

Algèbre Linéaire

Automne 2023

Ce document est une tentative de polycopié pour le cours d'algèbre linéaire I d'automne 2023 11M010. Tous les exemples du cours n'y figurent pas, mais tout le reste y est (ou devrait y être).

Si vous trouvez une erreur (il y en a (plein)), faites une pull request sur github ou contactez-moi sur Telegram (alternis).

Liste des cours inclus dans le document :

- Cours du 21.9

Contents

| | | |
|----------|--|----------|
| 1 | Chapitre 1 - Espaces vectoriels | 4 |
| 1.1 | Définitions, exemples et propriétés | 4 |
| 1.2 | Propriétés des solutions de systèmes homogènes | 9 |
| 1.2.1 | Démonstration de la propriété 2 | 9 |
| 1.3 | Définition - Espace vectoriel | 10 |
| 1.4 | Définition - Sous-espace vectoriel | 10 |
| 1.4.1 | Exemples de sous-espaces vectoriels | 11 |

Motivation

On souhaite résoudre un système d'équations linéaires.

Exemple 1

Une équation linéaire à 1 inconnue de la forme :

$$ax + b = c$$

Ici, x est l'inconnue et $a, b, c \in \mathbb{R}$ des constantes. On souhaite trouver $Sol \subset \mathbb{R}$ l'ensemble des solutions.

$$Sol = \begin{cases} \{\frac{c-b}{a}\}, & \text{si } a \neq 0 \\ \mathbb{R}, & \text{si } a = 0 \text{ et } b = c \\ \emptyset, & \text{si } a = 0 \text{ et } b \neq c \end{cases}$$

Définition 1

Un système à m équations linéaires à n variables à coefficients réels* est constitué de m équations de la forme :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Les coefficients du système sont $a_{11}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{m1}, \dots, a_{mn}$. On appelle les coefficients b_1, \dots, b_m les "coefficients libres". Dans le cas particulier où $b_1 = \dots = b_m$, on dit que le système est **homogène**.

**On parle aussi de systèmes à coefficients complexes. Ils sont abordés plus loin, dans le chapitre X.*

Résoudre un tel système revient à trouver son ensemble de solutions Sol .

$$Sol = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \text{ où } \alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\}$$

1 Chapitre 1 - Espaces vectoriels

1.1 Définitions, exemples et propriétés

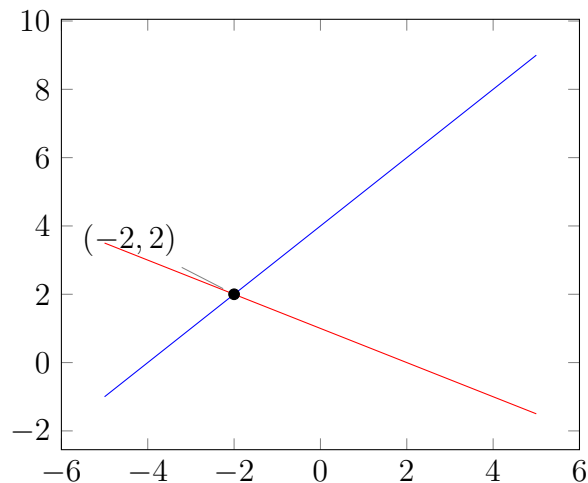
Pour motiver la définition, on considère quelques exemples de systèmes linéaires.

Exemple a)

$$n = 2, m = 2$$

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ x - y = -4 \end{cases}$$
$$x = -4 + y \Rightarrow 3y = 6 \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$
$$Sol = \{(-2, 2)\}$$

Cette solution a un sens géométrique : les droites d'équations décrites dans le système se croisent bien au point $(-2, 2)$.

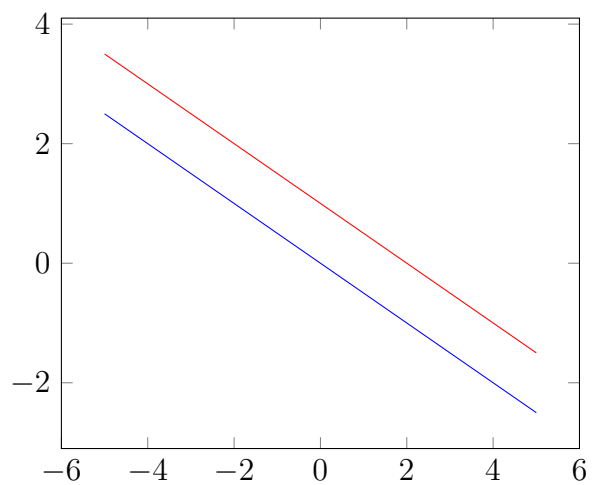


Exemple b)

$$n = 2, m = 2$$

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow Sol = \emptyset$$

Les droites ne se croisent effectivement jamais.

