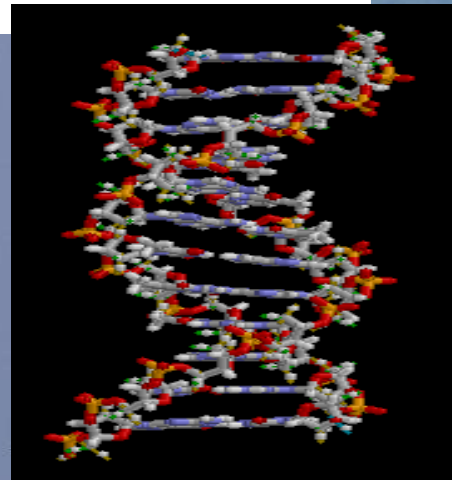

SISTEMAS INTELIGENTES 1

Computação Natural

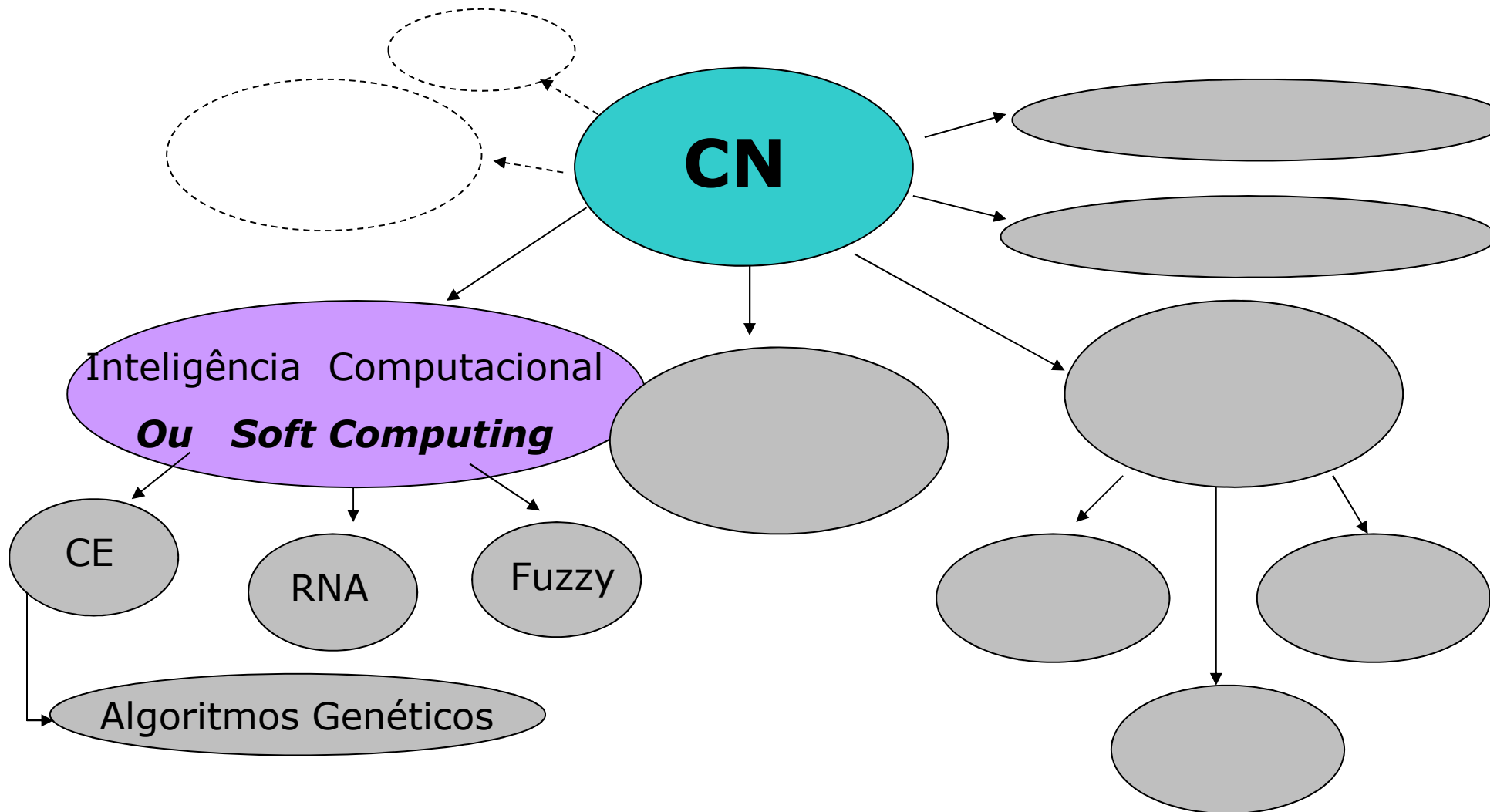
(Sistemas *Fuzzy* ou *Sistemas Nebulosos*)

Computação Natural (CN)

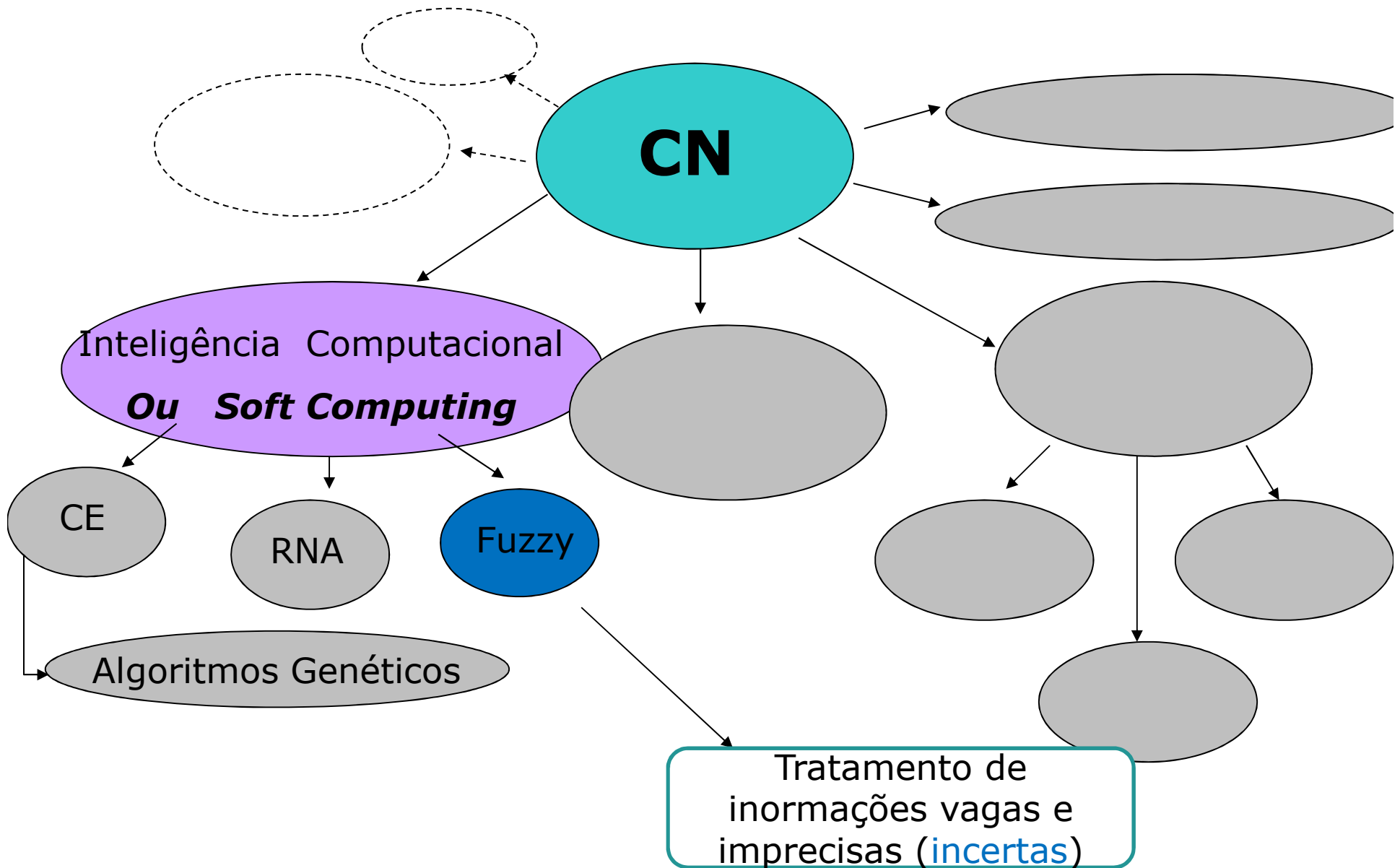
- Sistemas Computacionais que utilizam algum mecanismo inspirado na natureza para o processamento de informação
- Sistemas Bioinspirados



Esquema Geral da Computação Natural

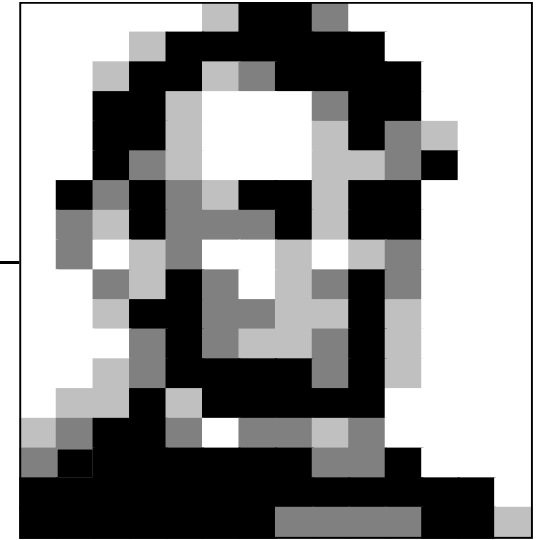


Esquema Geral da Computação Natural



Incerteza

Incerteza Probabilística x Incerteza Possibilística



A **probabilidade** de tirar uma bola escura é 0.8

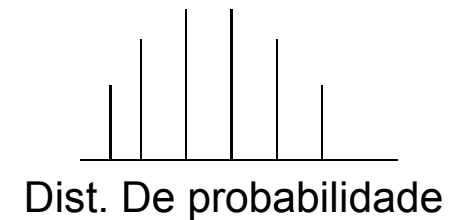
teoria da probabilidade

A **possibilidade** da bola retirada ser escura é 0.8

teoria fuzzy

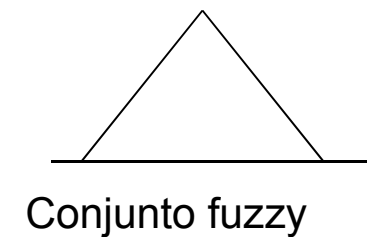
Variável aleatória

Distribuição de
Probabilidades

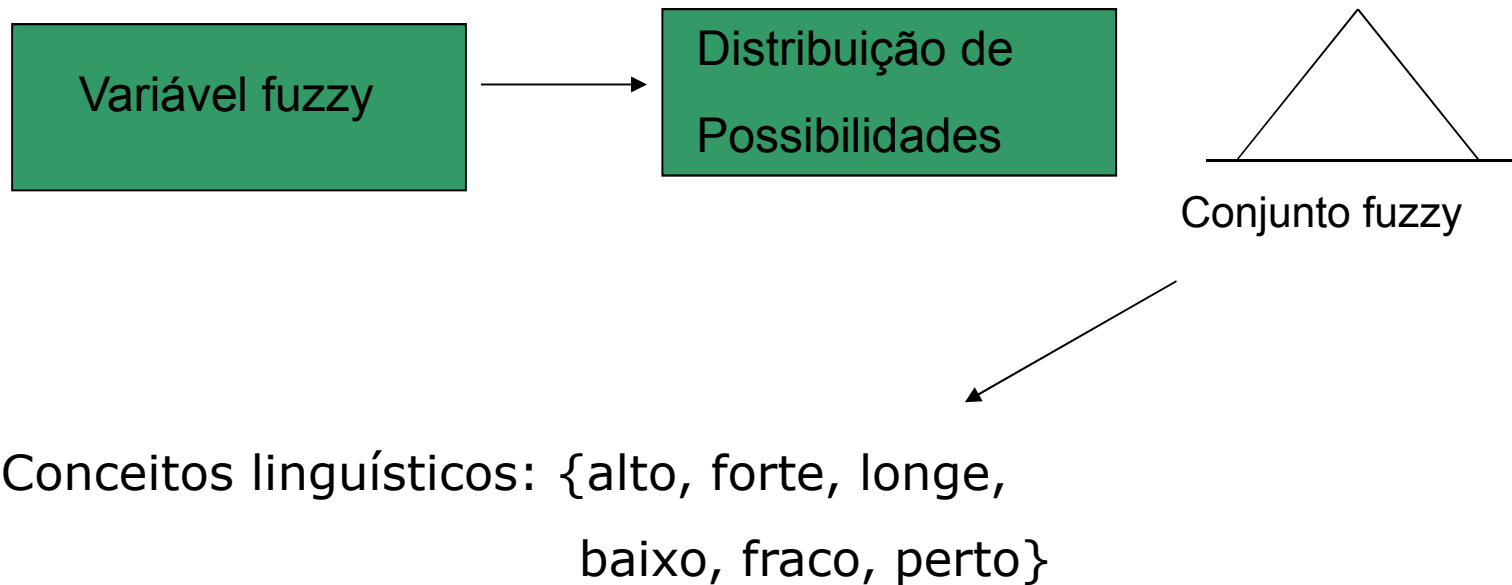


Variável fuzzy

Distribuição de
Possibilidades



Incerteza Possibilística: Fuzzy





Sistemas Fuzzy

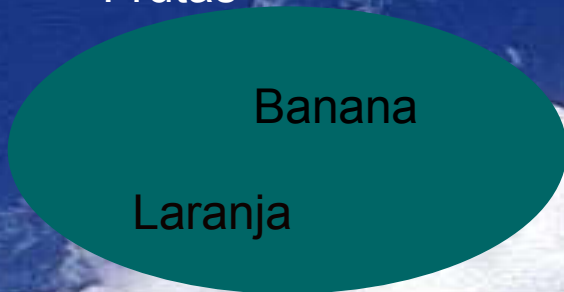
A teoria de Sistemas fuzzy está fortemente embasada na teoria de conjuntos fuzzy.

Portanto, o conceito de pertinência representa um aspecto fundamental para o entendimento desta teoria.

