Algèbre Linéaire

Automne 2023

Ce document est une tentative de polycopié pour le cours d'algèbre linéaire I d'automne 2023 11M010. Tous les exemples du cours n'y figurent pas, mais tout le reste y est (ou devrait y être).
Si vous trouvez une erreur (il y en a (plein)), faites une pull request sur github ou contactez-moi sur Telegram (alternis).
Liste des cours inclus dans le document :

- Cours du 21.9

Contents

1 Chapitre 1 - Espaces vectoriels **4**
1.1 Définitions, exemples et propriétés 4
1.2 Propriétés des solutions de systèmes homogènes 9
1.2.1 Démonstration de la propriété 2 9
1.3 Définition - Espace vectoriel 10
1.4 Définition - Sous-espace vectoriel 10
1.4.1 Exemples de sous-espaces vectoriels 11

Motivation

On souhaite résoudre un système d'équations linéaires.

Exemple 1

Une équation linéaire à 1 inconnue de la forme :

$$ax + b = c$$

Ici, x est l'inconnue et $a, b, c \in \mathbb{R}$ des constantes. On souhaite trouver $Sol \subset \mathbb{R}$ l'ensemble des solutions.

$$Sol = \begin{cases} \{\frac{c-b}{a}\}, \text{ si a} \neq 0 \\ \mathbb{R}, \text{ si a} = 0 \text{ et } b = c \\ \emptyset, \text{ si a} = 0 \text{ et } b \neq c \end{cases}$$

Définition 1

Un système à m équations linéaires à n variables à coefficients réels* est constitué de m équations de la forme :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

Les coefficients du système sont $a_{11}, \ldots, a_{1n}, \ldots, a_{m1}, \ldots, a_{mn}$. On appelle les coefficients $b_1, \ldots, b_m$ les "coefficients libres". Dans le cas particulier où $b_1 = \cdots = b_m$, on dit que le système est **homogène**.

**On parle aussi de systèmes à coefficients complexes. Ils sont abordés plus loin, dans le chapitre X.*

Résoudre un tel système revient à trouver son ensemble de solutions Sol.

$$Sol = \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \text{ où } \alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n\}$$

1 Chapitre 1 - Espaces vectoriels

1.1 Définitions, exemples et propriétés

Pour motiver la définition, on considère quelques exemples de systèmes linéaires.

Exemple a)

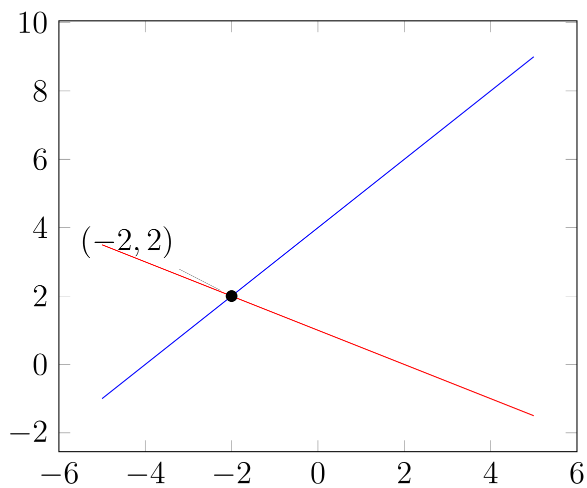
$n = 2, m = 2$

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ x - y = -4 \end{cases}$$

$$x = -4 + y \Rightarrow 3y = 6 \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$Sol = \{(-2, 2)\}$$

Cette solution a un sens géométrique : les droites d'équations décrites dans le systèmes se croisent bien au point $(-2, 2)$.

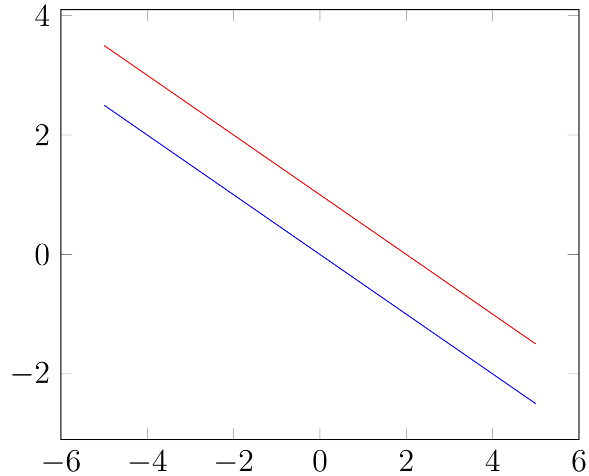


Exemple b)

$n = 2, m = 2$

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow Sol = \emptyset$$

Les droites ne se croisent effectivement jamais.

