GeekBrains

Дискретные распределения вероятностей

Биномиальое распределение. Распределение Пуассона.

План курса (вертикальный)

1 Расчет вероятностей

2 Дискретные распределения вероятностей

3 Будущий урок

4 Будущий урок

5 Прошедший урок

6 Сегодняшний урок

7 Будущий урок

8 Будущий урок

9 Прошедший урок

10 Сегодняшний урок

11 Будущий урок

12 Будущий урок

13 Прошедший урок

14 Сегодняшний урок

15 Будущий урок

16 Будущий урок

Что будет на уроке сегодня

- Понятие дискретной случайной величины
- Закон распределения вероятностей
- Биномиальное распределение
- Распределение Пуассона

Случайная величина

Случайная величина - это величина, которая в результате испытания принимает только одно возможное значение.

Случайная величина. Обозначения.

X – случайная величина (рост человека)
$x_1 \ldots\ldots x_n$ – значения СВ при n испытаниях

Наименование случайной величины X	x1	x2	x3	x4	x5	x6
Рост	167	173	162	168	181	158

Таблица 1

Вопрос

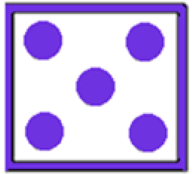
Определить количество СВ

Стоимость квартиры, руб.	Количество комнат	Площадь, кв. м
3500 000	2	58
4100 000	3	70
2200 000	1	42
6000 000	3	120
1800 000	1	38

Случайная величина

Дискретная

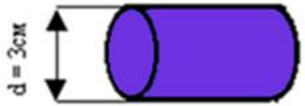
Принимает счетные, отдельные друг от друга значения



$$X_1 = 6$$
$$X_2 = 5$$
$$X_3 = 1$$

Непрерывная

Лежит в некотором интервале.
Можем измерить с той точностью, что позволяет прибор или с той точностью, которая необходима.

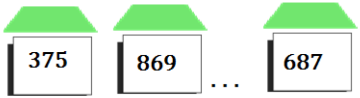


$$X_1 = 3{,}02 \text{ см}$$
$$X_2 = 3{,}01\text{см}$$
$$X_3 = 3{,}00 \text{ см}$$

Каждой из этих групп свойственны свои законы распределения

Дискретные случайные величины

Примеры дискретной случайной величины



Пример 1

Число учащихся по школам

X: 375, 869 … 687

Пример 2

В результате 100-кратного подбрасывания орел выпал 50 или 51 раз

X: 50, 51, ….78

Пример 3

Число метиоритов, упавших на землю за год

X: 0, 1 ...1

Закон распределения вероятностей

Закон распределения вероятностей. Математическая модель

Закон распределения вероятностей случайной величины - это соответствие между возможными значениями этой величины и вероятностями, которые этим значениям соответствуют.

Иными словами закон распределения вероятностей случайной величины - это модель, которая описывает поведение этой случайной величины

Таблица 3

5	5	4	5	3	4	5	4	5	4

Таблица 4

5	5 раз	50%
4	4 раза	40%
3	1 раз	10%

Биномиальное распределение

Случайная дискретная величина X имеет биномиальное распределение с переменными k, n и p, если вероятность ее распределения задается следующим уравнением:

- ✓ $\boldsymbol{k}$,число наступления события (дискретная величина из отрезка $[0, \boldsymbol{n}]$)
- ✓ $\boldsymbol{n}$ - число испытаний
- ✓ $\boldsymbol{p}$ - вероятность наступления события $\boldsymbol{A}$ в независимых испытаниях,
- ✓ $\boldsymbol{q} = \mathbf{1} - \boldsymbol{p}$. Противоположная вероятность

$$P_n(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

Используй слайд, когда акцент нужно сделать сначала на тексте, а картинка/фото сопровождает текст.

Формула Бернулли

3 раза подбрасываем монетку (n=3). Какая вероятность, что орел выпадет 0 раз, 1 раз, 2 раза и 3 раза.

