges can be selected by sorting all line segments.

The next step is to adjust the orientation of detected line segments according to the orientation vector. For the left line segment, $\boldsymbol{L}_1^k$, coordinates of two ends of the single line segment can be expressed as $\boldsymbol{P}_{11}^k(u_{11}^k, v_{11}^k)$ and $\boldsymbol{P}_{12}^k(u_{12}^k, v_{12}^k)$, then the orientation vector is defined as

$$\boldsymbol{e}_1^k = \begin{cases} 1 & v_{11}^k - v_{12}^k > 0 \\ -1 & v_{11}^k - v_{12}^k < 0 \end{cases} \tag{6}$$

where $\boldsymbol{e}_1^k$ is the orientation vector of the left cable edge $\boldsymbol{L}_1^k$ at frame k; the same operation can be employed for other line segments and orientation vector of all line segments are computed. If the orientation vector at frame, $\boldsymbol{e}_1^k$, is different than that of reference frame, $\boldsymbol{e}_1^0$, coordinates at two ends of the line segment at frame k should be swapped.

$$\bar{\boldsymbol{P}}_{11}^k = \boldsymbol{P}_{12}^k, \bar{\boldsymbol{P}}_{21}^k = \boldsymbol{P}_{22}^k \quad \boldsymbol{e}_1^k \neq \boldsymbol{e}_1^0 \tag{7a}$$

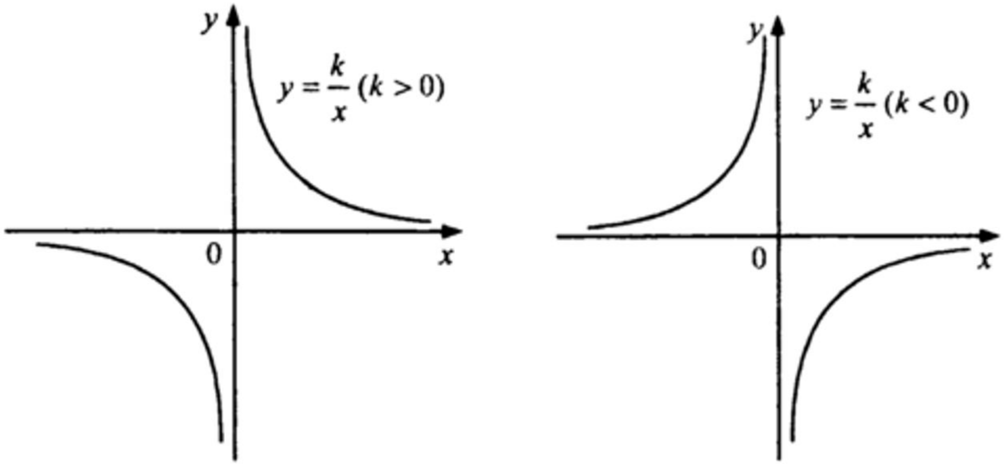
$$\bar{\boldsymbol{P}}_{21}^k = \boldsymbol{P}_{22}^k, \bar{\boldsymbol{P}}_{22}^k = \boldsymbol{P}_{21}^k \quad \boldsymbol{e}_1^k \neq \boldsymbol{e}_1^0 \tag{7b}$$

where $\bar{\boldsymbol{P}}_{11}^k$ stands for the upper coordinates vector of detected line segments of left cable edge after adjusting the orientation vector; $\boldsymbol{P}_{12}^k$ represents the lower coordinates vector of detected line segments of left cable edge by preliminary LSD algorithm; the definition of symbol is the same as other coordinates of cable edges.

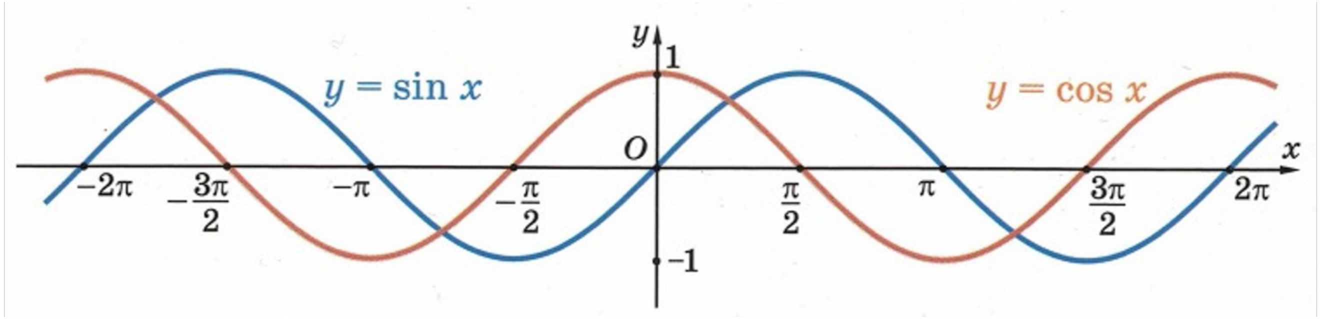
Школьная математика. Опять?

- Графики функций
- Решение уравнений и неравенств
- Логарифмы (для дифференцирования некоторых функций и вычисления пределов)
- Тригонометрические формулы
- Формулы сокращённого умножения
- ...

