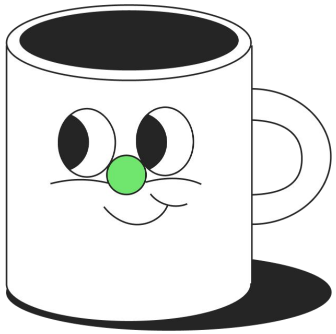
GeekBrains

Линейная алгебра

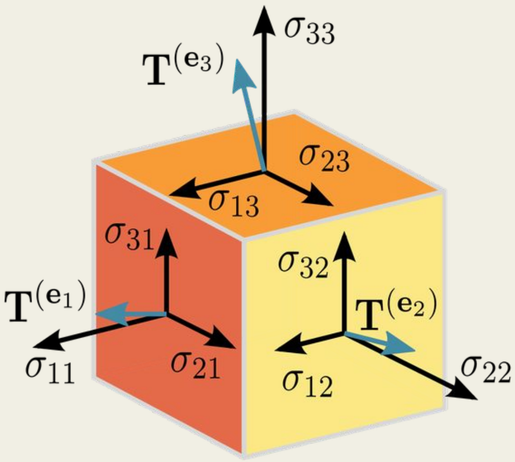
Поработаем с векторами и матрицами

Что будет на уроке сегодня

- 📌 Векторы
- 📌 Матрицы
- 📌 Транспонирование матрицы
- 📌 Обратная матрица
- 📌 Определитель матрицы



Линейная алгебра



(11)

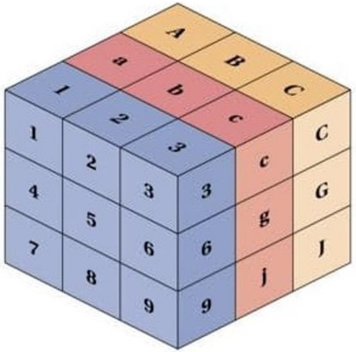
скаляр

5	3	7

вектор

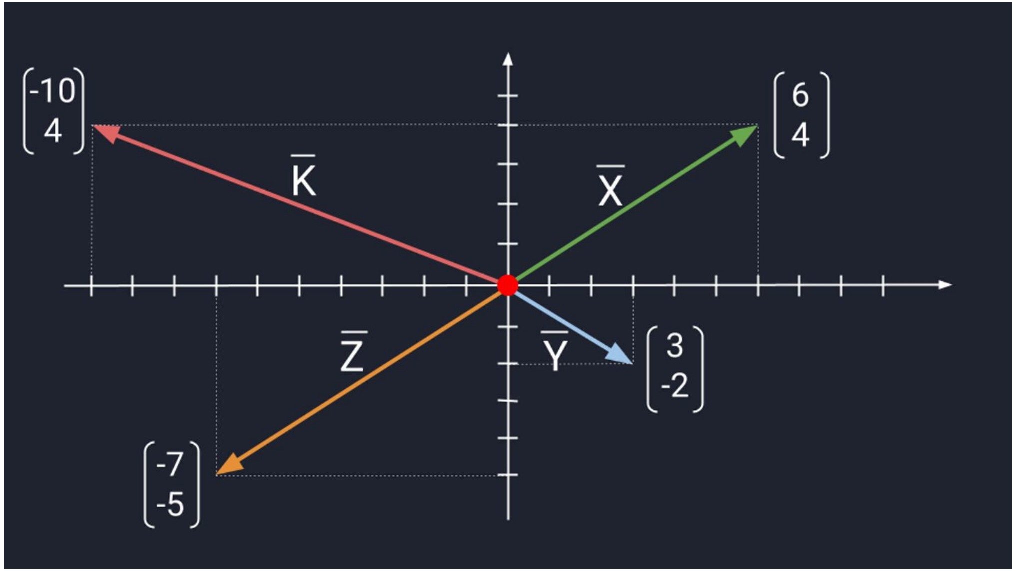
$$\begin{bmatrix} 4 & 19 & 8 \\ 16 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