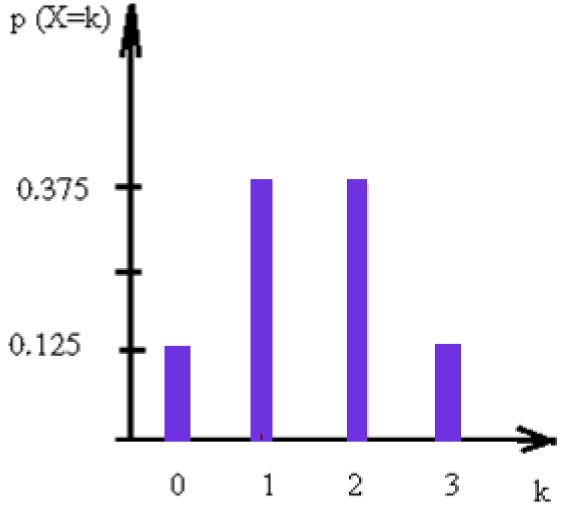
$$P_n(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

$$p(k=0) = C_n^k p^k q^{n-k} = C_3^0 p^0 q^3 = \frac{3!}{0!(3-0)!} \cdot 0.5^0 \cdot 0.5^3 = 1 \cdot 1 \cdot 0.125 = 0.125$$

$$p(k=1) = C_n^k p^k q^{n-k} = C_3^1 p^1 q^2 = \frac{3!}{1!(3-1)!} \cdot 0.5^1 \cdot 0.5^2 = 3 \cdot 0.5 \cdot 0.25 = 0.375$$

$$p(k=2) = C_n^k p^k q^{n-k} = C_3^2 p^2 q^1 = \frac{3!}{2!(3-2)!} \cdot 0.5^2 \cdot 0.5^1 = 3 \cdot 0.25 \cdot 0.5 = 0.375$$

$$p(k=3) = C_n^k p^k q^{n-k} = C_3^3 p^3 q^0 = \frac{3!}{3!(3-3)!} \cdot 0.5^3 \cdot 0.5^0 = 1 \cdot 0.125 \cdot 1 = 0.125$$



Расчет вероятности, что событие наступит k раз из n

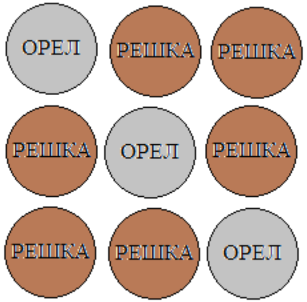
Варианты исхода такого эксперимента:

1) 0 орлов (X=k=0) $C_3^0 = \frac{3!}{0!(3-0)!} = 1$ P(0) = 1/8= 0,125

2) 1 орел (X=k=1) $C_3^1 = \frac{3!}{1!(3-1)!} = 3$ P(1)=3 /8 =0,375

3) 2 орла (X=k=2) $C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3$ P(2) =3/8= 0,375

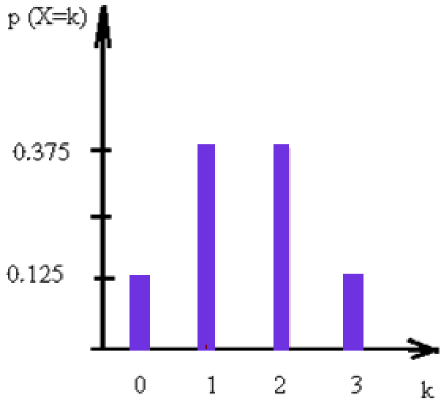
4) 3 орла (X=k=3) $C_3^3 = \frac{3!}{3!(3-3)!} = 1$ P(3) =1/8= 0,125



