Elaborato Calcolo numerico 2020

Autori: Emanuele Brizzi, Massimo Hong

August 24, 2020

Contents

1 Esercizio1

Verificare che, per h sufficientemente piccolo, si ha

$$\frac{f(x-h)-2f(x)+f(x+h)}{h^2} = O(h^2)$$

Per la dimostrazione utilizziamo il polinomio di taylor di grado n centrato in x_0 :

$$P_n(x;x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0)$$
$$R_n(x;x_0) = O(x-x_0)^{(n+1)}$$

Per cui possiamo calcolare $f(x+h)$ e $f(x-h)$ sviluppando il polinomio di Taylor centrato in x:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{6} f'''(x) + O(h^4)$$
$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) - \frac{h^3}{6} f'''(x) + O(h^4)$$

Sostituendo all'equazione iniziale otteniamo:

$$\frac{f(x-h)-2f(x)+f(x+h)}{h^2} = \frac{(h^2)f''(x)+O(h^4)}{h^2} = f''(x) + O(h^2)$$

2 Esercizio2

Spiegare cosa calcola il seguente script Matlab: u = 1; while 1, if 1+u==1, break, end, u = u/2; end, u

Teoricamente questo script non dovrebbe mai terminare poichè dividendo per 2 il valore u, non si dovrebbe mai raggiungere lo 0, tuttavia il seguente script termina. Più precisamente, alla fine dell'esecuzione risulta che $u = 1.1102 \cdot 10^-16$, che è minore del valore $d = eps = 2.2204 \cdot 10^-16$(che rappresenta la distanza da 1.0 al valore in doppia precisione immediatamente successivo) e quando andiamo a sommare ad un numero n un valore u¡eps, non verrà effettuata alcuna modifica sul valore.

3 Esercizio3

1. a = 1e20; b = 100; a-a+b
2. a = 1e20; b = 100; a+b-a

Spiegare i risultati ottenuti.

1. a= 1e20; b = 100; a-a+b
   Questo script restituisce il valore 100, in quanto $a - a = 0$ e $0 + 100 = 100$.
2. a= 1e20; b = 100; a+b-a Matlab ha il valore $eps = 2.2204 \cdot 10^-16$, che corrisponde a circa 15-16 cifre di precisione (che 1e20 supera facilmente), per cui quando andiamo ad affettuare $a + b = c$, otterremo un valore approssimato c con le prime 15-16 cifre equivalenti ad a, e di conseguenza $c - a = 0$.

4 Esercizio 4

A quanto pare si deve usare la formula di newton (Modificandola un po').

5 Esercizio 6

Tolleranza	Bisezione	Newton	Secanti
10^{-3}	7.392578125000000e-01	7.390851333852840e-01	7.390851121274639e-01
10^{-6}	7.390851974487305e-01	7.390851332151607e-01	7.390851332150012e-01
10^{-9}	7.390851331874728e-01	7.390851332151607e-01	7.390851332151607e-01
10^{-12}	7.390851332156672e-01	7.390851332151607e-01	7.390851332151607e-01

Tolleranza	Corde
10^{-3}	7.395672022122561e-01
10^{-6}	7.390845495752126e-01
10^{-9}	7.390851327392538e-01
10^{-12}	7.390851332157368e-01

6 Esercizio 7

La molteplicità m di f(x) = $x^2 tan(x)$ è m=3. Sostituendo a x il valore zero otteniamo: $(0)^2 * tan(0)$; 0 annulla due volte il primo termine del prodotto mentre annulla una volta il secondo termine, in quanto tan(0)=0;

Tolleranza	Newton	Newton Modificato	Aitken
10^{-3}	1.994002961956096e-03	6.617444900424221e-24	-1.570796335324655e+00
10^{-6}	1.349222209381150e-06	6.617444900424221e-24	-1.570796356741072e+00
10^{-9}	1.369405530548002e-09	0	-1.570796314458764e+00
10^{-12}	1.389890778595252e-12	0	Il metodo non converge

7 Esercizio 10

Iterazione	Sigma	Norma
1	$0.1000 = 10^{-1}$	8.9839e-15
2	10	1.4865e-14
3	$1000 = 10^3$	1.3712e-12
4	$100000 = 10^5$	1.2948e-10
5	$10000000 = 10^7$	5.3084e-09
6	10^9	1.0058e-06
7	10^{11}	8.5643e-05
8	10^{13}	0.0107
9	10^{15}	0.9814
10	10^{17}	4.1004e+03