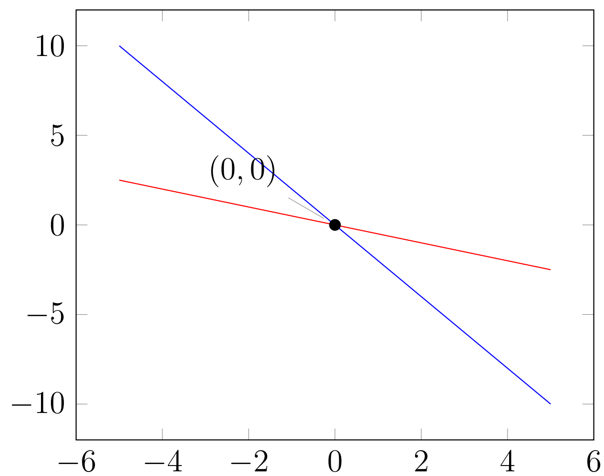


Exemple c)

$n = 2, m = 2$

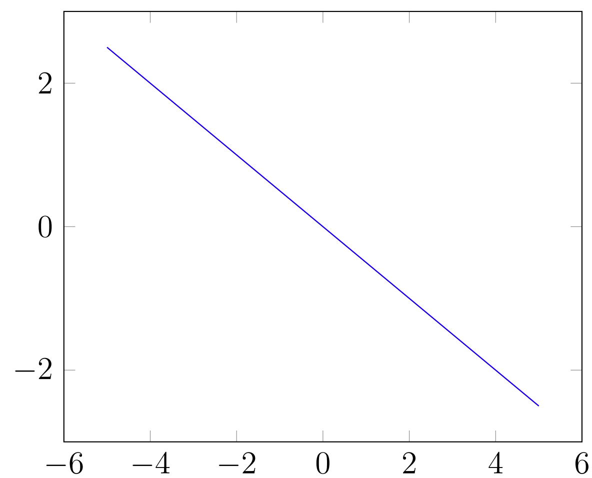
$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow Sol = \{(0,0)\}$$

Ce système est homogène.



Exemple d)

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow Sol = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = -\frac{x}{2}\}$$

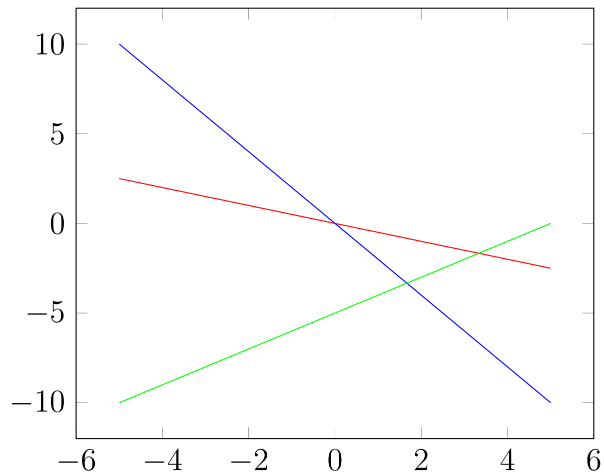


Les deux droites sont superposées, l'ensemble des solutions prend donc la forme d'une droite.

Exemple e)

Ici, $m = 3, n = 2$.

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + y = 0 \\ x - y = 5 \end{cases} = \emptyset$$



Il n'y a pas de solution, puisqu'il n'existe aucun point d'intersection des trois droites.

1.2 Propriétés des solutions de systèmes homogènes

On observe que l'ensemble de solutions d'un système homogène à m équations et n inconnues satisfait les trois propriétés suivantes :

1. $\alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_n = 0$ est toujours une solution.
2. si $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ et $(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n)$ sont deux solutions, alors leur somme $(\alpha_1 + \alpha'_1, \ldots, \alpha_n + \alpha'_n)$ est aussi une solution.

1.2.1 Démonstration de la propriété 2

Soit $i \in \{1, \ldots, m\}$.

$$a_{i1}(\alpha_1 + \alpha'_1) + \cdots + a_{in}(\alpha_n + \alpha'_n)$$

On a remplacé les facteurs $(x_1, \ldots, x_n)$ par les solutions supposées. Par distributivité, on obtient :

$$\begin{aligned}
&a_{i1}\alpha_1 + a_{i1}\alpha'_1 + \cdots + a_{in}\alpha_n + a_{in}\alpha'_n \\
&= (a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \cdots + a_{in}\alpha_n) + (a_{i1}\alpha'_1 + \cdots + a_{in}\alpha'_n) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Or, on sait déjà que $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ et $(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n)$ sont des solutions. On peut en conclure que leur addition donne également zéro, et que notre solution supposée $(\alpha_1 + \alpha'_1, \ldots, \alpha_n + \alpha'_n)$ en est bien une.

On peut prouver la propriété 3) de la même façon.

1.3 Définition - Espace vectoriel

Un **espace vectoriel réel** est un ensemble V muni de deux opérations :

1. "addition" : $V \times V \to V, (v, v') \to v + v'$
2. "multiplication par un scalaire" : $\mathbb{R} \times V \to V, (\alpha, v) \to \alpha \cdot v$

Ces deux opérations doivent satisfaire une liste d'axiomes pour que l'ensemble soit un espace vectoriel.

