DERIVADA

CONCEPTO:

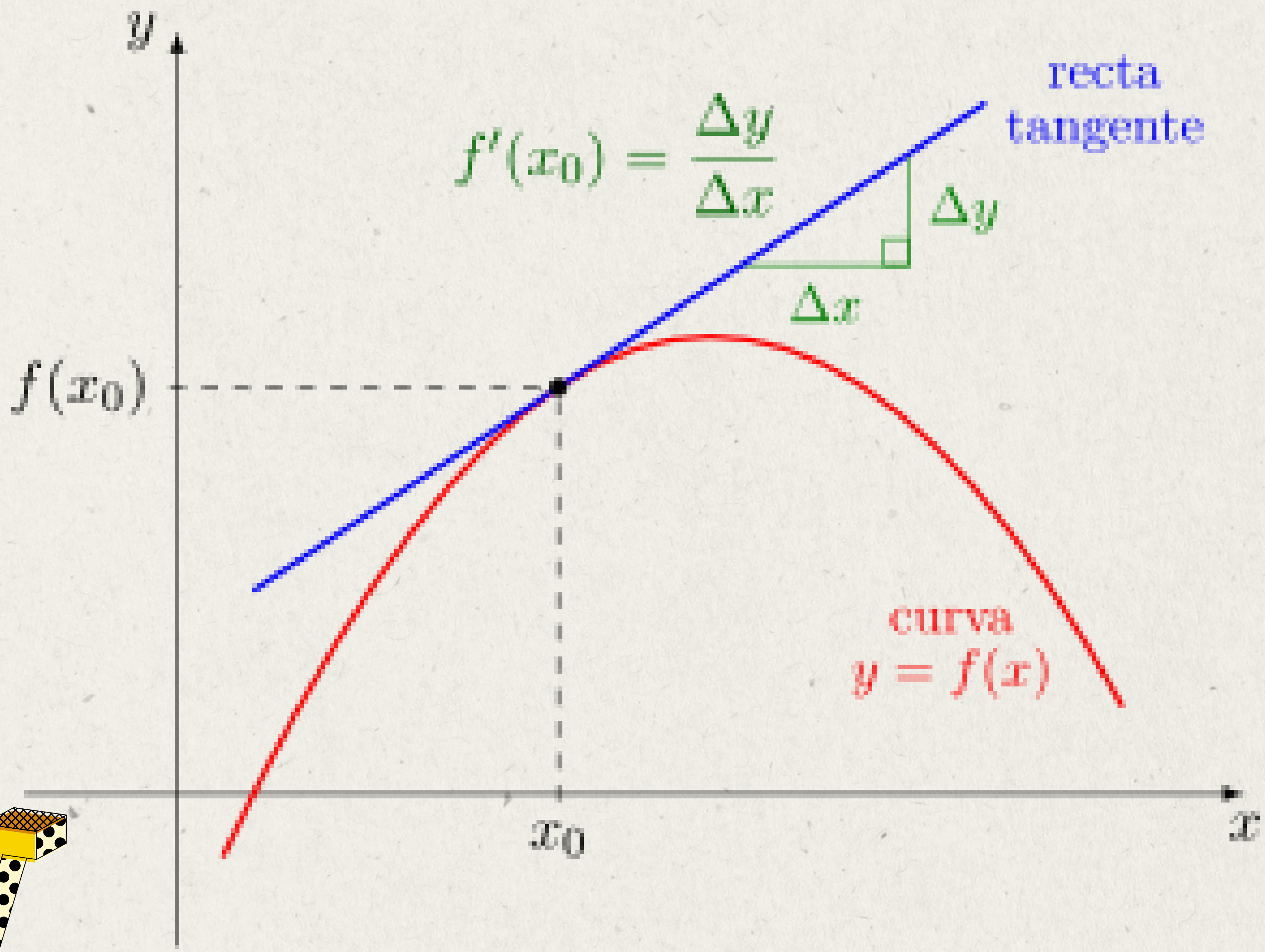
La derivada de una función describe la razón de cambio instantáneo de la función en un punto. También representa la pendiente de la recta tangente a la gráfica en ese punto.

