Rappel de Math. financière

Facteurs d'actualisation

$$a_{\overline{n}|} = \frac{1-v^t}{i}$$
$$a_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{i}$$
$$\bar{a}_{\overline{n}|} = \int_0^n v^t dt = \frac{1-v^n}{\delta}$$

Facteur d'accumulation

$$s_{\overline{n}|} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$
$$\ddot{s}_{\overline{n}|} = \frac{(1+i)^n - 1}{d}$$

1 Survie et mortalité

1.1 Définitions de base

X : Âge au décès d'un nouveau-né

T_x : Durée de vie résiduelle d'un individu d'âge x.

$$T_x = (X - x | X \geq x)$$
$$f_{T_x} = {}_tp_x \mu_{x+t}$$
$$F_{T_x} = {}_tq_x = \frac{S_X(x) - S_X(x+t)}{S_X(x)}$$
$$\Pr(t \leq T_x \leq t+u) = {}_{t|u}q_x = {}_xp_{tu}q_{x+t}$$
$$S_{T_x}(t) = \frac{S_x(x+t)}{S_X(x)} = \exp\left\{-\int_0^t \mu_{x+s} ds\right\}$$

K_x : Durée de vie résiduelle entière d'un individu d'âge x.

$$K_x = \lfloor T_x \rfloor$$
$$\Pr(K_x = k) = \Pr(\lfloor T_x \rfloor = k) = {}_{k|}p_x$$

μ_x : Force de mortalité pour (x)

$$\mu_x = \lim_{t\to 0} \frac{{}_tq_x}{t} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\ln(S_X(x))\Big)$$
$$\mu_{x+t} = -\frac{\partial}{\partial t}\Big(\ln({}_tp_x)\Big)$$

1.2 Tables de mortalité

ℓ_0 : Nombre d'individus initial dans une cohorte.

ℓ_x : Nombre d'invidu de la cohorte ayant survécu jusqu'à l'âge x.

$${}_tq_x = \frac{\ell_x - \ell_{x+t}}{\ell_x}$$
$${}_tp_x = \frac{\ell_{x+t}}{\ell_x}$$
$${}_{t|u}q_x = \frac{{}_ud_{x+t}}{\ell_x}$$

$I_j(x)$: Indicateur de survie du j^e individu jusqu'à l'âge x.

$$I_j(x) \sim Bin(1, S_X(x))$$

$\mathscr{L}_x$: v.a. du nombre de survivants jusqu'à l'âge x.

$$\ell_x = \mathrm{E}\left[\mathscr{L}_x\right] = \sum_{j=1}^{\ell_0} I_j(x)$$

${}_n\mathcal{D}_x$: v.a. du nombre de décès entre l'âge x et $x+n$.

$${}_n\mathcal{D}_x = \mathscr{L}_x - \mathscr{L}_{x+n}$$
$${}_nd_x = \mathrm{E}\left[{}_n\mathcal{D}_x\right] = \ell_x - \ell_{x+n}$$

1.3 Espérance de vie résiduelle

$$\mathring{e}_x = \mathrm{E}\left[T_x\right] = \int_0^{\omega-x} t\,{}_tp_x\mu_{x+t}dt = \int_0^{\omega-x} {}_tp_x dt$$
$$\mathring{e}_{x:\overline{n}|} = \left(\int_0^n t\,{}_tp_x\mu_{x+t}dt\right) + n \cdot {}_np_x = \int_0^n {}_tp_x dt$$

1.4 Hypothèses d'interpolation

Pour $t \in [0,1]$ et $x \in \mathbb{Z}$.

Distribution uniforme des décès (DUD)

$$\ell_{x+t} = (1-t)\ell_x + t\ell_{x+1}$$

Force constante (FC)

$$\ell_{x+t} = \ell_x^{(1-t)}\ell_{x+1}^{(t)}$$

1.5 Lois de mortalité

DeMoivre

$$X \sim \mathrm{Unif}(0, \omega)$$
$$S_X(x) = 1 - \frac{x}{\omega},\ 0 < x < \omega$$
$$T_x \sim \mathrm{Unif}(0, \omega - x)$$
$$S_{T_x}(t) = 1 - \frac{t}{\omega - x},\ 0 < t < \omega - x$$

Loi Exponentielle

$$x \sim \mathrm{Exp}(\mu)$$
$$S_x(x) = e^{-\mu x},\ x \geq 0$$
$$T_x \sim \mathrm{Exp}(\mu)$$
$$S_{T_x}(t) = e^{-\mu t},\ t \geq 0$$

2 Contrats d'assurance-vie

Le paiement est soit en continu, soit à la fin de l'année ou à la fin de la $\frac{1}{m}$ d'année.