Conjuntos Crisp x Fuzzy (Nebulosos)

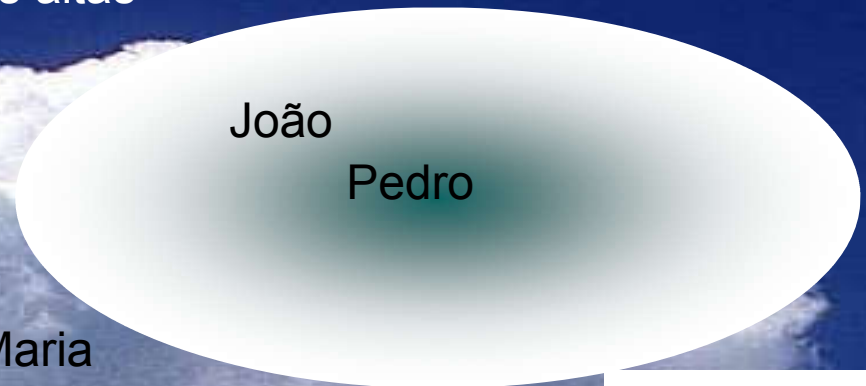
Conjuntos fuzzy foram propostos por Zadeh em 1965 e formam a base para a linguagem natural onde o conceito de pertencer é gradual

Frutas



Cenoura

Pessoas altas



Maria

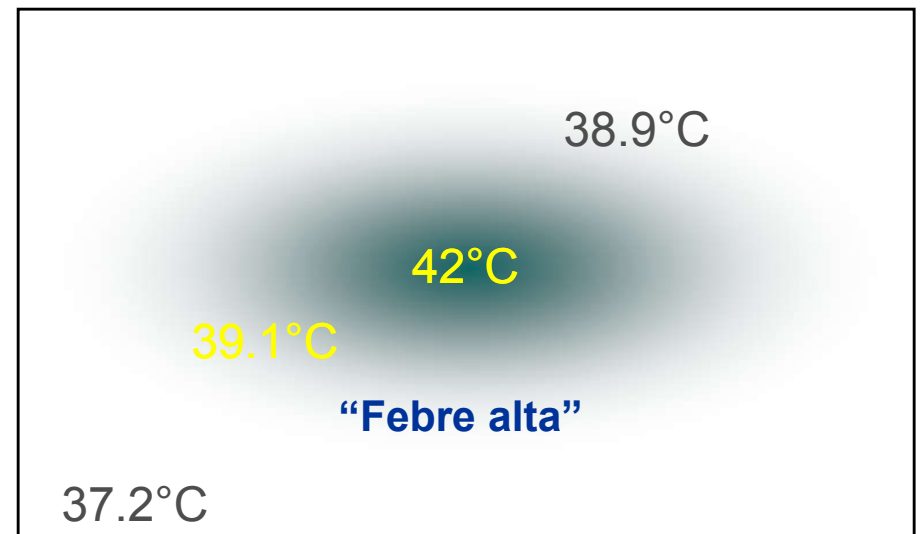
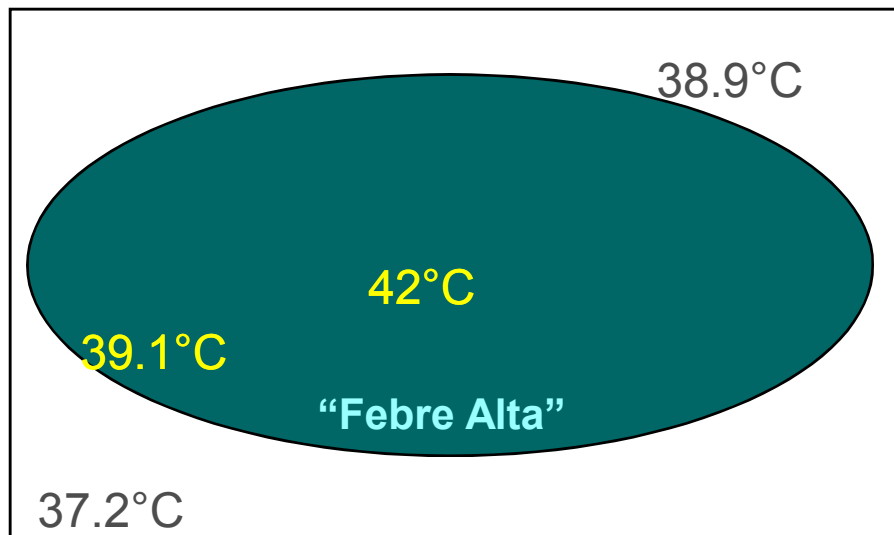
Pedro: 1,98m

João: 1,70m

Maria: 1,50

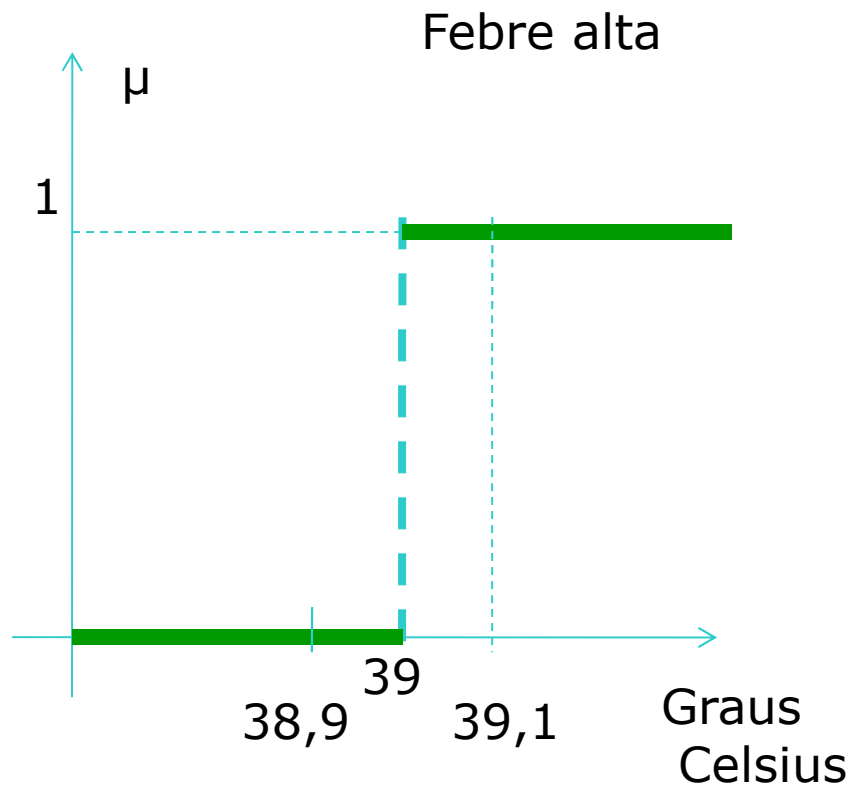
Banana é fruta (crisp) x **Pedro é alto** (fuzzy)

Conjuntos Crisp x Fuzzy (mesma variável)

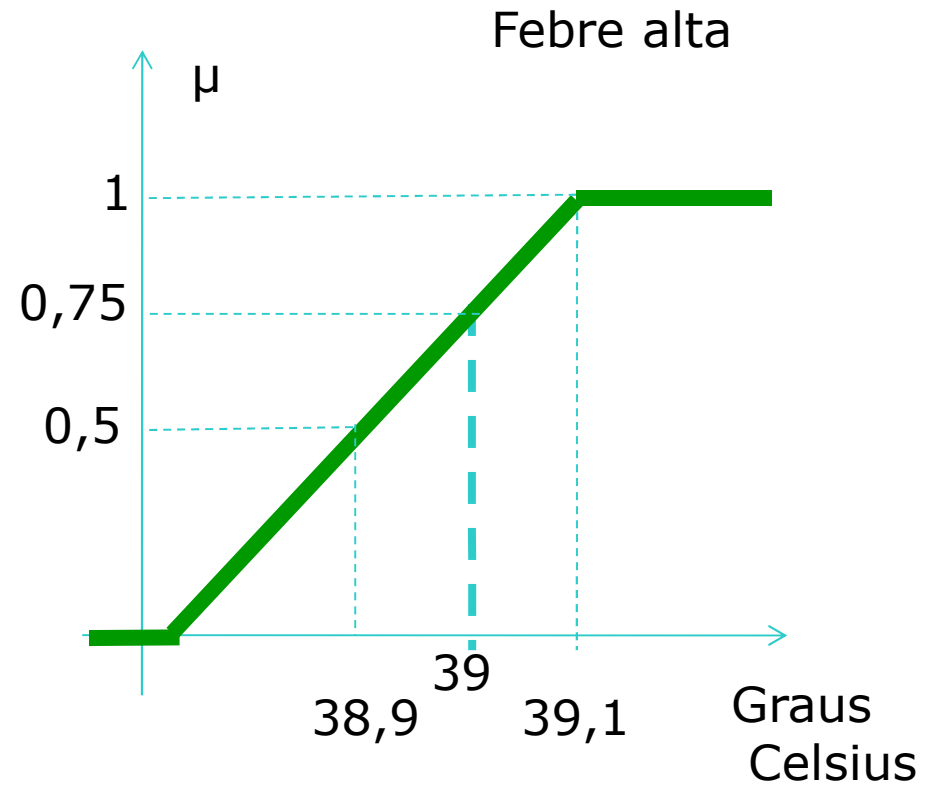


Conjuntos Crisp x Fuzzy (mesma variável)

Crisp



Fuzzy



Conjuntos Fuzzy (pertinência)

Funções de pertinência

X Coleção de objetos

Conjunto fuzzy A: coleção de pares ordenados.

$$A = \{(x, \mu_A(x)), x \in X\}$$

X = valor
 $\mu_A(X)$ = grau de pertinência

$\mu_A(x)$: função de pertinência
com que grau um objeto x pertence ao conjunto A .

Conjuntos clássicos: $\mu_A: X \rightarrow \{0, 1\}$

* Apenas dois valores são permitidos: Pertence ou Não pertence.

Conjuntos fuzzy: $\mu_A: X \rightarrow [0, 1]$

* A transição é gradual.

Conjuntos Fuzzy (função de pertinência)

Formatos usuais de funções de pertinência

Função triangular

Trapezoidal

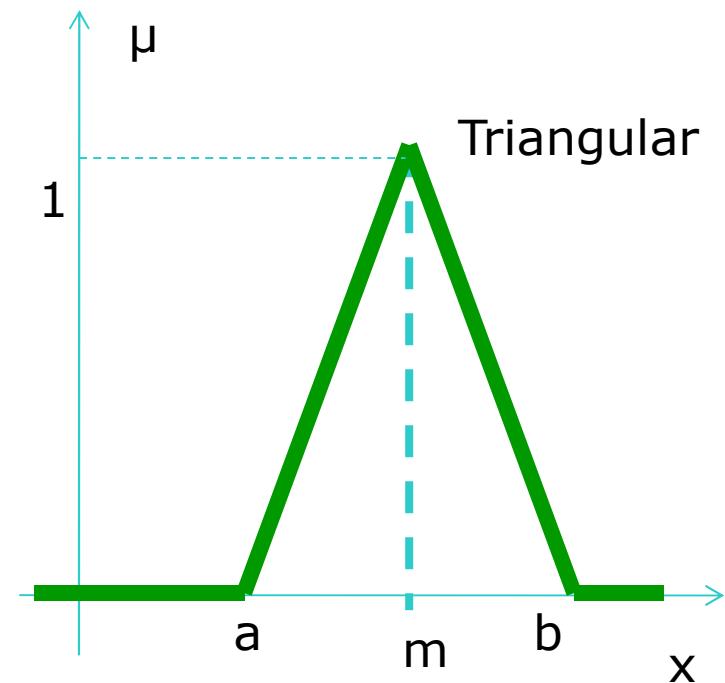
Gaussiana

Singleton

Conjuntos Fuzzy (função de pertinência)

Função triangular: Parâmetros (a, b, m) com $a \leq m \leq b$

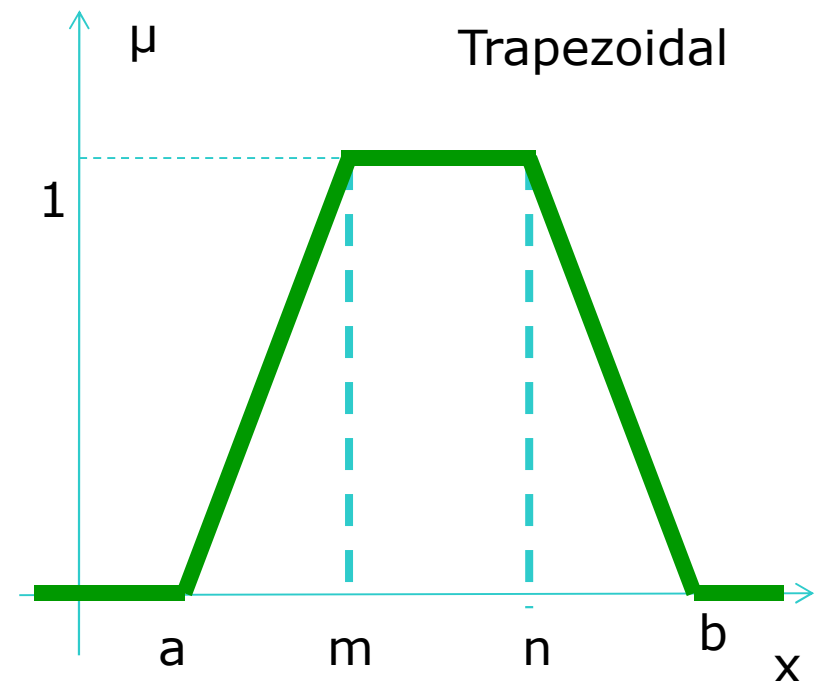
$$\mu = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq a \\ (x - a) / (m - a) & \text{se } a < x \leq m \\ (b - x) / (b - m) & \text{se } m < x \leq b \\ 0 & \text{se } x > b \end{cases}$$



Conjuntos Fuzzy (função de pertinência)

Função trapezoidal: Parâmetros (a, b, m, n) com $a \leq m \leq n \leq b$

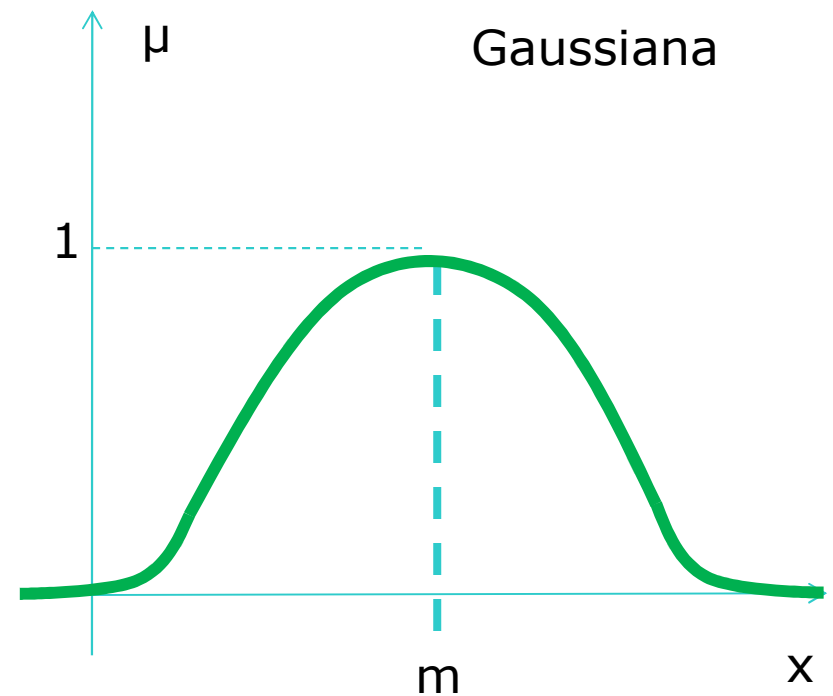
$$\mu = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq a \\ (x - a) / (m - a) & \text{se } a < x \leq m \\ 1 & \text{se } m < x \leq n \\ (b - x) / (b - n) & \text{se } n < x \leq b \\ 0 & \text{se } x > b \end{cases}$$



Conjuntos Fuzzy (função de pertinência)

Função Gaussiana Parâmetros (m,σ)

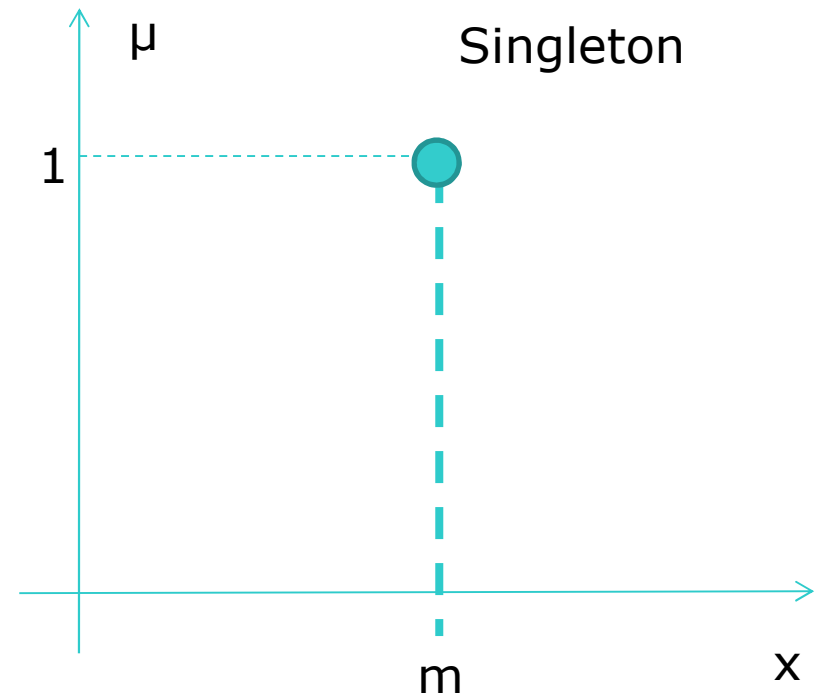
$$\mu = e^{(-\sigma(x-m)^2)}$$



Conjuntos Fuzzy (função de pertinência)

Singleton: Parâmetro (m)

$$\mu = \begin{cases} 1 & \text{se } x = m \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$