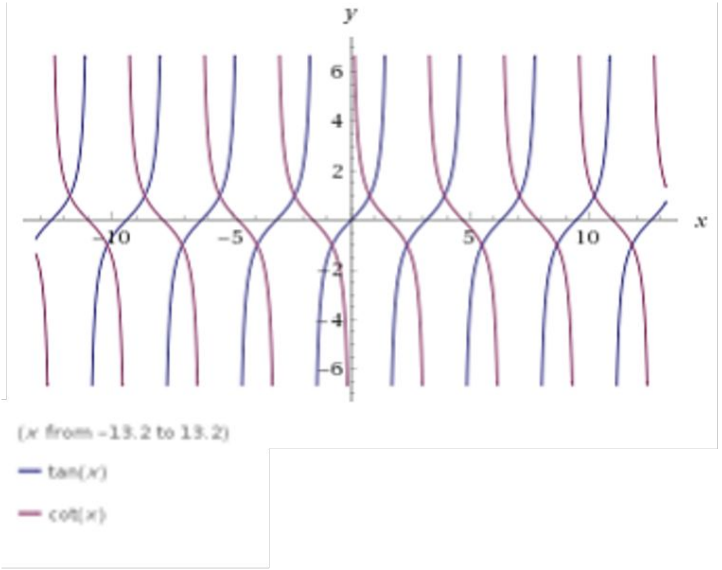
Гипербола: y = k/x

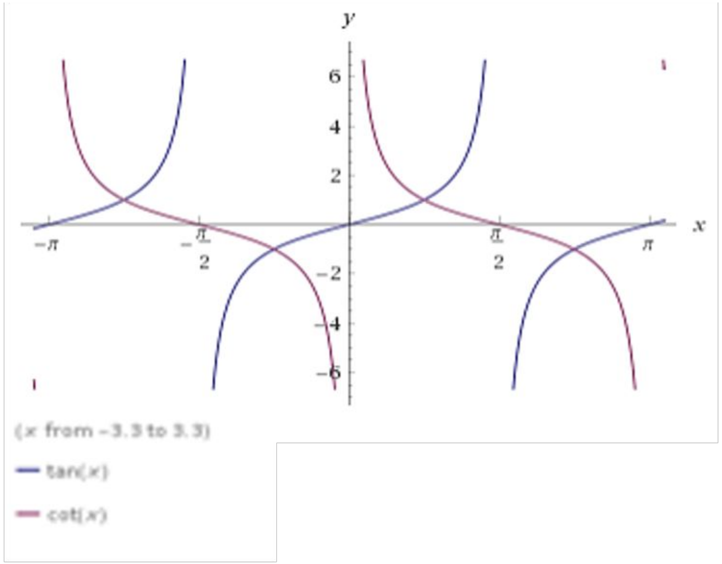


Синус и косинус: y=sin(x); y=cos(x)

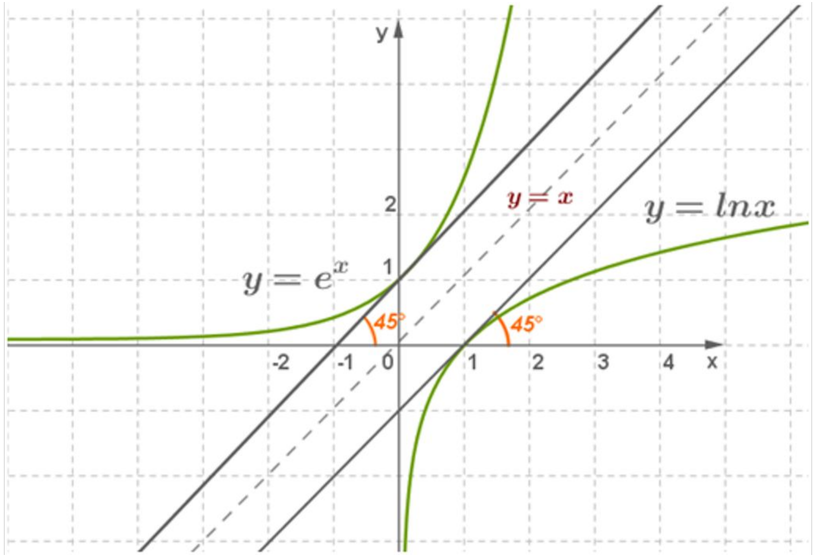


Тангенс и котангенс: y=tg(x); y=ctg(x)





Экспонента и логарифм



Решение квадратных уравнений

Дискриминант: $D = b^2 - 4ac$

D > 0 — два действительных корня

D = 0 — один действительный корень

D < 0 — нет действительных корней

Формула корней	**Свойства корней (теорема Виета)**
Квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$	
$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$

Метод выделения полного квадрата

1. $ax^2 + bx + c = 0$
2. $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$
3. $x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{c}{a} = 0$
4. $x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$
5. $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$
6. $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$
7. $\left[\begin{array}{l} x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{array}\right.$

1. $\boxed{x^2 + 8x - 33}$
2. $x^2 + 2x \cdot 4 - 33$

   $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
3. $x^2 + 2x \cdot 4 + 16 - 16 - 33$

   $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
4. $x^2 + 2x \cdot 4 + 16 - 16 - 33 = (x + 4)^2 - 49$
5. $(x + 4)^2 - 49 = 0$

   $(x + 4)^2 = 49$
6. $\left[\begin{array}{l} x + 4 = 7 \\ x + 4 = -7 \end{array}\right.$
7. $\left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -11 \end{array}\right.$

Свойства степеней

Основание должно быть одним и тем же, а показатели могут быть разными:

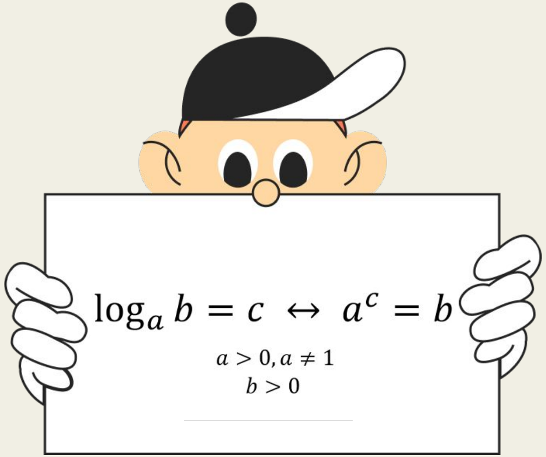
- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $(a^m)^n = a^{mn}$

Основания могут быть разными, а показатель должен быть одним и тем же:

- $(ab)^n = a^n \cdot b^n$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Наконец, $a^0 = 1$ при любом а

Логарифмы



$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

$$a^{\log_a b} = b$$

$$\log_a (xy) = \log_a |x| + \log_a |y|$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a |x| - \log_a |y|$$

$$\log_a x^n = n \log_a |x|$$

$$\log_{a^n} x = \frac{1}{n} \log_{|a|} x$$

$$\log_{a^n} x^n = \log_a x$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$$

$$a^0 = 1$$

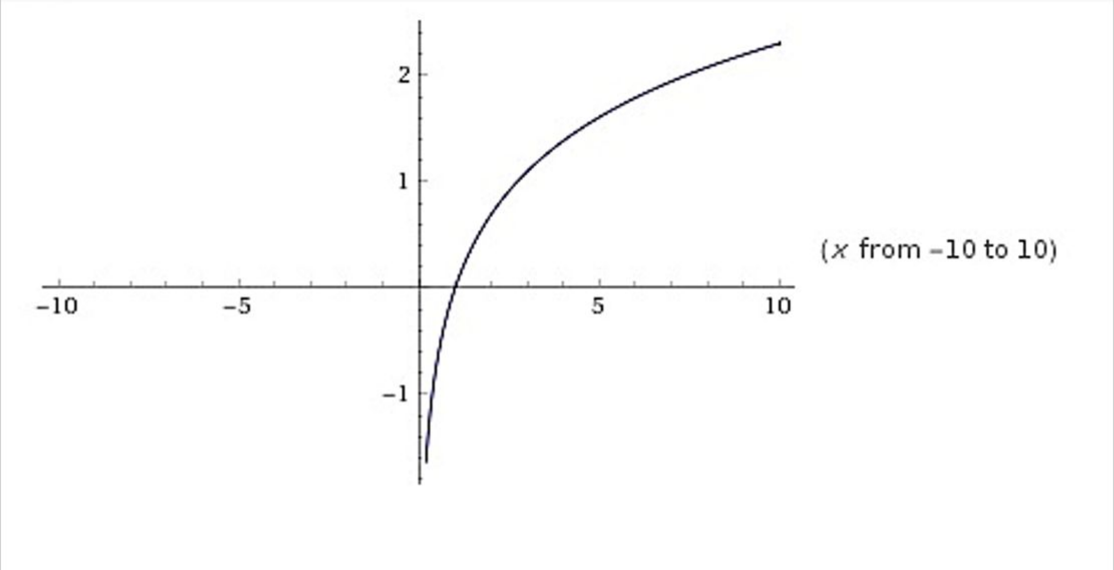
$$a^1 = a$$

$$a^{(b+c)} = a^b a^c$$

$$a^{(b-c)} = \frac{a^b}{a^c}$$

График y=ln(x),по которому видно, что логарифм может быть меньше или равен нулю

Область значений логарифма не ограничена



Логарифмы (пригодятся для вычисления пределов и логарифмического дифференцирования (производных))

$$y = x^x,\ x = 0$$

$$\ln y = \ln x^x$$

$$\ln y = \ln x^x,\ \Rightarrow \ln y = x \ln x$$

$$y = x^{\ln x}, x > 0$$

$$\ln y = \ln\left(x^{\ln x}\right)$$

$$\ln y = \ln\left(x^{\ln x}\right),\ \Rightarrow \ln y = \ln x \ln x = \ln^2 x$$

$$y = x^{\cos x}, x > 0$$

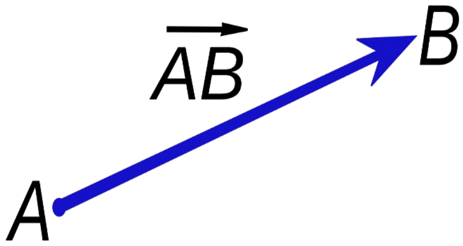
$$\ln y = \ln(x^{\cos x}),\ \Rightarrow \ln y = \cos x \ln x.$$

