UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

JOSÉ LUIS SANTOS FORTES

TÍTULO DO TRABALHO

Niterói

2018JOSÉ LUIS SANTOS FORTES

TÍTULO DO TRABALHO

Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação da Universidade Federal Fluminense como requisito parcial para obtenção do título de Tecnólogo em Sistemas de Computação.

Orientador:

ALTOBELLI DE BRITO MANTUAN

NITERÓI

2018

Folha reservada para a ficha catalográfica

JOSÉ LUIS SANTOS FORTES

TÍTULO DO TRABALHO

SUBTÍTULO

Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação da Universidade Federal Fluminense como requisito parcial para obtenção do título de Tecnólogo em Sistemas de Computação.

Niterói, \_\_\_ de \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ de ANO.

Banca Examinadora (provisório):

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Prof. ou Profa. <NOME>, <Título>. – Orientador ou Avaliador

<Sigla da Universidade> - <Nome da Universidade>

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Prof. ou Profa. <NOME>, <Título>. – Orientador ou Avaliador

<Sigla da Universidade> - <Nome da Universidade>

A dedicatória é opcional, no qual o autor presta homenagem ou dedica seu trabalho a alguém.

Dedico este trabalho a(o) minha(meu) esposa(o) e aos meus estimados filhos.

AGRADECIMENTOS

(EXEMPLO) A Deus, que sempre iluminou a minha caminhada.

A meu Orientador Fulano de Tal pelo estímulo e atenção que me concedeu durante o curso.

Aos Colegas de curso pelo incentivo e troca de experiências.

A todos os meus familiares e amigos pelo apoio e colaboração.

Epígrafe é a inscrição colocada no início de um trabalho, de um capítulo ou partes principais. É opcional para a monografia.

Delete as caixas amarelas

“A Escola é uma arena onde grupos sociais lutam por legitimidade e poder”.

Dinair Leal da Hora

RESUMO

O resumo deve apresentar os pontos relevantes de um texto, no mesmo momento ele terá que dar uma visão rápida e clara dos conteúdos, metodologias e das conclusões do trabalho. As frases têm que ter uma sequência lógica e objetiva. A fonte do estilo é Arial e tamanho 12.

Palavras-chaves: palavra1, palavra2 e palavra3.

*O resumo e abstract* devem ser digitados sem parágrafo inicial e o espaçamento entre linhas é simples. Lembre-se que já existem estilos que formatam o texto adequadamente. Remova as caixas amarelas antes de imprimir.

ABSTRACT (opcional)

The summary must present the excellent points of a text, at the same moment it will have that to give a fast and clear vision of the contents, methodologies and of the conclusions of the work. The phrases have that to have a logical and objective sequence. The source of the style is so great Arial and 12.

Key words: word1, word2 and word3.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

[Figura 1: Exemplo de Figura. 64](#_Toc513311833)

LISTA DE TABELAS

[Tabela 1 - Tabela de padrão de respostas do questionário de exemplo. 25](#_Toc513311835)

[Tabela 2 - Matriz de padrão de respostas () gerada através da tabela de padrão de respostas. 25](#_Toc513311836)

[Tabela 3 – Vetor de frequência de linhas da matriz de padrão de respostas . 26](#_Toc513311837)

[Tabela 4 - Vetor de frequência de colunas da matriz de padrão de respostas . 26](#_Toc513311838)

[Tabela 5 - Matriz diagonal de linhas calculada através da diagonalização de . 27](#_Toc513311839)

[Tabela 6 - Matriz diagonal de colunas calculada através da diagonalização de . 27](#_Toc513311840)

[Tabela 7 – Valores aproximados da matriz calculada segundo equação (6). 28](#_Toc513311841)

[Tabela 8 – Valores aproximados do vetor final de autovalores , já ordenados, da matriz . 28](#_Toc513311842)

[Tabela 9 – Valores aproximados da matriz final de autovetores , já ordenados, da matriz . 29](#_Toc513311843)

[Tabela 10 – Valores da matriz produto de *Hadamard* para . 29](#_Toc513311844)

[Tabela 11 – Valores calculados da matriz utilizando a equação (7). 30](#_Toc513311845)

[Tabela 12 - Valores aproximados do vetor de frequência de colunas da matriz . 31](#_Toc513311846)

[Tabela 13 – Valores aproximados do vetor de multiplicadores . 31](#_Toc513311847)

[Tabela 14 – Valores da matriz de pesos padrão dos itens (*x-normed weights*) . 31](#_Toc513311848)

[Tabela 15 – Valores aproximados do vetor de multiplicadores 32](#_Toc513311849)

[Tabela 16 – Matriz de pesos projetados dos itens, que representa os valores aproximados das coordenadas dos itens em cada uma das dimensões do espaço-solução 33](#_Toc513311850)

[Tabela 17 – Valores da matriz . 33](#_Toc513311851)

[Tabela 18 – Valores da matriz de pesos padrão das transações . 34](#_Toc513311852)

[Tabela 19 - Matriz de pesos projetados das transações, que representa os valores aproximados das coordenadas das transações em cada uma das dimensões do espaço-solução. 35](#_Toc513311853)

[Tabela 20 - Valores aproximados dos deltas e do delta acumulado em cada uma das dimensões do espaço-solução, em percentual. 35](#_Toc513311854)

[Tabela 21 - Valores aproximados das distâncias entre os Itens no espaço-solução. 40](#_Toc513311855)

[Tabela 22 - Valores aproximados das distâncias entre as transações no espaço-solução. 46](#_Toc513311856)

[Tabela 23 - Valores aproximados das distâncias quadradas entre os itens e as transações no espaço-solução. 51](#_Toc513311857)

[Tabela 24: Exemplo de Tabela. 64](#_Toc513311858)

LISTA DE GRÁFICOS

[Gráfico 1 - Valores aproximados dos deltas e do delta acumulado em cada uma das dimensões do espaço-solução. 36](#_Toc513311859)

[Gráfico 2 - Solução da análise utilizando *Dual Scaling*, usando as duas primeiras dimensões. Os itens estão representados por triângulos e as transações por quadrados. 37](#_Toc513311860)

[Gráfico 3 - Representação da distância de todos os itens em relação aos itens da categoria **Pressão.** 42](#_Toc513311861)

[Gráfico 4 - Representação da distância de todos os itens em relação aos itens da categoria **Enxaquecas**. 42](#_Toc513311862)

[Gráfico 5 - Representação da distância de todos os itens em relação aos itens da categoria **Idade**. 43](#_Toc513311863)

[Gráfico 6 - Representação da distância de todos os itens em relação aos itens da categoria **Ansiedade**. 43](#_Toc513311864)

[Gráfico 7 - representação da distância de todos os itens em relação aos itens da categoria **Peso**. 44](#_Toc513311865)

[Gráfico 8 - representação da distância de todos os itens em relação aos itens da categoria **Altura**. 44](#_Toc513311866)

[Gráfico 9 - Representação da distância de todas as transações em relação as transações 1, 2 e 3. 47](#_Toc513311867)

[Gráfico 10 - Representação da distância de todas as transações em relação as transações 4, 5 e 6. 47](#_Toc513311868)

[Gráfico 11 - Representação da distância de todas as transações em relação as transações 7, 8 e 9. 48](#_Toc513311869)

[Gráfico 12 - Representação da distância de todas as transações em relação as transações 10, 11 e 12. 48](#_Toc513311870)

[Gráfico 13 - Representação da distância de todas as transações em relação as transações 13, 14 e 15. 49](#_Toc513311871)

[Gráfico 14 - Representação da distância de todas os itens da categoria **Pressão** para todas as transações. 52](#_Toc513311872)

[Gráfico 15 - Representação da distância de todas os itens da categoria **Enxaquecas** para todas as transações. 52](#_Toc513311873)

[Gráfico 16 - Representação da distância de todas os itens da categoria **Idade** para todas as transações. 53](#_Toc513311874)

[Gráfico 17 - Representação da distância de todas os itens da categoria **Ansiedade** para todas as transações. 53](#_Toc513311875)

[Gráfico 18 - Representação da distância de todas os itens da categoria **Peso** para todas as transações. 54](#_Toc513311876)

[Gráfico 19 - Representação da distância de todas os itens da categoria **Estatura** para todas as transações. 54](#_Toc513311877)

[Gráfico 20 – Distância de todos os itens para o item Pressão Alta. 57](#_Toc513311878)

[Gráfico 21 – Gráficos para análise visual do item Pressão Alta com a distância limite igual a 2,0. 58](#_Toc513311879)

[Gráfico 22 – Gráficos para análise visual do item Pressão Alta com a distância limite igual a 4,0. 59](#_Toc513311880)

[Gráfico 23 - Gráficos para análise visual do item Pressão Alta com a distância limite igual a 10,0. 60](#_Toc513311881)

[Gráfico 23: Exemplo de um gráfico 63](#_Toc513311882)

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

DS – *Dual Scaling*

SUMÁRIO

[RESUMO 8](#_Toc513312041)

[ABSTRACT (opcional) 9](#_Toc513312042)

[LISTA DE ILUSTRAÇÕES 10](#_Toc513312043)

[LISTA DE TABELAS 11](#_Toc513312044)

[LISTA DE GRÁFICOS 13](#_Toc513312045)

[LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS 15](#_Toc513312046)

[1 INTRODUÇÃO 17](#_Toc513312047)

[2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA 18](#_Toc513312048)

[2.1 Dados Categóricos Multivariados 19](#_Toc513312049)

[2.2 Dados de Múltipla Escolha 20](#_Toc513312050)

[2.3 DUAL SCALING 20](#_Toc513312051)

[2.4 Exemplo Prático 24](#_Toc513312052)

[3 DUAL SCALING E SUA CAPACIDADE DE FORNECER UMA ANÁLISE VISUAL DOS RESULTADOS ATRAVÉS DE SUAS DISTÂNCIAS 38](#_Toc513312053)

[3.1 CÁLCULO DAS DISTÂNCIAS 39](#_Toc513312054)

[3.1.1 Distâncias Intra-Grupo - Itens 39](#_Toc513312055)

[3.1.2 Distâncias Intra-Grupo - Transações 45](#_Toc513312056)

[3.1.3 Distância Inter-Grupo 49](#_Toc513312057)

[3.2 ANÁLISE VISUAL DOS RESULTADOS 55](#_Toc513312058)

[3.3 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 61](#_Toc513312059)

[3.4 CITAÇÕES 61](#_Toc513312060)

[3.5 IDIOMA ESTRANGEIRO 63](#_Toc513312061)

[3.6 FIGURAS, GRÁFICOS E TABELAS. 63](#_Toc513312062)

[3.7 NOTAS ENTRE O ORIENTADOR E O ALUNO 64](#_Toc513312063)

[CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS 65](#_Toc513312064)

[65](#_Toc513312065)

[4 Referências BIBLIOGRÁFICAS 66](#_Toc513312066)

[REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 66](#_Toc513312067)

[ANEXOS 67](#_Toc513312068)

# INTRODUÇÃO

Parte inicial do texto, onde devem constar a delimitação do assunto tratado, o problema ou oportunidade, objetivos da pesquisa, motivação para fazer a pesquisa, métodos usados e resultados encontrados, quando for o caso, e outros elementos necessários para situar o tema do trabalho, bem como a estrutura do documento.

A introdução pode ter a seguinte ordem:

* O que é o trabalho? (1 ou 2 parágrafos)
* Motivação para desenvolvê-lo? (1 parágrafo)
* Métodos usados, quando for o caso (linguagens, protocolos, metodologias, etc.) ( 1 ou 2 parágrafos)
* Organização do trabalho:
  + no Capítulo 2....;
  + o terceiro capítulo é dedicado ...;
  + ...; e
  + finalmente, no Capítulo “tal”, temos as conclusões e indicações para futuros trabalhos.

# FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Não importa o que você faça; não importa qual a sua profissão; estamos todos cercados de informações relevantes que uma hora ou outra serão necessárias para algum estudo ou tomada de decisão. Nessa hora, devemos coletar o maior número possível de dados “válidos”, que são aqueles dados que podem e valem a pena serem analisados.

Se olharmos puramente pelo lado estatístico, podemos pressupor que toda massa de dados coletada é contínua e representa uma amostra aleatória de uma população de distribuição normal. Porém, na prática, é muito difícil que nossos dados satisfaçam essas suposições, uma vez que a grande maioria dos dados coletados são qualitativos, e não contínuos, o que de cara torna a distribuição normal da população irrelevante.

Ainda sob o olhar puramente estatístico, esses dados seriam analisados segundo uma abordagem chamada **análise linear**, que é o destino natural da utilização de variáveis contínuas, motivo pelo qual os principais procedimentos estatísticos tradicionais foram desenvolvidos. Se utilizarmos um exemplo de dados coletados por um formulário médico com questões sobre pressão sanguínea, utilizando a análise linear, identificaremos facilmente um fenômeno linear que diz que “a pressão sanguínea aumenta conforme aumenta a idade do indivíduo”. Porém, essa abordagem de análise falha ao não identificar fenômenos não lineares, como por exemplo, saber que “enxaquecas ocorrem com mais frequência em indivíduos que possuem pressão sanguínea muito baixa ou muito elevada”.