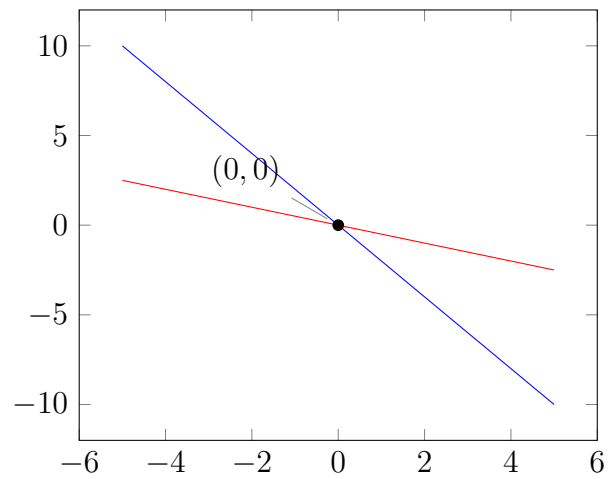


Exemple c)

$$n = 2, m = 2$$

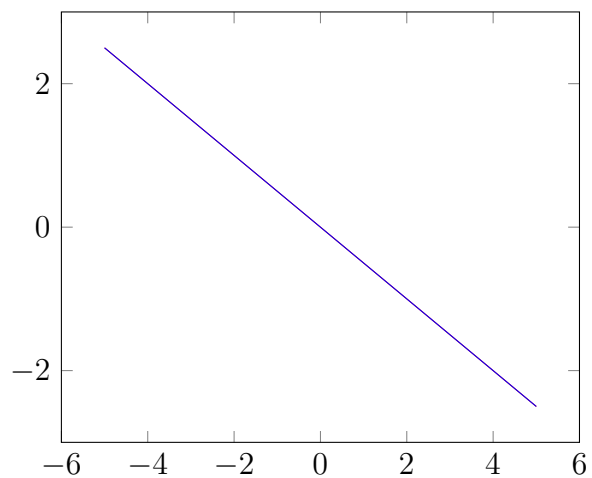
$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow Sol = \{(0, 0)\}$$

Ce système est homogène.



Exemple d)

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow Sol = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -\frac{x}{2}\}$$

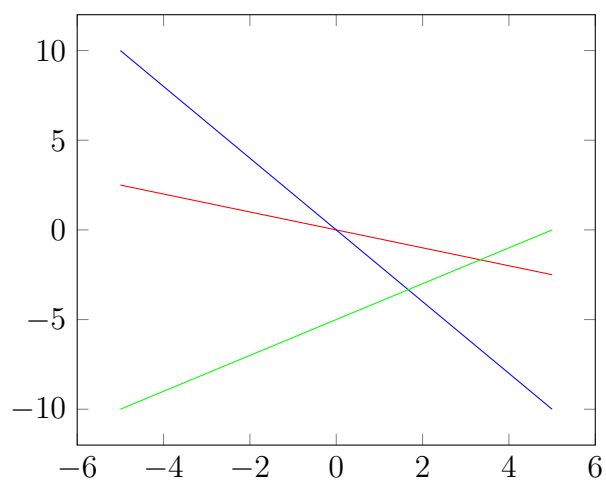


Les deux droites sont superposées, l'ensemble des solutions prend donc la forme d'une droite.

Exemple e)

Ici, $m = 3, n = 2$.

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + y = 0 \\ x - y = 5 \end{cases} = \emptyset$$



Il n'y a pas de solution, puisqu'il n'existe aucun point d'intersection des trois droites.

1.2 Propriétés des solutions de systèmes homogènes

On observe que l'ensemble de solutions d'un système homogène à m équations et n inconnues satisfait les trois propriétés suivantes :

1. $\alpha_1 = 0, \dots, \alpha_n = 0$ est toujours une solution.
2. si $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ et $(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n)$ sont deux solutions, alors leur somme $(\alpha_1 + \alpha'_1, \dots, \alpha_n + \alpha'_n)$ est aussi une solution.

1.2.1 Démonstration de la propriété 2

Soit $i \in \{1, \dots, m\}$.

$$a_{i1}(\alpha_1 + \alpha'_1) + \dots + a_{in}(\alpha_n + \alpha'_n)$$

On a remplacé les facteurs (x_1, \dots, x_n) par les solutions supposées. Par distributivité, on obtient :

$$\begin{aligned} & a_{i1}\alpha_1 + a_{i1}\alpha'_1 + \dots + a_{in}\alpha_n + a_{in}\alpha'_n \\ &= (a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \dots + a_{in}\alpha_n) + (a_{i1}\alpha'_1 + \dots + a_{in}\alpha'_n) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Or, on sait déjà que $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ et $(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n)$ sont des solutions. On peut en conclure que leur addition donne également zéro, et que notre solution supposée $(\alpha_1 + \alpha'_1, \dots, \alpha_n + \alpha'_n)$ en est bien une.

On peut prouver la propriété 3) de la même façon.

1.3 Définition - Espace vectoriel

Un **espace vectoriel réel** est un ensemble V muni de deux opérations :

1. "addition" : $V \times V \rightarrow V, (v, v') \rightarrow v + v'$
2. "multiplication par un scalaire" : $\mathbb{R} \times V \rightarrow V, (\alpha, v) \rightarrow \alpha \cdot v$

Ces deux opérations doivent satisfaire une liste d'axiomes pour que l'ensemble soit un espace vectoriel.