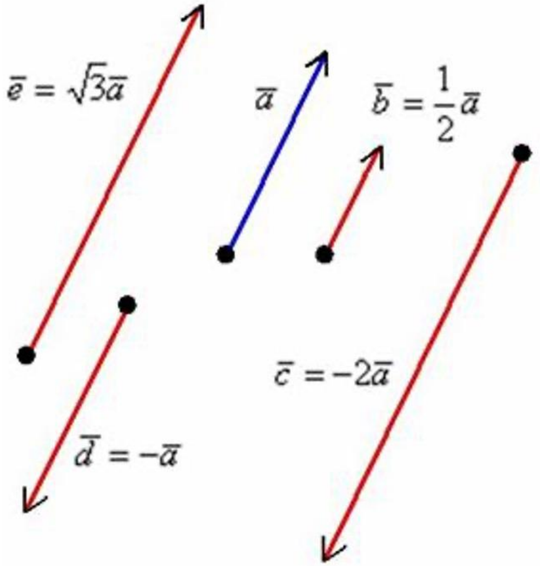
$$y = x^{x^x}\ (x > 0, x \neq 1)$$

$$\ln y = \ln\left(x^{x^x}\right), \Rightarrow \ln y = x^x \ln x$$

Аналитическая геометрия

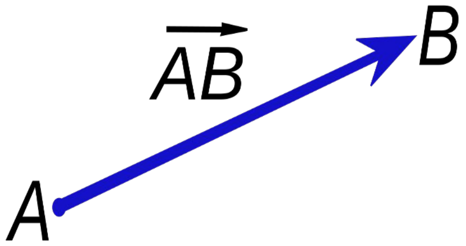
Вектор:

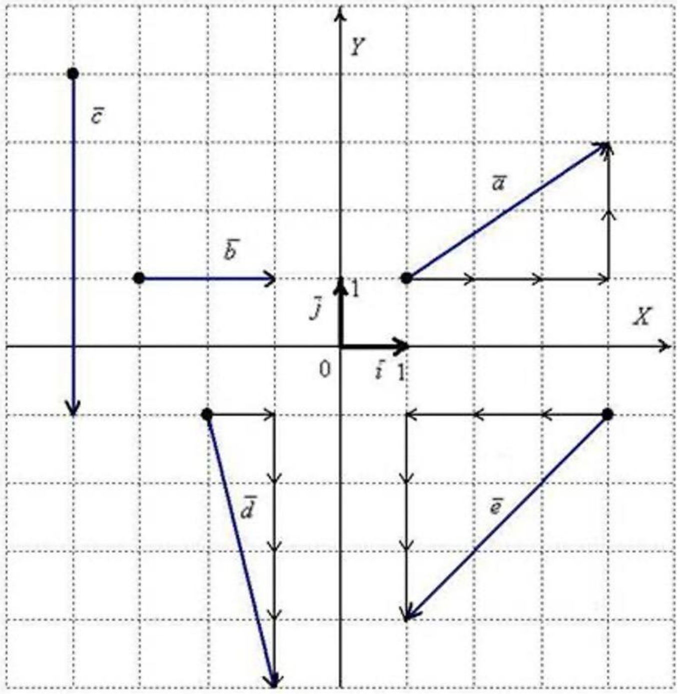




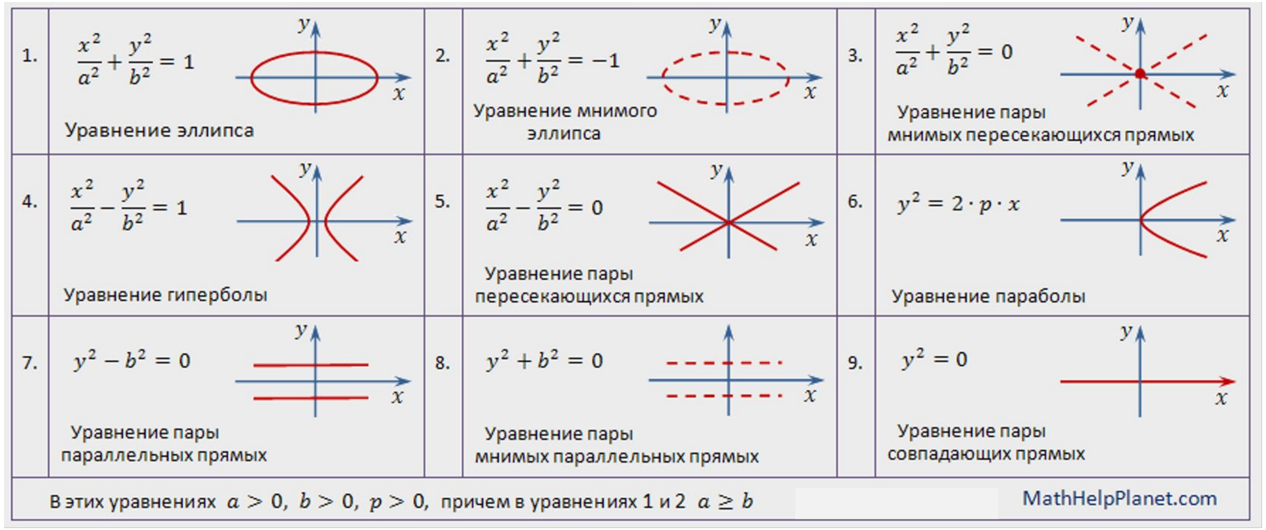
Аналитическая геометрия

Вектор:





Канонические уравнения линий второго порядка



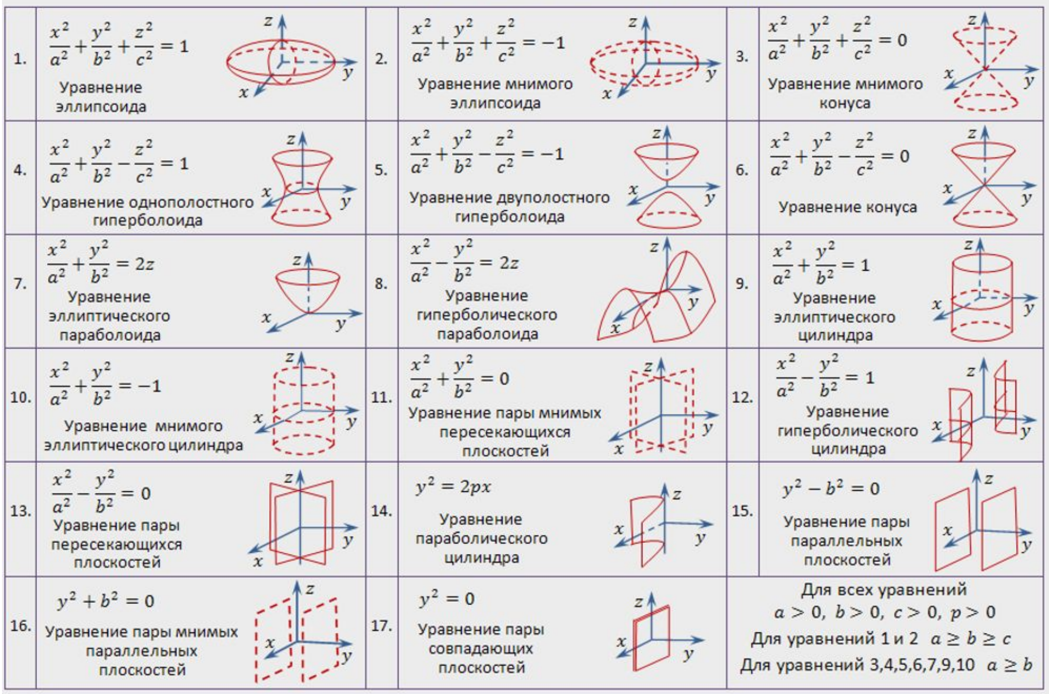
1.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ Уравнение эллипса	2.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ Уравнение мнимого эллипса	3.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ Уравнение пары мнимых пересекающихся прямых
4.	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ Уравнение гиперболы	5.	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ Уравнение пары пересекающихся прямых	6.	$y^2=2\cdot p\cdot x$ Уравнение параболы
7.	$y^2-b^2=0$ Уравнение пары параллельных прямых	8.	$y^2+b^2=0$ Уравнение пары мнимых параллельных прямых	9.	$y^2=0$ Уравнение пары совпадающих прямых

В этих уравнениях $a>0,\ b>0,\ p>0,$ причем в уравнениях 1 и 2 $a\geq b$

MathHelpPlanet.com

[Источник]

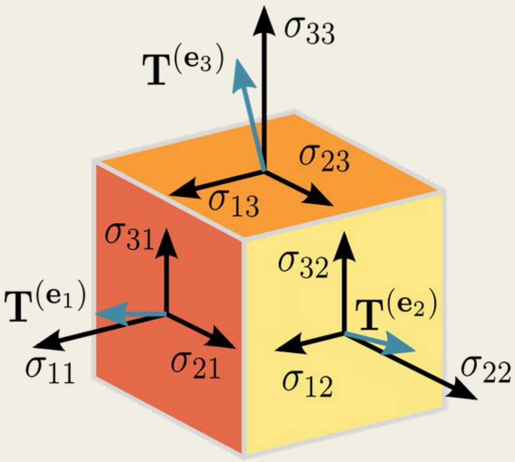
Канонические уравнения линий второго порядка. Классификация



1.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ Уравнение эллипсоида	2.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$ Уравнение мнимого эллипсоида	3.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$ Уравнение мнимого конуса
4.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ Уравнение однополостного гиперболоида	5.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ Уравнение двуполостного гиперболоида	6.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ Уравнение конуса
7.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$ Уравнение эллиптического параболоида	8.	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$ Уравнение гиперболического параболоида	9.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ Уравнение эллиптического цилиндра
10.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ Уравнение мнимого эллиптического цилиндра	11.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ Уравнение пары мнимых пересекающихся плоскостей	12.	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ Уравнение гиперболического цилиндра
13.	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ Уравнение пары пересекающихся плоскостей	14.	$y^2=2px$ Уравнение параболического цилиндра	15.	$y^2-b^2=0$ Уравнение пары параллельных плоскостей
16.	$y^2+b^2=0$ Уравнение пары мнимых параллельных плоскостей	17.	$y^2=0$ Уравнение пары совпадающих плоскостей		Для всех уравнений $a>0,\ b>0,\ c>0,\ p>0$ Для уравнений 1 и 2 $a\geq b\geq c$ Для уравнений 3,4,5,6,7,9,10 $a\geq b$

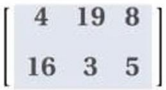
[Источник]

Линейная алгебра

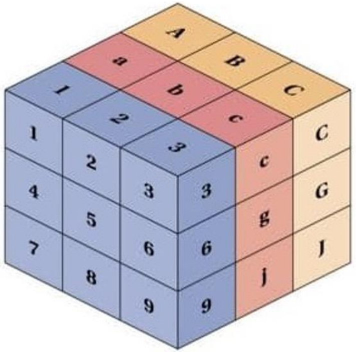


скаляр

вектор



матрица



тензор

Умножение матриц

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} + a_{14}b_{41}$$

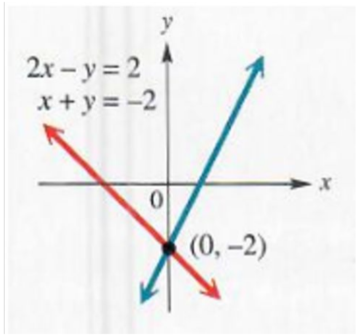
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix}$$