Dessa forma, podemos facilmente concluir que mesmo os procedimentos estatísticos mais comumente utilizados podem não ser apropriados para a interpretação e entendimento de nossos dados. Quando vemos todas as formas possíveis de relacionamentos entre duas variáveis, nos damos conta que a maioria das relações são não lineares, e que não é nenhuma vantagem restringir nossa atenção apenas às relações lineares. O que fazemos com nossos dados então? A resposta mais razoável a essa questão, sem dúvidas, é a utilização do *Dual Scaling* para a análise de dados.

Podemos definir *Dual Scaling* como um conjunto de técnicas relacionadas para a análise de uma grande variedade de tipos de dados; entretanto, esta definição simplista, não faz jus às habilidades do *Dual Scaling*. A utilização do *Dual Scaling* para a análise de dados simplifica de maneira considerável dados extremamente complexos, provendo uma descrição detalhada de praticamente cada unidade de informação, produzindo assim uma análise simples, porém exaustiva, graças ao seu método multidimensional e não linear de quantificação.

Se o principal propósito da análise de dados está em identificar relações entre variáveis, sejam elas lineares ou não lineares, e extrair delas a maior quantidade de informação possível, podemos caracterizar o *Dual Scaling* como a técnica ótima para tal função, uma vez que ela consegue identificar todas essas relações e extrair a maior quantidade de informações possíveis dos dados categóricos multivariados.

## Dados Categóricos Multivariados

Definimos dados categóricos como sendo os dados decorrentes da observação de variáveis categóricas, ou seja, aqueles que identificam para cada caso, uma categoria. As categorias podem ser derivadas de variáveis qualitativas (nominais ou ordinais) ou quantitativas. Fazendo uma analogia com a ciência da computação, tentando simplificar a explicação, os dados categóricos seriam os enumeradores.

Em 1993, Shizuhiko Nishisato classificou os dados categóricos em dois grupos distintos: (a) os dados de incidência (*incidence data*), grupo que abrange as tabelas de contingência (*contingency tables*), os dados de múltipla escolha (*multiple-choice data*) e os dados ordenados (*sorting data*); e (b) os dados de dominância (*dominance data*), grupo este que abrange os dados por ordem de classificação (*rank-order data*) e os dados de comparação pareada (*paired-comparison data*). Como escopo deste trabalho, apenas iremos nos aprofundar nos dados de múltipla escolha. Caso seja de interesse, os demais tipos de dados podem ser consultados no livro *Elements of Dual Scaling: An Introduction To Practical Data Analysis* (NISHISATO, 1993).

## Dados de Múltipla Escolha

Os dados do tipo múltipla escolha são indubitavelmente os mais populares entre todos os tipos de dados categóricos. Pode-se dizer que são onipresentes em todos os tipos de pesquisas, sejam elas médicas, comportamentais, sociais, etc. Consiste na apresentação de uma série de alternativas, onde apenas uma será escolhida.

A utilização da técnica de *Dual Scaling* nos permite analisar os dados de múltipla escolha de forma bem mais eficaz, atribuindo à alternativa escolhida o valor 1, enquanto as demais alternativas recebem o valor 0. O resultado então é apresentado em uma tabela chamada **Tabela de Padrão de Respostas** (*response-pattern table*).

## DUAL SCALING

*Dual Scaling* é um método versátil para análise de variados tipos de dados. Ele foi proposto por Nishisato como uma *ferramenta para inspeção visual* de indivíduos e suas preferências para estímulos coletados através de questionários de opinião. Com o mapeamento resultante do *Dual Scaling*, cada indivíduo e estímulo pesquisado são representados como um ponto no espaço-solução resultante. Os comportamentos e preferências de grupos de indivíduos que tem opiniões similares emergem da distribuição de pontos porque indivíduos e estímulos relacionados são mapeados pertos um dos outros, enquanto dados não relacionados aparecem apartados no espaço-solução.

Apesar de ter sido proposto originalmente para análise de preferências de indivíduos, Nishisato afirma que sua abordagem sobre o *Dual Scaling* pode ser empregada para descobrir estilos de respostas em praticamente todos os tipos de bases de dados.

Os dados resultantes da análise utilizando o *Dual Scaling* são expressados em função do padrão de resposta escolhido, e as unidades de análise são as opções de respostas. O *Dual Scaling* procura as combinações ponderadas mais informativas de categorias de itens. Isso significa que o *Dual Scaling* produz uma matriz de correlação entre os itens para cada dimensão.

Combinações não-lineares de categorias de itens estão envolvidas em cada dimensão. No *Dual Scaling*, a correlação linear é maximizada pela transformação das categorias de forma linear ou não linear, dependendo dos dados.

Seguindo o escopo proposto para este trabalho, representaremos nossa base de dados com dados do tipo múltipla escolha como , e será nossa matriz de padrão de respostas, baseada na tabela de padrão de respostas de 0s e 1s, de tamanho , onde cada transação é um indivíduo (linhas da matriz), e os itens ficam organizados como possíveis estímulos ou respostas de múltipla escolha (colunas da matriz).

A primeira etapa do cálculo do *Dual Scaling* tem como objetivo descobrir a quantidade de dimensões do espaço-solução , dado pela equação:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | , | (1) |

onde é o número de colunas (itens) de nossa matriz de padrão de respostas , e é o número de categorias dos itens de resposta (questões).

Em seguida, definimos o vetor como o somatório das linhas da matriz de padrão de respostas , e o vetor como o somatório das colunas da matriz de padrão de respostas . Esses vetores são conhecidos como vetores de frequência de linhas e colunas de .

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2) |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3) |

Uma vez conhecidos os vetores de frequência, vamos gerar para cada um deles uma matriz diagonal. A matriz diagonal de linhas é gerada através da diagonalização do vetor de frequência de linhas , que significa gerar uma matriz quadrada de tamanho , onde os valores do vetor serão os valores da diagonal principal da matriz; do mesmo modo, a matriz diagonal de colunas é gerada através da diagonalização do vetor de frequência de colunas , que segue o mesmo modo de operação explicado acima:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (4) |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (5) |

O próximo passo é definir as correlações entre colunas da matriz , cujo resultado chamaremos de matriz , dada pelo resultado da equação:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | . | (6) |

A transposição de matriz é representada por , enquanto a inversão de matriz é representada por .

Representamos por e , respectivamente, o vetor de autovalores e a matriz de autovetores de . O vetor de autovalores deve ser ordenado, de tal forma que . As colunas da matriz de autovetores devem acompanhar a ordenação de seus respectivos autovalores. Uma vez ordenados, o primeiro item do vetor de autovalores , bem como a primeira coluna da matriz de autovetores , devem ser descartados; e o número máximo de elementos em e colunas em devem ser iguais ao número de dimensões do espaço-solução. Dessa forma, temos como o vetor final de autovalores, e como a matriz final de autovetores.

Em seguida, vamos calcular a matriz , dada pela equação:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | . | (7) |
|  |  |  |

Importante ressaltar que a operação entre as matrizes na equação que define , representada pelo símbolo , é o produto de *Hadamard*.

Uma vez conhecida a matriz , vamos calcular o seu vetor de frequência de colunas , que é o somatório de todos os valores das colunas da matriz .

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (8) |

Dando continuidade ao cálculo do *Dual Scaling*, vamos calcular agora o vetor , cujos valores representam os multiplicadores das colunas da matriz final de autovetores para chegarmos à matriz de pesos padrão dos itens (*x-normed weights*). O vetor pode ser definido pela equação:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | , | (9) |

onde representa o somatório de todos os valores da matriz de padrão de respostas . Uma vez conhecido o vetor de multiplicadores , calculamos então a matriz de pesos padrão dos itens, representada por , e dada pela equação:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | . | (10) |

As coordenadas finais de cada um dos itens no espaço-solução são dadas pela matriz de pesos projetados dos itens (*x-projected weights*), representada por e obtida pela equação:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | , | (11) |

onde é um vetor que contém os multiplicadores para as colunas da matriz de pesos padrão , definido pela equação:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | . | (12) |

De posse das coordenadas dos itens no espaço-solução, o próximo passo é calcular as coordenadas das transações. A primeira etapa deste cálculo consiste na multiplicação da matriz de padrão de respostas pela matriz de pesos padrão de itens . A matriz resultante deste produto é representada pela seguinte equação:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | . | (13) |

A partir dos valores da matriz , calculamos a matriz de pesos padrão das transações (*y-normed weights*), representada por , utilizando a fórmula abaixo:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (14) |

As coordenadas finais de cada uma das transações no espaço-solução são dadas pelos valores da matriz de pesos projetados das transações (*y-projected weights*), representada por e obtida pela equação:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | . | (15) |

O último passo do *Dual Scaling* é calcular , vetor com os valores do percentual de representatividade de cada uma das dimensões do espaço-solução na solução como um todo. O cálculo de acontece através da equação

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | . | (16) |

## Exemplo Prático

Vamos a um exemplo prático para entender melhor como funciona a análise dos dados de múltipla escolha utilizando *Dual Scaling*. Imagine um questionário médico composto por seis perguntas com o objetivo de avaliar a pressão arterial de pacientes (vale ressaltar que este exemplo foi fornecido por Nishisato para entendimento da técnica) (NISHISATO, 1993). Teríamos então o seguinte questionário, mostrado abaixo:

1. Como você avalia a sua pressão sanguínea? (Baixa, Normal, Alta)   
   Itens: 1, 2, 3
2. Você tem enxaquecas com que frequência? (Raramente, Algumas Vezes, Sempre) Itens: 4, 5, 6
3. Qual a sua idade? (20-34, 35-49, 50-65) Itens: 7, 8, 9
4. Como você avalia seu nível diário de ansiedade? (Baixa, Normal, Alta)   
   Itens: 10, 11, 12
5. Como você avalia o seu peso? (Abaixo do Peso, Normal, Acima do Peso)   
   Itens: 13, 14, 15
6. Como você avalia a sua altura? (Baixo, Mediano, Alto) Itens: 16, 17, 18

Para a análise não linear do *Dual Scaling*, utilizaremos a tabela de padrão de respostas de 0s e 1s. As respostas do questionário, respondido por 15 indivíduos, podem ser visualizadas na Tabela 1.

Tabela 1 - Tabela de padrão de respostas do questionário de exemplo.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Tabela Padrão de Respostas do Dual Scaling | | | | | |
|  | **Pressão** | **Enxaqueca** | **Idade** | **Ansiedade** | **Peso** | **Altura** |
| Indivíduo | **P1** | **P2** | **P3** | **P4** | **P5** | **P6** |
| 1 | 100 | 001 | 001 | 001 | 100 | 100 |
| 2 | 100 | 001 | 100 | 001 | 010 | 001 |
| 3 | 001 | 001 | 001 | 001 | 100 | 001 |
| 4 | 001 | 001 | 001 | 001 | 100 | 100 |
| 5 | 010 | 100 | 010 | 010 | 001 | 010 |
| 6 | 010 | 100 | 010 | 001 | 001 | 100 |
| 7 | 010 | 010 | 010 | 100 | 100 | 001 |
| 8 | 100 | 001 | 100 | 001 | 100 | 001 |
| 9 | 010 | 010 | 010 | 100 | 100 | 010 |
| 10 | 100 | 001 | 010 | 010 | 100 | 001 |
| 11 | 010 | 100 | 100 | 001 | 010 | 010 |
| 12 | 010 | 010 | 001 | 001 | 010 | 010 |
| 13 | 001 | 001 | 001 | 001 | 001 | 100 |
| 14 | 100 | 001 | 100 | 010 | 100 | 100 |
| 15 | 001 | 001 | 001 | 001 | 100 | 010 |

O primeiro passo então seria transformar nossa tabela de padrão de respostas em uma matriz de padrão de respostas, que chamaremos de , onde n é o número de linhas, que representam as transações (15), e m o número de colunas, que representam os itens (18). A matriz pode ser visualizada na Tabela 2.

Tabela 2 - Matriz de padrão de respostas () gerada através da tabela de padrão de respostas.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **Itens** | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| **Transações** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** | **12** | **13** | **14** | **15** | **16** | **17** | **18** |
| **1** | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| **2** | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| **3** | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| **4** | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| **5** | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| **6** | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| **7** | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| **8** | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| **9** | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| **10** | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| **11** | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| **12** | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| **13** | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| **14** | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| **15** | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |

Em seguida, calculamos os vetores de frequências de linhas e colunas da matriz de padrão de respostas , conforme especificado na equação (2). Se pegarmos a primeira linha da matriz, teremos . A Tabela 3 mostra todos os resultados de .

Tabela 3 – Vetor de frequência de linhas da matriz de padrão de respostas .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Vetor de frequência de linhas** | | | | | | | | | | | | | | | |
| **índice** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** | **12** | **13** | **14** | **15** |
| **valor** | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 |

Do mesmo modo, ao pegarmos a primeira coluna da matriz como exemplo, teremos . A Tabela 4 mostra todos os resultados de .