- $\forall u, w, u \in V$, on a $(u+w)+u = v+(w+u)$, l'associativité de l'addition.
- $\forall u, w \in V, v + w = w + v$, commutativité de l'addition
- Il existe un élément noté $\mathbb{0} \in V$ tel que $\mathbb{0} + v = v \quad \forall v \in V$
- $\forall v \in V \exists - v : v + (-v) = \mathbb{0}$
- $\alpha * (u + v) = \alpha * u + \alpha * v \forall \alpha \in \mathbb{R}, u, v \in V$
- $(\alpha + \beta) * v = \alpha * v + \beta * v \forall \alpha, \beta, \in \mathbb{R}, v \in V$, distributivité de l'addition dans $\mathbb{R}$
- $(\alpha * \beta) * v = \alpha * (\beta * v)$, associativité de la multiplication dans $\mathbb{R}$ par un scalaire.
- $1 \in R : 1 * v = v \quad \forall v \in V$

On appelle les éléments de l'espace vectoriel V des **vecteurs** et les éléments du corps K sur le quel V est défini des **scalaires**.

1.4 Définition - Sous-espace vectoriel

Soit V un espace vectoriel sur K avec K $= \mathbb{R}$ ou K $= \mathbb{C}$. Un sous-ensemble $U \subseteq V$ est dit un sous-espace vectoriel de V si :

- $\mathbb{0}_V \in U$
- $u, u' \in U \Rightarrow u + u' \in U$
- $u \in U \Rightarrow \lambda * u \in U \quad \forall \alpha \in \mathrm{K}$

En d'autres termes, un sous-ensemble de V est un sous-espace vectoriel de V s'il contient $\mathbb{0}_V$ et s'il est clos par rapport aux 2 opérations de V.

1.4.1 Exemples de sous-espaces vectoriels

a) Comme vu dans l'introduction, l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à coefficients dans un corps K (on prend $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$) est un espace vectoriel sur K.
b) $V = \mathbb{R}^2 = \{\overrightarrow{(x,y)} : x, y \in \mathbb{R}\}$
Plus généralement, $\forall n \geq 1$:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n)\}$$

est un espace vectoriel muni des opérations d'addition et de multiplication par un scalaire.
Un exemple de sous-espace de $\mathbb{R}^n$: $n = 2$. $U \in \mathbb{R}^2$ est un sous-espace vectoriel si :

- $U = \{\mathbb{0}_{R^2}\}$
- $U = \{y = 0\}$ ou plus généralement...
- $U =$ n'importe quelle droite dans $\mathbb{R}^2$ passant par 0.

Dans $\mathbb{R}^2$, les seuls sous-espaces vectoriels sont $\{\mathbb{0}_{R^2}\}$, $\mathbb{R}^2$ et les droites passant par $\mathbb{0}_{\mathbb{R}^2}$
c)

$$\mathbb{F} = \{\text{fonctions réelles} : f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$$

est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ pour les opérations suivantes :

- $f, f' \leftarrow \mathbb{F} \to f + f'$ est défini par :

$$(f + f')(x) = f(x) + f'(x)$$

- $f \in \mathbb{F}, \alpha \in \mathbb{R} \to \alpha \cdot f$ est défini par :

$$(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x)$$

On a des exemples de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{F}$:

$$\mathrm{P}_n \subseteq \mathrm{P} \subseteq \mathrm{C} \subseteq \mathbb{F}$$

avec P_n les polynômes de degrés $\leq n$, P les polynômes, C les fonctions continues. Tous ces sous-espaces respectent les axiomes. title: Attention

Définissons P_{degn} l'ensemble des polynômes de degré exactement n, $n \geq 1$. $P_{degn} \subseteq F$ n'est pas un sous-espace vectoriel de F car il ne contient pas la fonction $\mathbb{0}_f$.
d) On peut définir les matrices carrées $2 * 2$ à coefficients réels sur $\mathbb{R}$. Les opérations suivantes sont définies :

- Addition
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix}$$

- Multiplication par un scalaire
$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha * a & \alpha * b \\ \alpha * c & \alpha * d \end{pmatrix}$$

Plus généralement, pour tout $m, n \geq 1$, on note $\mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de taille $m * n$ là coefficients réels, c'est-à-dire des tableaux à m lignes et n colonnes de la forme

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

avec $a_{ij} \in \mathbb{R}$ pour $i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}$

Similairement, $M_{m,n}(K)$ est un espace vectoriel sur K. La démonstration est similaire à celle sur $\mathbb{R}$. On définit $\mathbb{0}_{M_{m,n}(K)}$ comme la matrice $m * n$ dont tous les coefficients sont nuls.

Remarque :

Généralement, le plus petit sous-espace vectoriel contenant $U \cup U'$ est le sous-espace vectoriel noté $U + U'$ appelé **somme** de U et U', défini par :

$$U + U' = \{u + u' \quad | \quad u \in U, u' \in U'\}$$

On peut démontrer facilement que $U + U'$ est bien un sous-espace vectoriel de V.
Suite page 9 du document 22.9.pdf