Algèbre Linéaire

Louis Gérard

Automne 2023

Motivation

On souhaite résoudre un système d'équations linéaires.

Exemple 1

Une équation linéaire à 1 inconnue de la forme :

$$ax + b = c$$

Ici, x est l'inconnue et $a, b, c \in \mathbb{R}$ des constantes. On souhaite trouver $Sol \subset \mathbb{R}$ l'ensemble des solutions.

$$Sol = \begin{cases} \{\frac{c-b}{a}\}, \text{ si a} \neq 0 \\ \mathbb{R}, \text{ si a} = 0 \text{ et } b = c \\ \emptyset, \text{ si a} = 0 \text{ et } b \neq c \end{cases}$$

Définition 1

Un système à m équations linéaires à n variables à coefficients réels* est constitué de m équations de la forme :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Les coefficients du système sont $a_{11}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{m1}, \dots, a_{mn}$. On appelle les coefficients $b_1, \dots, b_m$ les "coefficients libres". Dans le cas particulier où $b_1 = \dots = b_m$, on dit que le système est **homogène**.

**On parle aussi de systèmes à coefficients complexes. Ils sont abordés plus loin, dans le chapitre X.*

Résoudre un tel système revient à trouver son ensemble de solutions Sol.

$$Sol = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \text{ où } \alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\}$$

1 Chapitre 1 - Espaces vectoriels

1.1 Définitions, exemples et propriétés

Pour motiver la définition, on considère quelques exemples de systèmes linéaires.

Exemple a)

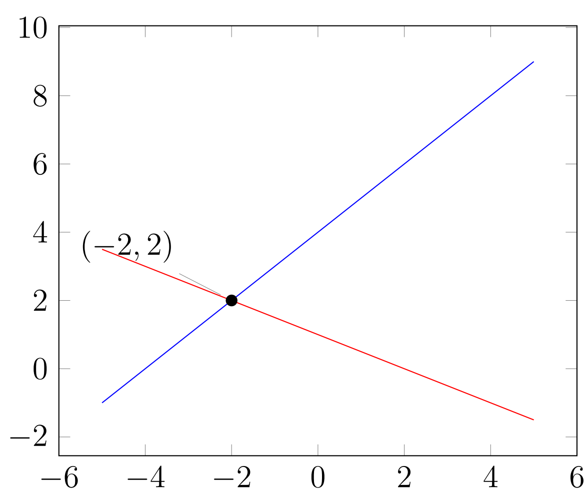
$n = 2, m = 2$

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ x - y = -4 \end{cases}$$

$$x = -4 + y \Rightarrow 3y = 6 \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$Sol = \{(-2, 2)\}$$

Cette solution a un sens géométrique : les droites d'équations décrites dans le systèmes se croisent bien au point $(-2, 2)$.

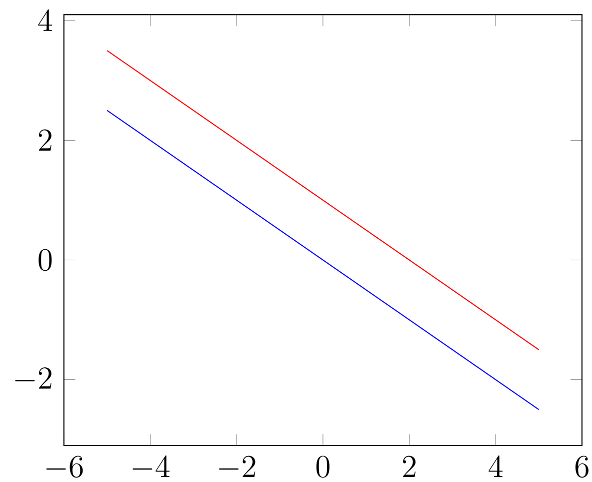


Exemple b)

$n = 2, m = 2$

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow Sol = \emptyset$$

Les droites ne se croisent effectivement jamais.

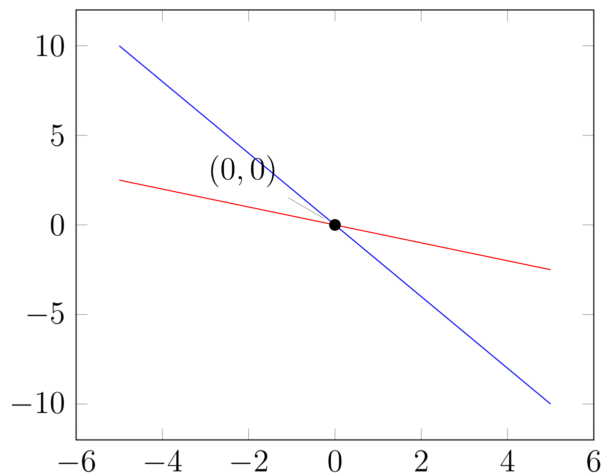


Exemple c)

$n = 2, m = 2$

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow Sol = \{(0,0)\}$$

Ce système est homogène.



Exemple d)

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow Sol = \{(0,0)\}$$