Tabela 4 - Vetor de frequência de colunas da matriz de padrão de respostas .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Vetor de frequência de colunas** | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| **índice** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** | **12** | **13** | **14** | **15** | **16** | **17** | **18** |
| **valor** | 5 | 6 | 4 | 3 | 3 | 9 | 4 | 5 | 6 | 2 | 3 | 10 | 9 | 3 | 3 | 5 | 5 | 5 |

O próximo passo então é calcular as matrizes diagonais de linhas () e colunas () de . A Tabela 5 e a Tabela 6 mostram os resultados de e , respectivamente.

Tabela 5 - Matriz diagonal de linhas calculada através da diagonalização de .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **Matriz Diagonal de Linhas** | | | | | | | | | | | | | | |
| **Índice das linhas** | **Índice das colunas** | | | | | | | | | | | | | | |
| **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** | **12** | **13** | **14** | **15** |
| **1** | 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **2** | 0 | 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **3** | 0 | 0 | 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **4** | 0 | 0 | 0 | 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **5** | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **6** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **7** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **8** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **9** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **10** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **11** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **12** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 | 0 | 0 | 0 |
| **13** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 | 0 | 0 |
| **14** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 | 0 |
| **15** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 |

Tabela 6 - Matriz diagonal de colunas calculada através da diagonalização de .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Matriz Diagonal de Colunas** | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| **Índice das linhas** | **Índice das colunas** | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** | **12** | **13** | **14** | **15** | **16** | **17** | **18** |
| **1** | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **2** | 0 | 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **3** | 0 | 0 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **4** | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **5** | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **6** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **7** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **8** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **9** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **10** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **11** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **12** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **13** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **14** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **15** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 |
| **16** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 0 | 0 |
| **17** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 0 |
| **18** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 |

Uma vez conhecidas as matrizes , e , podemos calcular então a matriz resultante , conforme equação (6). Os valores calculados para a matriz estão mostrados na Tabela 7.

Tabela 7 – Valores aproximados da matriz calculada segundo equação (6).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Valores da Matriz Resultante** | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| **Índice das linhas** | **Índice das colunas** | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** | **12** | **13** | **14** | **15** | **16** | **17** | **18** |
| **1** | 0,167 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,093 | 0,125 | 0,033 | 0,028 | 0 | 0,111 | 0,050 | 0,074 | 0,056 | 0 | 0,067 | 0 | 0,100 |
| **2** | 0 | 0,167 | 0 | 0,167 | 0,167 | 0 | 0,042 | 0,133 | 0,028 | 0,167 | 0,056 | 0,050 | 0,037 | 0,111 | 0,111 | 0,033 | 0,133 | 0,033 |
| **3** | 0 | 0 | 0,167 | 0 | 0 | 0,074 | 0 | 0 | 0,111 | 0 | 0 | 0,067 | 0,056 | 0 | 0,056 | 0,067 | 0,033 | 0,033 |
| **4** | 0 | 0,083 | 0 | 0,167 | 0 | 0 | 0,042 | 0,067 | 0 | 0 | 0,056 | 0,033 | 0 | 0,056 | 0,111 | 0,033 | 0,067 | 0 |
| **5** | 0 | 0,083 | 0 | 0 | 0,167 | 0 | 0 | 0,067 | 0,028 | 0,167 | 0 | 0,017 | 0,037 | 0,056 | 0 | 0 | 0,067 | 0,033 |
| **6** | 0,167 | 0 | 0,167 | 0 | 0 | 0,167 | 0,125 | 0,033 | 0,139 | 0 | 0,111 | 0,117 | 0,130 | 0,056 | 0,056 | 0,133 | 0,033 | 0,133 |
| **7** | 0,100 | 0,028 | 0 | 0,056 | 0 | 0,056 | 0,167 | 0 | 0 | 0 | 0,056 | 0,050 | 0,037 | 0,111 | 0 | 0,033 | 0,033 | 0,067 |
| **8** | 0,033 | 0,111 | 0 | 0,111 | 0,111 | 0,019 | 0 | 0,167 | 0 | 0,167 | 0,111 | 0,017 | 0,056 | 0 | 0,111 | 0,033 | 0,067 | 0,067 |
| **9** | 0,033 | 0,028 | 0,167 | 0 | 0,056 | 0,093 | 0 | 0 | 0,167 | 0 | 0 | 0,100 | 0,074 | 0,056 | 0,056 | 0,100 | 0,067 | 0,033 |
| **10** | 0 | 0,056 | 0 | 0 | 0,111 | 0 | 0 | 0,067 | 0 | 0,167 | 0 | 0 | 0,037 | 0 | 0 | 0 | 0,033 | 0,033 |
| **11** | 0,067 | 0,028 | 0 | 0,056 | 0 | 0,037 | 0,042 | 0,067 | 0 | 0 | 0,167 | 0 | 0,037 | 0 | 0,056 | 0,033 | 0,033 | 0,033 |
| **12** | 0,100 | 0,083 | 0,167 | 0,111 | 0,056 | 0,130 | 0,125 | 0,033 | 0,167 | 0 | 0 | 0,167 | 0,093 | 0,167 | 0,111 | 0,133 | 0,100 | 0,100 |
| **13** | 0,133 | 0,056 | 0,125 | 0 | 0,111 | 0,130 | 0,083 | 0,100 | 0,111 | 0,167 | 0,111 | 0,083 | 0,167 | 0 | 0 | 0,100 | 0,067 | 0,133 |
| **14** | 0,033 | 0,056 | 0 | 0,056 | 0,056 | 0,019 | 0,083 | 0 | 0,028 | 0 | 0 | 0,050 | 0 | 0,167 | 0 | 0 | 0,067 | 0,033 |
| **15** | 0 | 0,056 | 0,042 | 0,111 | 0 | 0,019 | 0 | 0,067 | 0,028 | 0 | 0,056 | 0,033 | 0 | 0 | 0,167 | 0,067 | 0,033 | 0 |
| **16** | 0,067 | 0,028 | 0,083 | 0,056 | 0 | 0,074 | 0,042 | 0,033 | 0,083 | 0 | 0,056 | 0,067 | 0,056 | 0 | 0,111 | 0,167 | 0 | 0 |
| **17** | 0 | 0,111 | 0,042 | 0,111 | 0,111 | 0,019 | 0,042 | 0,067 | 0,056 | 0,083 | 0,056 | 0,050 | 0,037 | 0,111 | 0,056 | 0 | 0,167 | 0 |
| **18** | 0,100 | 0,028 | 0,042 | 0 | 0,056 | 0,074 | 0,083 | 0,067 | 0,028 | 0,083 | 0,056 | 0,050 | 0,074 | 0,056 | 0 | 0 | 0 | 0,167 |

Utilizando a equação (1), calcularemos o número de dimensões do espaço-solução (). Uma vez que o formulário possui 18 itens () e 6 questões (), temos .

Nosso próximo passo agora é calcular o vetor de autovalores e a matriz de autovetores de . A Tabela 8 mostra os valores do vetor final de autovalores, enquanto a Tabela 9 nos apresenta os valores da matriz final de autovetores .

Tabela 8 – Valores aproximados do vetor final de autovalores , já ordenados, da matriz .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Vetor Final de Autovalores** | | | | | | | | | | | |
| **índice** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** |
| **valor** | 0,54412 | 0,37472 | 0,34548 | 0,30697 | 0,13069 | 0,12022 | 0,07503 | 0,04732 | 0,03156 | 0,01730 | 0,00659 |

Tabela 9 – Valores aproximados da matriz final de autovetores , já ordenados, da matriz .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Matriz Final de Autovetores** | | | | | | | | | | | |
| **Índice**  **das**  **linhas** | **Índice das colunas** | | | | | | | | | | |
| **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** |
| **1** | -0,2270 | -0,3338 | 0,3264 | 0,0548 | -0,0339 | -0,2181 | 0,2222 | 0,2265 | -0,4139 | 0,1245 | -0,1625 |
| **2** | 0,4462 | 0,0917 | 0,0107 | -0,0937 | -0,0984 | -0,0573 | -0,0043 | 0,1195 | 0,2087 | -0,3053 | -0,0037 |
| **3** | -0,2192 | 0,2421 | -0,3371 | 0,0389 | 0,1323 | 0,2754 | -0,2180 | -0,3460 | 0,2051 | 0,1808 | 0,1662 |
| **4** | 0,1972 | 0,2641 | 0,3029 | 0,0027 | -0,0562 | 0,1252 | -0,2526 | 0,2609 | 0,1911 | -0,0158 | -0,2432 |
| **5** | 0,2489 | -0,1724 | -0,2922 | -0,0964 | -0,0421 | -0,1825 | 0,2483 | -0,1414 | 0,0176 | -0,2895 | 0,2394 |
| **6** | -0,4462 | -0,0917 | -0,0107 | 0,0937 | 0,0984 | 0,0573 | 0,0043 | -0,1195 | -0,2087 | 0,3053 | 0,0037 |
| **7** | -0,0945 | -0,1823 | 0,3865 | -0,2766 | -0,1106 | -0,1118 | -0,4330 | -0,3732 | -0,0310 | -0,2347 | 0,1119 |
| **8** | 0,3254 | -0,0898 | 0,0359 | 0,3874 | -0,0636 | 0,1742 | 0,1102 | 0,1945 | -0,0153 | 0,4668 | 0,4269 |
| **9** | -0,2309 | 0,2721 | -0,4224 | -0,1108 | 0,1742 | -0,0624 | 0,3228 | 0,1787 | 0,0463 | -0,2321 | -0,5388 |
| **10** | 0,1968 | -0,1982 | -0,2270 | 0,0775 | -0,1403 | -0,0706 | -0,1862 | -0,1729 | -0,0571 | 0,2058 | -0,3529 |
| **11** | 0,0236 | -0,0749 | 0,3025 | 0,2962 | 0,4520 | -0,0568 | 0,1899 | -0,2038 | 0,2727 | -0,1002 | -0,0589 |
| **12** | -0,2205 | 0,2731 | -0,0755 | -0,3737 | -0,3118 | 0,1274 | -0,0037 | 0,3768 | -0,2156 | -0,1056 | 0,4119 |
| **13** | -0,1554 | -0,3401 | -0,2834 | 0,2541 | 0,2116 | -0,1117 | -0,4691 | 0,4229 | 0,1400 | -0,2321 | 0,1177 |
| **14** | 0,0613 | -0,0023 | 0,1466 | -0,4913 | -0,0177 | -0,0120 | 0,2920 | -0,1125 | 0,2346 | 0,3766 | -0,0504 |
| **15** | 0,0941 | 0,3424 | 0,1368 | 0,2372 | -0,1939 | 0,1237 | 0,1771 | -0,3104 | -0,3746 | -0,1446 | -0,0673 |
| **16** | -0,1775 | 0,2578 | 0,0186 | 0,2534 | -0,3479 | -0,5779 | 0,0080 | -0,0323 | 0,3001 | 0,1238 | 0,0817 |
| **17** | 0,2640 | 0,1415 | -0,0521 | -0,2644 | 0,5771 | -0,0435 | -0,1860 | 0,0311 | -0,4543 | 0,0983 | 0,0482 |
| **18** | -0,0866 | -0,3993 | 0,0335 | 0,0110 | -0,2292 | 0,6214 | 0,1780 | 0,0012 | 0,1542 | -0,2222 | -0,1299 |

Seguindo com o cálculo, passamos agora para a equação (7), onde acharemos os valores da matriz . Para isso, vamos primeiro calcular a matriz produto de *Hadamard* de , que chamaremos de matriz . A característica especial do produto de *Hadamard* é que ele não segue a multiplicação padrão de matrizes, e sim multiplica os valores de mesmo índice das duas matrizes. Por exemplo, para acharmos o valor de , devemos resolver a equação . A Tabela 10 mostra todos os valores calculados para Conhecidos os valores da matriz , podemos prosseguir com o cálculo de , multiplicando agora a matriz resultante pela matriz de diagonal de colunas . Os valores resultantes dessa multiplicação estão exibidos na Tabela 11.