Operações com Conjuntos Fuzzy

Complemento

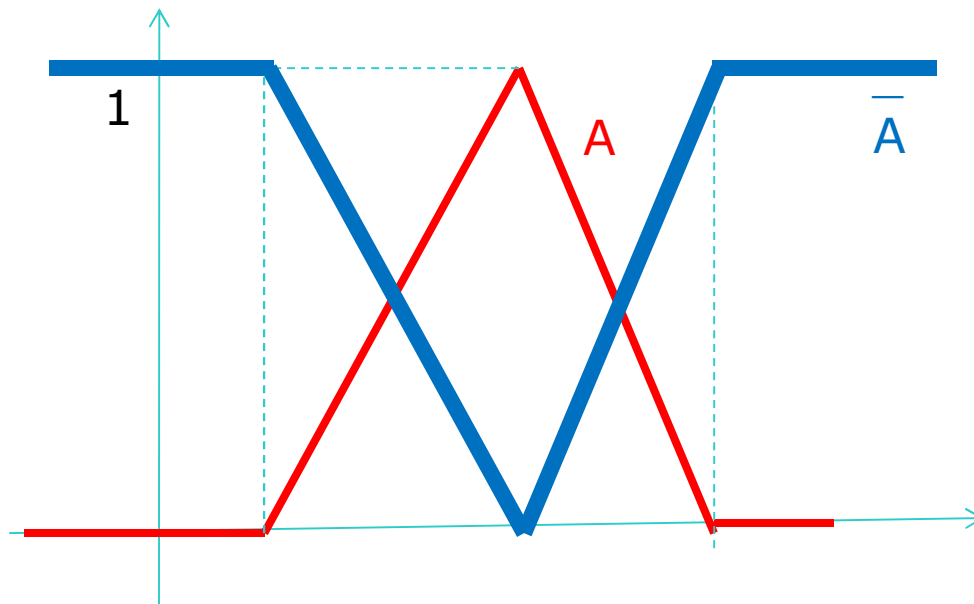
União

Interseção

Operações com Conjuntos Fuzzy

Negação ou Complemento

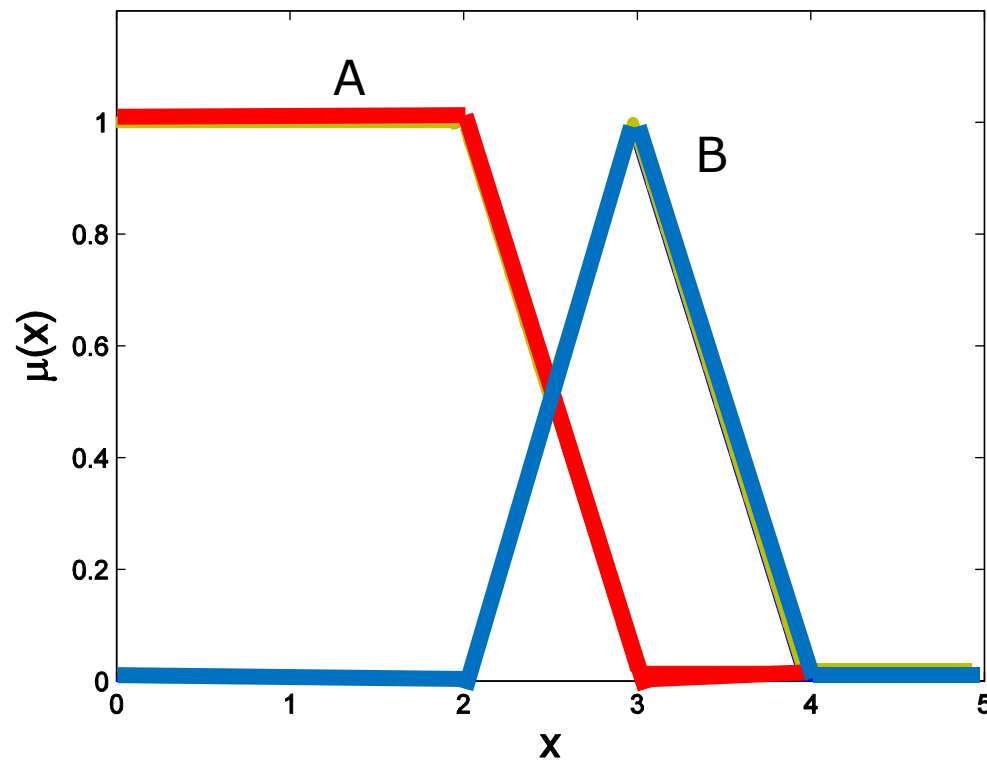
$$\bar{A} = N(\mu_A(x)) = 1 - \mu_A(x)$$



Operações com Conjuntos Fuzzy

. *União*

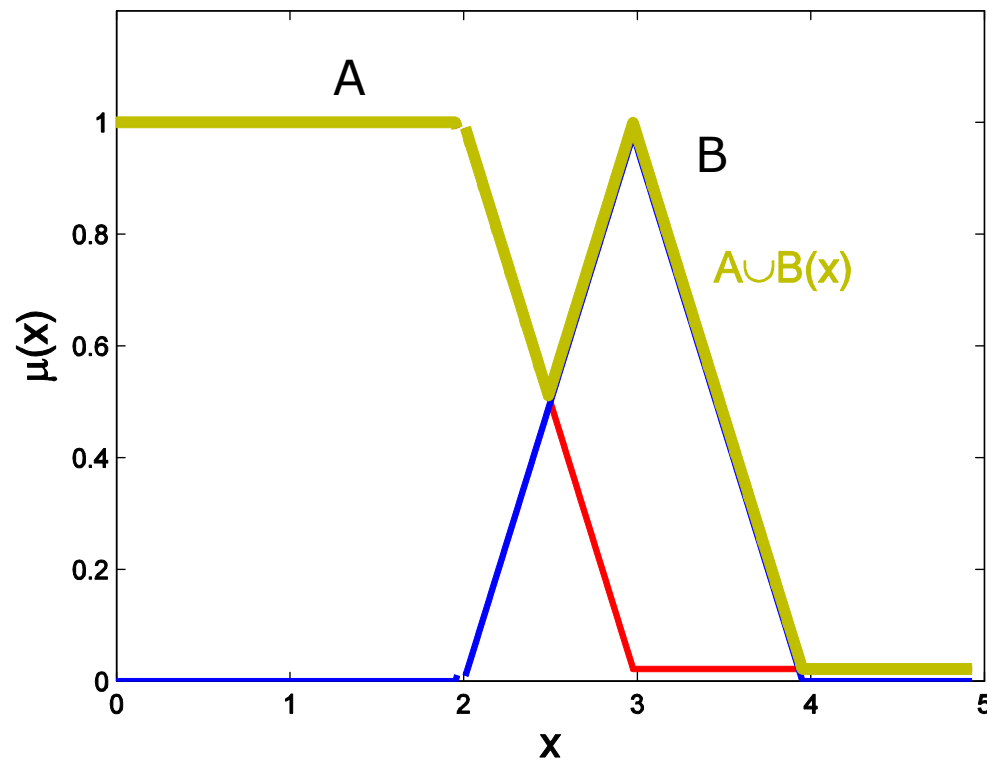
$$\mu_{A \cup B}(x) = \max [\mu_A(x), \mu_B(x)]$$



Operações com Conjuntos Fuzzy

. *União*

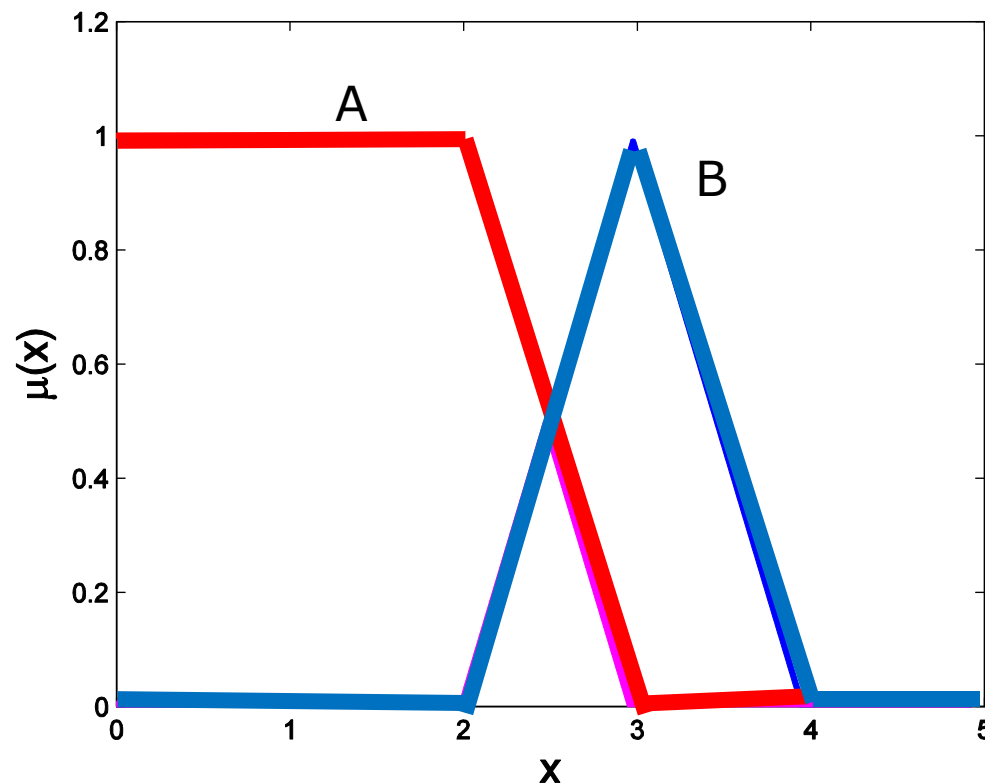
$$\mu_{A \cup B}(x) = \max [\mu_A(x), \mu_B(x)]$$



Operações com Conjuntos Fuzzy

. *Interseção*

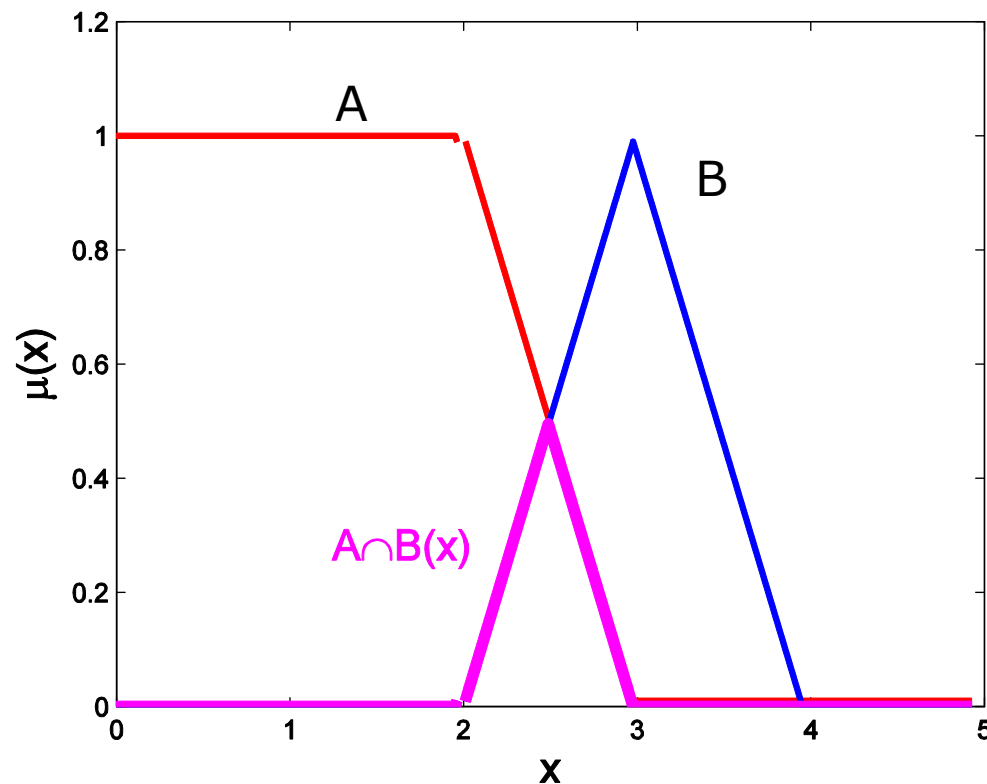
$$\mu_{A \cap B}(x) = \min [\mu_A(x), \mu_B(x)]$$



Operações com Conjuntos Fuzzy

. *Interseção*

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min [\mu_A(x), \mu_B(x)]$$





Operações com Conjuntos Fuzzy

As operações entre conjuntos podem resultar novos conceitos linguísticos:

Exemplo:

$A_1 \rightarrow$ jovem;

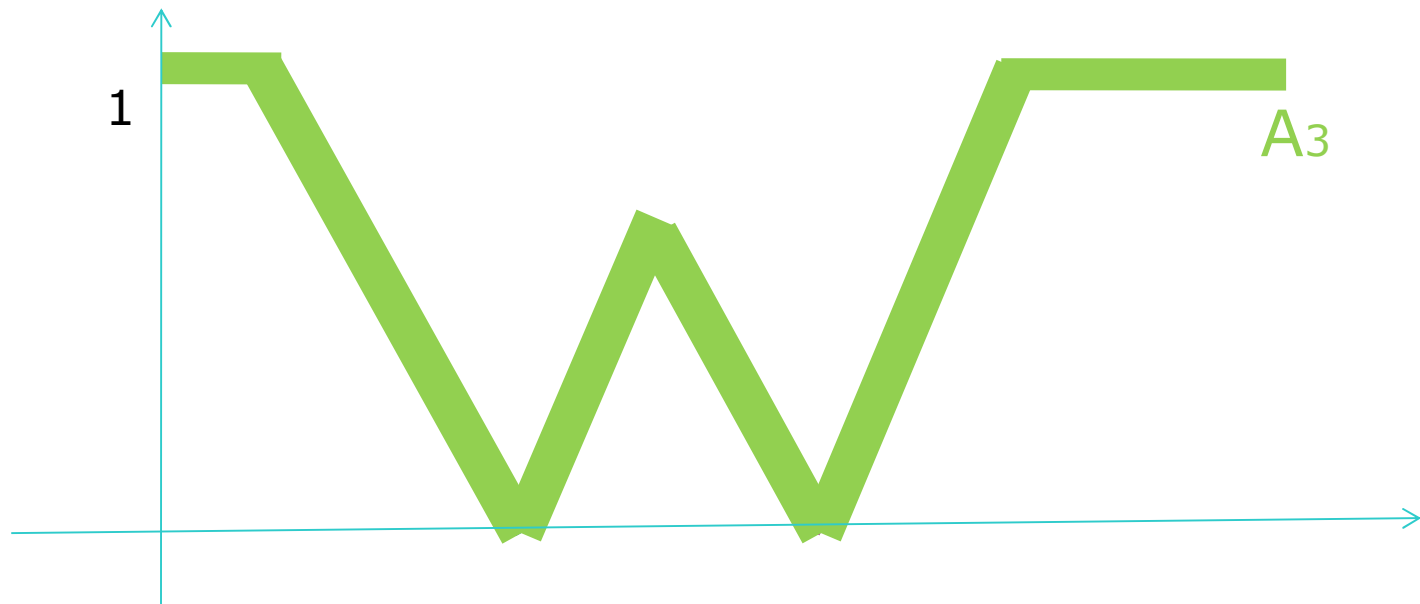
$A_2 \rightarrow$ velho;