2 x 4 4 x 3 2 x 3

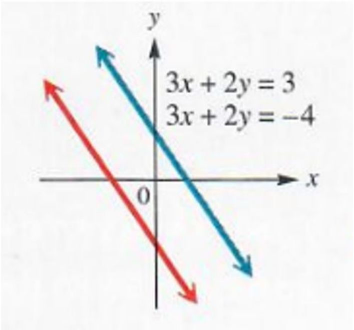
$$c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} + a_{24}b_{42}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix}$$

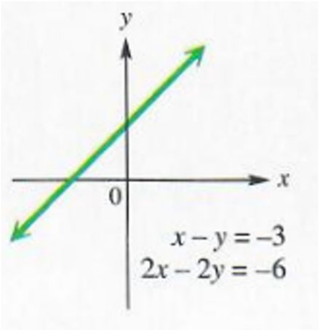
Связь между матрицами и уравнениями



Одно решение



Нет решения



Бесконечное количество решений

Теория вероятностей и математическая статистика

Орёл

Выпал орёл

Решка

Выпала решка

Равновозможные события (исходы)

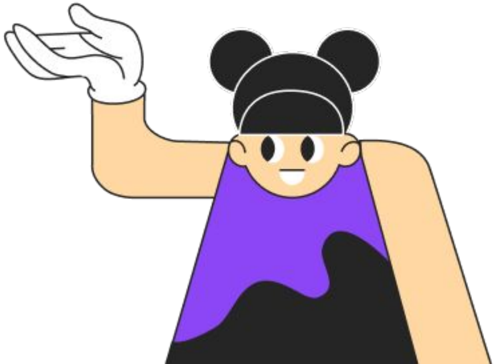
$$P = \frac{\text{число всех благоприятных исходов}}{\text{число всех возможных исходов}} = 1/2$$

Теория вероятностей и математическая статистика

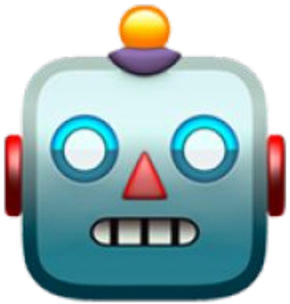
Котлета, котлета и ещё одна котлета

У вас есть 2 сковородки и 3 котлеты. На приготовление 1 котлеты с одной стороны уходит 1 минута. На одной сковороде помещается лишь 1 котлета.

Вопрос: за какое минимальное время вы сможете полностью обжарить все 3 котлеты?

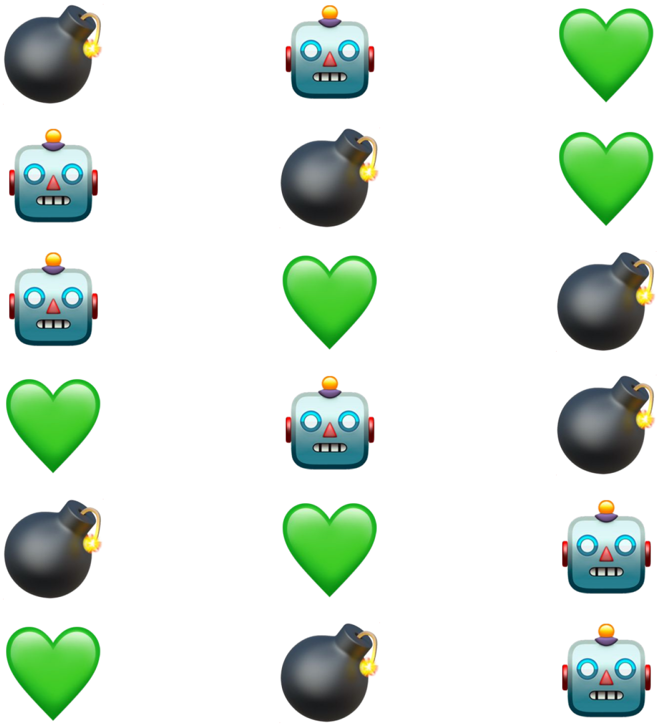


Комбинаторика



Комбинаторика

Итого: 6 комбинаций или 6 перестановок.



Комбинаторика

- **Формула количества перестановок** $P_n = n!$

Типичная смысловая нагрузка: «Сколькими способами можно переставить n объектов?»

- **Формула количества сочетаний:** $C_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!\cdot m!}$

Типичная смысловая нагрузка: «Сколькими способами можно выбрать m объектов из n?».