$C_{общ.}$= 1+3+3+1 =8

Представление данных в виде математических моделей

X(кол-во орлов)	0 орлов	1 орел	2 орла	3 орла
P(x)	0,125	0,375	0,375	0,125



Графическая модель дискретной величины X

Распределение Пуассона

Распределение Пуассона

В том случае, если проводится большое количество испытаний $\boldsymbol{n}$ и при этом вероятность $\boldsymbol{p}$ появления события $\boldsymbol{A}$ в отдельном испытании мала (<0,1), применяют формулу Пуассона для вычисления вероятности того, что событие произойдет $\boldsymbol{m}$ раз в $\boldsymbol{n}$ испытаний:

$$P_m \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$$

λ – среднее количество наступления события за определенную единицу измерений, например, потребителей /час, вкраплений /м^2

Распределение Пуассона

Распределение Пуассона показывает вероятность числа наступления события А за фиксированную единицу измерения

Распределение Пуассона

Задача: вероятность того, что среди писем, поступающих на определенный почтовый ящик, встретится письмо со спамом, составляет 0.01.
Найдите вероятность того, что среди 1000 писем, поступивших на него за месяц, будет 11 со спамом

$$P_m \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$$

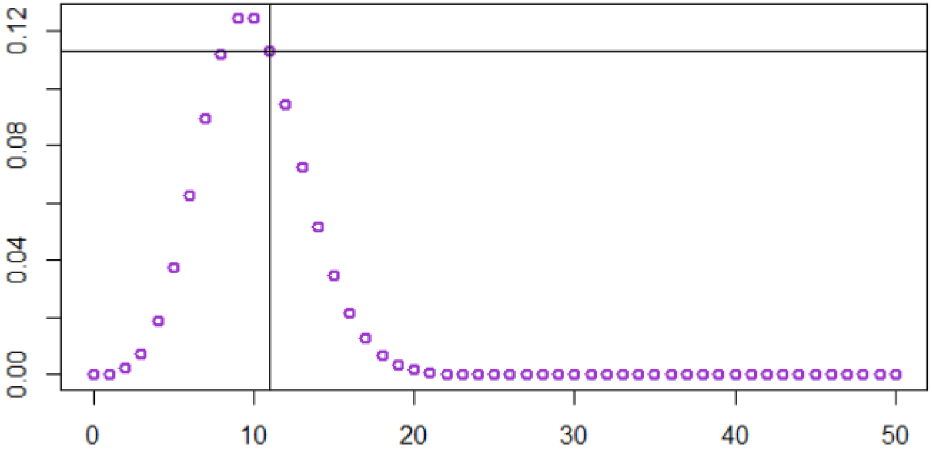
Решение:

m=11, n=1000

λ = p*n = 0,01 *1000 =10 писем

$e \approx 2{,}72$

$P(11) \approx \frac{10^{11}}{11!} * e^{-10}$ ≈ 0.113



Ответ: P (11) ≈ 0.113

Распределение Пуассона

В среднем при изготовлении напольного покрытия на 1 кв.м встречается 2 вкрапления. Какова вероятность, что на 1 кв.м будет не более 1 вкрапления?

$$P_m \approx \frac{\lambda^m}{m!} * e^{-\lambda}$$

P(0) + P(1) $\approx \frac{2^0}{0!} e^{-2} + \frac{2^1}{1!} e^{-2} \approx (1+2) * e^{-2} \approx 0{,}405 \approx 40.5\%$

Описательная статистика

Математическое ожидание и дисперсия для биномиального распределения

Математическое ожидание –это среднее значение случайной величины, при числе испытаний стремящихся к бесконечности

$$M(X) = np$$

Дисперсия характеризует степень рассеянности значений случайной величины относительно ее математического ожидания

$$D(X) = npq$$

Среднее квадратичное отклонение показывает, насколько далеко наблюдения могут быть "разбросаны" относительно их среднего значения μ

$$\boldsymbol{\sigma} = \sqrt{\boldsymbol{\sigma}^2}$$

Математическое ожидание, дисперсия, стандартное отклонение

$\mu = M(X) = 3 * \frac{1}{2} = 1.5$

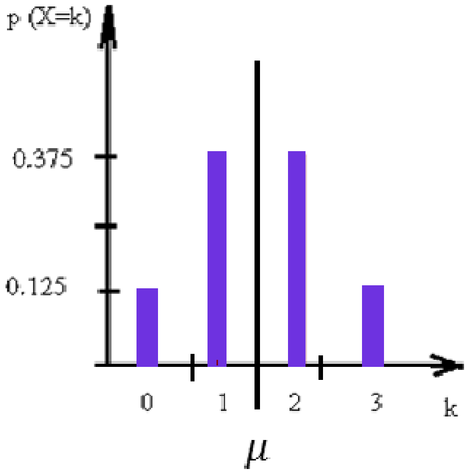
$\boldsymbol{\sigma}^2 = D(X) = 3 * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = 0.75$