$A_3 \rightarrow$ não jovem e não velho

$$A_3 = N(A_1) \cap N(A_2)$$

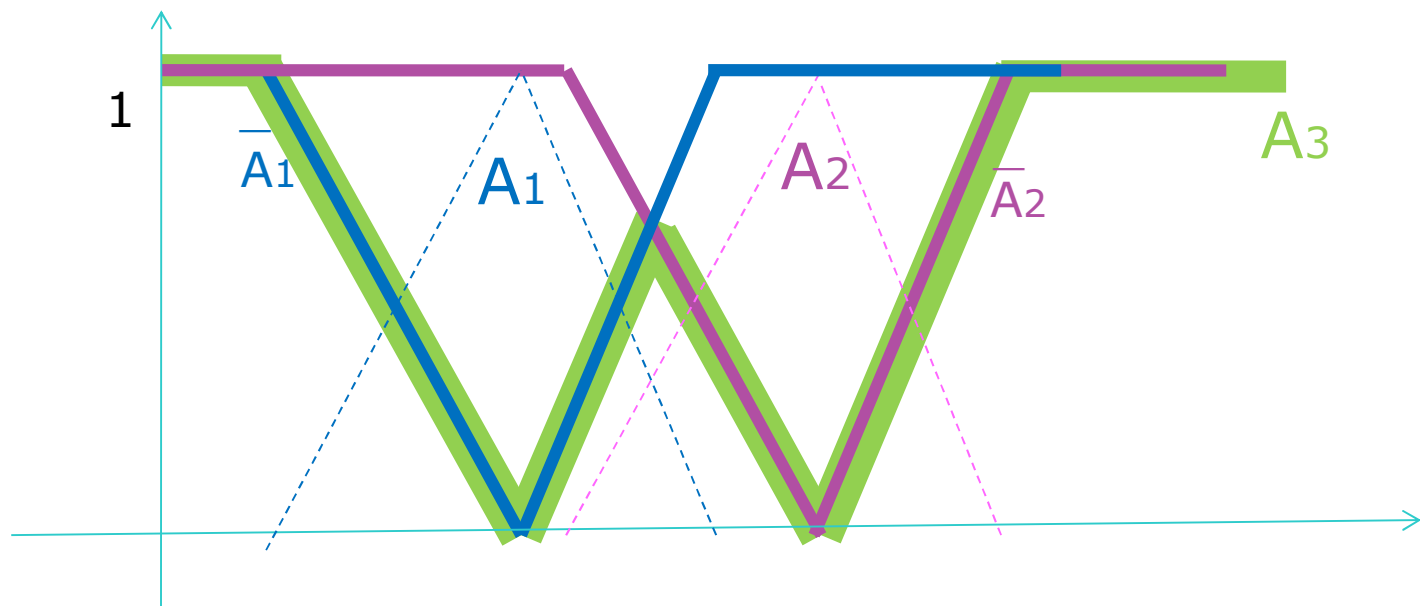
Operações com Conjuntos Fuzzy

$$A_3 = N(A_1) \cap N(A_2)$$



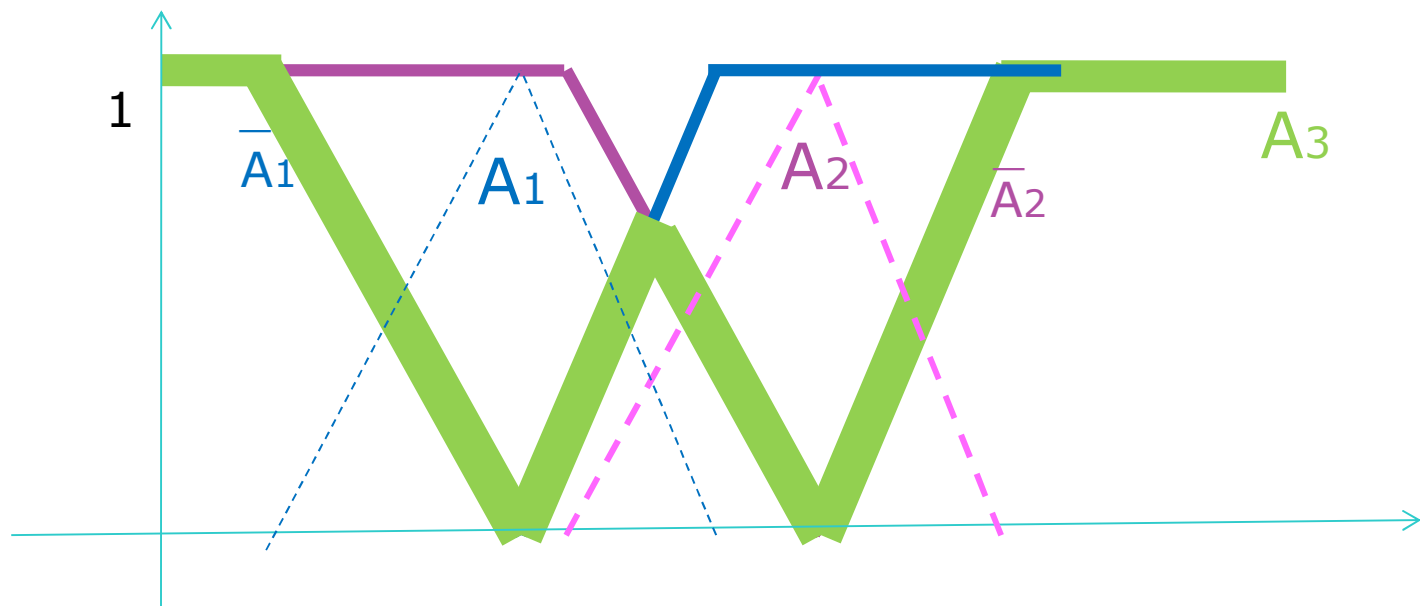
Operações com Conjuntos Fuzzy

$$A_3 = N(A_1) \cap N(A_2)$$



Operações com Conjuntos Fuzzy

$$A_3 = N(A_1) \cap N(A_2)$$





Operações Fuzzy x Relações Fuzzy

As operações são um caso particular de relação fuzzy pois envolvem conjuntos fuzzy em geral no mesmo universo.

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max [\mu_A(x), \mu_B(x)] \quad x \in \mathcal{X}$$

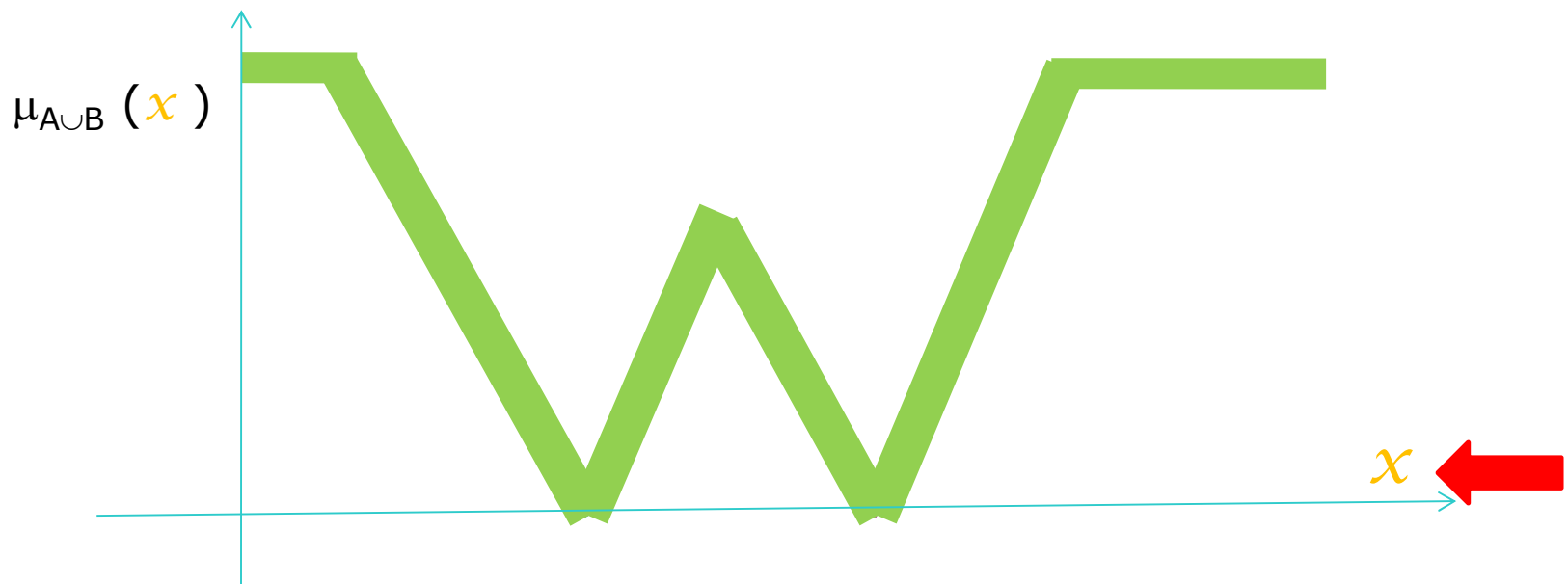
Já as relações fuzzy são em geral realizadas entre variáveis de universos diferentes

$$R: \{(x, y), \mu_R(x, y) \mid (x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}\} \quad \begin{matrix} x \in \mathcal{X} \\ y \in \mathcal{Y} \end{matrix}$$

Operações Fuzzy

As operações são um caso particular de relação fuzzy pois envolvem conjuntos fuzzy em geral no mesmo universo.

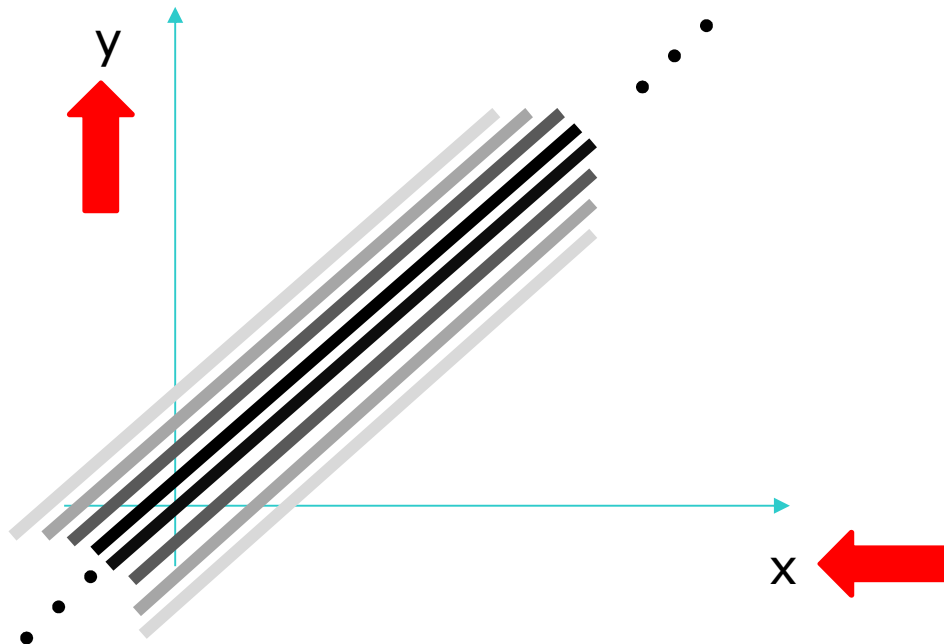
$$\mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$$



Relações Fuzzy

Já as relações fuzzy são em geral realizadas entre variáveis de universos diferentes

$$R: \{(x, y), \mu_R(x, y) \mid (x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}\} \quad \begin{array}{l} x \in \mathcal{X} \\ y \in \mathcal{Y} \end{array}$$

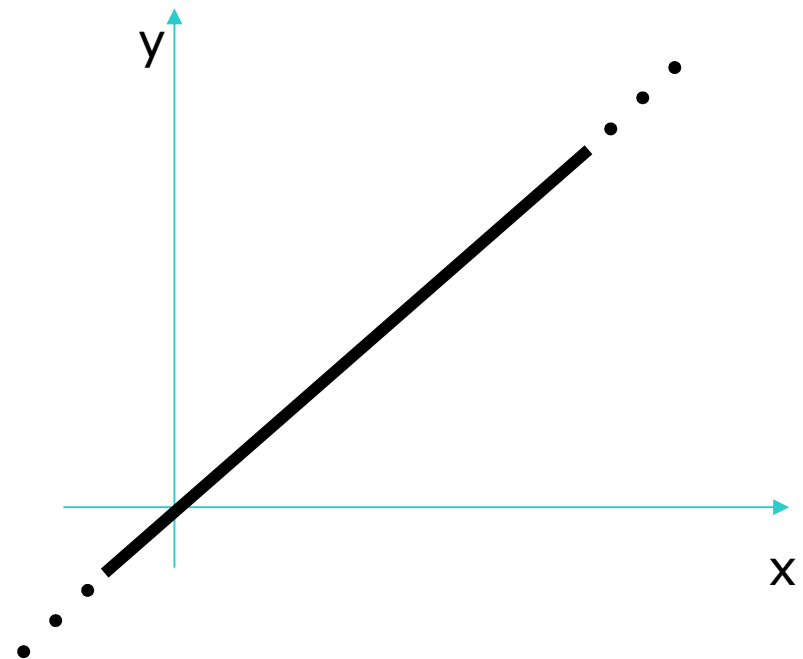
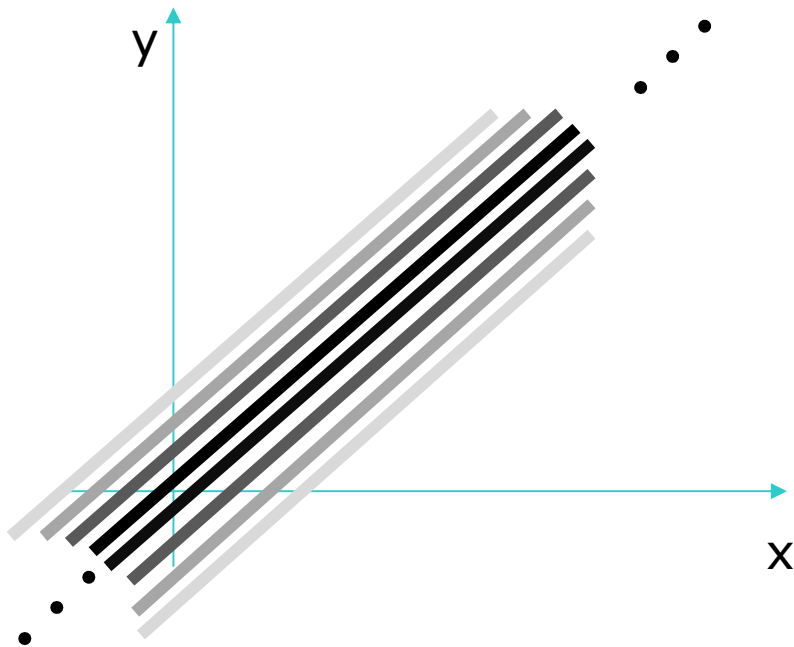


y é similar a x

Relações Fuzzy x Relações Crisp

y é similar a x (Fuzzy)

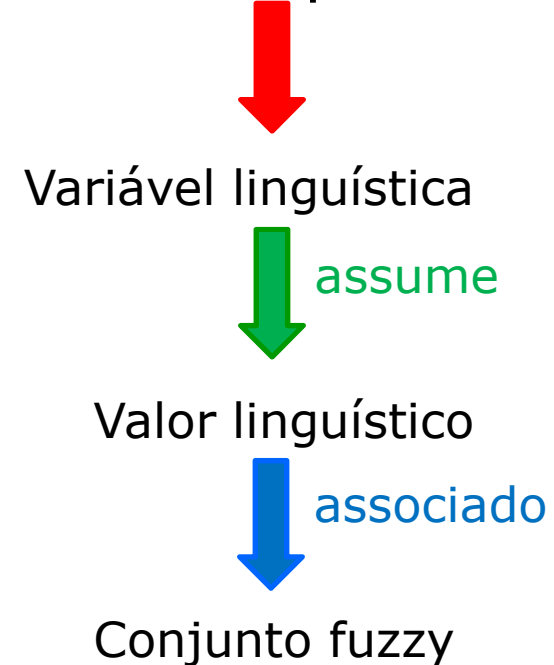
y é igual a x (Crisp)



Relações Fuzzy x Regras Fuzzy

Toda Regra Fuzzy é uma relação fuzzy

Se <antecedente> então <consequente>

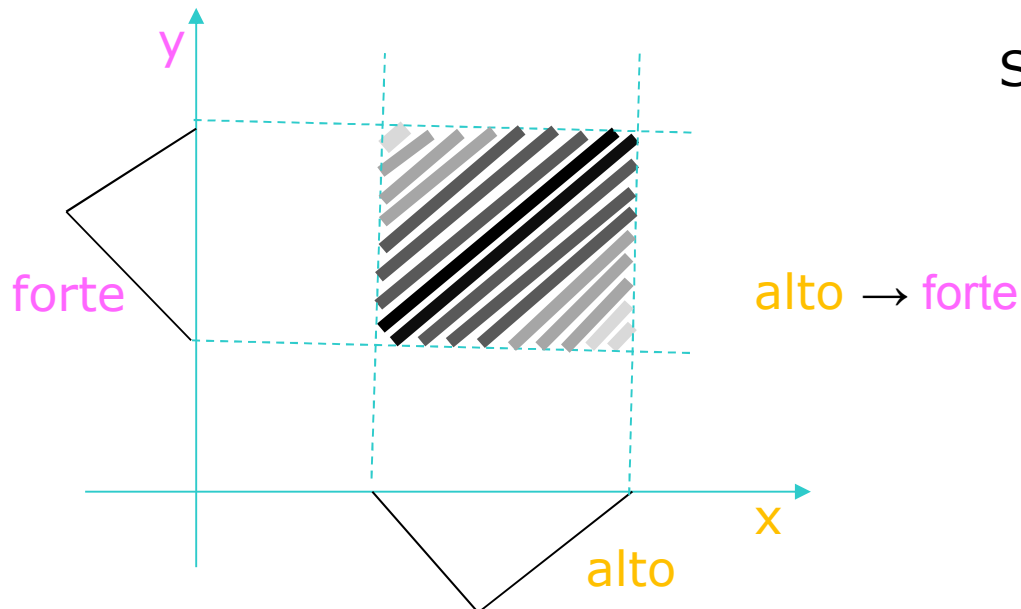


Relações Fuzzy x Regras Fuzzy

As regras envolvem variáveis linguísticas associadas a conjuntos fuzzy em universos diferentes

$$R: \{(x, y), \mu_R(A(x), B(y)) \mid (x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}\} \quad x \in \mathcal{X} \\ y \in \mathcal{Y}$$

Se X é alto então Y é forte





Variável Linguística

variável linguística: **variável** cujos valores são **palavras** ou **sentenças** ao invés de números.