Поскольку выборка проводится из множества, состоящего из n объектов, то справедливо неравенство

- **Формула количества размещений:** $A_n^m = (n-m+1)\cdot\ldots\cdot(n-1)n$

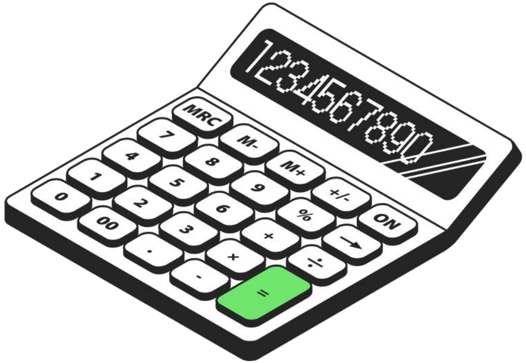
Типичная смысловая нагрузка: «Сколькими способами можно выбрать m объектов (из n объектов) **и в каждой** выборке переставить их местами (либо распределить между ними какие-нибудь уникальные атрибуты)»

Исходя из вышесказанного, справедлива следующая формула: $C_n^m \cdot P_m = A_n^m$

И в самом деле: $C_n^m \cdot P_m = \dfrac{n!}{(n-m)!\cdot m!}\cdot m! = \dfrac{n!}{(n-m)!} = \dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-m)(n-m+1)\cdot\ldots\cdot(n-1)n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-m)} = (n-m+1)\cdot\ldots\cdot(n-1)n = A_n^m$

Математический анализ и методы оптимизации

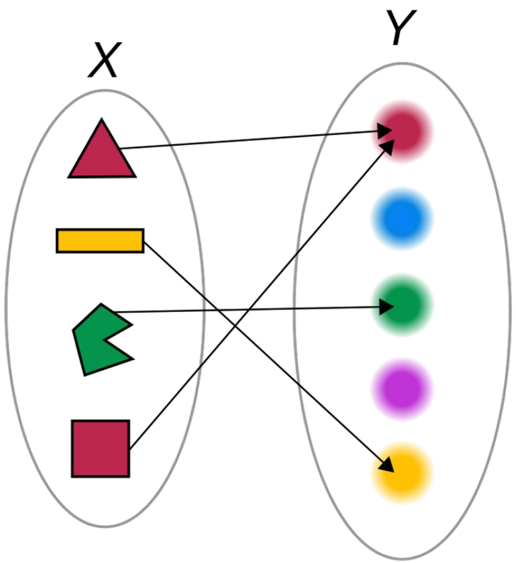
- Функции
- Пределы
- Производные
- Интегралы
- Дифференциальные уравнения
- Ряды



Функция

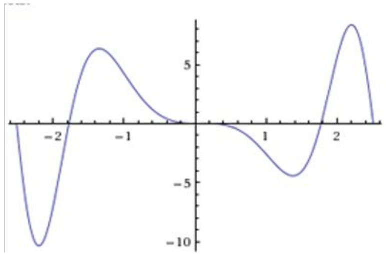
Пусть каждому числу *x* из некоторого множества *X* поставлено в соответствие одно и только одно число *y*. Тогда говорят, что на множестве *X* задана *функция.*

Обозначение: y=f(x)



Способы задания функции

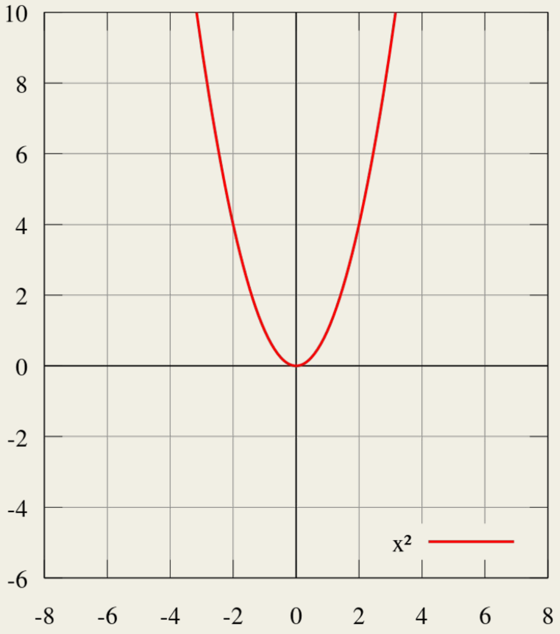
- Аналитический $y(t) = e^{-i\omega t}$
- Графический



