Algèbre Linéaire

Automne 2023

Ce document est une tentative de polycopié pour le cours d'algèbre linéaire I d'automne 2023 11M010. Tous les exemples du cours n'y figurent pas, mais tout le reste y est (ou devrait y être).
Si vous trouvez une erreur (il y en a (plein)), faites une pull request sur github ou contactez-moi sur Telegram (alternis).
Liste des cours inclus dans le document :

- Cours du 21.9

Contents

Motivation

On souhaite résoudre un système d'équations linéaires.

Exemple 1

Une équation linéaire à 1 inconnue de la forme :

$$ax + b = c$$

Ici, x est l'inconnue et $a, b, c \in \mathbb{R}$ des constantes. On souhaite trouver $Sol \subset \mathbb{R}$ l'ensemble des solutions.

$$Sol = \begin{cases} \{\frac{c-b}{a}\}, \text{ si a} \neq 0 \\ \mathbb{R}, \text{ si a} = 0 \text{ et } b = c \\ \emptyset, \text{ si a} = 0 \text{ et } b \neq c \end{cases}$$

Définition 1

Un système à m équations linéaires à n variables à coefficients réels* est constitué de m équations de la forme :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Les coefficients du système sont $a_{11}, \ldots, a_{1n}, \ldots, a_{m1}, \ldots, a_{mn}$. On appelle les coefficients $b_1, \ldots, b_m$ les "coefficients libres". Dans le cas particulier où $b_1 = \cdots = b_m$, on dit que le système est **homogène**.

**On parle aussi de systèmes à coefficients complexes. Ils sont abordés plus loin, dans le chapitre X.*

Résoudre un tel système revient à trouver son ensemble de solutions Sol.

$$Sol = \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \text{ où } \alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n\}$$

1 Chapitre 1 - Espaces vectoriels

1.1 Définitions, exemples et propriétés

Pour motiver la définition, on considère quelques exemples de systèmes linéaires.

Exemple a)

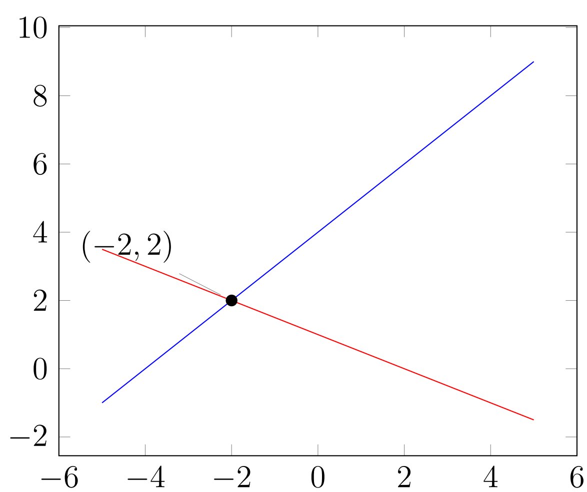
$n = 2, m = 2$

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ x - y = -4 \end{cases}$$

$$x = -4 + y \Rightarrow 3y = 6 \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$Sol = \{(-2, 2)\}$$

Cette solution a un sens géométrique : les droites d'équations décrites dans le systèmes se croisent bien au point $(-2, 2)$.

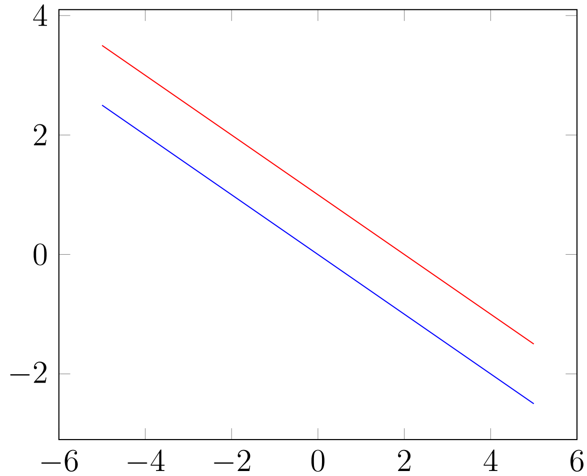


Exemple b)

$n = 2, m = 2$

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow Sol = \emptyset$$

Les droites ne se croisent effectivement jamais.

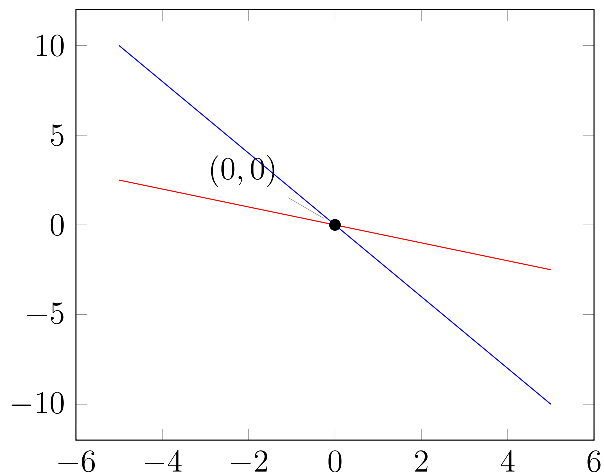


Exemple c)