Assurance-vie entière On verse le capital au décès de l'assuré

$$\bar{A}_x = \int_0^{\omega-x} v^t\,{}_tp_x\mu_{x+t}dt$$
$$A_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} v^{k+1}\,{}_{k|}q_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} v^{k+1}\,{}_kp_x q_{x+k}$$
$$A_x = vq_x + vp_x A_{x+1}$$

Assurance-vie temporaire On verse le capital au décès de l'assuré, s'il survient dans les n prochaines années.

$$\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t\,{}_tp_x\mu_{x+t}dt$$
$$A^1_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\,{}_{k|}q_x = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\,{}_kp_x q_{x+k}$$

Assurance-vie dotation pure On verse le capital à l'assuré si celui-ci est toujours en vie après n années.

$$A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1} = {}_np_x v^n = {}_nE_x$$

où ${}_nE_x$ est un facteur d'actualisation actuarielle.

Assurance mixte On verse le capital à l'assuré si il décède dans les n prochaines années, ou si il est toujours en vie après cette période.

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t\,{}_tp_x\mu_{x+t}dt + v^n\,{}_np_x = \bar{A}^1_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1}$$
$$A_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\,{}_{k|}q_x + v^n\,{}_np_x$$

Assurance différée On verse le capital à l'assuré lors de son décès seulement si le décès survient dans plus de m années [1]

$$
\begin{aligned}
{}_{m|}\bar{A}_x &= \int_m^{\omega-x} v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt \\
&= v^m {}_m p_x \int_0^{\omega-x-m} v^t {}_t p_{x+m} \mu_{(x+m)+t} dt \\
&= {}_m E_x \bar{A}_{x+m} \\
{}_{m|}A_x &= \sum_{k=m}^{\omega-x-1} v^{k+1} {}_{k|}q_x \\
&= \sum_{k=0}^{\omega-x-m-1} v^{k+1+m} {}_{(k+m)|}q_x \\
&= v^m {}_m p_x \sum_{k=0}^{\omega-(x+m)-1} v^{k+1} {}_k p_{x+m} q_{x+m+k} \\
&= {}_m E_x A_{x+m}
\end{aligned}
$$

Lien entre assurance différée, assurance vie entière et assurance-vie temporaire

$$ {}_{m|}\bar{A}_x = \bar{A}_x - \bar{A}^1_{x:\overline{m}|} $$

Assurance Vie entière croissante On verse le capital au décès de l'assuré. Ce capital augmente chaque années.

$$
\begin{aligned}
(\bar{I}\bar{A})_x &= \int_0^{\omega-x} t v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt \\
(I\bar{A})_x &= \int_0^{\omega-x} (1+\lfloor t \rfloor) v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt \\
&= \bar{A}_x + {}_{1|}\bar{A}_x + {}_{2|}\bar{A}_x + \ldots
\end{aligned}
$$

Assurance Vie temporaire croissante On verse le capital au décès de l'assuré, s'il survient dans les n prochaines années. Ce capital croit chaque années.

$$
\begin{aligned}
(\bar{I}\bar{A})^1_{x:\overline{n}|} &= \int_0^n t v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt \\
(I\bar{A})^1_{x:\overline{n}|} &= \int_0^n (1+\lfloor t \rfloor) v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt \\
&= \bar{A}^1_{x:\overline{n}|} + {}_{1|}\bar{A}^1_{x:\overline{n-1}|} + \ldots + {}_{n-1|}\bar{A}^1_{x:\overline{1}|}
\end{aligned}
$$

Assurance vie entière croissante temporairement On verse le capital au décès de l'assuré. Ce capital croit pendent n années

$$
\begin{aligned}
(I_{\overline{n}|}\bar{A})_x &= \int_0^n (1+\lfloor t \rfloor) v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt \\
&+ \int_n^{\omega-x} n v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt \\
&= \bar{A}_x + {}_{1|}\bar{A}_x + \ldots + {}_{n-1|}\bar{A}_x
\end{aligned}
$$

Assurance Vie temporaire décroissante On verse le capital au décès de l'assuré, s'il survient dans les n prochaines années. Ce capital décroit chaque années.