Tabela 10 – Valores da matriz produto de *Hadamard* para .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Matriz Produto de *Hadamard*** | | | | | | | | | | | |
| **Índice das**  **linhas** | **Índice das colunas** | | | | | | | | | | |
| **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** |
| **1** | 0,0515 | 0,1114 | 0,1065 | 0,0030 | 0,0011 | 0,0475 | 0,0494 | 0,0513 | 0,1713 | 0,0155 | 0,0264 |
| **2** | 0,1991 | 0,0084 | 0,0001 | 0,0088 | 0,0097 | 0,0033 | 0,0000 | 0,0143 | 0,0436 | 0,0932 | 0,0000 |
| **3** | 0,0480 | 0,0586 | 0,1136 | 0,0015 | 0,0175 | 0,0758 | 0,0475 | 0,1197 | 0,0421 | 0,0327 | 0,0276 |
| **4** | 0,0389 | 0,0697 | 0,0918 | 0,0000 | 0,0032 | 0,0157 | 0,0638 | 0,0680 | 0,0365 | 0,0002 | 0,0591 |
| **5** | 0,0620 | 0,0297 | 0,0854 | 0,0093 | 0,0018 | 0,0333 | 0,0617 | 0,0200 | 0,0003 | 0,0838 | 0,0573 |
| **6** | 0,1991 | 0,0084 | 0,0001 | 0,0088 | 0,0097 | 0,0033 | 0,0000 | 0,0143 | 0,0436 | 0,0932 | 0,0000 |
| **7** | 0,0089 | 0,0332 | 0,1494 | 0,0765 | 0,0122 | 0,0125 | 0,1875 | 0,1393 | 0,0010 | 0,0551 | 0,0125 |
| **8** | 0,1059 | 0,0081 | 0,0013 | 0,1501 | 0,0041 | 0,0303 | 0,0122 | 0,0378 | 0,0002 | 0,2179 | 0,1822 |
| **9** | 0,0533 | 0,0741 | 0,1784 | 0,0123 | 0,0303 | 0,0039 | 0,1042 | 0,0319 | 0,0021 | 0,0538 | 0,2903 |
| **10** | 0,0387 | 0,0393 | 0,0515 | 0,0060 | 0,0197 | 0,0050 | 0,0347 | 0,0299 | 0,0033 | 0,0424 | 0,1245 |
| **11** | 0,0006 | 0,0056 | 0,0915 | 0,0877 | 0,2043 | 0,0032 | 0,0361 | 0,0415 | 0,0744 | 0,0100 | 0,0035 |
| **12** | 0,0486 | 0,0746 | 0,0057 | 0,1396 | 0,0972 | 0,0162 | 0,0000 | 0,1420 | 0,0465 | 0,0112 | 0,1696 |
| **13** | 0,0242 | 0,1156 | 0,0803 | 0,0645 | 0,0448 | 0,0125 | 0,2200 | 0,1789 | 0,0196 | 0,0539 | 0,0139 |
| **14** | 0,0038 | 0,0000 | 0,0215 | 0,2413 | 0,0003 | 0,0001 | 0,0853 | 0,0127 | 0,0550 | 0,1419 | 0,0025 |
| **15** | 0,0089 | 0,1173 | 0,0187 | 0,0563 | 0,0376 | 0,0153 | 0,0314 | 0,0963 | 0,1403 | 0,0209 | 0,0045 |
| **16** | 0,0315 | 0,0664 | 0,0003 | 0,0642 | 0,1210 | 0,3340 | 0,0001 | 0,0010 | 0,0901 | 0,0153 | 0,0067 |
| **17** | 0,0697 | 0,0200 | 0,0027 | 0,0699 | 0,3330 | 0,0019 | 0,0346 | 0,0010 | 0,2064 | 0,0097 | 0,0023 |
| **18** | 0,0075 | 0,1595 | 0,0011 | 0,0001 | 0,0525 | 0,3861 | 0,0317 | 0,0000 | 0,0238 | 0,0494 | 0,0169 |

Tabela 11 – Valores calculados da matriz utilizando a equação (7).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Matriz** | | | | | | | | | | | |
| **Índice das**  **linhas** | **Índice das colunas** | | | | | | | | | | |
| **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** |
| **1** | 0,2577 | 0,5572 | 0,5326 | 0,0150 | 0,0057 | 0,2377 | 0,2470 | 0,2566 | 0,8565 | 0,0775 | 0,1320 |
| **2** | 1,1943 | 0,0505 | 0,0007 | 0,0527 | 0,0580 | 0,0197 | 0,0001 | 0,0857 | 0,2614 | 0,5593 | 0,0001 |
| **3** | 0,1921 | 0,2345 | 0,4546 | 0,0061 | 0,0700 | 0,3033 | 0,1901 | 0,4790 | 0,1683 | 0,1308 | 0,1105 |
| **4** | 0,1167 | 0,2092 | 0,2753 | 0,0000 | 0,0095 | 0,0470 | 0,1914 | 0,2041 | 0,1096 | 0,0007 | 0,1774 |
| **5** | 0,1859 | 0,0891 | 0,2561 | 0,0279 | 0,0053 | 0,0999 | 0,1850 | 0,0599 | 0,0009 | 0,2515 | 0,1720 |
| **6** | 1,7915 | 0,0757 | 0,0010 | 0,0791 | 0,0871 | 0,0296 | 0,0002 | 0,1285 | 0,3922 | 0,8389 | 0,0001 |
| **7** | 0,0357 | 0,1330 | 0,5975 | 0,3060 | 0,0489 | 0,0500 | 0,7500 | 0,5572 | 0,0038 | 0,2203 | 0,0501 |
| **8** | 0,5293 | 0,0403 | 0,0064 | 0,7503 | 0,0203 | 0,1517 | 0,0608 | 0,1892 | 0,0012 | 1,0893 | 0,9112 |
| **9** | 0,3198 | 0,4443 | 1,0704 | 0,0736 | 0,1821 | 0,0234 | 0,6251 | 0,1916 | 0,0129 | 0,3231 | 1,7417 |
| **10** | 0,0775 | 0,0785 | 0,1031 | 0,0120 | 0,0393 | 0,0100 | 0,0693 | 0,0598 | 0,0065 | 0,0847 | 0,2491 |
| **11** | 0,0017 | 0,0168 | 0,2745 | 0,2632 | 0,6129 | 0,0097 | 0,1082 | 0,1246 | 0,2231 | 0,0301 | 0,0104 |
| **12** | 0,4860 | 0,7458 | 0,0569 | 1,3962 | 0,9719 | 0,1623 | 0,0001 | 1,4195 | 0,4647 | 0,1116 | 1,6963 |
| **13** | 0,2174 | 1,0408 | 0,7228 | 0,5809 | 0,4028 | 0,1123 | 1,9804 | 1,6097 | 0,1765 | 0,4847 | 0,1247 |
| **14** | 0,0113 | 0,0000 | 0,0645 | 0,7240 | 0,0009 | 0,0004 | 0,2558 | 0,0380 | 0,1651 | 0,4256 | 0,0076 |
| **15** | 0,0266 | 0,3518 | 0,0561 | 0,1688 | 0,1128 | 0,0459 | 0,0941 | 0,2890 | 0,4210 | 0,0627 | 0,0136 |
| **16** | 0,1575 | 0,3322 | 0,0017 | 0,3212 | 0,6052 | 1,6699 | 0,0003 | 0,0052 | 0,4504 | 0,0767 | 0,0334 |
| **17** | 0,3486 | 0,1002 | 0,0136 | 0,3495 | 1,6652 | 0,0094 | 0,1730 | 0,0048 | 1,0319 | 0,0483 | 0,0116 |
| **18** | 0,0375 | 0,7973 | 0,0056 | 0,0006 | 0,2626 | 1,9305 | 0,1584 | 0,0000 | 0,1188 | 0,2468 | 0,0844 |

Nossa próxima etapa é calcular o vetor de frequência de colunas da matriz , conforme especificado na equação (8). Se pegarmos a primeira linha da matriz, teremos . A Tabela 12 mostra todos os resultados de .

Tabela 12 - Valores aproximados do vetor de frequência de colunas da matriz .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Vetor de Frequência de Colunas** | | | | | | | | | | | |
| **índice** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** |
| **valor** | 5,9869 | 5,2973 | 4,4935 | 5,1272 | 5,1606 | 4,9128 | 5,0892 | 5,7026 | 4,8649 | 5,0625 | 5,5261 |

Em seguida, vamos calcular o vetor de multiplicadores , conforme indicado na equação (9). Para isso, precisamos calcular a escalar , que é o somatório de todas os valores da matriz de padrão de respostas . Realizando essa soma, temos . Dessa forma, como exemplo, aplicando a equação para o primeiro item do vetor, temos . A Tabela 13 apresenta todos os valores do vetor de multiplicadores .

Tabela 13 – Valores aproximados do vetor de multiplicadores .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **Vetor de Multiplicadores** | | | | | | | | | | |
| **índice** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** |
| **valor** | 3,8772 | 4,1219 | 4,4754 | 4,1897 | 4,1761 | 4,2801 | 4,2053 | 3,9727 | 4,3012 | 4,2164 | 4,0356 |

Uma vez conhecidos os valores do vetor de multiplicadores , podemos calcular os valores da matriz de pesos padrão dos itens (*x-normed weights*) , após a aplicação da equação (10). Tomando o primeiro elemento da matriz como exemplo, temos . Todos os valores da matriz de pesos padrão dos itens estão apresentados na Tabela 14.

Tabela 14 – Valores da matriz de pesos padrão dos itens (*x-normed weights*) .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Matriz de pesos padrão dos itens** | | | | | | | | | | | |
| **Índice das**  **linhas** | **Índice das colunas** | | | | | | | | | | |
| **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** |
| **1** | -0,8801 | -1,3760 | 1,4607 | 0,2296 | -0,1415 | -0,9333 | 0,9346 | 0,9000 | -1,7802 | 0,5249 | -0,6557 |
| **2** | 1,7298 | 0,3780 | 0,0480 | -0,3927 | -0,4108 | -0,2453 | -0,0179 | 0,4747 | 0,8979 | -1,2873 | -0,0150 |
| **3** | -0,8497 | 0,9979 | -1,5087 | 0,1631 | 0,5523 | 1,1787 | -0,9167 | -1,3747 | 0,8824 | 0,7624 | 0,6708 |
| **4** | 0,7647 | 1,0885 | 1,3556 | 0,0112 | -0,2349 | 0,5358 | -1,0621 | 1,0363 | 0,8221 | -0,0664 | -0,9813 |
| **5** | 0,9651 | -0,7105 | -1,3076 | -0,4039 | -0,1759 | -0,7811 | 1,0443 | -0,5616 | 0,0757 | -1,2208 | 0,9663 |
| **6** | -1,7298 | -0,3780 | -0,0480 | 0,3927 | 0,4108 | 0,2453 | 0,0179 | -0,4747 | -0,8979 | 1,2873 | 0,0150 |
| **7** | -0,3664 | -0,7515 | 1,7297 | -1,1588 | -0,4617 | -0,4785 | -1,8209 | -1,4827 | -0,1334 | -0,9896 | 0,4515 |
| **8** | 1,2615 | -0,3702 | 0,1606 | 1,6230 | -0,2658 | 0,7456 | 0,4636 | 0,7728 | -0,0657 | 1,9680 | 1,7228 |
| **9** | -0,8951 | 1,1217 | -1,8903 | -0,4642 | 0,7275 | -0,2671 | 1,3573 | 0,7099 | 0,1991 | -0,9784 | -2,1743 |
| **10** | 0,7632 | -0,8168 | -1,0159 | 0,3245 | -0,5857 | -0,3020 | -0,7830 | -0,6871 | -0,2457 | 0,8677 | -1,4242 |
| **11** | 0,0916 | -0,3088 | 1,3537 | 1,2410 | 1,8876 | -0,2433 | 0,7987 | -0,8097 | 1,1728 | -0,4224 | -0,2379 |
| **12** | -0,8548 | 1,1257 | -0,3377 | -1,5655 | -1,3019 | 0,5453 | -0,0156 | 1,4968 | -0,9272 | -0,4453 | 1,6621 |
| **13** | -0,6026 | -1,4017 | -1,2683 | 1,0644 | 0,8835 | -0,4781 | -1,9727 | 1,6801 | 0,6023 | -0,9784 | 0,4751 |
| **14** | 0,2378 | -0,0097 | 0,6562 | -2,0582 | -0,0737 | -0,0514 | 1,2279 | -0,4470 | 1,0089 | 1,5880 | -0,2035 |
| **15** | 0,3649 | 1,4114 | 0,6121 | 0,9938 | -0,8098 | 0,5295 | 0,7448 | -1,2331 | -1,6112 | -0,6096 | -0,2716 |
| **16** | -0,6881 | 1,0625 | 0,0832 | 1,0619 | -1,4529 | -2,4735 | 0,0337 | -0,1283 | 1,2909 | 0,5221 | 0,3297 |
| **17** | 1,0237 | 0,5834 | -0,2333 | -1,1077 | 2,4100 | -0,1860 | -0,7823 | 0,1236 | -1,9540 | 0,4146 | 0,1945 |
| **18** | -0,3356 | -1,6459 | 0,1501 | 0,0459 | -0,9571 | 2,6595 | 0,7486 | 0,0047 | 0,6631 | -0,9367 | -0,5242 |

Para encontrar a matriz de pesos projetados dos itens (*x-projected weights*), que são as coordenadas de cada um dos pontos de estímulo em cada uma das dimensões do espaço-solução, precisamos apenas multiplicar a matriz de pesos padrão dos itens pelos multiplicadores do vetor de mesmo índice de coluna, conforme equação (11). Para calcular os valores do vetor de multiplicadores , utilizamos a equação (12). Para exemplificar, o cálculo do primeiro elemento do vetor se da por . Os demais valores do vetor de multiplicadores está apresentado na Tabela 15.

Tabela 15 – Valores aproximados do vetor de multiplicadores

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **Vetor de Multiplicadores** | | | | | | | | | | |
| **índice** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** |
| **valor** | 0,7376 | 0,6121 | 0,5878 | 0,5540 | 0,3615 | 0,3467 | 0,2739 | 0,2175 | 0,1776 | 0,1315 | 0,0812 |

Neste instante, já é possível calcular a matriz de pesos projetados dos itens . Para ilustrar o cálculo, demonstramos aqui como calcular o primeiro elemento de , através da equação . Na Tabela 16, apresentamos todos os valores encontrados de , já como as coordenadas de cada um dos itens em cada uma das dimensões.