Definición formal:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Da click para una explicación más concreta: *REGLAS DE DERIVACIÓN*
https://youtu.be/aVNa-J8iB5I?si=jaN3S5qjJ0No4qrt

GRÁFICAMENTE



La derivada **indica** la inclinación de la recta tangente a la gráfica de una función en un **punto específico**, ofreciendo una **visión detallada de su comportamiento**. Su valor refleja el comportamiento de la función: es positivo si la función aumenta, negativo si disminuye y cero si permanece constante.

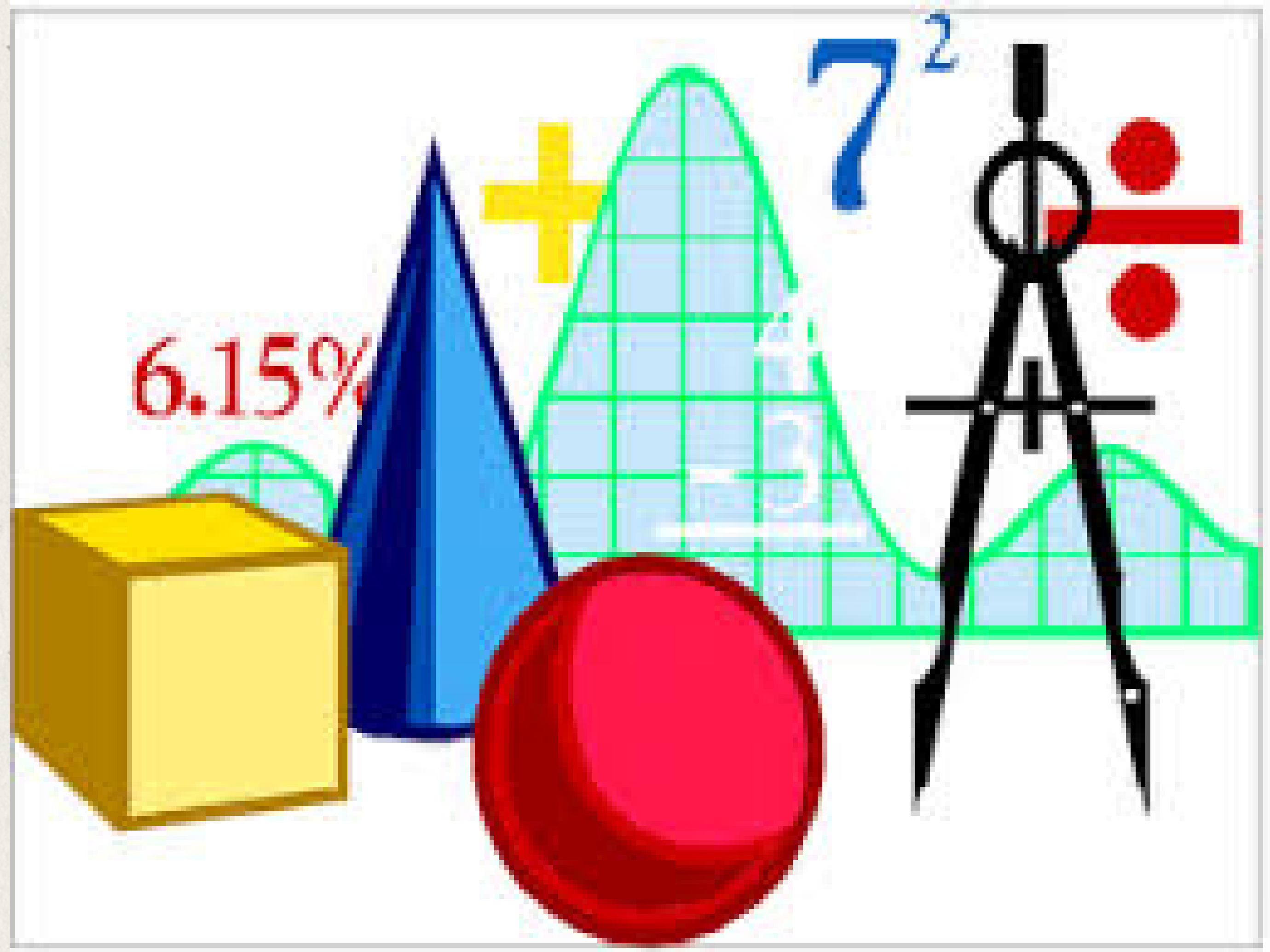
APLICACIONES A LA VIDA

1. Economía y Finanzas

Las empresas usan derivadas para encontrar el punto donde el ingreso es mayor o el costo es menor, analizando el comportamiento de funciones de ingresos y costos.

