1. Теория множеств.

Множество - понятие неопределяемое. Мн-во состоит из *Элементов*, эл-ты принадлежат мн-ву. Обозн: $a \in A$, $b \notin A$ (эл-т a принадлежит мн-ву A, эл-т b не принадлежит мн-ву A).

При перечислении эл-ты мн-ва записываются в фигурных скобках, например: $A=\{1,2,3\}$ - мн-во чисел 1,2,3. $1 \in A$, $4 \notin A$.

Нужно знать 5 операций над множествами: *включение, пересечение, объединение, разность, дополнение*

1) мн-во A включается в мн-во B (иначе — является подмножеством мн-ва B), если любой эл-т мн-ва A принадлежит мн-ву B. Обозн: $A \subset B$. Пример: $A=\{1,2\}$, $B=\{3,4\}$, $C=\{1,2,3\}$. $A \subset C$, $B \not\subset C$ (B не включается в C).
2) Пересечением мн-в A и B называется мн-во C, состоящее из эл-тов, общих для A и B. Обозн: $C=A \cap B$. Пр.: $A=\{1,2,3\}$, $B=\{2,3,4\}$, $A \cap B=\{2,3\}$.
3) Объединением мн-в A и B называется мн-во C, состоящее из всех эл-тов мн-ва A и всех эл-тов мн-ва B. Обозн: $C=A \cup B$. Пр.: $A=\{1,2,3\}$, $B=\{2,3,4\}$, $A \cup B=\{1,2,3,4\}$ (ответьте: почему числа 2 и 3 не выписаны по два раза?).
4) Разностью между мн-вом A и мн-вом B называется мн-во C, состоящее из тех эл-тов A, которые не вошли в B. Обозн: $C=A \setminus B$. Пр.: $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{2,3,5,6\}$, $A \setminus B=\{1,4\}$, $B \setminus A=\{6\}$.
5) *Универсальным* называется мн-во всех эл-тов в рамках данной задачи («мн-во всего»). Дополнением к мн-ву A называется разность между универсальным мн-вом и мн-вом A. Обозн: $\overline{A}$.

Множество, не содержащее ни одного эл-та, называется *пустым*. Обозн: $\varnothing$.

2. Математическая логика.

Логика - наука о том, как правильно строить высказывания, в частности, в мат. теориях (как правильно строить доказательства).

М.Л. - это Л., записанная на мат. языке и пригодная для проведения вычислений в автоматическом режиме на компьютерах.

Высказывание - первичное понятие МЛ. Высказывания можно разделить на *элементарные* и *составные*. Элементарные высказывания выбираются произвольным образом, из них составляются составные высказывания при помощи *логических операций*. Существует 5 основных логических операций: *отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация* и *эквиваленция*. Легче всего понять суть логических операций, изучая *Таблицы истинности*. Всякое высказывание может быть либо истинным, либо ложным. Истина и ложь называются значениями высказываний и обозначаются символами 1 и 0

1) отрицание высказывания A. Обозн: $\overline{A}$ (читается «не A»)

A	$\overline{A}$
1	0
0	1

2) Конъюнкция высказываний A и B (логическое «и», логическое умножение). Обозн: $A \wedge B$

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

3) дизъюнкция высказываний A и B (логическое «или», логическое сложение). Обозн: $A \vee B$

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

4) импликация высказываний A и B (следствие). Обозн: $A \Rightarrow B$

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

5) эквиваленция высказываний A и B (равносильность). Обозн: $A \Leftrightarrow B$

A	B	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Составное высказывание, истинное при любых значениях элементарных высказываний, называется *законом логики*. Доказать закон можно с помощью таблиц истинности. Составное высказывание, ложное при любых значениях элем. высказываний, наз. *Противоречием*.

5. Теория вероятности.

5.1. Комбинаторика.

1. Перестановки. *Перестановкой* наз. любой способ расставить эл-ты мн-ва в опред. порядке. Число всех П. мн-ва A, имеющего n эл-тов, равно n!=1*2*...*n.

Пр: число способов расставить на полке 6 книг равно 6!=1*2*3*4*5*6=720.

2. Размещения. *Размещением из n по k* наз. способ выбрать k эл-тов из мн-ва A, имеющего n эл-тов, и расставить их в некотором порядке.

Число всех разм. из n по k равно n!/(n-k)!

Пр: число способов выбрать 3 победителей из 10 участников равно 10!/7!=10*9*8=720.

3. Сочетания. *Сочетанием из n по k* наз. способ выбрать k эл-тов из мн-ва, имеющего n эл-тов без учета порядка.

Число всех сочет. из n по k обозначается символом C_n^k и равно n!/k!/(n-k)!

Пр: число вариантов пригласить в гости 3 друзей из 10 равно C_{10}^3=10!/3!/7!=720/6=120.

2. Случайные события.

Понятие *События* в теории вероятностей - первичное. *Случайное С.* - это событие, которое в будущем может произойти, а может и не произойти, и это неизвестно заранее.