- $\forall u, w, u \in V$, on a $(u+w)+u = v+(w+u)$, l'associativité de l'addition.
- $\forall u, w \in V, v + w = w + v$, commutativité de l'addition
- Il existe un élément noté $\mathbf{0} \in V$ tel que $\mathbf{0} + v = v \quad \forall v \in V$
- $\forall v \in V \exists -v : v + (-v) = \mathbf{0}$
- $\alpha * (u + v) = \alpha * u + \alpha * v \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, u, v \in V$
- $(\alpha + \beta) * v = \alpha * v + \beta * v \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, v \in V$, distributivité de l'addition dans \mathbb{R}
- $(\alpha * \beta) * v = \alpha * (\beta * v)$, associativité de la multiplication dans \mathbb{R} par un scalaire.
- $1 \in \mathbb{R} : 1 * v = v \quad \forall v \in V$

On appelle les éléments de l'espace vectoriel V des **vecteurs** et les éléments du corps K sur le quel V est défini des **scalaires**.

1.4 Définition - Sous-espace vectoriel

Soit V un espace vectoriel sur K avec $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$. Un sous-ensemble $U \subseteq V$ est dit un sous-espace vectoriel de V si :

- $\mathbf{0}_V \in U$
- $u, u' \in U \Rightarrow u + u' \in U$
- $u \in U \Rightarrow \lambda * u \in U \quad \forall \alpha \in K$

En d'autres termes, un sous-ensemble de V est un sous-espace vectoriel de V s'il contient $\mathbf{0}_V$ et s'il est clos par rapport aux 2 opérations de V .

1.4.1 Exemples de sous-espaces vectoriels

a) Comme vu dans l'introduction, l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à coefficients dans un corps K (on prend $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$) est un espace vectoriel sur K .

b) $V = \mathbb{R}^2 = \{(x, \vec{y}) : x, y \in \mathbb{R}\}$

Plus généralement, $\forall n \geq 1$:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n)\}$$

est un espace vectoriel muni des opérations d'addition et de multiplication par un scalaire.

Un exemple de sous-espace de \mathbb{R}^n : $n = 2$. $U \in \mathbb{R}^2$ est un sous-espace vectoriel si :

- $U = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$
- $U = \{y = 0\}$ ou plus généralement...
- $U =$ n'importe quelle droite dans \mathbb{R}^2 passant par 0.

Dans \mathbb{R}^2 , les seuls sous-espaces vectoriels sont $\{0_{\mathbb{R}^2}\}$, \mathbb{R}^2 et les droites passant par $0_{\mathbb{R}^2}$

c)

$$\mathbb{F} = \{\text{fonctions réelles} : f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$$

est un espace vectoriel sur \mathbb{R} pour les opérations suivantes :

- $f, f' \in \mathbb{F} \rightarrow f + f'$ est défini par :

$$(f + f')(x) = f(x) + f'(x)$$

- $f \in \mathbb{F}, \alpha \in \mathbb{R} \rightarrow \alpha \cdot f$ est défini par :

$$(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x)$$

On a des exemples de sous-espaces vectoriels de \mathbb{F} :

$$P_n \subseteq P \subseteq C \subseteq \mathbb{F}$$

avec P_n les polynômes de degrés $\leq n$, P les polynômes, C les fonctions continues. Tous ces sous-espaces respectent les axiomes. title: Attention

Définissons $P_{\text{deg}n}$ l'ensemble des polynômes de degré exactement n , $n \geq 1$. $P_{\text{deg}n} \subseteq F$ n'est pas un sous-espace vectoriel de F car il ne contient pas la fonction $\mathbb{0}_f$.

d) On peut définir les matrices carrées $2 * 2$ à coefficients réels sur \mathbb{R} . Les opérations suivantes sont définies :

- Addition

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + a' & b + b' \\ c + c' & d + d' \end{pmatrix}$$

- Multiplication par un scalaire

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha * a & \alpha * b \\ \alpha * c & \alpha * d \end{pmatrix}$$

Plus généralement, pour tout $m, n \geq 1$, on note $M_{m,n}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de taille $m * n$ à coefficients réels, c'est-à-dire des tableaux à m lignes et n colonnes de la forme

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

avec $a_{ij} \in \mathbb{R}$ pour $i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}$

Similairement, $M_{m,n}(K)$ est un espace vectoriel sur K . La démonstration est similaire à celle sur \mathbb{R} . On définit $\mathbb{0}_{M_{m,n}(K)}$ comme la matrice $m * n$ dont tous les coefficients sont nuls.

Remarque :

Généralement, le plus petit sous-espace vectoriel contenant $U \cup U'$ est le sous-espace vectoriel noté $U + U'$ appelé ****somme**** de U et U' , défini par :

$$U + U' = \{u + u' \mid u \in U, u' \in U'\}$$

On peut démontrer facilement que $U + U'$ est bien un sous-espace vectoriel de V .

Suite page 9 du document 22.9.pdf