Tabela 16 – Matriz de pesos projetados dos itens, que representa os valores aproximados das coordenadas dos itens em cada uma das dimensões do espaço-solução

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Coordenadas dos Itens nas Dimensões** | | | | | | | | | | | |
| **Itens** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** |
| **Pressão Baixa** | -0,6492 | -0,8423 | 0,8586 | 0,1272 | -0,0512 | -0,3236 | 0,2560 | 0,1958 | -0,3162 | 0,0690 | -0,0532 |
| **Pressão Mediana** | 1,2760 | 0,2314 | 0,0282 | -0,2176 | -0,1485 | -0,0851 | -0,0049 | 0,1033 | 0,1595 | -0,1693 | -0,0012 |
| **Pressão Alta** | -0,6268 | 0,6109 | -0,8868 | 0,0904 | 0,1997 | 0,4087 | -0,2511 | -0,2991 | 0,1567 | 0,1003 | 0,0544 |
| **Enx. Raras** | 0,5641 | 0,6663 | 0,7968 | 0,0062 | -0,0849 | 0,1858 | -0,2909 | 0,2254 | 0,1460 | -0,0087 | -0,0796 |
| **Enx. Esporádicas** | 0,7119 | -0,4349 | -0,7686 | -0,2238 | -0,0636 | -0,2708 | 0,2860 | -0,1222 | 0,0135 | -0,1606 | 0,0784 |
| **Enx. Frequentes** | -1,2760 | -0,2314 | -0,0282 | 0,2176 | 0,1485 | 0,0851 | 0,0049 | -0,1033 | -0,1595 | 0,1693 | 0,0012 |
| **Jovem** | -0,2703 | -0,4600 | 1,0167 | -0,6420 | -0,1669 | -0,1659 | -0,4988 | -0,3225 | -0,0237 | -0,1302 | 0,0366 |
| **Meia Idade** | 0,9305 | -0,2266 | 0,0944 | 0,8992 | -0,0961 | 0,2585 | 0,1270 | 0,1681 | -0,0117 | 0,2589 | 0,1398 |
| **Idoso** | -0,6602 | 0,6866 | -1,1111 | -0,2572 | 0,2630 | -0,0926 | 0,3718 | 0,1544 | 0,0354 | -0,1287 | -0,1765 |
| **Ans. Baixa** | 0,5629 | -0,5000 | -0,5971 | 0,1798 | -0,2118 | -0,1047 | -0,2145 | -0,1495 | -0,0436 | 0,1141 | -0,1156 |
| **Ans. Média** | 0,0676 | -0,1891 | 0,7956 | 0,6876 | 0,6824 | -0,0843 | 0,2188 | -0,1761 | 0,2083 | -0,0556 | -0,0193 |
| **Ans. Alta** | -0,6305 | 0,6891 | -0,1985 | -0,8674 | -0,4707 | 0,1891 | -0,0043 | 0,3256 | -0,1647 | -0,0586 | 0,1349 |
| **Leve** | -0,4445 | -0,8581 | -0,7455 | 0,5897 | 0,3194 | -0,1658 | -0,5403 | 0,3655 | 0,1070 | -0,1287 | 0,0386 |
| **Peso Mediano** | 0,1754 | -0,0059 | 0,3857 | -1,1404 | -0,0266 | -0,0178 | 0,3363 | -0,0972 | 0,1792 | 0,2089 | -0,0165 |
| **Pesado** | 0,2691 | 0,8640 | 0,3598 | 0,5506 | -0,2927 | 0,1836 | 0,2040 | -0,2682 | -0,2862 | -0,0802 | -0,0220 |
| **Baixo** | -0,5076 | 0,6504 | 0,0489 | 0,5883 | -0,5253 | -0,8576 | 0,0092 | -0,0279 | 0,2293 | 0,0687 | 0,0268 |
| **Estatura Média** | 0,7551 | 0,3571 | -0,1371 | -0,6137 | 0,8713 | -0,0645 | -0,2143 | 0,0269 | -0,3471 | 0,0545 | 0,0158 |
| **Alto** | -0,2475 | -1,0076 | 0,0882 | 0,0254 | -0,3460 | 0,9221 | 0,2050 | 0,0010 | 0,1178 | -0,1232 | -0,0425 |

Uma vez calculados os valores das coordenadas dos itens no espaço-solução, devemos calcular os valores das coordenadas das transações no espaço-solução. Para isso, calcularemos primeiro a matriz de pesos padrão das transações , utilizando as equações (13) e (14). A matriz , resultante da equação (13), pode ser visualizada na Tabela 17.

Tabela 17 – Valores da matriz .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Matriz** | | | | | | | | | | | |
| **Índice das**  **linhas** | **Índice das colunas** | | | | | | | | | | |
| **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** |
| **1** | -5,6506 | 0,1541 | -2,0004 | 0,7188 | -0,8746 | -3,3614 | 0,3552 | 4,1838 | -1,5129 | -0,0680 | -0,3481 |
| **2** | -3,9290 | -3,0354 | 3,6109 | -4,1144 | -2,5252 | 1,9869 | 1,0924 | -0,0030 | -2,0667 | 1,0286 | 0,7451 |
| **3** | -5,2676 | -0,1804 | -4,9030 | -0,3635 | 0,3151 | 3,8836 | -0,7812 | 2,0421 | 0,5218 | -1,2893 | 0,1244 |
| **4** | -5,6201 | 2,5280 | -4,9698 | 0,6524 | -0,1808 | -1,2495 | -1,4961 | 1,9091 | 1,1497 | 0,1695 | 0,9784 |
| **5** | 5,2362 | 2,7824 | 3,2967 | 2,3686 | 2,5764 | 1,1363 | 0,1447 | 0,3645 | -0,7381 | -0,0030 | 0,4116 |
| **6** | 2,5781 | 4,6959 | 1,9218 | 1,7317 | -4,4761 | -0,3627 | 0,1463 | 2,4192 | 0,4068 | 0,0815 | 2,4468 |
| **7** | 3,7814 | -4,5671 | -3,2331 | 2,2611 | -1,5118 | 1,5986 | -0,5172 | 1,6837 | 1,9276 | -1,5875 | 1,2007 |
| **8** | -4,7694 | -4,4275 | 1,6864 | -0,9918 | -1,5680 | 1,5602 | -2,1081 | 2,1242 | -2,4732 | -1,5379 | 1,4237 |
| **9** | 5,1407 | -2,3378 | -3,6165 | 1,1075 | 1,8553 | -1,2470 | -2,0480 | 1,8025 | -0,6894 | -0,2362 | 1,9194 |
| **10** | -2,1951 | -5,4807 | 1,8086 | 4,5966 | 1,8175 | 1,9958 | 0,9907 | 2,0731 | -0,3055 | 1,4427 | 0,7950 |
| **11** | 2,5348 | 2,4145 | 3,2186 | -6,2718 | -0,0730 | 0,1197 | -2,4709 | 1,2016 | -0,2857 | -0,7860 | 1,1083 |
| **12** | 2,2066 | 2,4887 | -3,0647 | -5,9923 | 1,1753 | -0,9858 | 2,8137 | 1,7964 | -0,6996 | -1,9293 | 0,4301 |
| **13** | -4,6526 | 5,3412 | -3,0894 | 0,5819 | -1,8740 | -0,2418 | 1,2213 | -1,0040 | -1,0639 | 0,5384 | 0,2317 |
| **14** | -4,1756 | -3,1536 | 3,3109 | 2,8307 | 1,1257 | -4,3613 | -2,0087 | -0,3153 | 0,2547 | -0,0562 | 0,3777 |
| **15** | -3,9083 | 2,0490 | -5,2864 | -1,5172 | 3,6822 | 1,0380 | -2,3120 | 2,1610 | -2,0952 | 0,0620 | 0,8431 |

Uma vez conhecidos os valores da matriz , podemos calcular a matriz de pesos padrão das transações utilizando a equação (14). Exemplificando o cálculo do primeiro item da matriz, temos . Os demais valores da matriz de pesos padrão das transações estão apresentados na Tabela 18.

Tabela 18 – Valores da matriz de pesos padrão das transações .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Matriz de Pesos Padrão das Transações** | | | | | | | | | | | |
| **Índice das**  **linhas** | **Índice das colunas** | | | | | | | | | | |
| **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** |
| **1** | -1,2767 | 0,0420 | -0,5672 | 0,2162 | -0,4032 | -1,6158 | 0,2161 | 3,2054 | -1,4194 | -0,0861 | -0,7149 |
| **2** | -0,8877 | -0,8264 | 1,0239 | -1,2377 | -1,1642 | 0,9551 | 0,6647 | -0,0023 | -1,9390 | 1,3032 | 1,5301 |
| **3** | -1,1902 | -0,0491 | -1,3903 | -0,1094 | 0,1453 | 1,8668 | -0,4753 | 1,5645 | 0,4896 | -1,6335 | 0,2554 |
| **4** | -1,2698 | 0,6883 | -1,4092 | 0,1963 | -0,0833 | -0,6006 | -0,9103 | 1,4627 | 1,0787 | 0,2148 | 2,0091 |
| **5** | 1,1831 | 0,7575 | 0,9348 | 0,7125 | 1,1878 | 0,5462 | 0,0881 | 0,2793 | -0,6925 | -0,0038 | 0,8452 |
| **6** | 0,5825 | 1,2785 | 0,5449 | 0,5209 | -2,0636 | -0,1743 | 0,0890 | 1,8535 | 0,3817 | 0,1033 | 5,0246 |
| **7** | 0,8544 | -1,2435 | -0,9168 | 0,6802 | -0,6970 | 0,7684 | -0,3147 | 1,2899 | 1,8085 | -2,0114 | 2,4656 |
| **8** | -1,0776 | -1,2055 | 0,4782 | -0,2984 | -0,7229 | 0,7500 | -1,2827 | 1,6274 | -2,3205 | -1,9485 | 2,9236 |
| **9** | 1,1615 | -0,6365 | -1,0255 | 0,3332 | 0,8553 | -0,5994 | -1,2461 | 1,3810 | -0,6469 | -0,2993 | 3,9416 |
| **10** | -0,4960 | -1,4922 | 0,5128 | 1,3827 | 0,8379 | 0,9594 | 0,6028 | 1,5883 | -0,2866 | 1,8279 | 1,6326 |
| **11** | 0,5727 | 0,6574 | 0,9126 | -1,8867 | -0,0336 | 0,0576 | -1,5035 | 0,9206 | -0,2680 | -0,9959 | 2,2760 |
| **12** | 0,4986 | 0,6776 | -0,8690 | -1,8026 | 0,5418 | -0,4739 | 1,7120 | 1,3763 | -0,6564 | -2,4444 | 0,8831 |
| **13** | -1,0512 | 1,4542 | -0,8760 | 0,1750 | -0,8640 | -0,1163 | 0,7431 | -0,7693 | -0,9982 | 0,6821 | 0,4759 |
| **14** | -0,9435 | -0,8586 | 0,9388 | 0,8515 | 0,5190 | -2,0965 | -1,2222 | -0,2416 | 0,2389 | -0,0711 | 0,7755 |
| **15** | -0,8831 | 0,5579 | -1,4990 | -0,4564 | 1,6976 | 0,4990 | -1,4068 | 1,6556 | -1,9658 | 0,0786 | 1,7314 |

De posse dos valores de , já é possível calcular as coordenadas das transações no espaço-solução, que são os valores da matriz de presos projetados das transações . O primeiro item da matriz, calculado utilizando a equação (15), se dá por . Na Tabela 19, apresentamos todos os valores encontrados de , já como as coordenadas de cada uma das transações em cada uma das dimensões.