С.С. наз. *элементарными*, или *случаями*, если:

1) никакие два из них не могут произойти одновременно (*несовместны*);
2) все они имеют равные шансы произойти (*равновозможны*);
3) одно из них обязательно произойдет (образуют *полную группу*).

Пр: выпадение герба (Г) и решки (Р) при бросании 1 монеты - случаи;
выпадение 1,2,...,6 очков при бросании игрального кубика - случаи;
попадание и промах при выстреле - не случаи, т.к. они не равновозможны.

Кроме элементарных рассматриваются *составные события*, состоящие из нескольких элементарных.

Например, событие: "выпадение не менее 5 очков на кубике" состоит из 2 элем.: 5 и 6. Те случаи, которые входят в составное событие, наз. *благоприятными*.

Вероятностью (составного) события А называется отношение числа благоприятных случаев (m) к числу всех случаев (n)

$$P(A)=m/n$$

Пр: вероятность выпадения Г при бросании 1 монеты - 1\2;
вероятность выпадения ГГ при бросании 2 монет - 1\4;
вероятность выпадения 6 при бросании кубика - 1\6;
вероятность вынуть черный шар из корзины с 4 белыми ш. и 5 черными ш. - 4\9;
вероятность вынуть 2 синих карандаша из коробки с 5 синими к. и 6 красными к. - $C_5^2/C_{11}^2=5!2!9!/2!3!11!=2/11\approx 0.19$;
вероятность попадания в мишень не равна 1\2, т.к. попадание - не случай.

Заметим, что сами элем. события можно рассматривать как составные, содержащие только 1 благоприятный случай.

Кроме того, можно рассматривать событие, которому не благоприятствует ни 1 случай - *невозможное событие* (P=0), а также событие, которому благоприятствуют все случаи - *достоверное событие* (P=1). Вероятность С.С. всегда заключена между числами 0 и 1.

Существует глубокая связь между теорией вероятности и теорией множеств. Всякое событие есть подмножество во мн-ве всех случаев (универсальном мн-ве, которое в Т.В. наз. *пространством элементарных исходов*).

Достоверное событие есть само пр-во элем. исх. Невозм. соб. - пустое мн-во. Два события могут произойти одновременно (*совместны*), если они пересекаются как мн-ва (у них есть общие элем. исходы), и т.д.

3. Свойства вероятности.

События А и В называются *независимыми*, если наступление одного из них не изменяет вероятность наступления другого.

Пр: выпадение герба при первом бросании и герба при втором бросании — независимы.

Событие, состоящее в том, что не наступило событие А, называется *противоположным*, обозн: $\overline{A}$.

Пр: выпадение герба при однократном бросании противоположно выпадению решки.

События можно складывать, вычитать и перемножать.

Суммой событий А и В называется событие С, состоящее в том, что произошло А или В (или оба вместе). **Теорема** о сумме несовместных событий:

Если события несовместны, то вероятность суммы равна сумме вероятностей

$$\mathbf{P(A+B)=P(A)+P(B)}$$

Пр: вероятность выпадения 5 или 6 очков на кубике: P(5)+P(6)=1/6+1/6=1/3.

Произведением событий А и В называется событие С, состоящее в том, что произошли А и В. **Теорема** о произведении независимых событий:

Если события независимы, то вероятность их произведения равна произведению вероятностей

$$\mathbf{P(AB)=P(A)P(B)}$$

Пр: вероятность выпадения двух гербов подряд: Р(Г)З(Г)=1/2*1/2=1/4

Разностью событий А и В называется событие С, состоящее в том, что произошло А и не произошло В. Разность — несамостоятельная операция, она выражается с помощью комбинации суммы и дополнения

$$\mathbf{A-B=A+\overline{B}}$$

4. Случайные величины.

Сл. вел. - это величина, которая может принять любое значение из некоторого мн-ва значений с той или иной вер-тью.

Пр: число выпавших очков на кубике — неизвестное заранее число от 1 до 6.

Соответствие между значениями С.В. и их вер-тями наз. *законом распределения*, записывается в виде таблицы.

Пр:

X	2,3	4,1	5,7
P	0,2	0,5	0,3

Данная С.В. Принимает значение x_1=2,3 с вероятностью p_1=0,3, значение x_2=4,1 с вер-тью 0,5 и значение x_3=5,7 с вер-тью p_3=0,3.

Основное свойство закона распределения: сумма всех вероятностей в нижней строке таблицы равна 1 (почему?)

График этого соответствия наз. *полигоном распределения*.

Важнейшими харак-ками С.В. являются *математическое ожидание*, *дисперсия* и *среднеквадратичное отклонение (СКО)*.

Мат. ожидание. характеризует центр рассеяния, оно близко к среднему значению, получаемому на опыте (ожидаемое значение). Обозн: M(x).

$$M(X)=x_1*p_1+\ldots+x_n*p_n.$$

Дисп. характеризует разброс значений вокруг центра. Дисп. - это мат. ожидание от квадрата отклонения.

Отклонение: $\Delta X=X-M(X)$.

Дисп: $D(X)=M(\Delta X^2)$.

СКО — это корень из дисп.: $\sigma=\sqrt{D}$.