$\boldsymbol{\sigma} = \sqrt{\boldsymbol{\sigma}^2} = \sqrt{0.75} = 0.866$

$1.5 + 0.866 = 2.366$

$1.5 - 0.866 = 0.634$

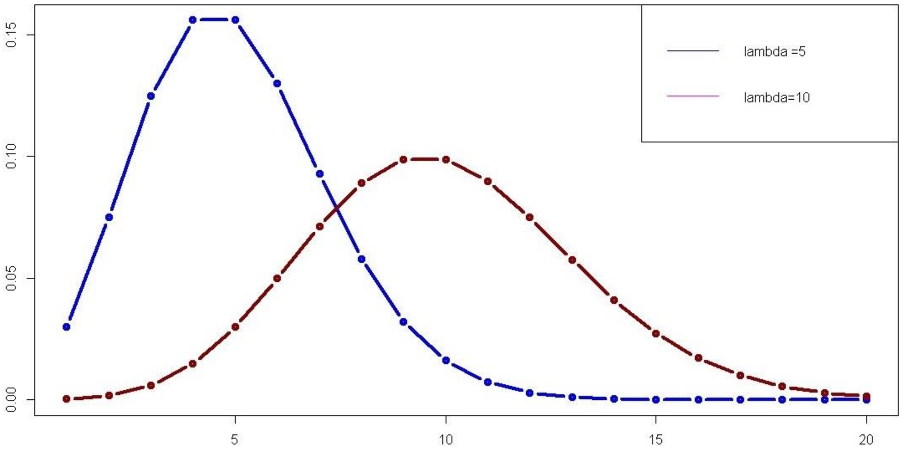
[0.634 ; 2.366]



Математическое ожидание и дисперсия для распределения Пуассона

М (X) = n*p= λ

D (X) = λ

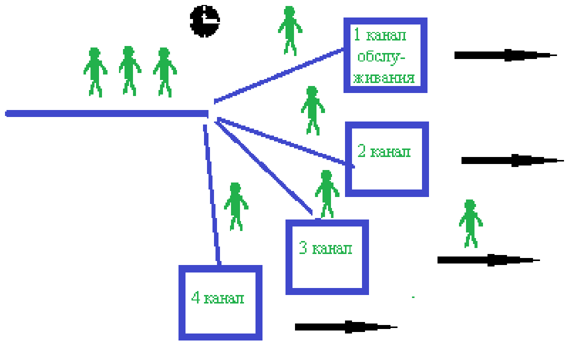


Применение распределения Пуассона в ТМО

Распределение Пуассона часто применяется в теории массового обслуживания (ТМО).

ТМО - это раздел теории вероятностей, в котором исследуется рациональный выбор структуры системы обслуживания и процесса обслуживания на основе изучения потоков требований на обслуживание, поступающих в систему и выходящих из неё, длительности ожидания и длины очередей.

λ- число клиентов / час



Система массового обслуживания

Сравнение биномиального распределения и распределения Пуассона

Биномиальное распределение:

- известна точная вероятность
- надо найти вероятность наступления события k раз из n (найти вероятность , что биатлонист попадет 3 раза из 10, зная ,что вероятность его попадания 0,7)
- свойственно небольшое число испытаний

Распределение Пуассона

-известна средняя вероятность или средняя интенсивность наступления события,
-число испытаний стремится к бесконечности,
-вероятность наступления события очень маленькая (< 0.01)

Конец