8 Esercizio 13

Eseguendo lo script:

A = [1 2 3 ; 1 2 4 ; 3 4 5 ; 3 4 6 ; 5 6 7]; b=[14 17 26 29 38];

QR = myqr(A); disp(QR); sol = qrsolve(QR,b); disp(sol);

Otteniamo:

La Matrice QR:

$$\begin{bmatrix} -6.7082 & -8.6461 & -11.1803 \\ 0.1297 & -1.1155 & -2.9881 \\ 0.3892 & -0.0827 & 1.0351 \\ 0.3892 & -0.0827 & -0.8037 \\ 0.6487 & -0.5222 & -0.4346 \end{bmatrix}$$

Soluzione del sistema lineare:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

9 Esercizio 14

Dati i seguenti comandi:

A = rot90(vander(1:10)); A = A(:,1:8); x = (1:8)'; b = A*x;

Le operazioni:

- $A\backslash b$: da come risultato il vettore x, che rappresenta la soluzione del sistema lineare $Ax = b$; Questa operazione da lo stesso risultato di inv(A)*b se la matrice A ha rango massimo ed è non singolare.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$$

- $(A' * A)\backslash(A' * b)$: poichè stiamo lavorando con una matrice mal condizionata, il vettore x risultante presenta un errore di approssimazione;

$$\begin{bmatrix} 3.5759 \\ -3.4624 \\ 9.5151 \\ -1.2974 \\ 7.9574 \\ 4.9125 \\ 7.2378 \\ 7.9765 \end{bmatrix}$$

Questo è il warning che segnala Matlab :

Warning: Matrix is close to singular or badly scaled. Results may be inaccurate. RCOND = 2.393980e-19.

10 Esercizio 21

Di seguito sono riportati i valori dei pesi delle formule di newton cotes di grado n = 1....7 .

grado/cnk	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1/2	1/2						
2	1/3	4/3	1/3					
3	3/8	9/8	9/8	3/8				
4	14/45	64/45	8/15	64/45	14/45			
5	95/288	125/96	125/144	125/144	12/96	95/288		
6	41/140	54/35	27/140	68/35	27/140	54/35	41/140	
7	1073/3527	810/559	343/640	649/536	649/536	343/640	810/559	1073/3527

11 Esercizio 23

Nella seguente tabella sono riportati i valori approssimati fino a 3 cifre significative in notazione scientifica.

grado	approssimazione	errore
1	4.2800e-01	2.5300e-01
2	2.1300e-01	3.8100e-02
3	1.9600e-01	2.1100e-02
4	1.8000e-01	5.0800e-03
5	1.7900e-01	4.0800e-03
6	1.7600e-01	1.0800e-03
7	1.7600e-01	1.0800e-03
8	1.7500e-01	7.8400e-05
9	1.7500e-01	7.8400e-05

12 Esercizio 24

Sono state riportate solo le prime 10 iterazioni.

Iterazioni	Trapezio	Simpson
2	2.664035584060345e-01	2.126315681335669e-01
4	2.034328044500163e-01	1.824425531313435e-01
6	1.884983466139722e-01	1.773334438860330e-01
8	1.827894088752250e-01	1.759082770169613e-01
10	1.800348035219603e-01	1.753928683822888e-01
12	1.785040157074719e-01	1.751725720719718e-01
14	1.775682181954108e-01	1.750665465192467e-01
16	1.769554131112014e-01	1.750107478565269e-01
18	1.765327096164695e-01	1.749792544399417e-01
20	1.762290375520298e-01	1.749604488953863e-01

13 Esercizio 25

Formule trapezi adattiva e simpson adattiva

Tolleranza	Trapezio	Simpson
10^{-2}	2.955597117841284e-01	2.812976430626699e-01
10^{-3}	2.945853681850339e-01	2.812976430626699e-01
10^{-4}	2.942742008736351e-01	2.942593384196308e-01
10^{-5}	2.942301421648779e-01	2.942278097680047e-01
10^{-6}	2.942260196031783e-01	2.942257646203842e-01