Tabela 19 - Matriz de pesos projetados das transações, que representa os valores aproximados das coordenadas das transações em cada uma das dimensões do espaço-solução.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Coordenadas das Transações nas Dimensões** | | | | | | | | | | | |
| **Transações** | **Dimensões** | | | | | | | | | | |
| **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** |
| **Transação 1** | -0,9418 | 0,0257 | -0,3334 | 0,1198 | -0,1458 | -0,5602 | 0,0592 | 0,6973 | -0,2521 | -0,0113 | -0,0580 |
| **Transação 2** | -0,6548 | -0,5059 | 0,6018 | -0,6857 | -0,4209 | 0,3311 | 0,1821 | -0,0005 | -0,3444 | 0,1714 | 0,1242 |
| **Transação 3** | -0,8779 | -0,0301 | -0,8172 | -0,0606 | 0,0525 | 0,6473 | -0,1302 | 0,3403 | 0,0870 | -0,2149 | 0,0207 |
| **Transação 4** | -0,9367 | 0,4213 | -0,8283 | 0,1087 | -0,0301 | -0,2082 | -0,2493 | 0,3182 | 0,1916 | 0,0283 | 0,1631 |
| **Transação 5** | 0,8727 | 0,4637 | 0,5494 | 0,3948 | 0,4294 | 0,1894 | 0,0241 | 0,0608 | -0,1230 | -0,0005 | 0,0686 |
| **Transação 6** | 0,4297 | 0,7827 | 0,3203 | 0,2886 | -0,7460 | -0,0604 | 0,0244 | 0,4032 | 0,0678 | 0,0136 | 0,4078 |
| **Transação 7** | 0,6302 | -0,7612 | -0,5389 | 0,3769 | -0,2520 | 0,2664 | -0,0862 | 0,2806 | 0,3213 | -0,2646 | 0,2001 |
| **Transação 8** | -0,7949 | -0,7379 | 0,2811 | -0,1653 | -0,2613 | 0,2600 | -0,3514 | 0,3540 | -0,4122 | -0,2563 | 0,2373 |
| **Transação 9** | 0,8568 | -0,3896 | -0,6028 | 0,1846 | 0,3092 | -0,2078 | -0,3413 | 0,3004 | -0,1149 | -0,0394 | 0,3199 |
| **Transação 10** | -0,3659 | -0,9134 | 0,3014 | 0,7661 | 0,3029 | 0,3326 | 0,1651 | 0,3455 | -0,0509 | 0,2404 | 0,1325 |
| **Transação 11** | 0,4225 | 0,4024 | 0,5364 | -1,0453 | -0,0122 | 0,0200 | -0,4118 | 0,2003 | -0,0476 | -0,1310 | 0,1847 |
| **Transação 12** | 0,3678 | 0,4148 | -0,5108 | -0,9987 | 0,1959 | -0,1643 | 0,4690 | 0,2994 | -0,1166 | -0,3215 | 0,0717 |
| **Transação 13** | -0,7754 | 0,8902 | -0,5149 | 0,0970 | -0,3123 | -0,0403 | 0,2036 | -0,1673 | -0,1773 | 0,0897 | 0,0386 |
| **Transação 14** | -0,6959 | -0,5256 | 0,5518 | 0,4718 | 0,1876 | -0,7269 | -0,3348 | -0,0525 | 0,0424 | -0,0094 | 0,0629 |
| **Transação 15** | -0,6514 | 0,3415 | -0,8811 | -0,2529 | 0,6137 | 0,1730 | -0,3853 | 0,3602 | -0,3492 | 0,0103 | 0,1405 |

O último, porém não menos importante, passo do *Dual Scaling* é o cálculo de delta ). Cada uma das dimensões do espaço-solução tem um valor delta associado a ela, que significa o seu percentual de representatividade na solução como um todo no espaço-solução. Utilizando a equação (16), vamos exemplificar o cálculo de delta para a primeira dimensão do espaço-solução. Sabendo que o somatório dos valores do vetor final de autovalores é , teremos . A Tabela 20 mostra todos os valores de delta para o nosso exemplo em cada uma de suas dimensões, bem como seu acumulado conforme vamos somando as dimensões. O mesmo resultado pode ser visualizado no **Erro! Fonte de referência não encontrada.**.

Tabela 20 - Valores aproximados dos deltas e do delta acumulado em cada uma das dimensões do espaço-solução, em percentual.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Vetor de Representatividade** | | | | | | | | | | | |
|  | **Dimensões** | | | | | | | | | | |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|  | 27,21 | 18,74 | 17,27 | 15,35 | 6,53 | 6,01 | 3,75 | 2,37 | 1,58 | 0,86 | 0,33 |
|  | 27,21 | 45,95 | 63,22 | 78,57 | 85,10 | 91,11 | 94,86 | 97,23 | 98,81 | 99,67 | 100 |

|  |
| --- |
|  |

Gráfico - Valores aproximados dos deltas e do delta acumulado em cada uma das dimensões do espaço-solução.

Uma vez munidos de todas as informações geradas pelos dados obtidos nos cálculos efetuados até então na utilização do *Dual Scaling*, podemos gerar o gráfico de solução da análise.

Ao analisar o gráfico, vemos que as categorias de uma única variável não são forçadas a estar representadas por uma única linha, mas sim por um triângulo, cuja área está monotonicamente relacionada à contribuição da variável para essas dimensões. O gráfico de solução da análise das duas primeiras dimensões pode ser observado no **Erro! Fonte de referência não encontrada.**, onde os triângulos representam os itens e os quadrados representam as transações.

|  |
| --- |
|  |

Gráfico - Solução da análise utilizando *Dual Scaling*, usando as duas primeiras dimensões. Os itens estão representados por triângulos e as transações por quadrados.

# DUAL SCALING E SUA CAPACIDADE DE FORNECER UMA ANÁLISE VISUAL DOS RESULTADOS ATRAVÉS DE SUAS DISTÂNCIAS

Como o espaço-solução do *Dual Scaling* possui dimensões, e nossa capacidade de representar graficamente seus resultados está limitada a apenas 3 dimensões, o gráfico das coordenadas finais dos itens e transações nem sempre possui, visualmente, a acurácia das distâncias entre suas coordenadas. Como essa distância é fundamental para o nosso processo de análise dos resultados da base de dados de múltipla escolha, uma vez que seu valor é inversamente proporcional ao maior relacionamento entre os itens e as transações, é necessário definir uma métrica para calcular corretamente essas distâncias, viabilizando assim, através de sua representação gráfica, as análises visuais dessas relações.

Após uma análise mais aprofundada sobre a melhor forma de interpretar o espaço-solução, Nishisato nos apresenta três métricas para calcular distância entre itens no espaço de soluções: (1) distância Euclidiana, (2) distância ­ 𝒳 -quadrado e (3) distância Nishisato clab. Por ser uma das distribuições mais utilizadas em estatística inferencial, e também por nos permitir avaliar quantitativamente a relação entre o resultado de um experimento e a distribuição esperada para um fenômeno, a métrica utilizada nos cálculos deste trabalho será a 𝒳 -quadrado.

Após os cálculos das distâncias, serão apresentados gráficos para melhor ilustrar os resultados. Conforme dito acima, quanto menor a distância entre itens e transações, maior é a sua relação. Dessa forma, o eixo x dos gráficos representará sempre um item ou uma transação específica, enquanto que o eixo y vai conter a distância dos demais itens ou transações em relação àquela representada em x. Isso indica que, quanto mais perto do eixo x, menores serão as distâncias, e consequentemente maior será o seu relacionamento.

## CÁLCULO DAS DISTÂNCIAS

As distâncias podem ser classificadas de duas formas: (1) distância intra-grupo (*within-set distance*), que são as distâncias de um item (coluna) para os demais itens e as distâncias de uma transação (linha) para as demais transações; e (2) distância inter-grupo (*between-set distance*), que são as distâncias dos itens para as transações, e vice-versa.

### Distâncias Intra-Grupo - Itens

Para descobrir a distância quadrada entre os itens em um espaço-solução de n dimensões utilizando a métrica 𝒳 -quadrado, utilizaremos a equação abaixo:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | , | (17) |

onde e são as -ésimas coordenadas dos itens indexados por e , respectivamente, e são os k-ésimos índices do vetor de frequência de colunas e é o número de linhas da matriz de padrão de respostas .

Através das coordenadas de cada item, é possível então calcular a matriz de distância quadrada entre eles. Essa matriz é de extrema importância para a análise, pois quanto menor a distância ente os itens, mais relacionados eles estão. Utilizando a equação (17), vamos exemplificar o cálculo da distância dos itens 3 (pressão alta) e 9 (idoso). Temos então:

.

Quebrando a equação nos valores de , demostraremos os cálculos de forma detalhada para , e apenas os resultados para os demais valores de k. Com isso, temos:

A distância quadrada final então entre os itens 3 e 9 é . A matriz completa da distância quadrada entre os itens pode ser visualizada na Tabela 21.

Tabela 21 - Valores aproximados das distâncias entre os Itens no espaço-solução.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Matriz de Distância Entre os Itens** | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| **Itens** | **Pressão** | | | **Enxaquecas** | | | **Idade** | | | **Ansiedade** | | | **Peso** | | | **Altura** | | |
| **Baixa** | **Média** | **Alta** | **Raras** | **Esporádicas** | **Frequentes.** | **Jovem** | **Meia Idade** | **Idoso** | **Baixa** | **Média** | **Alta** | **Leve** | **Mediano** | **Pesado** | **Baixo** | **Média** | **Alto** |
| **Pr. Baixa** | - | 10,99 | 11,58 | 10,40 | 12,10 | 2,70 | 2,64 | 8,68 | 10,61 | 11,59 | 4,17 | 6,40 | 4,58 | 7,82 | 10,72 | 6,43 | 10,86 | 3,32 |
| **Pr. Mediana** | 10,99 | - | 10,73 | 3,30 | 3,32 | 10,57 | 8,77 | 2,71 | 9,41 | 4,35 | 7,95 | 6,36 | 7,86 | 5,40 | 5,19 | 8,40 | 2,03 | 8,36 |
| **Pr. Alta** | 11,58 | 10,73 | - | 12,23 | 10,10 | 3,48 | 12,81 | 11,03 | 1,03 | 10,45 | 12,26 | 3,11 | 4,66 | 11,58 | 7,99 | 4,93 | 8,00 | 8,64 |
| **Enx. Raras** | 10,40 | 3,30 | 12,23 | - | 12,13 | 10,53 | 7,25 | 5,40 | 12,17 | 12,51 | 6,16 | 6,60 | 11,63 | 6,84 | 2,67 | 7,35 | 4,87 | 10,96 |
| **Enx. Esporádicas** | 12,10 | 3,32 | 10,10 | 12,13 | - | 10,41 | 12,38 | 5,22 | 7,99 | 1,25 | 12,33 | 8,14 | 5,47 | 8,10 | 11,86 | 11,05 | 4,55 | 7,41 |
| **Enx. Frequentes** | 2,70 | 10,57 | 3,48 | 10,53 | 10,41 | - | 5,30 | 8,92 | 3,65 | 10,12 | 6,06 | 2,68 | 2,19 | 8,29 | 8,14 | 3,38 | 8,70 | 3,51 |
| **Jovem** | 2,64 | 8,77 | 12,81 | 7,25 | 12,38 | 5,30 | - | 10,63 | 12,18 | 12,72 | 6,66 | 5,40 | 7,80 | 3,76 | 10,85 | 8,49 | 8,24 | 5,19 |
| **Meia Idade** | 8,68 | 2,71 | 11,03 | 5,40 | 5,22 | 8,92 | 10,63 | - | 11,21 | 3,68 | 4,50 | 9,16 | 5,50 | 11,08 | 4,76 | 7,73 | 5,91 | 6,08 |
| **Idoso** | 10,61 | 9,41 | 1,03 | 12,17 | 7,99 | 3,65 | 12,18 | 11,21 | - | 9,95 | 12,46 | 2,21 | 4,71 | 9,06 | 8,55 | 4,55 | 6,60 | 8,90 |
| **Ans. Baixa** | 11,59 | 4,35 | 10,45 | 12,51 | 1,25 | 10,12 | 12,72 | 3,68 | 9,95 | - | 11,45 | 9,79 | 4,23 | 11,57 | 11,69 | 10,76 | 6,65 | 6,51 |
| **Ans. Média** | 4,17 | 7,95 | 12,26 | 6,16 | 12,33 | 6,06 | 6,66 | 4,50 | 12,46 | 11,45 | - | 9,71 | 6,44 | 10,88 | 6,22 | 6,91 | 8,24 | 6,90 |
| **Ans. Alta** | 6,40 | 6,36 | 3,11 | 6,60 | 8,14 | 2,68 | 5,40 | 9,16 | 2,21 | 9,79 | 9,71 | - | 5,08 | 3,86 | 6,00 | 3,70 | 4,93 | 5,71 |
| **Leve** | 4,58 | 7,86 | 4,66 | 11,63 | 5,47 | 2,19 | 7,80 | 5,50 | 4,71 | 4,23 | 6,44 | 5,08 | - | 10,29 | 9,90 | 5,22 | 7,20 | 3,14 |
| **Peso Mediano** | 7,82 | 5,40 | 11,58 | 6,84 | 8,10 | 8,29 | 3,76 | 11,08 | 9,06 | 11,57 | 10,88 | 3,86 | 10,29 | - | 10,77 | 10,56 | 4,25 | 7,51 |
| **Pesado** | 10,72 | 5,19 | 7,99 | 2,67 | 11,86 | 8,14 | 10,85 | 4,76 | 8,55 | 11,69 | 6,22 | 6,00 | 9,90 | 10,77 | - | 3,94 | 7,05 | 10,79 |
| **Baixo** | 6,43 | 8,40 | 4,93 | 7,35 | 11,05 | 3,38 | 8,49 | 7,73 | 4,55 | 10,76 | 6,91 | 3,70 | 5,22 | 10,56 | 3,94 | - | 9,14 | 9,11 |
| **Estat. Média** | 10,86 | 2,03 | 8,00 | 4,87 | 4,55 | 8,70 | 8,24 | 5,91 | 6,60 | 6,65 | 8,24 | 4,93 | 7,20 | 4,25 | 7,05 | 9,14 | - | 9,31 |
| **Alto** | 3,32 | 8,36 | 8,64 | 10,96 | 7,41 | 3,51 | 5,19 | 6,08 | 8,90 | 6,51 | 6,90 | 5,71 | 3,14 | 7,51 | 10,79 | 9,11 | 9,31 | - |

Se representarmos essa distância entre os itens utilizando gráficos de dispersão, podemos facilmente visualizar os itens que tem maior relação entre si, que são aqueles que estão mais pertos do eixo x e representados por um círculo maior. Podemos visualizar os gráficos dos resultados para cada conjunto de itens nos gráficos 3, 4, 5, 6, 7 e 8, que representam, respectivamente, a distância de cada um dos itens para os itens das categorias pressão, enxaquecas, idade, ansiedade, peso e altura.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Gráfico - Representação da distância de todos os itens em relação aos itens da categoria **Pressão.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Gráfico - Representação da distância de todos os itens em relação aos itens da categoria **Enxaquecas**.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Gráfico - Representação da distância de todos os itens em relação aos itens da categoria **Idade**.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Gráfico - Representação da distância de todos os itens em relação aos itens da categoria **Ansiedade**.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Gráfico - representação da distância de todos os itens em relação aos itens da categoria **Peso**.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Gráfico - representação da distância de todos os itens em relação aos itens da categoria **Altura**.