$$
\begin{aligned}
(\bar{D}\bar{A})^1_{x:\overline{n}|} &= \int_0^{\omega-x} (n-t) v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt \\
(D\bar{A})^1_{x:\overline{n}|} &= \int_0^{\omega-x} (n-\lfloor t \rfloor) v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt \\
&= \bar{A}^1_{x:\overline{1}|} + \bar{A}^1_{x:\overline{2}|} + \ldots + \bar{A}^1_{x:\overline{n}|}
\end{aligned}
$$

3 Contrats de rente

Rente viagère On verse une rente à l'assuré jusqu'à son décès.

$$
\begin{aligned}
Y &= \bar{a}_{\overline{T_x}|} = \frac{1-v^{T_x}}{\delta} = \frac{1-\bar{Z}_x}{\delta} \\
\bar{a}_x &= \int_0^\infty \bar{a}_{\overline{T_x}|} {}_t p_x \mu_{x+t} dt \\
&= \int_0^\infty v^t {}_t p_x dt \\
&= \frac{1-\bar{A}_x}{\delta} \\
\mathrm{Var}(Y) &= \mathrm{Var}\left(\frac{1-v^{T_x}}{\delta}\right) = \frac{{}^2\bar{A}_x - \bar{A}_x^2}{\delta^2}
\end{aligned}
$$

Rente temporaire n années Ce contrat de rentes prévoit payer une rente à l'assuré s'il est en vie, au maximum n années.

$$
\begin{aligned}
Y &= \begin{cases} \bar{a}_{\overline{T_x}|} & , T_x < n \\ \bar{a}_{\overline{n}|} & , T_x \geq n \end{cases} = \frac{1-\bar{Z}_{x:\overline{n}|}}{\delta} \\
\bar{a}_{x:\overline{n}|} &= \int_0^n \bar{a}_{\overline{t}|} \, {}_t p_x \, \mu_{x+t} dt \\
&= \int_0^n v^t {}_t p_x dt \\
&= \frac{1-\bar{A}_{x:\overline{n}|}}{\delta} \\
\mathrm{Var}(Y) &= \frac{{}^2\bar{A}_{x:\overline{n}|} - \bar{A}^2_{x:\overline{n}|}}{\delta^2}
\end{aligned}
$$

Rente viagère différée m années C'est un contrat de rente viagère, qui débute dans m années (si (x) est en vie).

$$
\begin{aligned}
Y &= \begin{cases} 0 & T_x < m \\ v^m \bar{a}_{\overline{T_x-m}|} & T_x \geq m \end{cases} = \frac{\bar{Z}_{20:\overline{10}|}^{\;1} - {}_{m|}\bar{Z}_{20}}{\delta} \\
{}_{m|}\bar{a}_x &= \int_m^\infty \bar{a}_{t-m} {}_t p_x \mu_{x+t} dt \\
&= {}_m E_x \bar{a}_{x+m} \\
&= \bar{a}_x - \bar{a}_{x:\overline{m}|}
\end{aligned}
$$

Rente garantie (certaine) n années Le contrat prévoit une rente minimale de n années, pouvant se prolonger jusqu'au décès de l'assuré.

$$
\begin{aligned}
Y &= \begin{cases} \bar{a}_{\overline{n}|} & = T_x < n \\ \bar{a}_{\overline{T_x}|} & = T_x \geq n \end{cases} = \bar{Y}_{x:\overline{n}|} + {}_{n|}Y_x \\
\bar{a}_{\overline{x:\overline{n}|}} &= \bar{a}_{\overline{n}|} \cdot {}_n q_x + \int_n^\infty \bar{a}_{\overline{t}|} {}_t p_x \mu_{x+t} dt \\
&= \bar{a}_{\overline{n}|} + {}_{n|}\bar{a}_x
\end{aligned}
$$

4 Primes nivelées

4.1 Notation et définitions

On définit L comme la perte à l'émission d'un contrat pour l'assureur. Dans ce chapitre, le paiement de la PUN s'étalle sur une période de temps, et est conditionnel à la survie de l'assuré. Dans le cas d'une assurance-vie,

$$ L = Z - Y $$

où Z est la valeur présente actuarielle est prestations à payer et Y la valeur présente actuarielle des primes à recevoir. De même, pour les rentes,

$$ L = Y_1 - Y_2 $$

où Y_1 représente la valeur présente actuarielle des prestations de rente à payer et Y_2 la valeur présente actuarielle des primes à recevoir.

On définit la prime nette nivellée π selon 3 principes.