- Табличный

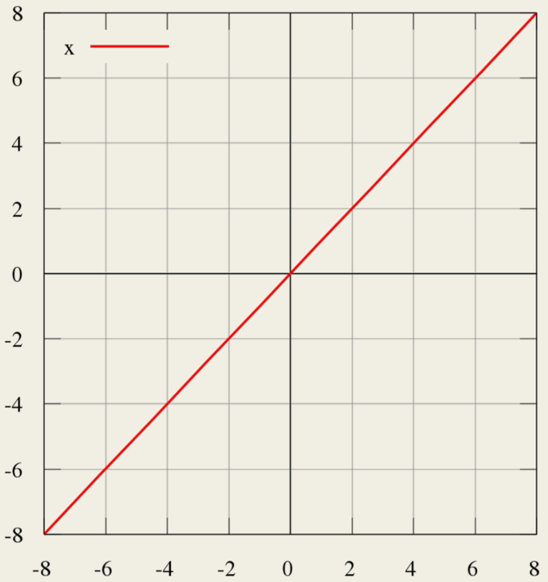
x	-2	-1	0	1	2	4
y	-3	-2	0	2	4	5

Пример чётной функции



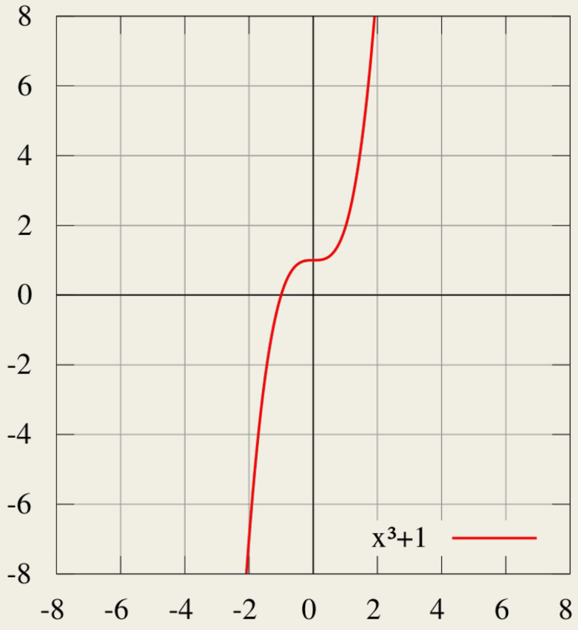
$$f(x) = x^2$$

Пример нечётной функции



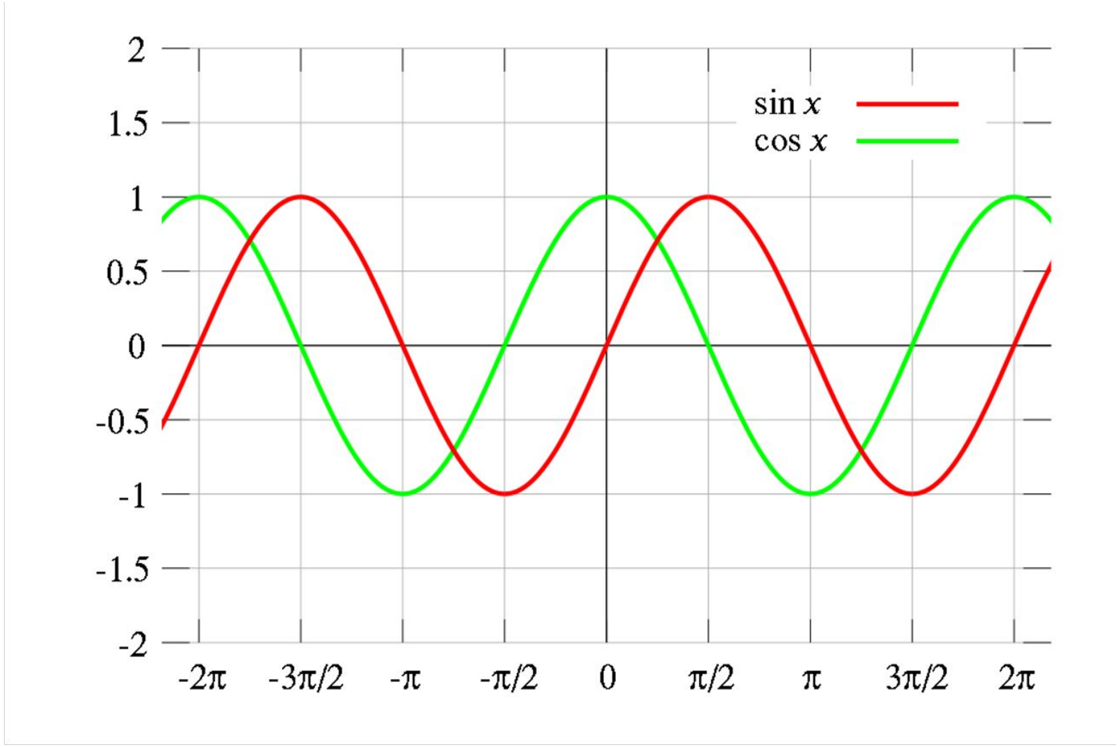
$$f(x) = x$$

Ни чётная, ни нечётная



$$f(x) = x^3 + 1$$

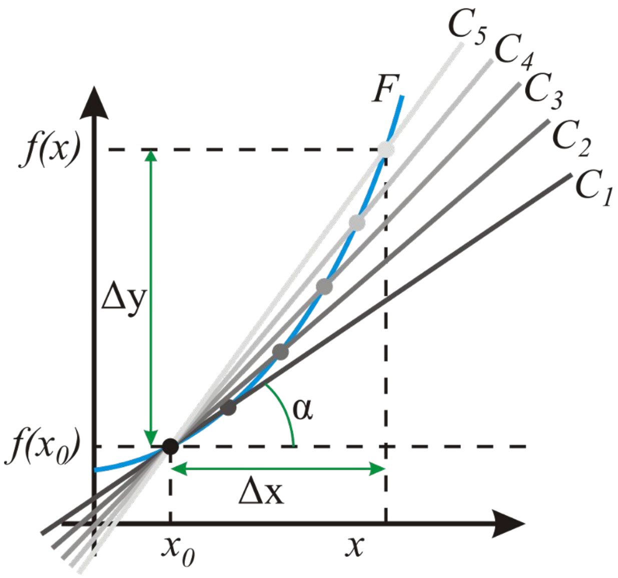
Графики синуса и косинуса — периодических функций с периодом (T=2π)



Способы задания функции

Явный	$y = f(x)$
Неявный	$F(x; y) = 0$
Параметрический	$x = x(t)$ $y = y(t)$

Производная функции



Практическое задание

1. Выделите полный квадрат:

   $x_2 + 4x + 6$

   $x^2 + 9$

2. Упростите выражение, используя логарифмирование:

   $y = x^{\sin x}, \qquad x > 0$

3. Определите вид функции (чётная / нечётная / общего вида):

   $y = 3x + x^3$

   $y = 4^x + 4^{-x}$

   $y = (x - 1)^3$

Вопросы?

Вопросы?

Вопросы?