матрица

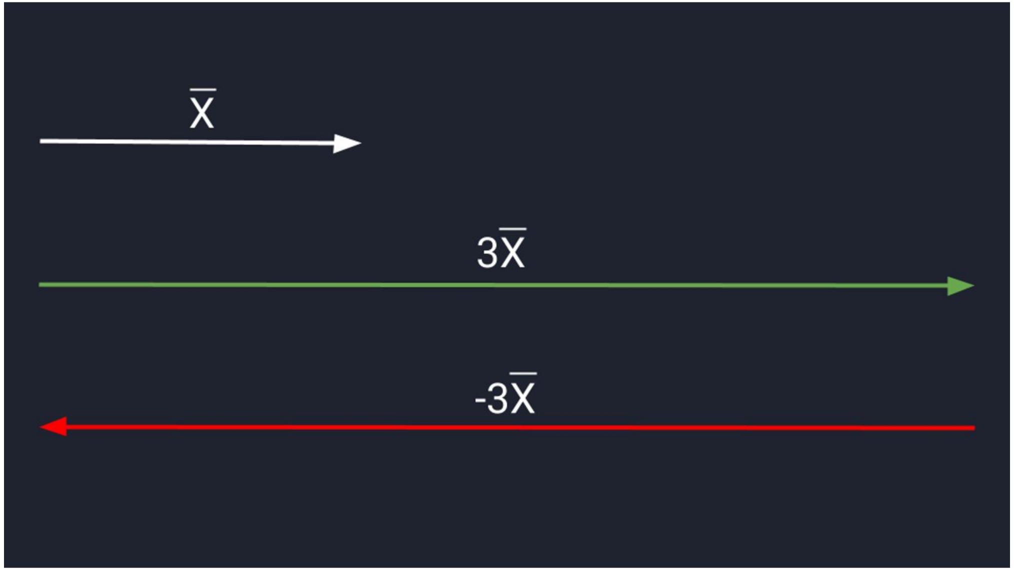


тензор

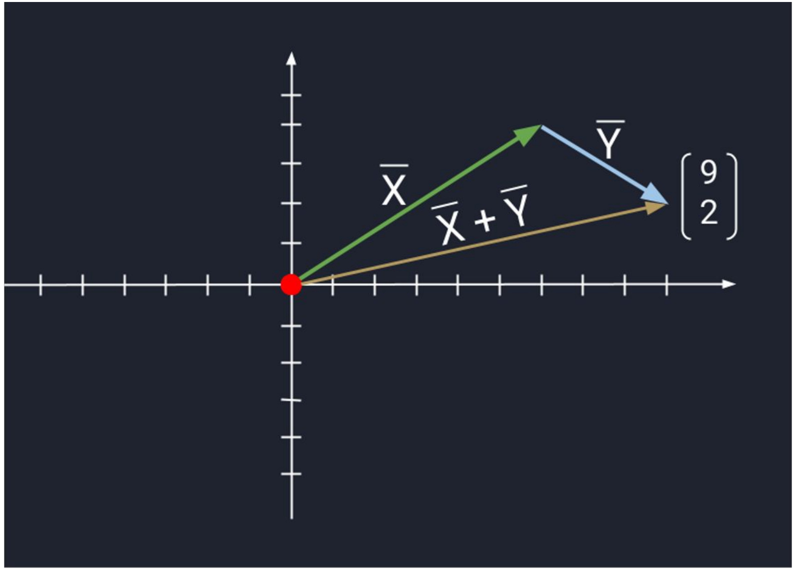
Векторы



Умножение вектора на число

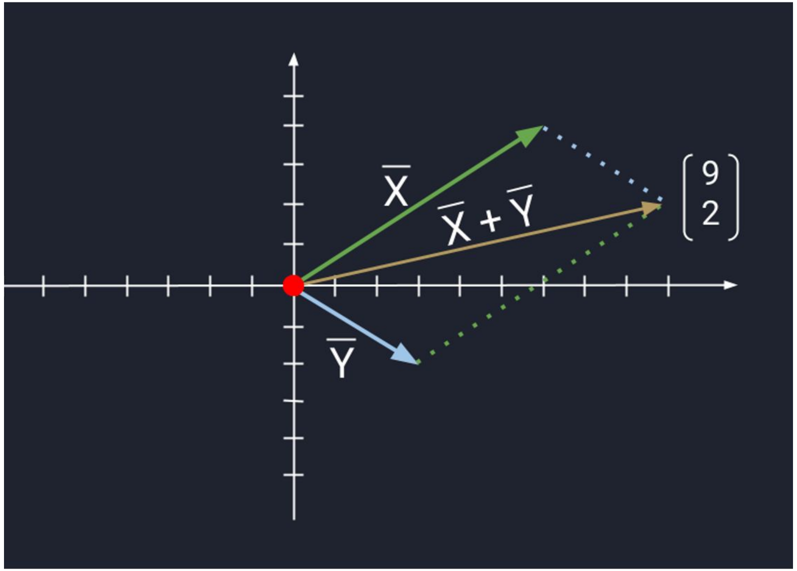


Сложение векторов



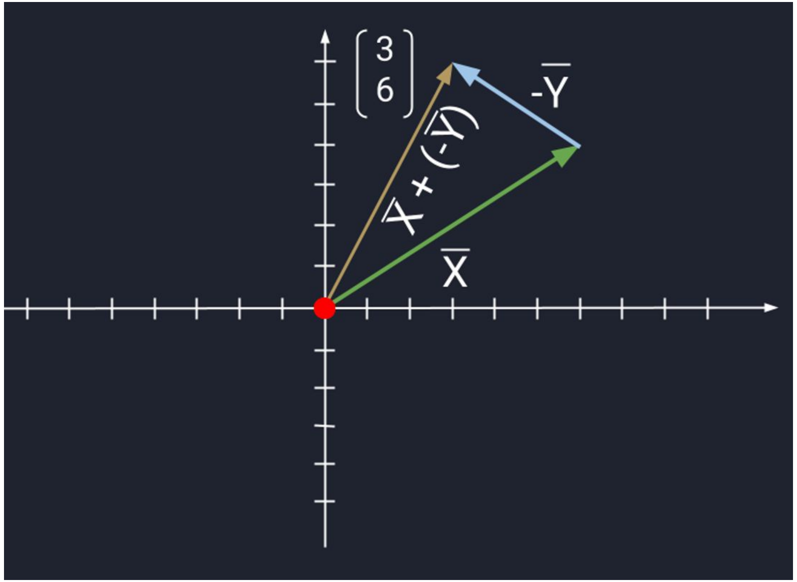
X = (6, 4)
Y = (3, −2)
X + Y = (9, 2)

Сложение векторов



X = (6, 4)
Y = (3, −2)
X + Y = (9, 2)

Вычитание векторов. Метод треугольника



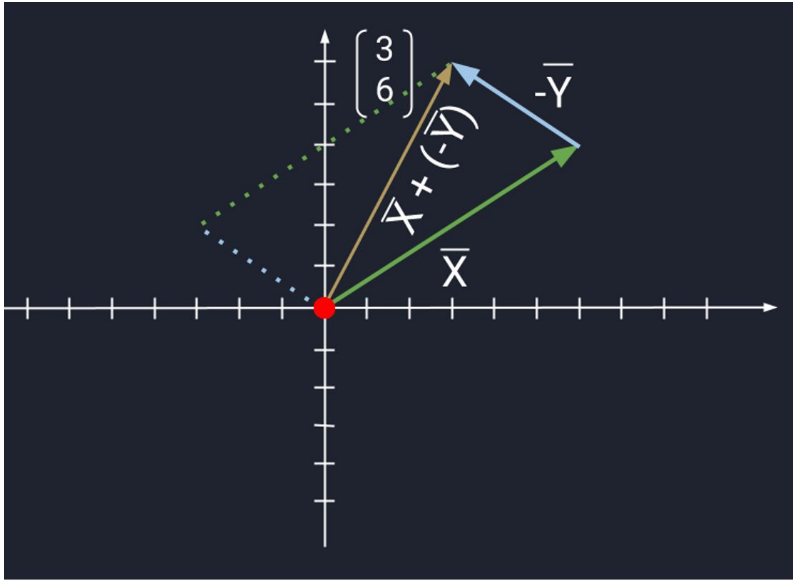
X = (6, 4)

Y = (3, -2)

−Y = (−3, 2)

X + (−Y) = (3, 6)

Вычитание векторов. Метод параллелограмма



X = (6, 4)
Y = (3, -2)
−Y = (−3, 2)
X + (−Y) = (3, 6)

Матрицы

$$\underset{m\times n}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 9 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \\ 6 & 7 & 0 & 8 \\ 0 & -3 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 7 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix},$$

