Листок 1. Свойства отображений и операций. Алгебраические системы

Обязательный минимум. Задачи 1, 6 – 8 должен решить каждый студент. Они являются необходимым условием для закрытия листка 1. Для будущей «тройки» достаточно решить их.

Залог успеха. Задачи 2 – 3, 9 – 11 служат залогом успеха в познании алгебры. Владение техникой решения этих задач говорит о хорошем уровне освоения материала и открывает двери к хорошей оценке за семестр.

Для тех, кто хочет потяжелее, добавлены задачи 4 – 5, 12 – 15. Тем, кто хочет закрыть алгебру на оценку «отлично», необходимо уметь решать такие чисто теоретические задачи.

1. Определите, является ли бинарное отношение φ отображением. Если да — проверьте свойства (инъективность, сюръективность, биективность). Все ответы необходимо аргументировать.

   (a) $\varphi \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad \varphi = \{(x, y) \mid y = x^2\}$,

   (b) $\varphi \subset [0; +\infty) \times (-\infty; +\infty), \quad \varphi = \{(x, y) \mid y = x^2\}$,

   (c) $\varphi \subset [0; +\infty) \times [0; +\infty), \quad \varphi = \{(x, y) \mid y = x^2\}$,

   (d) $\varphi \subset [0; 1] \times [0; 1], \quad \varphi = \{(x, y) \mid y = x^2\}$,

   (e) $\varphi \subset [-1; 1] \times [-1; 0], \quad \varphi = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$,

   (f) $\varphi \subset [-1; 0] \times [-1; 1], \quad \varphi = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$,

   (g) $\varphi \subset [-1; 0] \times [-1; 0], \quad \varphi = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$,

2. Пусть отображения $\varphi : A \to B$ и $f : B \to C$ инъективны. Докажите, что $f\varphi$ инъективно.

3. Пусть отображения $\varphi : A \to B$ и $f : B \to C$ сюръективны. Докажите, что $f\varphi$ сюръективно.

4. Пусть $\varphi : A \to B$ и $f : B \to C$ биективны. Докажите, что

$$(f\varphi)^{-1} = \varphi^{-1} f^{-1}.$$

5. Пусть $\varphi : A \to B$, $A_1, A_2 \subset A$. Докажите, что

   (a) $\varphi(A_1 \cup A_2) = \varphi(A_1) \cup \varphi(A_2)$,

   (b) $\varphi(A_1 \cap A_2) \subset \varphi(A_1) \cap \varphi(A_2)$.

   Приведите пример, когда $\varphi(A_1 \cap A_2) \neq \varphi(A_1) \cap \varphi(A_2)$.

6. Укажите, какие из следующих операций на множестве всех векторов пространства являются алгебраическими:

   (a) сложение векторов,

   (b) умножение вектора на 3,

   (c) скалярное произведение векторов.

7. Пусть на множестве $\mathbb{R}^+$ определено действие $\circ$. Какие из вариантов соответствуют алгебраическим операциям? Проверьте свойства (коммутативность, ассоциативность, существование нейтрального и обратного).

   (a) $x \circ y = \frac{x+y}{2}$,

   (b) $x \circ y = xy^2$,

   (c) $x \circ y = x^y$,

   (d) $x \circ y = \max\{x, y\}$.

8. Докажите, что $\langle \mathbb{N}; \circ \rangle$ является полугруппой, где $x \circ y = \text{НОД}(x, y)$ для любых $x, y \in \mathbb{N}$.

9. *Булеаном множества* A называется множество всех подмножеств множества A. Обозначается булеан A через $\mathcal{P}(A)$. Т.е.

   $$\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subset A\}.$$

   Является ли $\langle \mathcal{P}(A); \cap \rangle$ полугруппой? А моноидом? Группой?

10. Пусть X — множество, $X \neq \varnothing$. Через X_φ обозначим множество всех биективных отображений из X в X. Докажите, что $\langle X_\varphi; \circ \rangle$ является группой, где $\circ$ — композиция отображений.

11. Пусть на плоскости выбрана точка O. Через $D(O)$ обозначим множество всех поворотов плоскости вокруг точки O. Докажите, что $\langle D(O); \circ \rangle$ является группой, где $\circ$ — последовательное применение поворотов.

12. Докажите, что в любой группе существует единственный нейтральный элемент.

13. Докажите, что для каждого элемента группы существует единственный обратный элемент.

14. Пусть $\langle G; \circ \rangle$ — группа. Докажите, что для любых $a, b \in G$ уравнение $a \circ x = b$ имеет единственный корень.

15. Докажите, что в группе $\langle G; \circ \rangle$ операция $\circ$ сократима.