Arquitectura e Ingeniería

Calcular la inclinación o curvatura de superficies para estructuras como puentes o techos.



Velocidad y Aceleración en el Transporte

Si conoces la posición de un coche en función del tiempo, su derivada te da la velocidad en cada instante.

1.DERIVADAS COMUNES

DERIVADAS DE FUNCIONES ALGEBRAICAS

Se debe de saber que para la resolución de una derivada, se es necesario seguir con cierto grupo de formulas.
En este caso, las comunes u ordinarias, son la parte inicial y en la que se encuentra la base de las mas complejas. Ejemplos:

Tenemos la siguiente función:

$y = x + 2$

Se resuelve en partes, en este caso la podemos separar en "x" y "+2".

$$y' = \frac{d}{dx}x + \frac{d}{dx}(+2)$$

Hacemos uso de las fórmulas, las cuales nos dicen que la $\frac{d}{dx}$ *de una variable es igual a* 1, *que en este caso es* x, *y la* $\frac{d}{dx}$ *de una constante* (c) *es igual a* 0, *que en este caso es* "2".

Por lo tanto:

$y' = 1$

Formulas

$\frac{d}{dx}c = 0$
$\frac{d}{dx}x = 1$
$\frac{d}{dx}ku = k\frac{d}{dx}u$
$\frac{d}{dx}u^n = nu^{n-1}\frac{d}{dx}u$

Ejemplo 2:

Tenemos la siguiente función:

$y = 3x + 4x^2 - 7$

Se resuelve en partes, en este caso la podemos separar en "3x", $4x^2$ y "-7".

$y' = \frac{d}{dx}3x\,\frac{d}{dx}4x^2\,\frac{d}{dx} - 7$

Nuevamente, hacemos uso de las fórmulas para resolver cada parte:

$y' = 3x$

(recordemos que "x" vale 1)

$y' = 3(1)$

$y' = 3$

$y' = 4x^2$

(aplicamos $\frac{d}{dx}u^n$)

la formula nos dice que

nu^{n-1} entonces:

$y' = 2(4x^{2-1})$

Resolviendo queda:

$y' = 8x$

$y' = -7$

$y' = 0$

Por lo tanto:

$y' = 3 + 8x$

$y' = 8x + 3$

Formulas

$\frac{d}{dx}c = 0$
$\frac{d}{dx}x = 1$
$\frac{d}{dx}ku = k\frac{d}{dx}u$
$\frac{d}{dx}u^n = nu^{n-1}\frac{d}{dx}u$

2. POLINOMINALES

Es la aplicación directa de las reglas comunes para derivar funciones polinomiales (formadas por sumas o restas de potencias). Se derivan término por término y no requieren regla de producto, cociente ni cadena.

Ejemplo:

Tenemos la siguiente función:

$$y = 4x^3 + 2x^2 + 5x - 6$$

Se resuelve en partes, en este caso la podemos separar en "$4x^3$", "$2x^2$", "$5x$" y "-6"

$$y' = \frac{d}{dx}4x^3 \frac{d}{dx}2x^2 \frac{d}{dx}5x \frac{d}{dx} - 6$$

Nuevamente, hacemos uso de las fórmulas para resolver cada parte:

$y' = 4x^3$	$y' = 2x^2$	$y' = 5x$	$y' = -6$
$y' = 3(4x^{3-1})$	$y' = 2(2x^{2-1})$	$y' = 5(1)$	$y' = 0$
$y' = 12x^2$	$y' = 4x$	$y' = 5$	