Виды матриц

Квадратная $A_{n,n} = A_n \Leftrightarrow m = n$	$A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$
Единичная $E_n = (\delta_{ij}) \Leftrightarrow \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases}$	$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Нулевая $O_n = (a_{ij}) \Leftrightarrow a_{ij} = 0, \quad \forall i, j$	$O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
Диагональная $D_n = (d_{ij}) \Leftrightarrow d_{ij} = 0, \quad \forall i \neq j$	$D_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$
Верхняя треугольная $T_n = (t_{ij}) \Leftrightarrow t_{ij} = 0$ при $\forall i > j$	$T_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$
Нижняя треугольная $T_n = (t_{ij}) \Leftrightarrow t_{ij} = 0$ при $\forall i < j$	$T_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$
Симметричная матрица $S = (s_{ij}) \Leftrightarrow s_{ij} = s_{ji}$ при $\forall i \neq j$	$S = \begin{pmatrix} s_{11} & a & b \\ a & s_{22} & c \\ b & c & s_{33} \end{pmatrix}$

Действия над матрицами. Сложение

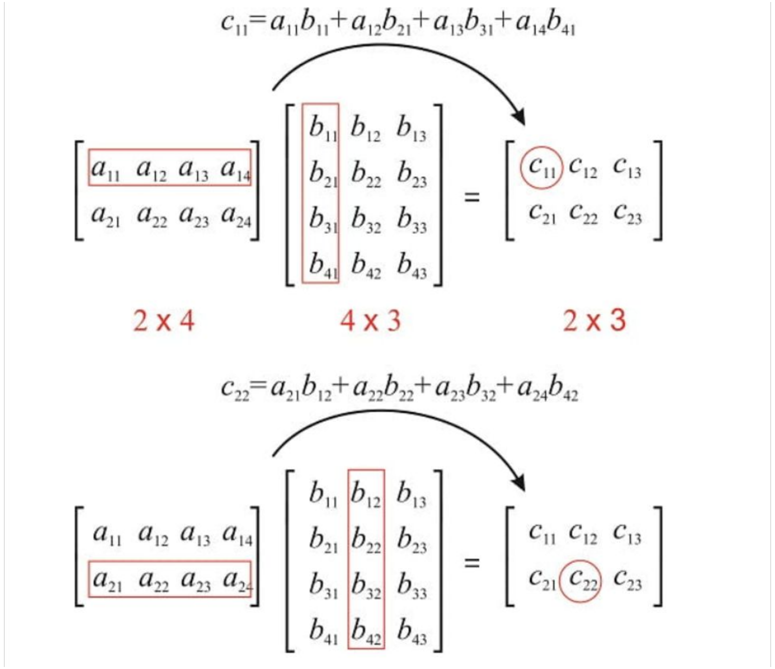
$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pn} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1}+b_{p1} & a_{p2}+b_{p2} & \cdots & a_{pn}+b_{pn} \end{pmatrix}$$

Действия над матрицами. Сложение

$$\lambda \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \lambda \cdot a_{12} & \cdots & \lambda \cdot a_{1n} \\ \lambda \cdot a_{21} & \lambda \cdot a_{22} & \cdots & \lambda \cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda \cdot a_{p1} & \lambda \cdot a_{p2} & \cdots & \lambda \cdot a_{pn} \end{pmatrix}$$

Действия над матрицами. Сложение



Действия над матрицами. Сложение

Операции сложения и умножения матриц обладают следующими свойствами:

Сложение

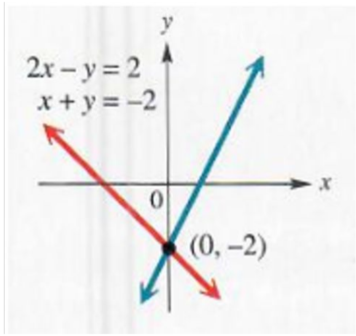
- $A + B = B + A$ (переместительный закон)
- $A + (B + C) = (A + B) + C$ (сочетательный закон)
- $A + 0 = A$
- $(\alpha * \beta)A = \alpha(\beta * A)$
- $(\alpha + \beta)A = \alpha * A + \beta * A$ (распределительный закон)
- $(A + B)\alpha = \alpha * A + \alpha * B$ (распределительный закон)