4.2 Principe d'équivalence (PE)

Sous le principe d'équivalence, π^{PE} est la solution de

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[L] &= 0 \\
\mathrm{E}[Z] - \mathrm{E}[Y] &= 0 \\
\mathrm{E}[Z] &= \mathrm{E}[Y]
\end{aligned}
$$

1. Interprétation : Une assurance-vie entière qui débute dans m années.

4.3 Principe de la perte maximale probable (PPMP)

Sous le Principe de la perte maximale probable, π^{PPMP} est la solution de

$$\Pr(L < \lambda) \geq \alpha$$

Pour résoudre, on va plutôt exprimer $\Pr(L < \lambda) \leftrightarrow {}_{t^*}p_x$ pour solutionner π^{PPMP}.

4.4 Principe du portefeuille (PP)

Similaire au PPMP, en terme de *portefeuille* : π^{PP} est la solution de

$$\Pr\left(\frac{L_1 + ... + L_n}{n} < \lambda\right) \geq \alpha$$

On passe par le Théorème central limite (TCL) pour évaluer cette expression. Ainsi,

$$\Pr\left(\frac{L_1 + ... + L_n}{n} < \lambda\right) \geq \alpha$$

$$\Pr\left(\frac{L_1 + ... + L_n - \mathrm{E}\left[L_1 + ... + L_n\right]}{\sqrt{\mathrm{Var}\left(L_1 + ... + L_n\right)}} < \frac{n\lambda - \mathrm{E}\left[L_1 + ... + L_n\right]}{\sqrt{n\mathrm{Var}\left(L\right)}}\right) \geq \alpha$$

Puisque les pertes à l'émission sont *iid*,

$$\Pr\left(Z < \frac{n\lambda - n\mathrm{E}\left[L\right]}{\sqrt{n\mathrm{Var}\left(L\right)}}\right) \geq \alpha$$

Par le TCL,

$$\Phi\left(\frac{n\lambda - n\mathrm{E}\left[L\right]}{\sqrt{n\mathrm{Var}\left(L\right)}}\right) \geq \alpha$$

Où $Z \sim N(0,1)$ et Φ la fonction de répartition de Z. Le défi se trouve dans le calcul de $\mathrm{Var}(L)$, où

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(L) &= \mathrm{Var}(Z - Y) \\ &= \mathrm{Var}(Z) + \mathrm{Var}(Y) - 2\,\mathrm{Cov}(Z, Y) \\ &= \mathrm{Var}(Z) + \mathrm{Var}(Y) - 2\left(\mathrm{E}[ZY] - \mathrm{E}[Z]\,\mathrm{E}[Y]\right)\end{aligned}$$

4.5 Retour de primes

- Certains contrats (surtout rentes différée) vont prévoir un remboursement partiel (α) ou total des cotisations (accumulées au taux $j < i$)[2] en cas de décès de l'assuré pendant la période différée.
- On introduit la v.a. W, qui représente la valeur présente actuarielle d'un retour de prime, telle que

$$W = \begin{cases} \alpha\pi v_i^{K_x+1}\ddot{s}_{\overline{K_x+1}|j} & K_x = 0, 1, ..., n-1 \\ 0 & K_x = n, n+1, ... \end{cases}$$

Alors,

$$L = Y_1 - Y_2 + W$$

- Aussi, on trouve que

$$\mathrm{E}[W] = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha\pi v_i^{k+1}\ddot{s}_{\overline{k+1}|j}\,{}_{k|}q_x = \alpha\pi\psi$$

4.6 Primes brutes

- Pour tenir compte des dépenses de l'assureur, on calcule la prime *brute* G, qui considère la valeur actualisée des dépenses de l'assureur D dans le calcul de la perte à l'émission.
- Alors, on a

$$L = Z + D - Y$$

avec Y qui est fonction de G (la prime brute), et non π.
- Il y a 3 types de dépenses :
  - I) Dépenses initiales ;
    - À l'émission du contrat ;
    - Commission des ventes (% de G ou du montant d'assurance M) ;
    - Coût des employés qui saisissent les informations dans le système ;
    - Impression et envoi par courrier de la police.
    - ...
  - II) Dépenses de renouvellement ;
    - Commission de renouvellement (% de G ou du montant d'assurance M), si G est payée (i.e. conditionnel à la survie de l'assuré).
  - III) Dépenses de fin de contrat.
    - Saisie informatique et frais de fermeture de dossier ;
    - Émission du chèque de prestations ;
    - Enquête (dans certains cas).

2. Le taux i est le taux préférentiel de l'assureur, tandis que le taux j est le taux offert à l'assuré pour l'accumulation de ses cotisations dans sa clause de retour de primes.