$n = 2, m = 2$

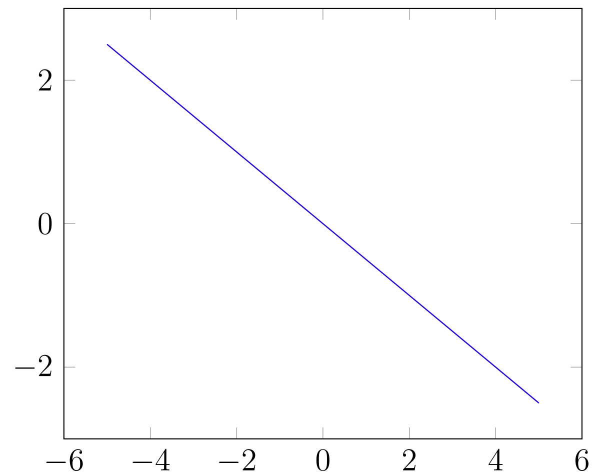
$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow Sol = \{(0,0)\}$$

Ce système est homogène.



Exemple d)

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow Sol = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = -\frac{x}{2}\}$$

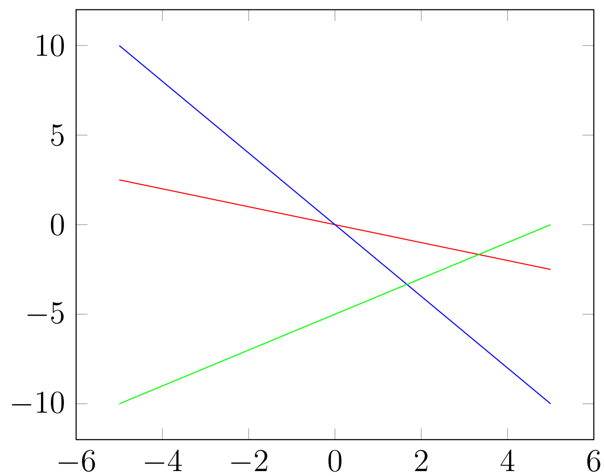


Les deux droites sont superposées, l'ensemble des solutions prend donc la forme d'une droite.

Exemple e)

Ici, $m = 3, n = 2$.

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + y = 0 \\ x - y = 5 \end{cases} = \emptyset$$



Il n'y a pas de solution, puisqu'il n'existe aucun point d'intersection des trois droites.

1.2 Propriétés des solutions de systèmes homogènes

On observe que l'ensemble de solutions d'un système homogène à m équations et n inconnues satisfait les trois propriétés suivantes :

1. $\alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_n = 0$ est toujours une solution.
2. si $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ et $(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n)$ sont deux solutions, alors leur somme $(\alpha_1 + \alpha'_1, \ldots, \alpha_n + \alpha'_n)$ est aussi une solution.

1.2.1 Démonstration de la propriété 2

Soit $i \in \{1, \ldots, m\}$.

$$a_{i1}(\alpha_1 + \alpha'_1) + \cdots + a_{in}(\alpha_n + \alpha'_n)$$

On a remplacé les facteurs $(x_1, \ldots, x_n)$ par les solutions supposées. Par distributivité, on obtient :

$$\begin{aligned}
&a_{i1}\alpha_1 + a_{i1}\alpha'_1 + \cdots + a_{in}\alpha_n + a_{in}\alpha'_n \\
&= (a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \cdots + a_{in}\alpha_n) + (a_{i1}\alpha'_1 + \cdots + a_{in}\alpha'_n) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Or, on sait déjà que $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ et $(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n)$ sont des solutions. On peut en conclure que leur addition donne également zéro, et que notre solution supposée $(\alpha_1 + \alpha'_1, \ldots, \alpha_n + \alpha'_n)$ en est bien une.

On peut prouver la propriété 3) de la même façon.

1.3 Définition d'un espace vectoriel

Un **espace vectoriel réel** est un ensemble V muni de deux opérations :

1. "addition" : $V \times V \to V, (v, v') \to v + v'$
2. "multiplication par un scalaire" : $\mathbb{R} \times V \to V, (\alpha, v) \to \alpha \cdot v$

Ces deux opérations doivent satisfaire une liste d'axiomes pour que l'ensemble soit un espace vectoriel.

- $\forall u, w, u \in V$, on a $(u+w)+u = v+(w+u)$, l'associativité de l'addition.
- $\forall u, w \in V, v + w = w + v$, commutativité de l'addition
- Il existe un élément noté $\nvdash \in V$ tel que $\nvdash + v = v \quad \forall v \in V$
- $\forall v \in V \exists -v : v + (-v) = \nvdash$
- $\alpha * (u + v) = \alpha * u + \alpha * v \forall \alpha \in \mathbb{R}, u, v \in V$
- $(\alpha + \beta) * v = \alpha * v + \beta * v \forall \alpha, \beta, \in \mathbb{R}, v \in V$, distributivité de l'addition dans $\mathbb{R}$
- $(\alpha * \beta) * v = \alpha * (\beta * v)$, associativité de la multiplication dans $\mathbb{R}$ par un scalaire.
- $1 \in R : 1 * v = v \quad \forall v \in V$

On appelle les éléments de l'espace vectoriel V des **vecteurs** et les éléments du corps K sur le quel V est défini des **scalaires**.