Умножение

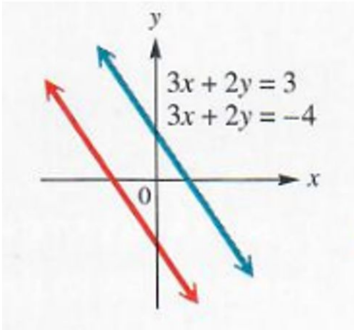
- $A * B \neq B * A$
- $A(B * C) = (A * B)C$
- $A(B + C) = A * B + A * C$

  $(A + B)C = A * C + B * C$
- $A * E = E * A = A$

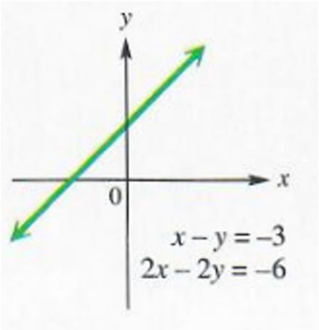
Связь между матрицами и уравнениями



Одно решение



Нет решения



Бесконечное количество решений

Пример 1

Заданы три матрицы: $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 5 & 9 & -8 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 10 & -25 & 98 \\ 3 & 0 & -14 \end{pmatrix}$ $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$

Можно ли найти матрицу A + F? Найти матрицы C и D, если C = A + B и D = A − B.

$$C = A + B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 5 & 9 & -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & -25 & 98 \\ 3 & 0 & -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+10 & -2+(-25) & 1+98 \\ 5+3 & 9+0 & -8+(-14) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -27 & 99 \\ 8 & 9 & -22 \end{pmatrix}$$

Найдём матрицу D = A - B:

$$D = A - B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 5 & 9 & -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & -25 & 98 \\ 3 & 0 & -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-10 & -2-(-25) & 1-98 \\ 5-3 & 9-0 & -8-(-14) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & 23 & -97 \\ 2 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

Пример 2

Задана матрица: $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 7 \\ 4 & 9 & 0 \end{pmatrix}$

Найти матрицы 3*А, -5*А и -А.

Решение:

$$3 \cdot A = 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & 7 \\ 4 & 9 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot (-1) & 3 \cdot (-2) & 3 \cdot 7 \\ 3 \cdot 4 & 3 \cdot 9 & 3 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -6 & 21 \\ 12 & 27 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$-5 \cdot A = -5 \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & 7 \\ 4 & 9 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \cdot (-1) & -5 \cdot (-2) & -5 \cdot 7 \\ -5 \cdot 4 & -5 \cdot 9 & -5 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 & -35 \\ -20 & -45 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$-A = -1 \cdot A = -1 \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & 7 \\ 4 & 9 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -7 \\ -4 & -9 & 0 \end{pmatrix}$$

Пример 3

Задана матрица:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 0 \\ 5 & 4 & -2 & 1 \\ -8 & 11 & -10 & -5 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ 6 & 20 \\ 7 & 0 \\ 12 & -4 \end{pmatrix}$$

Найти матрицы C=A*B

Решение:

$$A_{3\times4} \cdot B_{4\times2} = C_{3\times2}$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}$$

c_{11} = -1 * (-9) + 2 * 6 + (-3) * 7 + 0 * 12 = 0

c_{11}

Строка №1 *Столбец №1*

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} \boxed{-1 \quad 2 \quad -3 \quad 0} \\ 5 \quad 4 \quad -2 \quad 1 \\ -8 \quad 11 \quad -10 \quad -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} -9 \\ 6 \\ 7 \\ 12 \end{matrix}} & \begin{matrix} 3 \\ 20 \\ 0 \\ -4 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

Пример 3

c_{12} = - 1 * 3 + 2 * 20 + (-3) * 0 + 0 * (-4) = 37

c_{12}

Строка №1 *Столбец №2*

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 0 \\ 5 & 4 & -2 & 1 \\ -8 & 11 & -10 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ 6 & 20 \\ 7 & 0 \\ 12 & -4 \end{pmatrix}$$

c_{21} = 5 * (-9) + 4 * 6 + (-2) * 7 + 1 * 12 = -23

c_{21}

Строка №2 *Столбец №1*

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 0 \\ 5 & 4 & -2 & 1 \\ -8 & 11 & -10 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ 6 & 20 \\ 7 & 0 \\ 12 & -4 \end{pmatrix}$$