Exemplos:

- pressão no freio = muito forte,
- velocidade = levemente rápido,
- altura = baixo,
- largura = médio,
- distância = mais ou menos longe.



Variável Linguística

Para Zadeh, uma variável linguística é dada por uma quintupla:
 $\langle X, \tau(X), \mathcal{X}, G, M \rangle$

Onde:

$X \rightarrow$ Nome da variável linguística cuja variável base é x .

$\tau(X) \rightarrow$ Conjunto de termos linguísticos. Cada elemento de $\tau(X)$ representa um rótulo l dos termos que a variável pode assumir.

$\mathcal{X} \rightarrow$ Universo de discurso da variável linguística X .

$G \rightarrow$ Gramática para a geração dos termos ou rótulos.

$M \rightarrow$ Regra que associa a cada rótulo l um conjunto fuzzy representando o seu significado.



Variável Linguística

Exemplo:

X: velocidade de carro de passeio

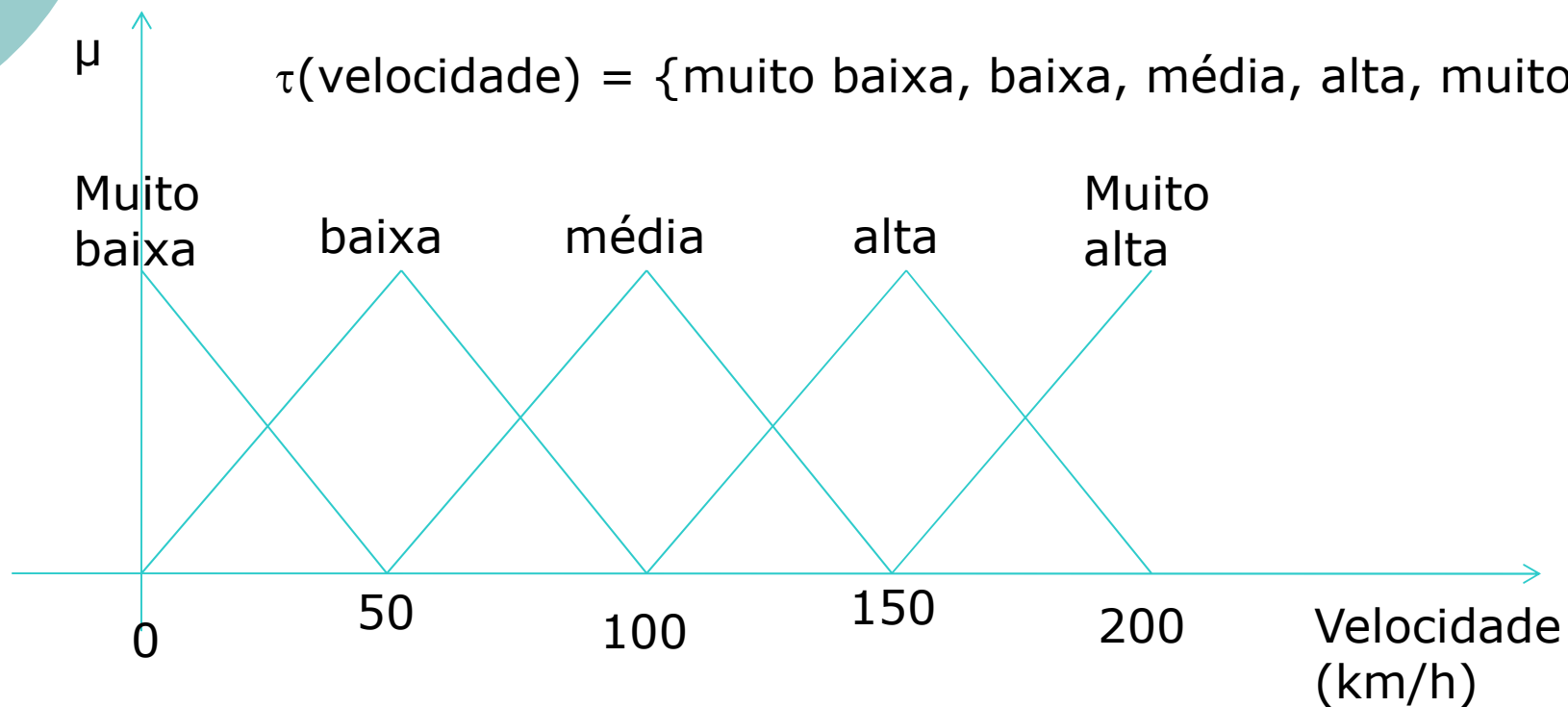
Universo $\mathcal{X} : [0, 200]$
e variável base $x \in \mathcal{X}$

conjunto de termos:

$\tau(\text{velocidade}) = \{\text{muito baixa, baixa, média, alta, muito alta}\}$

Variável Linguística: Significado do conjunto

Exemplo: Partição Uniforme da variável Velocidade e o significado de cada termo.





Variável Linguística: Aplicação

Regras fuzzy

Se X_1 é A_1 E X_2 é A_2 E ... E X_n é A_n então Y_1 é B_1 E Y_2 é B_2

onde

X_1, X_2, \dots, X_n são variáveis linguísticas nos universos $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_n$

Y_1, Y_2 são variáveis linguísticas nos universos $\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2$

A_1, A_2, \dots, A_n são conjuntos fuzzy nos universos $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_n$,

B_1, B_2 são conjuntos fuzzy nos universos $\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2$

Regras Fuzzy

Exemplo de regras

Se velocidade é alta E distância é pequena
ENTÃO pisar muito forte no freio

Se velocidade é baixa E distância é grande
ENTÃO pisar pouco forte no freio

Fato: Velocidade é média e distância é média

Conclusão: ????



Computação com Regras x Inferência

Fato: A'

Regra: $A \rightarrow B$

Conclusão = Fato \circ Regra (Raciocínio Fuzzy)

$$B' = A' \circ (A \rightarrow B)$$



Inferência Clássica (Modus Ponens)

Fato: O tomate é **vermelho**

Regra: Se o tomate é **vermelho** então ele está **maduro**

Conclusão: O tomate está **maduro**



Raciocínio Aproximado (Modus Ponens Generalizado)

Fato: O tomate é **alaranjado**

Regra: Se o tomate é **vermelho** então ele está **maduro**

Conclusão: O tomate está **levemente maduro**

Raciocínio Fuzzy

Conjuntos Fuzzy

Fato: O tomate é **alaranjado**

Regra: Se o tomate é **vermelho** então ele está **maduro**

semântica

Conclusão: O tomate está **levemente maduro**



Raciocínio Fuzzy

Primeiro Passo:

Semântica da Regra: **vermelho** → **maduro**

**Qual será a função que mapeia
antecedente no **consequente**?**

Segundo Passo:
Obtenção da Conclusão

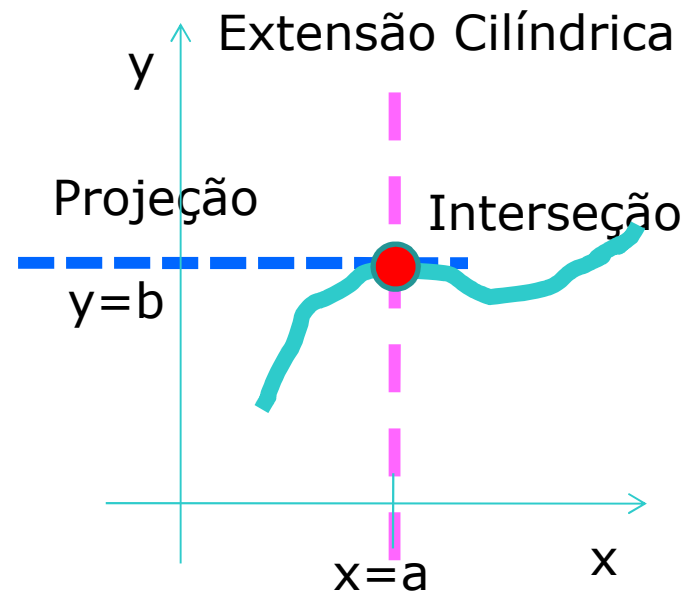
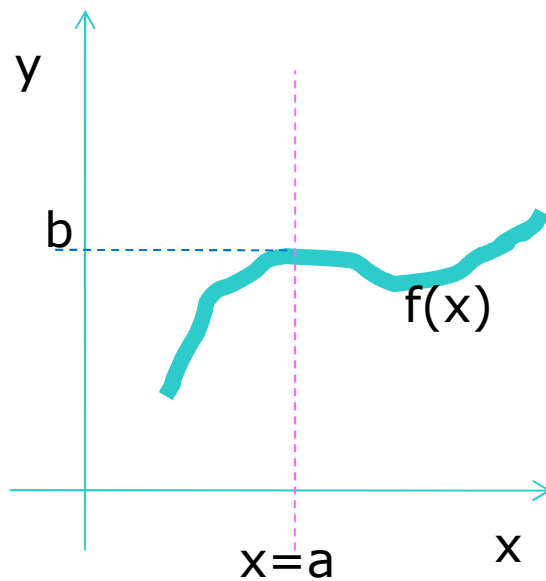
Levemente maduro = **alaranjado** \circ (**vermelho** → **maduro**)

Regra Composicional de Inferência

Regra Composicional de Inferência

É a generalização do processo de se inferir

um valor $y=b$ de uma função $f(.)$ a partir de um ponto $x = a$

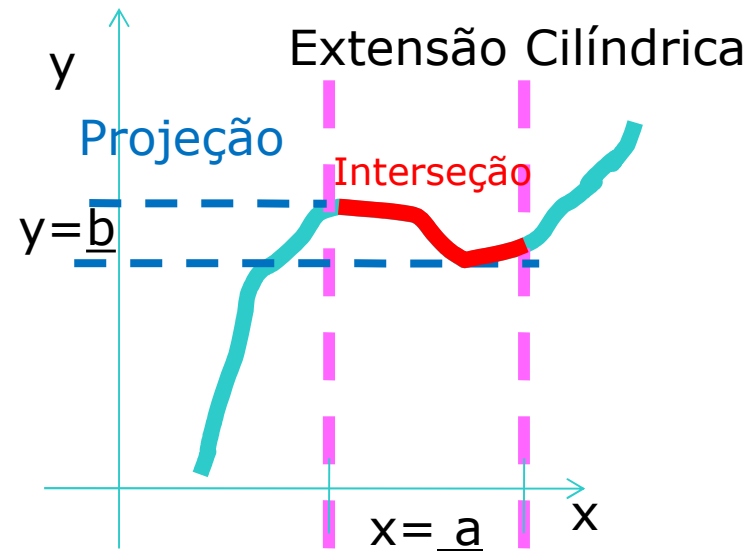
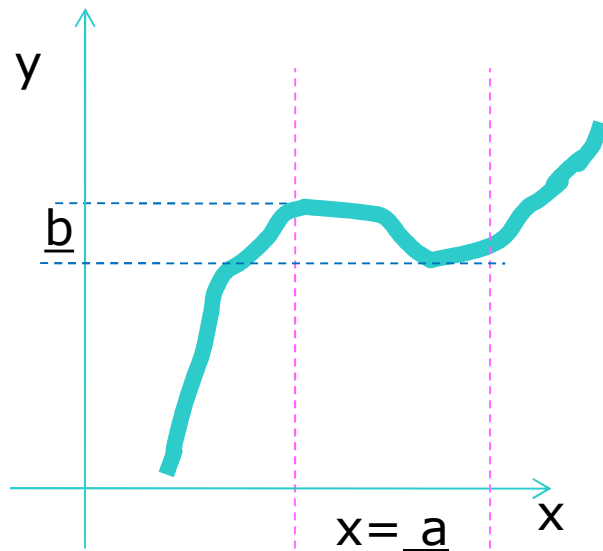


Regra Composicional de Inferência

É a generalização do processo de se inferir

um intervalo $y = \underline{b}$ de uma função $f(.)$

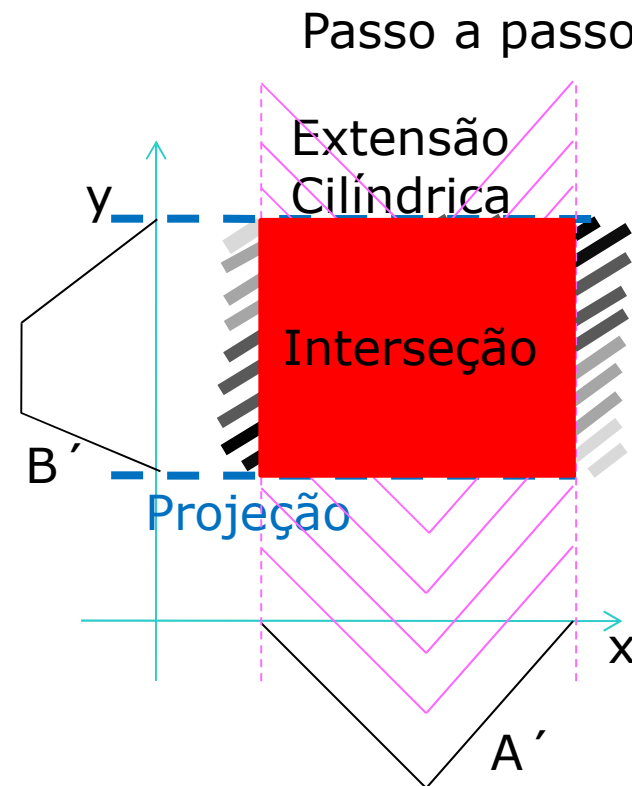
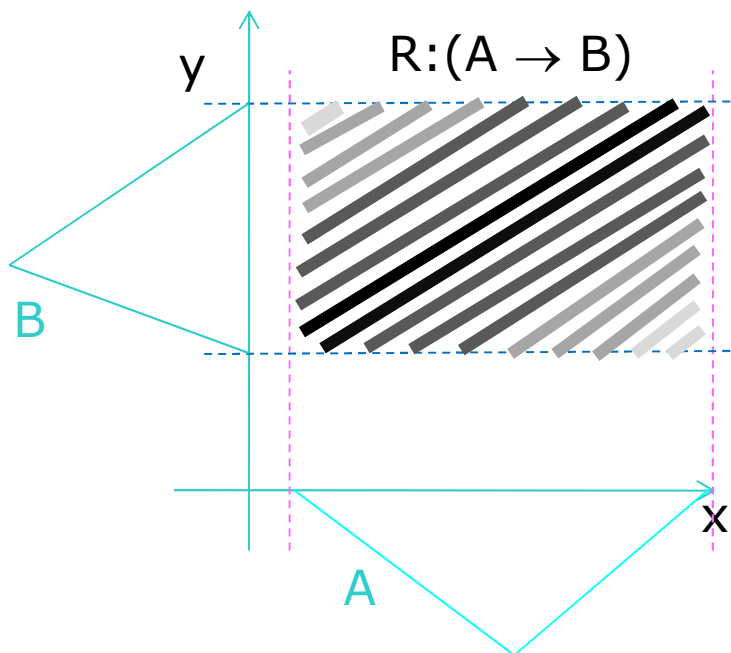
a partir de um intervalo $x = \underline{a}$