### Distâncias Intra-Grupo - Transações

Para descobrir a distância quadrada entre as transações em um espaço-solução de n dimensões utilizando a métrica 𝒳 -quadrado, utilizaremos a equação abaixo:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | , | (18) |

onde e são as -ésimas coordenadas das transações indexadas por e , respectivamente, e são os k-ésimos índices do vetor de frequência de linhas e é o número de colunas da matriz de padrão de respostas .

Através das coordenadas de cada transação, é possível então calcular a matriz de distância quadrada entre elas. Utilizando a equação (18), vamos exemplificar o cálculo da distância das transações 2 e 5. Temos então

.

Quebrando a equação nos valores de , demostraremos os cálculos de forma detalhada para , e apenas os resultados para os demais valores de k. Com isso, temos:

A distância final então entre as transações 2 e 5 é . A matriz completa da distância quadrada entre as transações pode ser visualizada na Tabela 22.

Tabela 22 - Valores aproximados das distâncias entre as transações no espaço-solução.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Matriz de Distância Entre as Transações** | | | | | | | | | | | | | | | |
|  | **Tr. 1** | **Tr. 2** | **Tr. 3** | **Tr.4** | **Tr. 5** | **Tr. 6** | **Tr. 7** | **Tr. 8** | **Tr. 9** | **Tr. 10** | **Tr. 11** | **Tr. 12** | **Tr. 13** | **Tr. 14** | **Tr. 15** |
| **Tr. 1** | - | 4,59 | 2,23 | 1,15 | 10,36 | 6,83 | 7,86 | 2,91 | 8,24 | 4,95 | 8,72 | 6,79 | 2,32 | 2,97 | 2,57 |
| **Tr. 2** | 4,59 | - | 5,39 | 7,26 | 9,70 | 7,89 | 8,40 | 1,20 | 10,12 | 4,85 | 4,99 | 7,13 | 7,02 | 4,12 | 7,05 |
| **Tr. 3** | 2,23 | 5,39 | - | 1,24 | 11,35 | 8,77 | 6,76 | 3,53 | 8,00 | 5,69 | 9,44 | 6,46 | 2,75 | 6,44 | 1,19 |
| **Tr. 4** | 1,15 | 7,26 | 1,24 | - | 11,28 | 7,42 | 8,62 | 5,33 | 8,61 | 7,58 | 9,71 | 6,56 | 1,15 | 5,79 | 1,19 |
| **Tr. 5** | 10,36 | 9,70 | 11,35 | 11,28 | - | 2,42 | 5,66 | 10,23 | 4,10 | 7,35 | 4,33 | 6,21 | 9,21 | 8,32 | 9,74 |
| **Tr. 6** | 6,83 | 7,89 | 8,77 | 7,42 | 2,42 | - | 6,25 | 8,55 | 5,82 | 8,48 | 4,11 | 5,46 | 5,04 | 7,78 | 8,29 |
| **Tr. 7** | 7,86 | 8,40 | 6,76 | 8,62 | 5,66 | 6,25 | - | 6,52 | 1,19 | 4,30 | 8,28 | 6,61 | 1- | 7,54 | 7,90 |
| **Tr. 8** | 2,91 | 1,20 | 3,53 | 5,33 | 10,23 | 8,55 | 6,52 | - | 8,49 | 2,65 | 7,29 | 8,72 | 6,71 | 2,39 | 5,45 |
| **Tr. 9** | 8,24 | 10,12 | 8,00 | 8,61 | 4,10 | 5,82 | 1,19 | 8,49 | - | 6,37 | 6,56 | 4,66 | 9,79 | 8,26 | 6,76 |
| **Tr. 10** | 4,95 | 4,85 | 5,69 | 7,58 | 7,35 | 8,48 | 4,30 | 2,65 | 6,37 | - | 10,66 | 11,25 | 9,01 | 2,29 | 7,71 |
| **Tr. 11** | 8,72 | 4,99 | 9,44 | 9,71 | 4,33 | 4,11 | 8,28 | 7,29 | 6,56 | 10,66 | - | 2,69 | 8,26 | 8,86 | 7,67 |
| **Tr. 12** | 6,79 | 7,13 | 6,46 | 6,56 | 6,21 | 5,46 | 6,61 | 8,72 | 4,66 | 11,25 | 2,69 | - | 5,87 | 10,71 | 4,46 |
| **Tr. 13** | 2,32 | 7,02 | 2,75 | 1,15 | 9,21 | 5,04 | 1- | 6,71 | 9,79 | 9,01 | 8,26 | 5,87 | - | 6,97 | 2,49 |
| **Tr. 14** | 2,97 | 4,12 | 6,44 | 5,79 | 8,32 | 7,78 | 7,54 | 2,39 | 8,26 | 2,29 | 8,86 | 10,71 | 6,97 | - | 7,11 |
| **Tr. 15** | 2,57 | 7,05 | 1,19 | 1,19 | 9,74 | 8,29 | 7,90 | 5,45 | 6,76 | 7,71 | 7,67 | 4,46 | 2,49 | 7,11 | - |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Se representarmos essa distância entre as transações utilizando gráficos de dispersão, podemos facilmente visualizar as transações que tem maior relação entre si, que são aquelas que estão mais pertos do eixo x e representados por um círculo maior. Podemos visualizar os gráficos dos resultados de cada transação nos gráficos 9, 10, 11, 12 e 13, que representam, respectivamente, a distância de cada uma das transações para as demais transações agrupadas de 3 em 3.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Gráfico - Representação da distância de todas as transações em relação as transações 1, 2 e 3.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Gráfico - Representação da distância de todas as transações em relação as transações 4, 5 e 6.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Gráfico 11 - Representação da distância de todas as transações em relação as transações 7, 8 e 9.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Gráfico 12 - Representação da distância de todas as transações em relação as transações 10, 11 e 12.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Gráfico 13 - Representação da distância de todas as transações em relação as transações 13, 14 e 15.

### Distância Inter-Grupo

Vimos até agora que as distâncias dos itens entre si ou das transações entre si (intra-grupos) podem ser calculadas baseadas em suas coordenadas correspondentes, porém quando estendemos essa relação de distância dos itens para as transações, ou das transações para os itens (inter-grupos), temos que ter um cuidado maior, porque os dois pontos (de linha e de coluna) pertencem a espaços-solução diferentes. Dessa forma, para calcular a distância entre itens e transações, precisamos levar em consideração o ângulo que existe entre o espaço-solução dos itens e o espaço-solução das transações. Uma vez conhecido esse ângulo de discrepância , utilizamos a lei do cosseno para obter a distância exata entre um item e uma transação , através da equação:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | , | (19) |

onde é a distância do ponto até a origem e é a distância do ponto até a origem.

Quando utilizamos a lei do cosseno descrita na equação (19), aplicando-a à métrica 𝒳 -quadrado, temos a seguinte equação final para o cálculo da distância entre itens e transações:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | , | (20) |

onde é a proporção marginal do item , dado por ; e é a proporção marginal da transação , dada por .

Para ajudar na compreensão, vamos exemplificar o cálculo entre o item 3 (pressão alta) e a transação 13. Temos então:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Mais uma vez, vamos demonstrar os cálculos somente para , e apenas os resultados para os demais valores de . Com isso, temos:

A distância final então entre o item 3 e a transação 13 é . A matriz completa da distância quadrada entre os itens e as transações pode ser visualizada na Tabela 23.

Tabela 23 - Valores aproximados das distâncias quadradas entre os itens e as transações no espaço-solução.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Matriz de Distância Entre os Itens e as Transações** | | | | | | | | | | | | | | | |
|  | **Tr. 1** | **Tr. 2** | **Tr. 3** | **Tr.4** | **Tr. 5** | **Tr. 6** | **Tr. 7** | **Tr. 8** | **Tr. 9** | **Tr. 10** | **Tr. 11** | **Tr. 12** | **Tr. 13** | **Tr. 14** | **Tr. 15** |
| **Pr. Baixa** | 4,81 | 3,05 | 7,19 | 8,05 | 8,88 | 8,42 | 7,76 | 2,57 | 9,22 | 3,13 | 8,18 | 10,11 | 8,58 | 2,37 | 8,60 |
| **Pr. Mediana** | 10,23 | 9,27 | 10,61 | 10,84 | 2,43 | 3,39 | 4,01 | 10,08 | 2,74 | 9,12 | 3,72 | 3,96 | 9,60 | 9,93 | 9,29 |
| **Pr. Alta** | 4,06 | 8,41 | 2,77 | 2,35 | 9,83 | 7,46 | 8,68 | 7,25 | 8,46 | 8,70 | 9,30 | 6,49 | 2,50 | 8,09 | 2,50 |
| **Enx. Raras** | 11,08 | 9,25 | 12,59 | 12,11 | 2,70 | 3,10 | 9,06 | 10,70 | 7,82 | 10,33 | 4,06 | 7,34 | 9,57 | 9,65 | 11,30 |
| **Enx. Esporádicas** | 9,81 | 10,50 | 9,17 | 10,12 | 7,31 | 7,96 | 3,10 | 10,08 | 2,51 | 9,24 | 7,82 | 4,81 | 10,76 | 10,98 | 8,53 |
| **Enx. Frequentes** | 1,65 | 3,09 | 2,34 | 2,60 | 8,43 | 6,72 | 6,89 | 2,04 | 7,85 | 3,31 | 7,52 | 7,14 | 3,18 | 2,40 | 3,24 |
| **Jovem** | 7,34 | 2,99 | 9,20 | 10,12 | 8,24 | 7,94 | 9,17 | 4,01 | 9,70 | 6,53 | 4,86 | 8,45 | 9,85 | 4,69 | 9,68 |
| **Meia Idade** | 9,65 | 9,93 | 10,18 | 10,81 | 2,81 | 4,26 | 2,95 | 9,08 | 3,02 | 5,60 | 7,69 | 7,94 | 10,16 | 7,91 | 10,19 |
| **Idoso** | 3,37 | 7,66 | 2,88 | 2,23 | 9,52 | 7,05 | 8,26 | 7,03 | 7,64 | 8,88 | 8,04 | 4,58 | 2,39 | 7,90 | 2,21 |
| **Ans. Baixa** | 10,04 | 11,17 | 9,39 | 10,46 | 7,50 | 8,20 | 2,38 | 9,69 | 2,44 | 7,90 | 9,62 | 7,35 | 11,51 | 10,15 | 9,40 |
| **Ans. Média** | 8,38 | 7,77 | 10,49 | 10,73 | 4,60 | 6,68 | 7,54 | 7,17 | 7,69 | 4,27 | 8,59 | 10,85 | 10,14 | 4,51 | 10,60 |
| **Ans. Alta** | 2,95 | 3,50 | 3,18 | 3,06 | 6,62 | 4,15 | 7,02 | 4,07 | 6,82 | 6,99 | 3,64 | 3,20 | 2,45 | 5,58 | 2,93 |
| **Leve** | 3,12 | 5,53 | 3,22 | 3,88 | 7,49 | 7,04 | 3,31 | 3,36 | 4,03 | 2,88 | 8,37 | 6,78 | 5,55 | 3,49 | 3,88 |
| **Peso Mediano** | 9,00 | 4,82 | 9,56 | 10,48 | 7,49 | 7,23 | 8,94 | 7,32 | 8,23 | 10,34 | 2,88 | 4,10 | 9,47 | 9,22 | 8,79 |
| **Pesado** | 8,64 | 9,99 | 9,98 | 8,82 | 3,44 | 2,56 | 8,73 | 10,47 | 8,02 | 9,28 | 6,83 | 7,94 | 6,04 | 8,82 | 9,22 |
| **Baixo** | 3,26 | 6,96 | 5,74 | 3,81 | 6,82 | 3,96 | 8,25 | 6,26 | 8,16 | 6,74 | 7,76 | 7,55 | 2,99 | 4,43 | 5,60 |
| **Estat. Média** | 8,79 | 8,40 | 8,66 | 8,88 | 3,54 | 5,07 | 5,76 | 9,21 | 3,57 | 9,35 | 3,20 | 2,82 | 8,17 | 9,39 | 6,42 |
| **Alto** | 5,79 | 3,58 | 5,11 | 7,55 | 8,19 | 7,99 | 4,13 | 2,84 | 6,26 | 3,02 | 7,82 | 8,09 | 8,37 | 4,87 | 7,19 |

Podemos visualizar os gráficos dos resultados das distâncias para cada categoria de itens nos gráficos 14, 15, 16, 17, 18 e 19, que representam, respectivamente, a distância de cada um dos itens das categorias pressão, enxaquecas, idade, ansiedade, peso e altura para todas as transações.

|  |
| --- |
|  |

Gráfico - Representação da distância de todas os itens da categoria **Pressão** para todas as transações.

|  |
| --- |
|  |

Gráfico - Representação da distância de todas os itens da categoria **Enxaquecas** para todas as transações.

|  |
| --- |
|  |

Gráfico - Representação da distância de todas os itens da categoria **Idade** para todas as transações.

|  |
| --- |
|  |

Gráfico - Representação da distância de todas os itens da categoria **Ansiedade** para todas as transações.

|  |
| --- |
|  |

Gráfico - Representação da distância de todas os itens da categoria **Peso** para todas as transações.

|  |
| --- |
|  |

Gráfico - Representação da distância de todas os itens da categoria **Estatura** para todas as transações.