Пример 3

c_{22} = 5 * 3 + 4 * 20 + (-2) * 0 + 1 * (-4) = 91

c_{31} = -8 * (-9) + 11 * 6 + (-10) * 7 + (-5) * 12 = 8

c_{32} = -8 * 3 + 11 * 20 + (-10) * 0 + (-5) * (-4) = 216

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 0 \\ 5 & 4 & -2 & 1 \\ -8 & 11 & -10 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ 6 & 20 \\ 7 & 0 \\ 12 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 37 \\ -23 & 91 \\ 8 & 216 \end{pmatrix}$$

Определитель второго порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\Delta A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

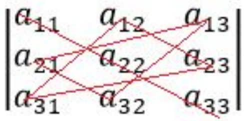
Пример вычисления определителя второго порядка

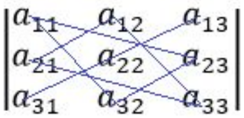
$$\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} = 5 \cdot 6 - (-4) \cdot 7 = 30 + 28 = 58.$$

Определитель третьего порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$





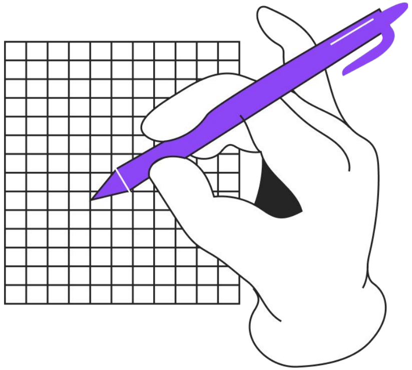
Пример вычисления определителя третьего порядка

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & -5 \\ 10 & 4 & 7 \\ 6 & -8 & -9 \end{vmatrix} = -3 \cdot 4 \cdot (-9) + 2 \cdot 7 \cdot 6 + 10 \cdot (-8) \cdot (-5) - (-5) \cdot 4 \cdot 6 - 2 \cdot 10 \cdot (-9) - 7 \cdot (-8) \cdot (-3) =$$

$$= 108 + 84 + 400 + 120 + 180 - 168 = 724.$$

Обратная матрица. Метод присоединенной матрицы

1. Найти определитель матрицы A и убедиться, что ΔA ≠ 0, т. е. матрица A — невырожденная
2. Составить алгебраические дополнения A_{ij} каждого элемента матрицы A и записать матрицу $A^*_{n\times n} = (A_{ij})$ из найденных алгебраических дополнений
3. Записать обратную матрицу с учетом формулы $A^{-1} = \dfrac{1}{\Delta A} \cdot A^{*T}$



Пример

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\Delta A = \begin{vmatrix} -5 & 7 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} = -5 \cdot 8 - 7 \cdot 9 = -103.$$

$$A_{11} = (-1)^2 \cdot 8 = 8;\ A_{12} = (-1)^3 \cdot 9 = -9;$$
$$A_{21} = (-1)^3 \cdot 7 = -7;\ A_{22} = (-1)^4 \cdot (-5) = -5.$$