Raciocínio Fuzzy

a) Definição da semântica da regra (ou relação) $R:(A \rightarrow B)$

b) Uso da Regra Composicional de Inferência para obter B'
 $B' = A' \circ (A \rightarrow B)$





Raciocínio Fuzzy

Dois passos principais:

a) Definição da semântica da regra $R: (A \rightarrow B)$

Por exemplo: semântica conjunção (norma $t = \text{mínimo}$)

b) Como a conclusão será extraída da regra + fato:

$$B' = A' \circ R$$

b1.Constrói-se a extensão cilíndrica de A'

b2.Encontra-se a interseção I entre A' e R

b3.Projeta-se I no eixo y



Raciocínio Fuzzy

Fato: O tomate é **alaranjado**

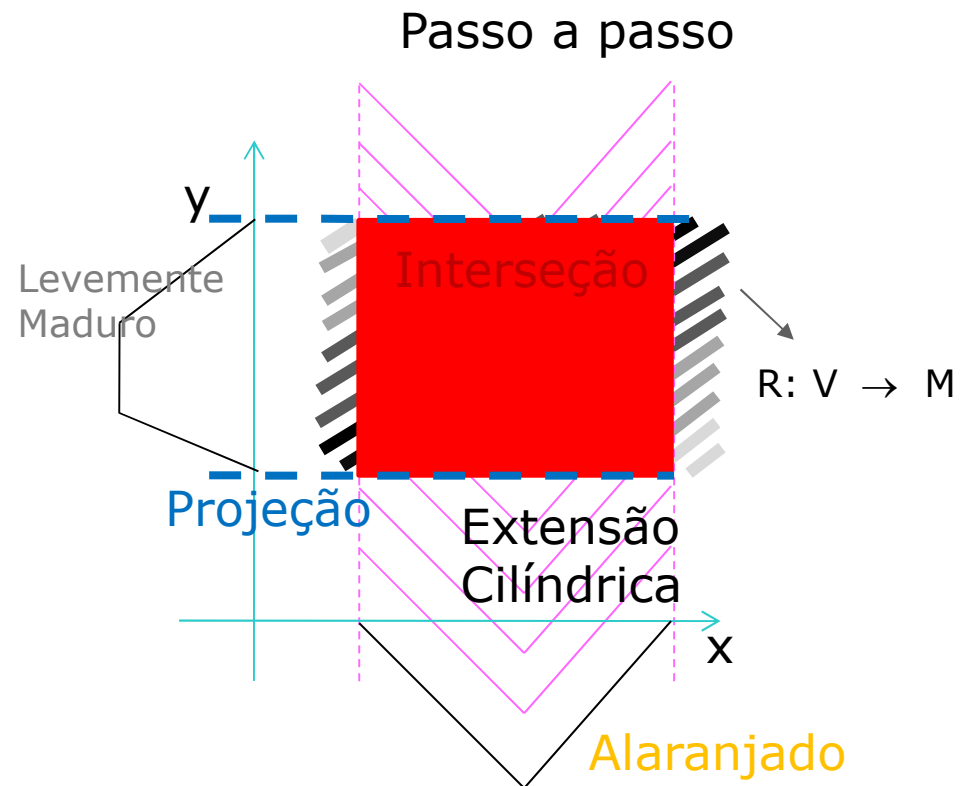
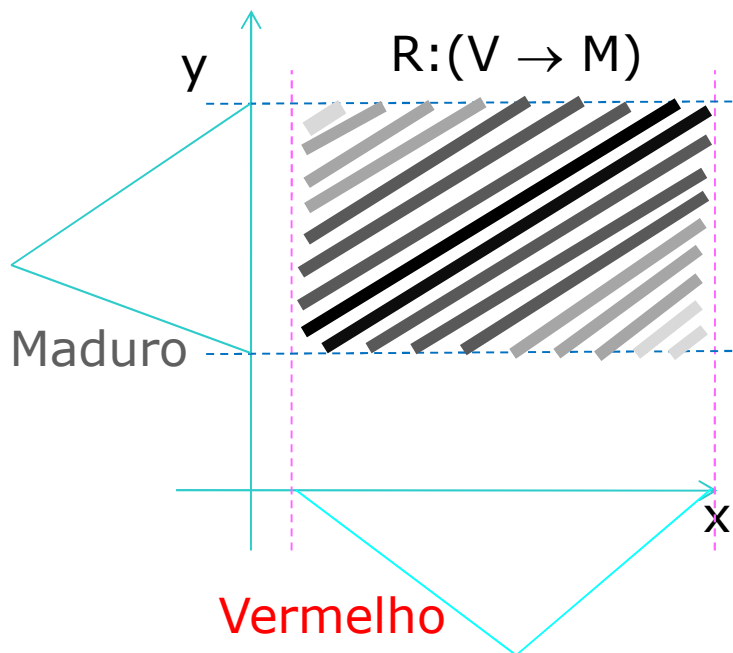
Regra: Se o tomate é **vermelho** então ele está **maduro**

Conclusão: O tomate está **levemente maduro**

Raciocínio Fuzzy 2D

a) Definição da semântica da regra (ou relação) $R:(V \rightarrow M)$

b) Uso da Regra Composicional de Inferência para obter $LM = A \circ (V \rightarrow M)$



Raciocínio Fuzzy 3D

A -> vermelho

A' -> alaranjado

B -> maduro

B' -> levemente maduro

A -> B : semântica
conjuntiva

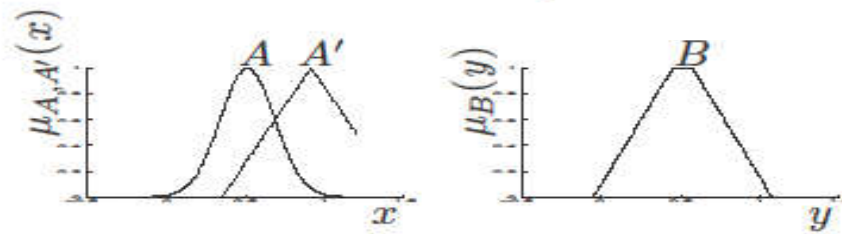
Extensão Cilíndrica:
Replicar A' ao longo de y

Interseção: Mínimo

Projeção: Máximo

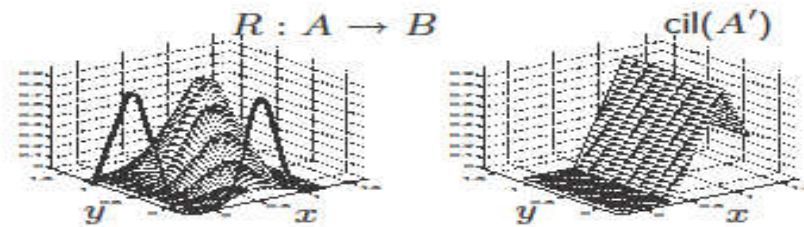
$A \rightarrow$ vermelho
 $A' \rightarrow$ alaranjado
 $B \rightarrow$ maduro
 $B' \rightarrow$ levemente maduro

Raciocínio Fuzzy



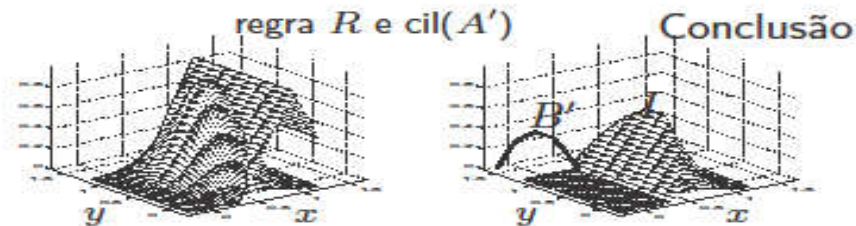
$A \rightarrow B$: semântica
 conjuntiva

Extensão Cilindrica:
 Replicar A' ao longo de y



Interseção: Mínimo

Projeção: Máximo





Raciocínio Fuzzy x Inferência Min-Max

O Raciocínio fuzzy mostrado anteriormente envolve regras com apenas

1 variável de entrada e

1 variável de saída

E para sistemas mais complexos?

Método simplificado: inferência Min-Max

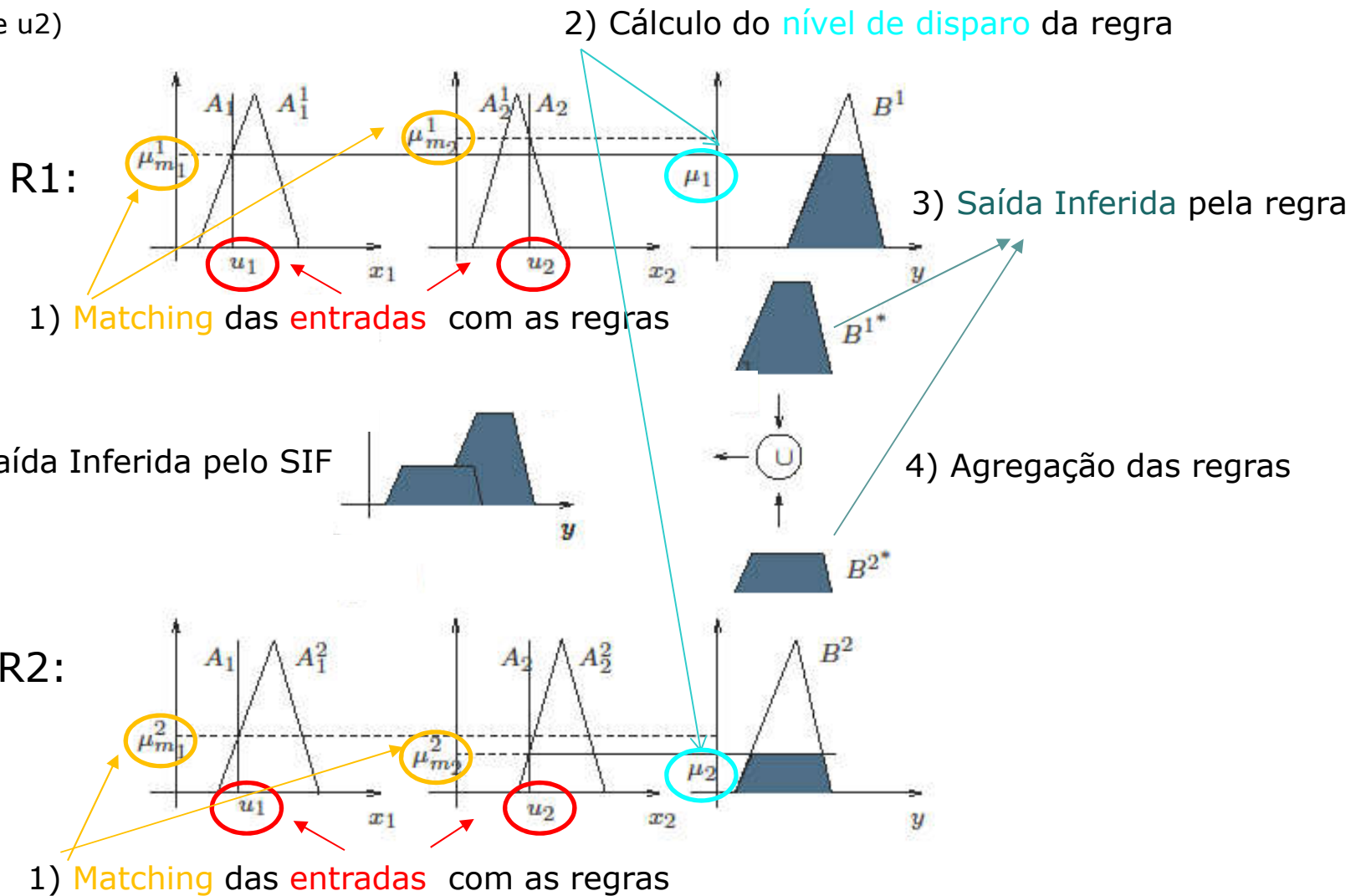
Inferência Fuzzy: Min Max

Exemplo

2 **entradas** (u_1 e u_2)

1 **saída** (y)

2 Regras





Sistemas de Inferência Fuzzy (SIF)

A estrutura básica de um sistema fuzzy possui três componentes conceituais:

Base de dados (BD): Partição do Universo

Base de regras (BR): Conjunto de regras

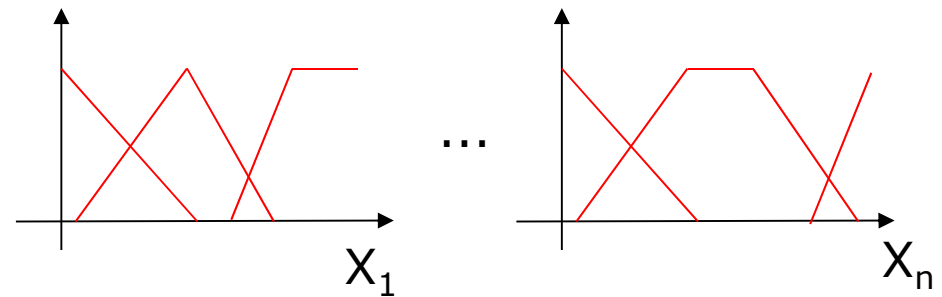
Mecanismo de raciocínio: Inferência

Operadores:

*agregação de antecedentes,
semântica da regra,
agregação das regras,
método de defuzzificação.*

Sistemas de Inferência Fuzzy (SIF)

Base de dados (BD):
Partição do Universo



Base de regras (BR): Conjunto de regras

Mecanismo de raciocínio: Inferência

Sistemas de Inferência Fuzzy (SIF)

Base de dados (BD): Partição do Universo (sobreposição entre os conjuntos)

Base de regras (BR):
Conjunto de regras

Mecanismo de raciocínio:
Inferência

Regra	Temp. Superficial das Penas	Temp. Superficial da Pele	Empenamento	Conforto Térmico (peso)
1	Alta	Alta	Alta	Perigo (1,0)
2	Alta	Alta	Média	Perigo (0,75)
3	Alta	Alta	Baixa	Perigo (0,5)
4	Alta	Média	Alta	Perigo (0,5)
5	Alta	Média	Média	Alerta (1,0)
6	Alta	Média	Baixa	Alerta (0,75)
7	Alta	Baixa	Alta	Alerta (0,75)
8	Alta	Baixa	Média	Alerta (0,5)
9	Alta	Baixa	Baixa	Conforto (0,5)
10	Média	Alta	Alta	Perigo (1,0)
11	Média	Alta	Média	Perigo (0,5)
12	Média	Alta	Baixa	Alerta (1,0)
13	Média	Média	Alta	Alerta (0,75)
14	Média	Média	Média	Conforto (0,5)
15	Média	Média	Baixa	Conforto (0,75)
16	Média	Baixa	Alta	Alerta (0,5)
17	Média	Baixa	Média	Conforto (0,75)
18	Média	Baixa	Baixa	Conforto (1,0)
19	Baixa	Alta	Alta	Alerta (1,0)
20	Baixa	Alta	Média	Alerta (0,75)
21	Baixa	Alta	Baixa	Alerta (0,5)
22	Baixa	Média	Alta	Conforto (0,75)
23	Baixa	Média	Média	Conforto (1,0)
24	Baixa	Média	Baixa	Conforto (0,75)
25	Baixa	Baixa	Alta	Conforto (1,0)
26	Baixa	Baixa	Média	Conforto (0,75)
27	Baixa	Baixa	Baixa	Conforto (0,5)

Sistemas de Inferência Fuzzy (SIF)

Base de dados (BD): Partição do Universo (sobreposição entre os conjuntos)

Base de regras (BR):
Conjunto de regras

Mecanismo de raciocínio:
Inferência

Operadores (Exemplo):

agregação de antecedentes: min

semântica da regra: prod

agregação das regras: max

método de defuzzificação: centroide



Exemplo: sistema de controle de freios

Variáveis de entrada:

Velocidade do carro

Distância para o obstáculo

Variável de saída:

Força no freio



Exemplo: sistema de controle de freios

Base de dados:

Velocidade do carro: $\tau(V) = \{\text{alta, média, baixa}\}$

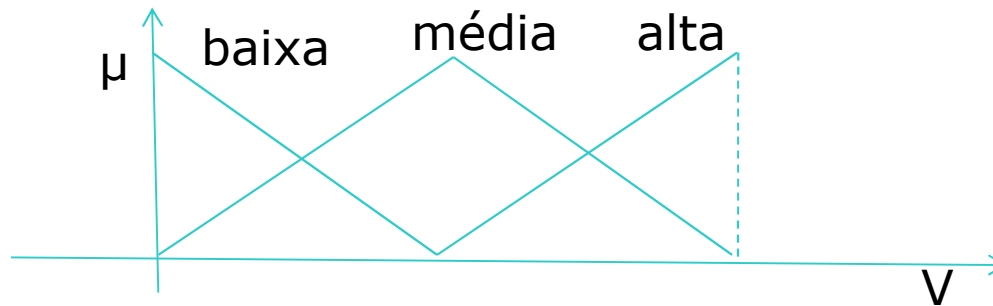
Distância para o obstáculo: $\tau(V) = \{\text{pequena, grande}\}$

Força no freio: $\tau(F) = \{\text{pouco forte, força média, muito forte}\}$

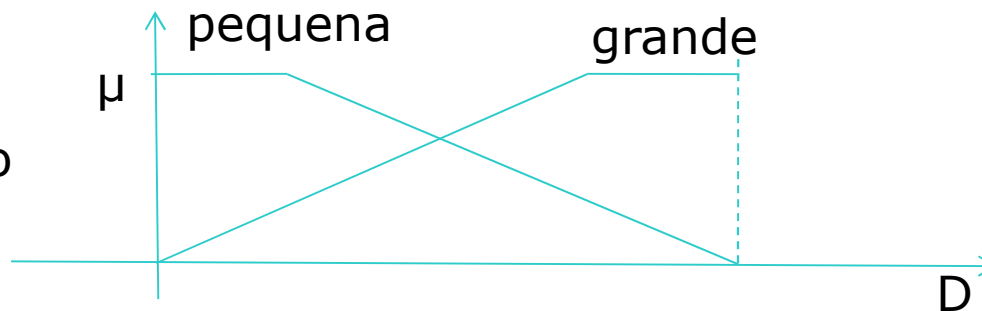
Exemplo: sistema de controle de freios

Base de dados:

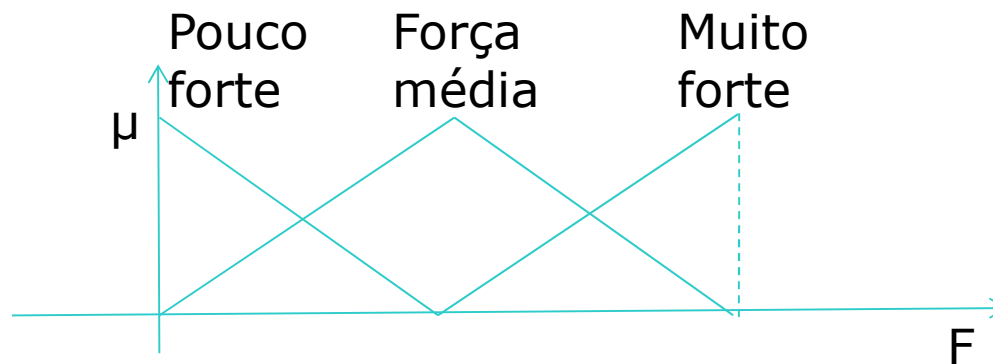
Velocidade do carro



Distância para o obstáculo



Força no freio





Exemplo: sistema de controle de freios

Base de Regras:

Máximo de regras: $|\tau(V)| \times |\tau(D)| = 3 \times 2 = 6$

Algumas regras possíveis:

Se V é **baixa** AND D é **grande** então pisar **pouco forte** no freio

Se V é **média** AND D é **grande** então pisar com **força média** no freio

Se V é **alta** AND D é **pequena** então pisar com **muito forte** no freio

.....



Exemplo: sistema de controle de freios

Mecanismo de Raciocínio:

Se *V* é *baixa* AND *D* é *grande* então pisar *pouco forte* no freio

Se *V* é *média* AND *D* é *grande* então pisar com *força média* no freio

Se *V* é *alta* AND *D* é *pequena* então pisar com *muito forte* no freio

.....

Qual operador de agregação AND ? produto ou min

Na base de regras: Se <antecedente> então <consequente>

Qual operador para a semântica da regra ? Conjuntiva ou implicação?

Como agregar as regras ativas? Max ou média?



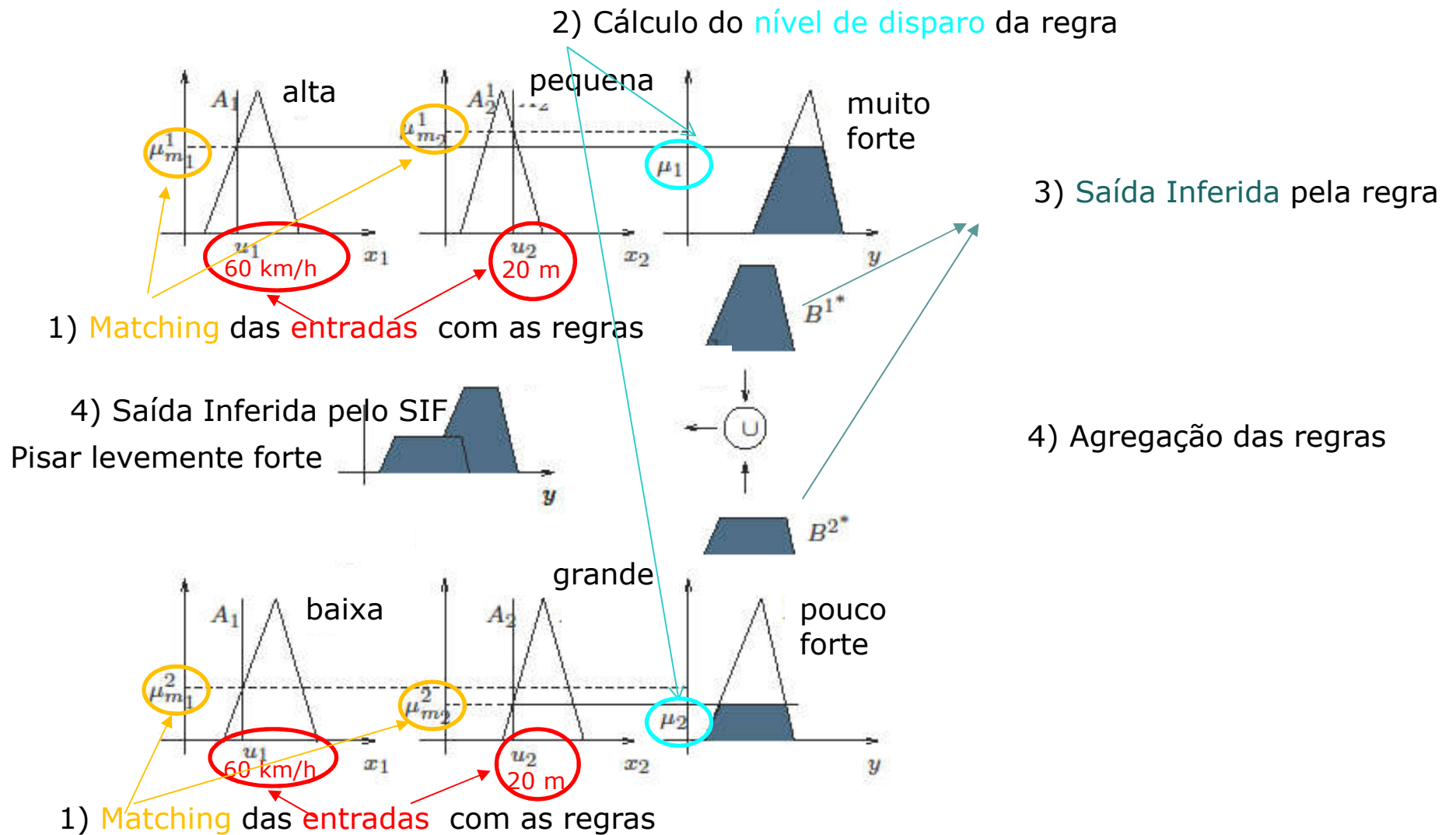
BRF do sistema de controle de freio

Exemplo de regras

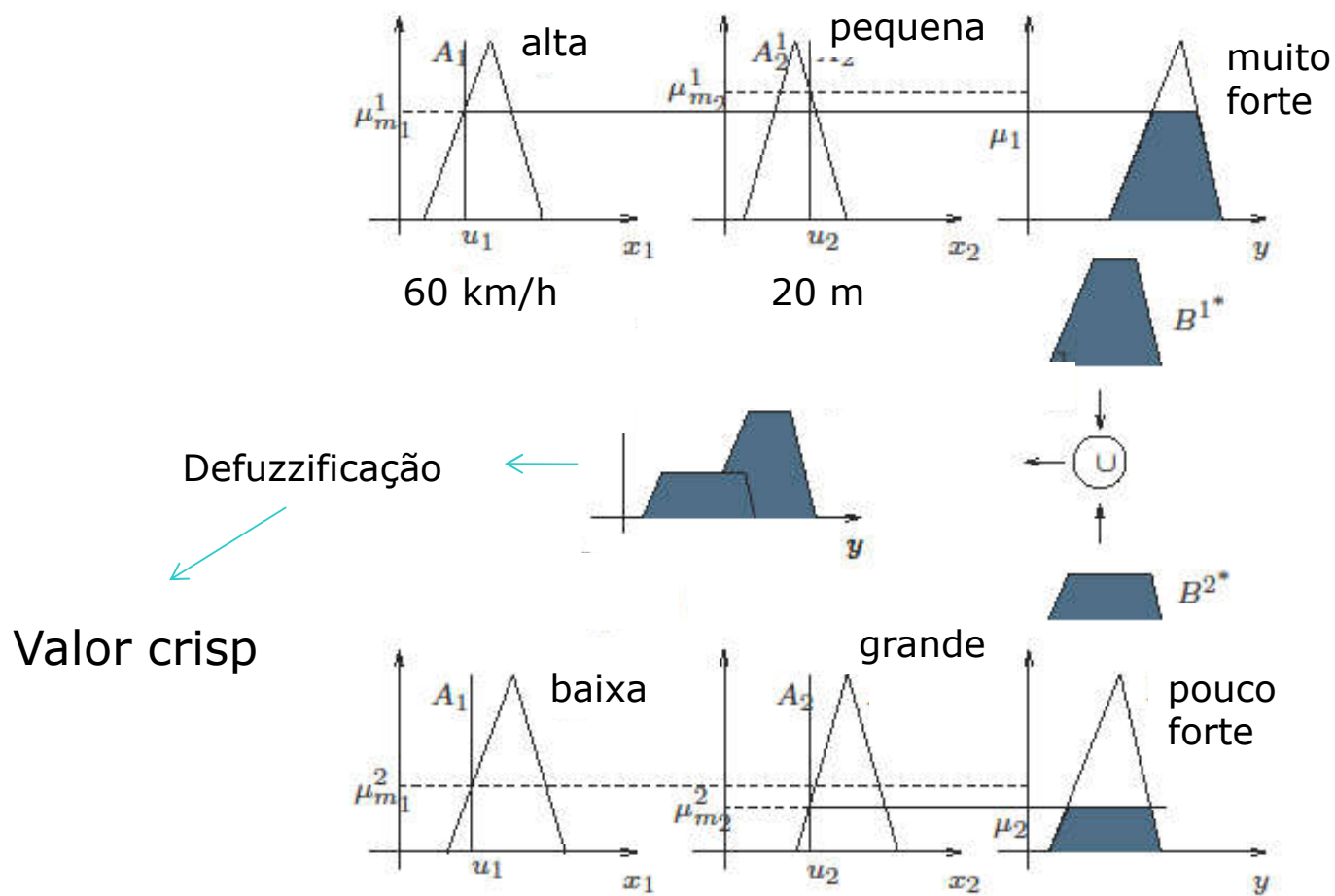
Se velocidade é alta E distância é pequena
ENTÃO pisar muito forte no freio

Se velocidade é baixa E distância é grande
ENTÃO pisar pouco forte no freio

Inferência Fuzzy: Min Max



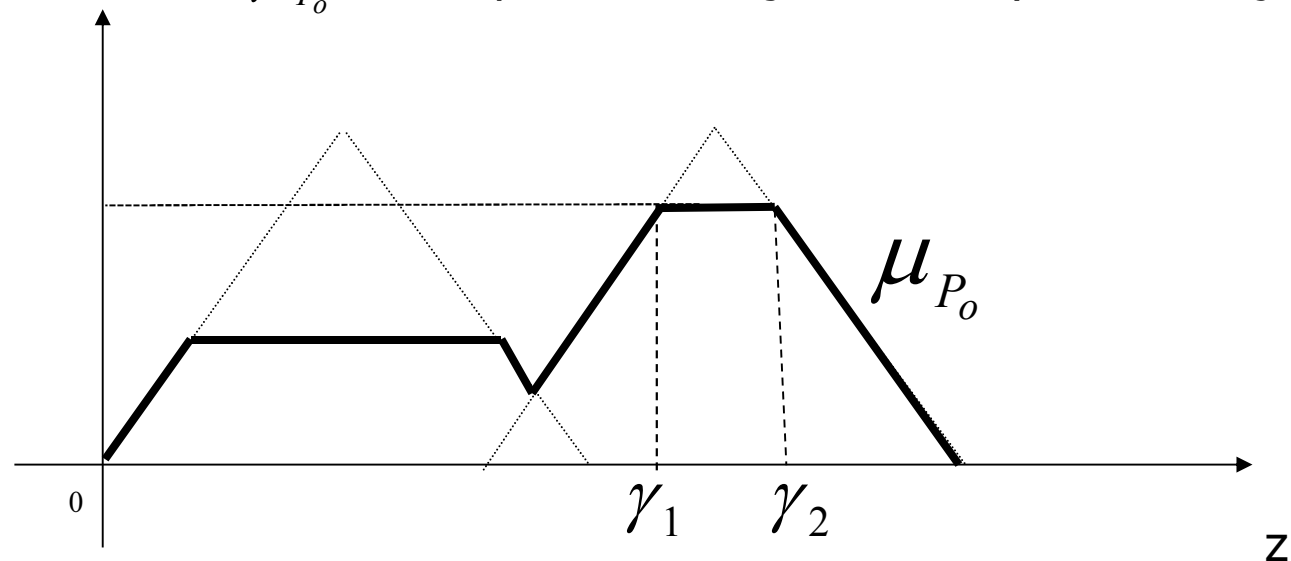
Inferência Fuzzy: Min Max



Métodos de Defuzzificação

Os métodos de defuzzificação produzem saídas crisp a partir da função de pertinência da saída inferida

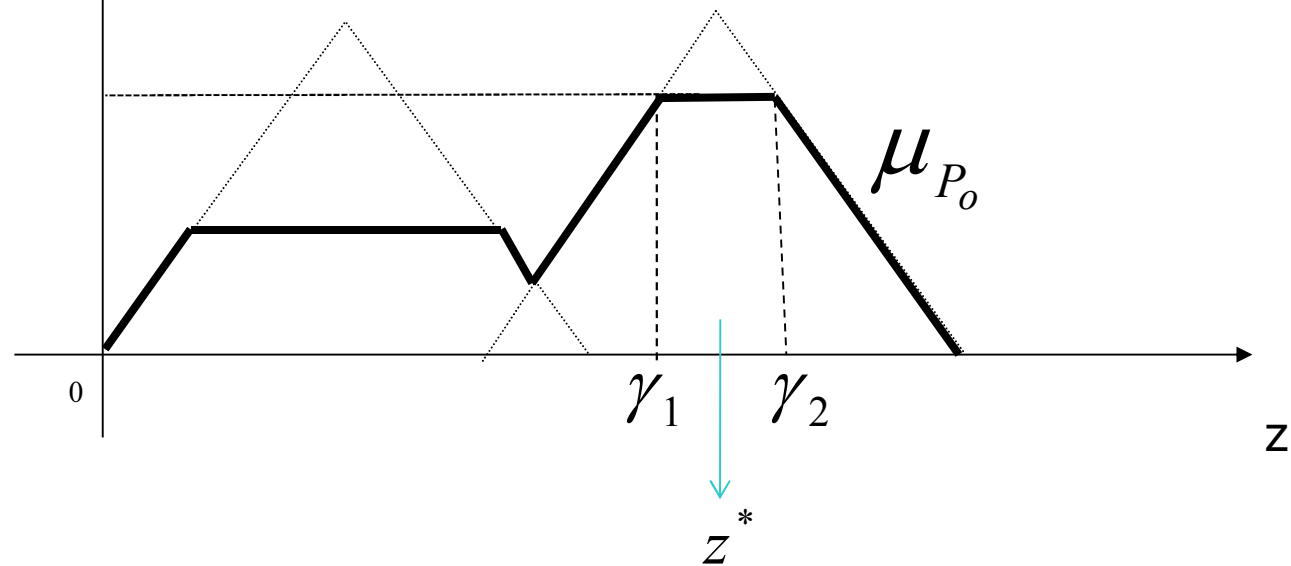
Seja o resultado inferido μ_{P_o} dado por um conjunto fuzzy com função de pertinência :



Métodos de Defuzzificação

MÉDIA DOS MÁXIMOS (MoM): Os valores relativos ao máximo da função são selecionados e é tomada a sua média.