Por lo tanto:

$$y' = 12x^2 + 4x + 5$$

Formulas

$\frac{d}{dx}u + v + w = \frac{d}{dx}u + \frac{d}{dx}v + \frac{d}{dx}w$
$\frac{d}{dx}uv = u\frac{d}{dx}v + v\frac{d}{dx}u$
$\frac{d}{dx}\frac{u}{v} = \frac{v\frac{d}{dx}u - u\frac{d}{dx}v}{v^2}$
$\frac{d}{dx}ku = k\frac{d}{dx}u$

Más ejercicios:

¿Cómo calculo la derivada de un polinomio?

https://es.khanacademy.org/math/calculus-all-old/taking-derivatives-calc/polynomial-functions-differentiation-calc/a/differentiating-polynomials-review

3. RADICALES

Son derivadas de funciones que incluyen raíces cuadradas. Se escriben como potencias fraccionarias, se convierte la raíz a exponente fraccionario, lo cual es de gran ayuda a la hora de resolver y da paso a poder hacer uso de las formulas.

Ejemplos:

Derivada de una raíz | Reglas de derivación

https://youtu.be/xr0_7dPW-lw?si=BuRuXkoPZ-18H56r

Tenemos la siguiente función:

$$y = \sqrt{3x^2 + 1}$$

En este tipo de funciones sabemos que $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, lo cual implica el uso de otra fórmula.

Entonces:

$$y' = (3x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$$

Hacemos uso de las fórmulas para resolver:

$$y' = (3x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$$

$$y' = \frac{1}{2}(3x^2 + 1)^{\frac{1}{2}-1}$$

Se resuelva los términos adentro de la potencia

entonces:

$$y' = 3x^2 \qquad y' = 1$$

$$y' = 2(3x^{2-1}) \qquad y' = 0$$

$$y' = 6x$$

$$y' = \frac{1}{2}(3x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}(6x)$$

Se multiplican los términos de los lados opuestos. $(\frac{1}{2})(6x) = 3x$

Por lo tanto:

$y' = 3x\ (3x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$ o pasando de nuevo a raíz: $\frac{3x}{\sqrt{3x^2+1}}$

4. EXPONENCIALES

Son derivadas de funciones que tienen un exponente variable, generalmente de la forma, a^x o e^x donde 'a' es una constante y 'x' es la variable independiente.

Derivar la siguiente función: $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

1. Reconocer quien es e^u, y u. En este caso:

$e^u = e^{1/x} \qquad u = 1/x$

2. Sustituir de acuerdo a la formula:

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{d}{dx}\frac{1}{x} = e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$$

Formulas

$\frac{d}{dx}e^u = e^u \frac{d}{dx}u$
$\frac{d}{dx}a^u = a^u \ln a \frac{d}{dx}u$

Aquí encontrarás más ejercicios resueltos:
Derivada de la función exponencial
https://www.funciones.xyz/derivada-de-la-funcion-exponencial/

5. LOGARITMICAS

Es igual a la derivada de la función dividida por la función, y por el logaritmo en base *a* de *e*.

Derivar: y= ln $(x^2 + 1)$

1. Identificar quien es *u* y derivarla directamente:

$$u = x^2 + 1. \qquad \frac{du}{dx} = 2x$$

2. Sustituirlo de acuerdo a la formula:

$$\frac{d}{dx}\ln(x^2+1) = \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2+1}$$

$$\frac{d}{dx}\ln(x^2+1) = \frac{2x}{x^2+1}$$

Formulas

$\frac{d}{dx} ln\, u = \frac{1}{u}\frac{d}{dx}u$
$\frac{d}{dx} log\, u = \frac{\log e}{u}\frac{d}{dx}u$
$\frac{d}{dx} log_a u = \frac{1}{(ln\, a)u}\frac{d}{dx}$

Más ejercicios resueltos con procedimiento:

Derivada de Logaritmo Natural

https://youtu.be/wI1joYQQ3CI?si=1EtEnwVduE7yvLT-

6. TRIGONOMETRICAS

Las derivadas trigonométricas se aplican a funciones que contienen razones trigonométricas como:

-Seno: sin x
-Coseno: cos x
-Tangente: tan x
-Cotangente: cot x
-Secante: sec x
-Cosecante: csc x

Estas funciones dependen del ángulo, tienen derivadas específicas, no se usan las reglas comunes como la potencia o logaritmo directamente. Algunas derivadas implican signos negativos, por lo tanto es clave no olvidar el signo.