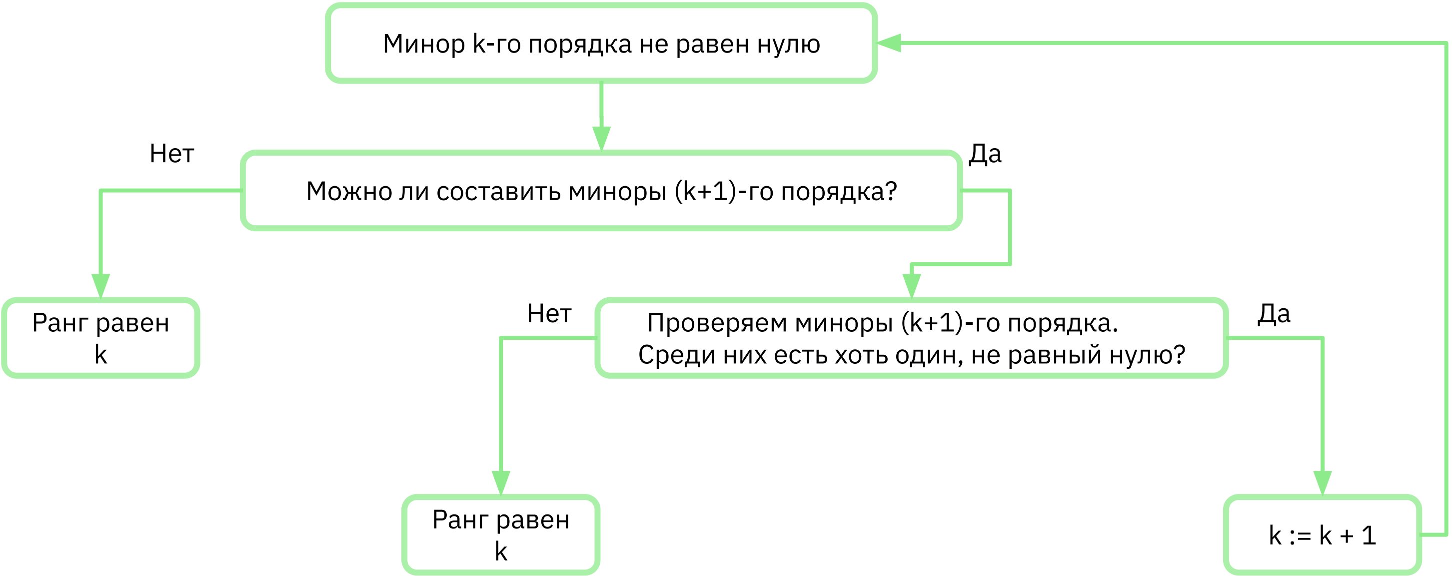
$$A^* = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ -7 & -5 \end{pmatrix}$$

$$A^{*T} = \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ -9 & -5 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta A} \cdot A^{*T}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-103} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ -9 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8/103 & 7/103 \\ 9/103 & 5/103 \end{pmatrix}$$

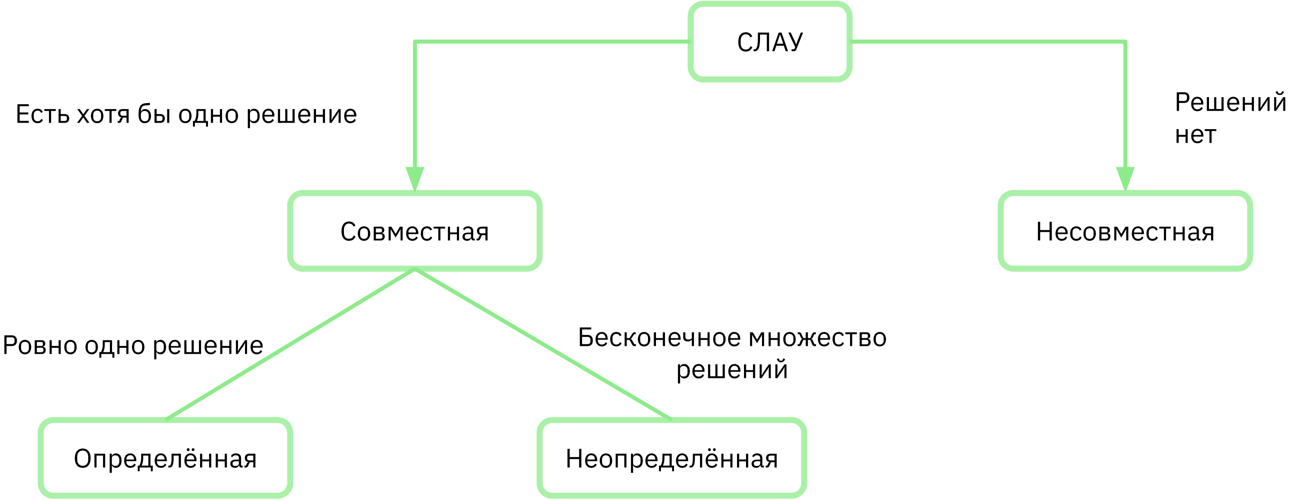
Ранг матрицы



Система линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Система линейных алгебраических уравнений