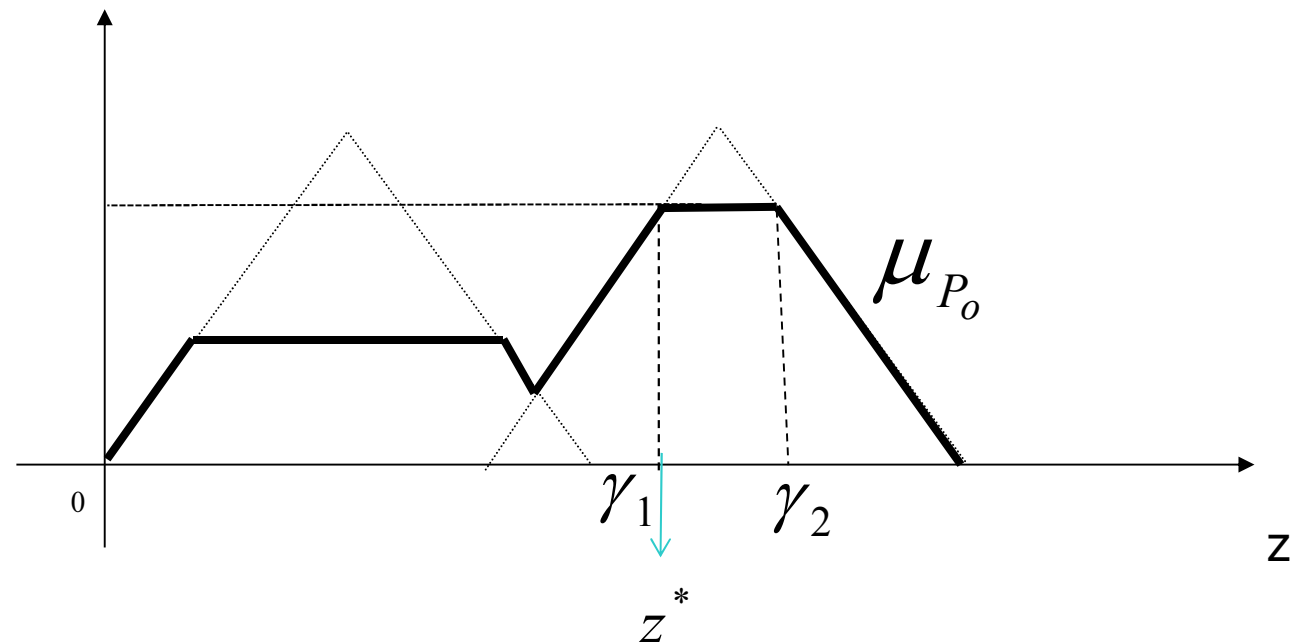
$$z^* = \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}$$



Métodos de Defuzzificação

MÍNIMO dos MÁXIMOS): Os valores relativos ao máximo da função são seleccionados e é tomada O MENOR.

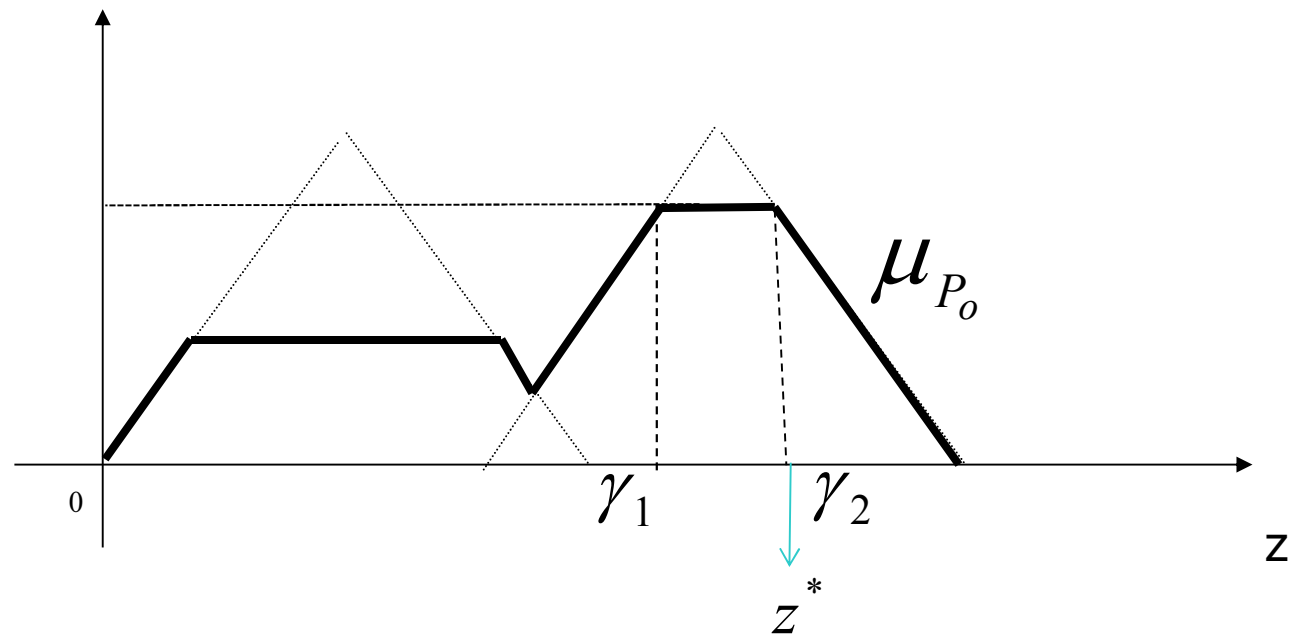
$$z^* = \gamma_1$$



Métodos de Defuzzificação

MÁXIMO dos MÁXIMOS: Os valores relativos ao máximo da função são seleccionados e é tomada O MAIOR.

$$z^* = \gamma_2$$

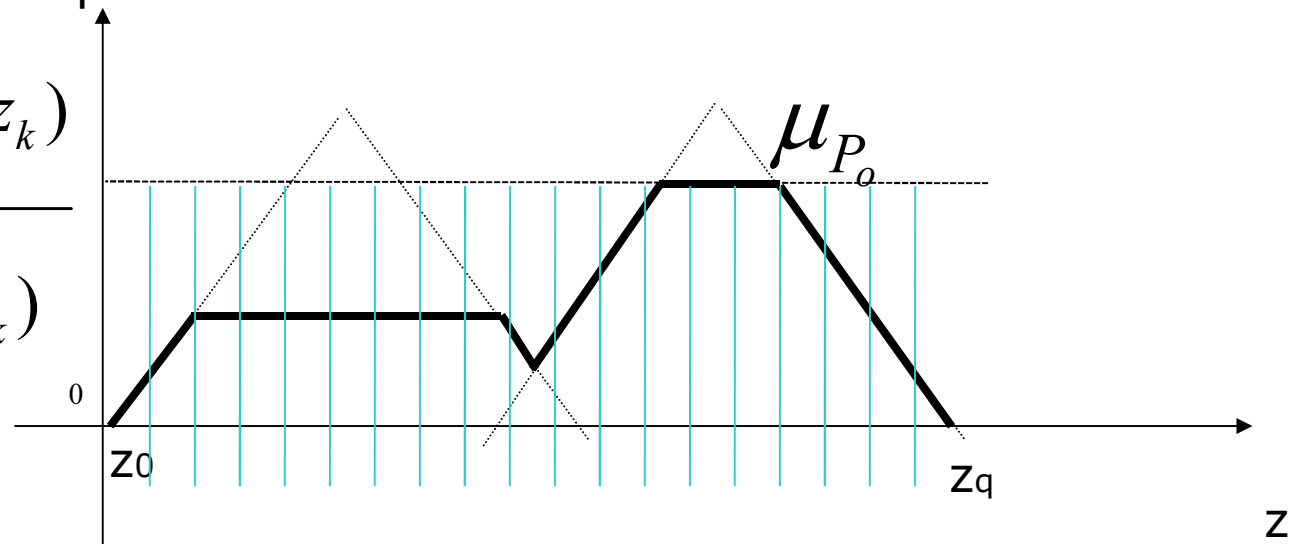


Métodos de Defuzzificação

CENTROIDE OU CENTRO DE GRAVIDADE(CoG):
$$Z^* = \frac{\int \mu_{P_o}(z)zdz}{\int \mu_{P_o}(z)dz}$$

Para o caso discreto (ou a discretização da função contínua) temos que, subdividindo-se o intervalo $[z_0, Z_q]$ em q sub-intervalos próximos, o valor crisp é dado por:

$$Z^* = \frac{\sum_{k=1}^q z_k \mu_{P_o}(z_k)}{\sum_{k=1}^q \mu_{P_o}(z_k)}$$





Aplicações: Controle

Máquina de Lavar Fuzzy

Considere o problema da **Máquina de Lavar com Controle *Fuzzy***.

Neste problema temos duas variáveis de entrada:

- Grau de sujeira da roupa (Sujeira)
- Manchas presentes na roupa (Manchas)

e uma variável de saída

- Tempo de lavagem da máquina

Suponha um sistema *fuzzy* (modelo MAMDANI definido por um especialista para resolver este problema) composto por uma base de dados, base de regras e mecanismo de inferência conforme mostrado a seguir:



Aplicações: Máquina de Lavar Fuzzy

BASE DE DADOS

Na base de dados, as variáveis linguísticas e possuem os seguintes conjuntos de termos linguísticos:

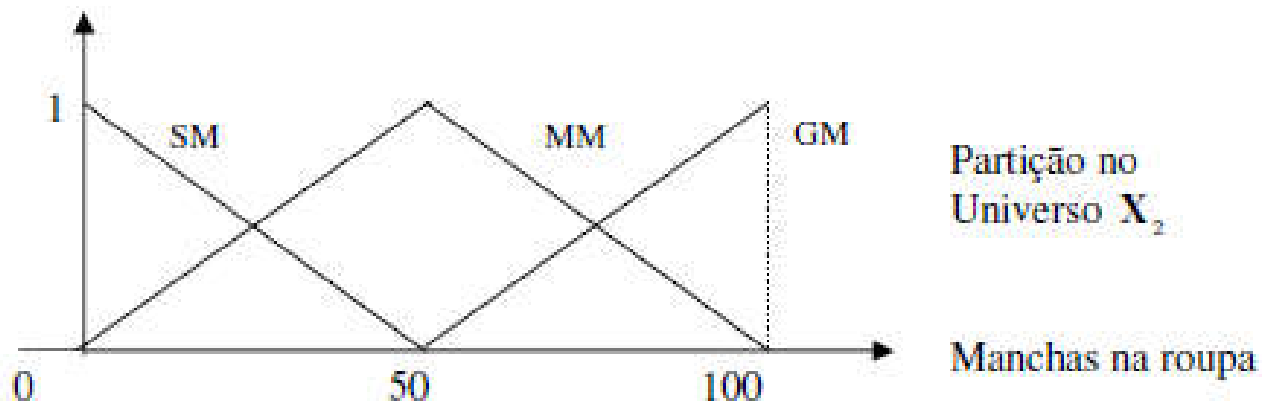
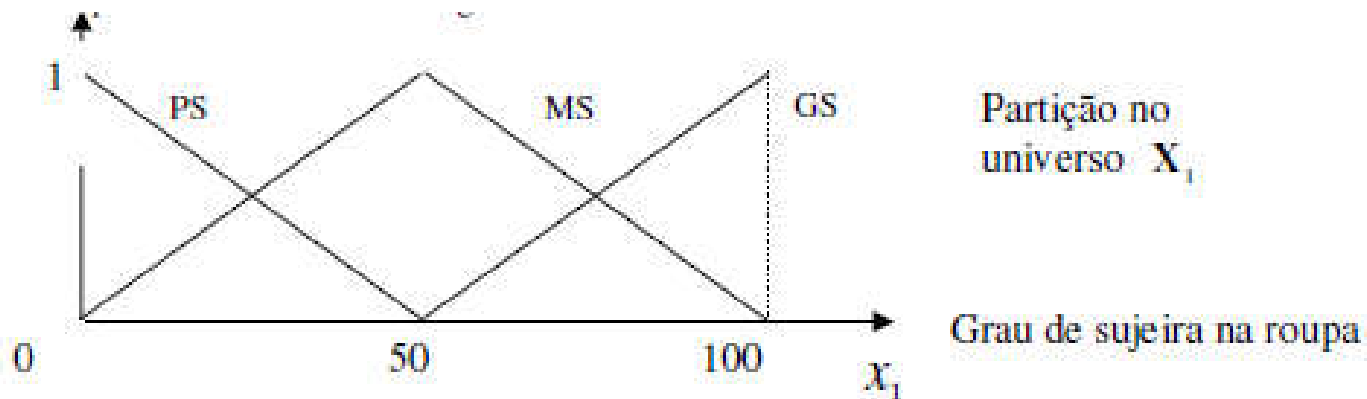
$$T(X_1) = \{PS(\text{pequena sujeira}), MS(\text{média sujeira}), GS(\text{grande sujeira})\}$$

$$T(X_2) = \{SM(\text{sem mancha}), MM(\text{média mancha}), GM(\text{grande mancha})\}$$

$$T(Y) = \{MC(\text{muito curto}), C(\text{curto}), M(\text{médio}), L(\text{longo}), ML(\text{muito longo})\}$$

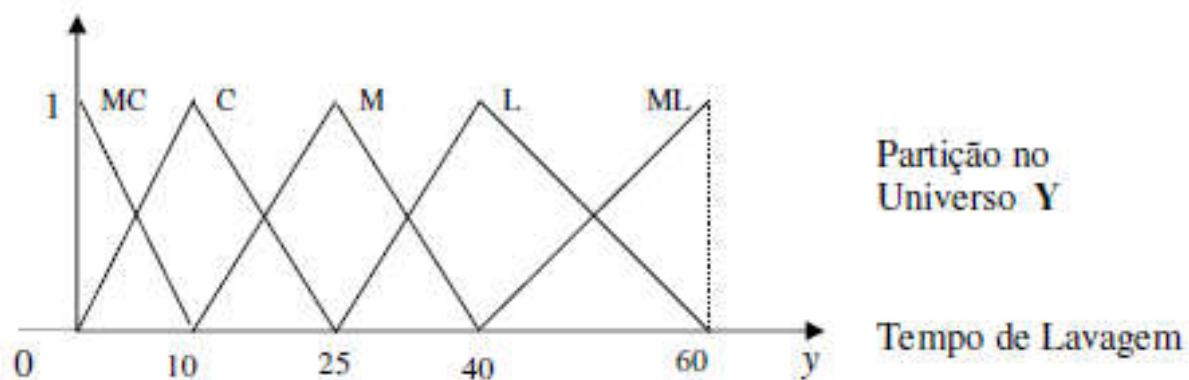
Aplicações: Máquina de Lavar Fuzzy

BASE DE DADOS: Variáveis de Entrada



Aplicações: Máquina de Lavar Fuzzy

BASE DE DADOS: Variável de Saída



Aplicações: Máquina de Lavar Fuzzy

BASE DE REGRAS

A base de regras envolvendo as entradas (grau de sujeira e manchas na roupa) e a saída (tempo de lavagem) é dada por:

	SM	MM	GM
PS	MC	M	L
MS	C	M	L
GS	M	L	ML

O que define o seguinte conjunto de regras *fuzzy*:

R1: Se X_1 é **PS** E X_2 é **SM** então Y é **MC**

R2: Se X_1 é **PS** E X_2 é **MM** então Y é **M**

+

+

R9: Se X_1 é **GS** E X_2 é **GM** então Y é **ML**

E de forma não abreviada:

R1: Se grau de sujeira é **pequena sujeira** E manchas na roupa é **sem manchas** então o tempo de lavagem é **muito curto**

Base de Regras: Máquina de Lavar Fuzzy