Repasa con estos ejercicios:
Cálculo de derivadas de funciones trigonométricas
https://es.khanacademy.org/math/calculus-all-old/taking-derivatives-calc/trigonometric-functions-differentiation-calc/a/differentiating-trigonometric-functions-review

Formulas

$\frac{d}{dx} sen\, u = cos\, u \frac{d}{dx} u$
$\frac{d}{dx} cos\, u = -sen\, u \frac{d}{dx} u$
$\frac{d}{dx} sec\, u = sec\, u\, tg\, u \frac{d}{dx} u$
$\frac{d}{dx} tg\, u = sec^2 u \frac{d}{dx} u$
$\frac{d}{dx} cot\, u = csc^2 u \frac{d}{dx} u$
$\frac{d}{dx} csc\, u = -csc\, u\, cot\, u \frac{d}{dx} u$

Ejemplo:

Tenemos la siguiente función:

$y = \tan(5x^2 + 2)$

Debemos de identificar que elementos de la formula tenemos para poderlos aplicar a una formula, en este caso es:

$$\frac{d}{dx} tg\, u = sec^2 u \frac{d}{dx} u$$

Entonces:

$y' = sec^2 (5x^2 + 2) + \frac{d}{dx} u$

Derivamos "u", donde aquí es "$(5x^2 + 2)$" entonces:

$y' = 5x^2$

$y' = 2(5x^{2-1})$

$y' = 10x$

$y' = 2$

$y' = 0$

Por lo tanto:

$y' = sec^2(5x^2 + 2)(10x)$

$y' = (10x)\, sec^2 (5x^2 + 2)$

Formulas

$\frac{d}{dx} sen\, u = cos\, u \frac{d}{dx} u$
$\frac{d}{dx} cos\, u = -sen\, u \frac{d}{dx} u$
$\frac{d}{dx} sec\, u = sec\, u\, tg\, u \frac{d}{dx} u$
$\frac{d}{dx} tg\, u = sec^2 u \frac{d}{dx} u$
$\frac{d}{dx} cot\, u = csc^2 u \frac{d}{dx} u$
$\frac{d}{dx} csc\, u = -csc\, u\, cot\, u \frac{d}{dx} u$

Formulario

$\frac{d}{dx}c = 0$	$\frac{d}{dx}u^n = nu^{n-1}\frac{d}{dx}u$	$\frac{d}{dx}sen\,u = cos\,u\frac{d}{dx}u$	$\frac{d}{dx}csc\,u = -csc\,u\,cot\,u\frac{d}{dx}u$	$\frac{d}{dx}log_a u = \frac{1}{(ln\,a)u}\frac{d}{dx}$
$\frac{d}{dx}x = 1$	$\frac{d}{dx}\frac{u}{v} = \frac{v\frac{d}{dx}u - u\frac{d}{dx}v}{v^2}$	$\frac{d}{dx}cos\,u = -sen\,u\frac{d}{dx}u$	$\frac{d}{dx}arc\,sen\,u = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	
$\frac{d}{dx}u+v+w = \frac{d}{dx}u + \frac{d}{dx}v + \frac{d}{dx}w$	$\frac{d}{dx}ln\,u = \frac{1}{u}\frac{d}{dx}u$	$\frac{d}{dx}sec\,u = sec\,u\,tg\,u\frac{d}{dx}u$	$\frac{d}{dx}arc\,cos\,u = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$	
$\frac{d}{dx}ku = k\frac{d}{dx}u$	$\frac{d}{dx}log\,u = \frac{\log e}{u}\frac{d}{dx}u$	$\frac{d}{dx}tg\,u = sec^2 u\frac{d}{dx}u$	$\frac{d}{dx}arc\tan u = \frac{u'}{1+u^2}$	
$\frac{d}{dx}uv = u\frac{d}{dx}v + v\frac{d}{dx}u$	$\frac{d}{dx}e^u = e^u\frac{d}{dx}u$	$\frac{d}{dx}cot\,u = csc^2 u\frac{d}{dx}u$	$\frac{d}{dx}a^u = a^u lna\frac{d}{dx}u$	