## ANÁLISE VISUAL DOS RESULTADOS

Uma vez calculadas todas as distâncias e geradas as suas representações gráficas correspondentes, podemos finalmente iniciar o objetivo maior deste trabalho, que consiste na análise visual dos resultados. Como já foi dito acima, as distâncias encontradas se fazem mais importantes até do que o próprio espaço-solução do *Dual Scaling* (quando falamos de análise visual), uma vez que visualmente não temos como enxergar mais de 3 dimensões.

O ponto de partida de nossa análise visual serão as distâncias intra-grupo dos itens, pois o que realmente queremos conhecer são os itens que mais se relacionam, podendo então, através desse conhecimento, definir grupos de itens para armazená-los de forma mais coesa, aumentando assim a performance no acesso a essas informações. É importante salientar, embora também já dito anteriormente, que a relação entre os itens é inversamente proporcional às suas distâncias, ou seja, quanto menor a distância entre eles, mais relacionados eles estão.

Ao olharmos para cada um dos gráficos intra-grupo dos itens, podemos observar que os demais itens estão posicionados a uma distância específica do item que está sendo observado, ou seja, no momento que eu defino uma distância limite como teto, eu crio empiricamente um conjunto de itens que tem suas distâncias menores que o teto definido. Esse conjunto de itens selecionados estão de alguma forma relacionados entre si. Para observarmos o grau de relação destes itens, além do próprio gráfico intra-grupo de itens, podemos observar o seu comportamento no gráfico inter-grupo, ou seja, no gráfico das distâncias de cada um dos itens de nosso conjunto para todas as transações. Uma vez posicionados todos os itens do conjunto no gráfico inter-grupo, temos a capacidade visual de verificar quantos desses itens possuem a sua distância para as transações abaixo da distância limite escolhida. Apesar de obvio, é importante salientar que, quanto maior a distância limite escolhida, maior o número de itens que teremos em nosso conjunto, e quanto maior o número de itens em nosso conjunto, maior a probabilidade de estarmos agrupando itens com relação fraca entre si. De acordo com a quantidade de itens selecionados em nosso conjunto, o gráfico inter-grupo pode ficar extremamente poluído e confuso de se analisar visualmente. Para resolver este problema, utilizamos então o ponto médio da distância de todos os itens do grupo para cada uma das transações, utilizando a equação:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | () |

onde é o número de itens do grupo e é o valor da distância do k-ésimo item para a transação. Imprimimos também no gráfico de ponto médio a distância limite, e temos agora um resultado muito mais claro para se analisar.

Se selecionamos uma distância limite muito pequena, teremos um número muito baixo de itens em nosso conjunto. Esse cenário pode ser considerado o cenário mais conservador, pois os poucos itens do conjunto certamente terão uma relação forte, porém, de acordo com o tamanho da base analisada, vão realizar uma segmentação muito grande nos dados, o que pode não ser benéfico em termos de performance. No outro extremo, ao selecionarmos uma distância limite muito grande, teremos um grande número de itens em nosso conjunto, o que caracteriza que teremos itens com relações pobres e não interessantes; porém essa solução pode ser utilizada se nossa capacidade de segmentação dos itens for limitada.

Podemos concluir então que não há uma fórmula mágica para se definir a melhor distância para a seleção de itens mais ou menos relacionados (e nem é esta a finalidade deste trabalho). A ideia principal é sim disponibilizar àqueles que precisam da informação ferramentas gráficas de análise visual, de forma a auxiliar a tomada de decisão de acordo com as necessidades e requisitos de cada projeto ou base de dados analisada.

Vamos agora exemplificar a análise visual utilizando o Gráfico 3, que representa as distâncias de todos os itens para os itens da categoria “pressão sanguínea”. Se isolarmos apenas os valores de distâncias dos demais itens para o item “pressão alta”, podemos identificar claramente grupos de itens que se fazem mais próximos ao item em questão, como podemos ver no Gráfico 20 abaixo. Vamos trabalhar com três distâncias limites diferentes, exemplificando assim, além dos extremos explicados anteriormente, também um ponto médio. Utilizaremos então as distâncias 2,0, 4,0 e 10,0.

|  |
| --- |
|  |

Gráfico – Distância de todos os itens para o item Pressão Alta.

Ao selecionarmos como distância limite a distância 2,0, temos o nosso cenário conservador, apenas com o item idoso (9) compondo o nosso conjunto de itens juntamente com o item analisado, pressão alta (3). É certa a relação forte e direta entre esses dois itens, e a probabilidade de aparecerem juntos nas transações é enorme, conforme mostra o gráfico de distância dos itens 3 e 9 para as transações. Porém, ao analisarmos o gráfico de distâncias do ponto médio, vemos que não temos nenhuma distância para as transações abaixo da distância escolhida, o que nos indica que, independente da relação forte entre eles, será necessário a leitura de outros conjuntos para acessarmos as transações que nos interessarem. As informações do item pressão alta com a distância limite como 2,0 podem ser observadas no Gráfico 21.

|  |
| --- |
|  |

Gráfico 21 – Gráficos para análise visual do item Pressão Alta com a distância limite igual a 2,0.

Se definirmos a distância limite como 4,0, teremos dentro de nosso grupo os itens enxaquecas frequentes (6), idoso (9) e ansiedade alta (12), além do próprio item pressão alta (3). Pelo ponto médio, podemos ver que temos 5 itens com distâncias para as transações abaixo de nossa distância limite, o que garante um acesso a informação muito mais centralizado em nosso conjunto de dados. As informações do item pressão alta com a distância limite como 4,0 podem ser observadas no Gráfico 22.

|  |
| --- |
|  |

Gráfico 22 – Gráficos para análise visual do item Pressão Alta com a distância limite igual a 4,0.

Em nosso último exemplo, vamos ao extremo superior, definindo a distância limite como 10,0. Neste caso, teremos, além dos quatro itens já mencionados acima, a inclusão dos itens leve (13), pesado (15), baixo (16), estatura média (17) e alto (18). Podemos ver de forma clara que esta distância foi a que nos criou um conjunto com o maior número de itens, porém a relação entre eles não é coesa como nas distâncias menores. Ao observarmos o gráfico de ponto médio, vemos que todos os itens tem suas distâncias abaixo da distância limite, o que por um lado pode ser bom, pois estaremos trabalhando apenas com o nosso conjunto de itens quando formos buscar os dados das transações, mas também pode ser prejudicial, pois temos que percorrer um arquivo com muitos dados quando precisarmos de apenas parte das informações. As informações do item pressão alta com a distância limite como 10,0 podem ser observadas no Gráfico 23.

|  |
| --- |
|  |

Gráfico - Gráficos para análise visual do item Pressão Alta com a distância limite igual a 10,0.

A definição final dos conjuntos de itens relacionados em uma base de dados, na prática, vai depender de uma série de análises, com a observância do resultado de inúmeras ferramentas, bem como dependerá do grau de conhecimento e dos objetivos daquele que a analisa. A análise visual dos resultados obtidos pelo *Dual Scaling* é apenas mais uma ferramenta para auxiliar nesta análise geral, porém, é inegável afirmar que, diferente de outras ferramentas cujo conhecimento prévio se faz necessário, a nossa ferramenta de análise nos imprime a capacidade de segregar visualmente os itens mais relacionados em qualquer base de dados, de forma rápida, coerente e sem a necessidade de um conhecimento prévio das informações.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Na seção de “**REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS**” temos dois exemplos para o formato das referências. Elas devem ser utilizadas no texto com o formato [1] para a primeira referência da lista e assim por diante, em ordem. Se utilizar um *site* como referência use o modelo em [2]. Quando se referir a uma página específica, como no caso de uma citação use [1, p.32]. Lembre-se de que definições, conceitos, estatísticas, gráficos, ou seja, qualquer afirmação ou dado contido no texto que não for seu deve exibir uma referência. Outra questão é que devemos ter cuidado na seleção das referências, por exemplo, o Wiki não é uma referência confiável, pois existem muitos erros. Uma boa dica é usar a referência automática que já coloca as citações na ordem correta e faz a referência (no final do documento) de forma automática. Com isso, caso alguma referência seja acrescentada depois, você não precisa rever toda a lista citada. Para isso vá no menu referência e clique em inserir citação [1].

## CITAÇÕES

Citação: É a menção do texto de informação extraída de outra fonte para esclarecer, ilustrar ou sustentar o assunto apresentado. Podemos classificá-las em Curta e Longa. “Curta: É transcrita entre aspas, com o mesmo tipo e tamanho da letra utilizados no parágrafo do texto no qual será inserido. O uso das aspas delimita a citação direta”. [1, p.154].

(Exemplo de Citação Longa) É transcrita em parágrafo distinto. Inicia na margem de parágrafo, sem deslocamento na primeira linha e termina na margem direita. Longa: É transcrita em parágrafo distinto. Inicia na margem de parágrafo, sem deslocamento na primeira linha e termina na margem direita. Longa: É transcrita em parágrafo distinto. Inicia na margem de parágrafo, sem deslocamento na primeira linha e termina na margem direita [1, p. 155].

## IDIOMA ESTRANGEIRO

Todos os termos que não pertençam à língua portuguesa devem ser destacados em *itálico*. Os termos não usuais devem ser definidos ou no texto ou em notas de rodapé.

## FIGURAS, GRÁFICOS E TABELAS.

As figuras, gráficos e tabelas devem ser referenciadas no texto, por exemplo: no Gráfico 1 apresentamos um exemplo. Os índices já foram criados neste texto, para colocar novos objetos pressione o botão direito do *mouse* sobre o objeto, selecione “legenda” e digite sua descrição para o objeto. Após este procedimento basta atualizar o índice que ele será incluído.

****

Gráfico 24: Exemplo de um gráfico

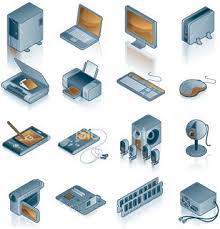


Figura 1: Exemplo de Figura.

Tabela 24: Exemplo de Tabela.

|  |  |
| --- | --- |
| Tabela exemplo | Descrição |
| 1 | Campo 1 |
| 2 | Campo 2 |

## NOTAS ENTRE O ORIENTADOR E O ALUNO

Nossa interação é feita através de e-mails, mas essa forma de comunicação pode ser prejudicial se escrevermos um texto muito longo, portanto devemos ser objetivos. As observações diretamente no texto do TCC têm se demonstrado mais produtivas, a forma e estratégia são combinadas entre o tutor orientador e o orientando.

CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Neste capítulo devem ser colocadas as conclusões que o aluno obteve durante a elaboração do trabalho, bem como o que pretende após sua conclusão (especialização, mestrado, aplicar os conhecimentos em alguma área...).

Neste momento, você começa a elaborar em índice analítico todas as referências que usaram-se para fazer o trabalho monográfico.

# Referências BIBLIOGRÁFICAS

NISHISATO, S. **Elements of Dual Scaling:** An Introduction To Practical Data Analysis. [S.l.]: Psychology Press, 1993.

NISHISATO, S.; GARCIA, J. A NOTE ON BETWEEN-SET DISTANCES IN DUAL SCALING AND CORRESPONDENCE ANALYSIS. **Behaviormetrika**, 2003.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aqui vale a dica da utilização da forma automática no MSWord ou no LibreOffice:

1. CARDOSO, Alcionê Damásio. **Vantagens e Desvantagens na Forma de Escolha de Diretor de Escola na Rede Pública Estadual de Santa Catarina**, 2002. Dissertação (Mestrado em Gestão Institucional) – Curso de Pós Graduação em Educação, UnC-UNICAMP, Caçador, SC.
2. SOUZA, Celso de Oliveira. **Histórico da Fundação Educacional Barriga Verde.** <http://www.febave.org.br/historico.htm> Acesso em 25 abr. 2004.

ANEXOS

A função das duas definições, Anexo e Apêndice, é semelhante, mas com uma grande diferença entre elas: a autoria. O **ANEXO** de um trabalho acadêmico deve ser aquele texto ou documento que **não foi elaborado por você**, tendo como objetivo servir de legitimação. Já o **APÊNDICE** se configura como texto ou documento **elaborado por você**, tendo como objetivo complementar a sua argumentação.

ANEXO A – TÍTULO DO ANEXO A

ANEXO B – TÍTULO DO ANEXO B