Пример

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = -5; \\ 4x_1 - x_3 = 0; \\ 14x_2 + 8x_3 + x_4 = -11. \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 & 1 \\ 4 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 14 & 8 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + (-5) \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 = -5; \\ 4 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + (-1) \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 0; \\ 0 \cdot x_1 + 14 \cdot x_2 + 8 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 = -11. \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 & 1 \\ 4 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 14 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

Пример

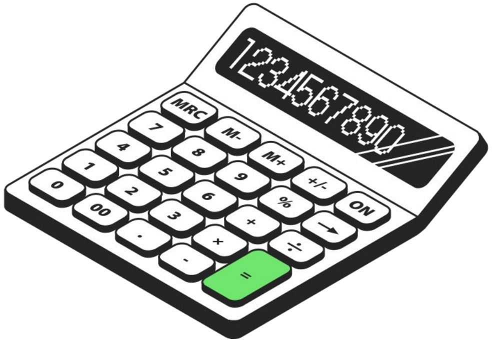
$$A \cdot X = B$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 & 1 \\ 4 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 14 & 8 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -11 \end{pmatrix}$$

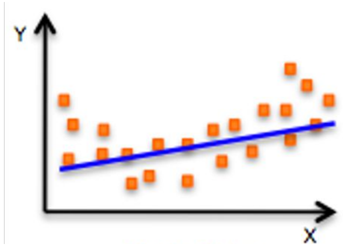
$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -5 & 1 & -5 \\ 4 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 8 & 1 & -11 \end{array}\right)$$

Где применяется

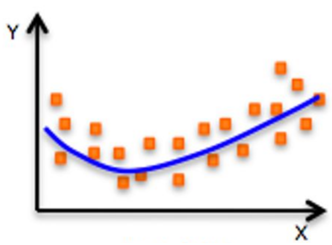
- 📌 Чтение данных, визуализация
- 📌 Линейная регрессия
- 📌 Функции потерь
- 📌 Регуляризация
- 📌 Ковариантная матрица
- 📌 Метод опорных векторов
- 📌 Векторное представление
- 📌 Тензоры и работа с изображениями
- 📌 Функция свёртки



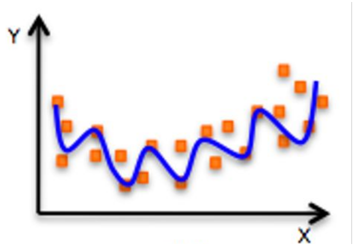
Регуляризация



Недостаточно усложнённая

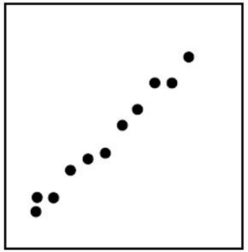


То, что надо!

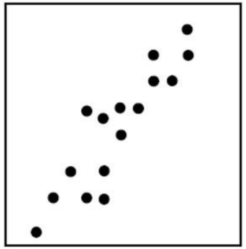


Переусложнённая

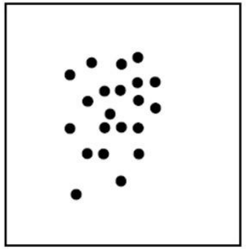
Ковариантная матрица



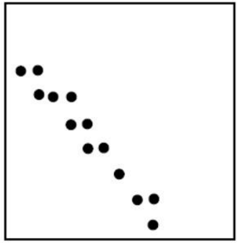
Strong positive correlation



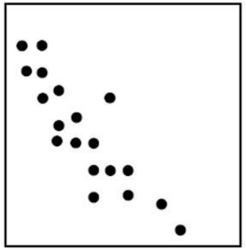
Moderate negative correlation



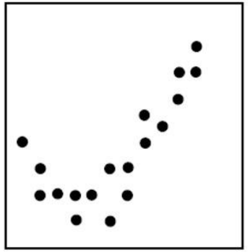
No correlation



Strong negative correlation



Moderate positive correlation



Curvilinear relationship

Практическое задание

1. Найти A + B:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 3 \\ 5 & 6 & 9 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 10 & 6 & -2 \\ 0 & 7 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Найти A * B:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$$

3. Вычислить определители:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 6 & 9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 9 \\ 3 & 2 & 0 \\ 8 & 7 & 5 \end{vmatrix}$$

Вопросы?

Вопросы?

Вопросы?