# 1 Probabilités conditionnelles

#### À 2 variables aléatoires

> Distribution conditionnelle:

$$\Pr(X_1 = x_1 | X_2 = x_2) = \frac{\Pr(X_1 = x_1, X_2 = x_2)}{\Pr(X_2 = x_2)}$$

> L'espérance d'une fonction conditionnelle :

$$E[g(X_1)|X_2 = x_2] = \sum_{i=0}^{\infty} g(x) \Pr(X_1 = x_1|X_2 = x_2)$$

> La variance d'une fonction conditionnelle :

$$Var(g(X_1)|X_2) = E\left[g(X_1)^2|X_2\right] - E\left[g(X_1)|X_2\right]^2$$

> L'espérance conditionnelle :

$$E[X_1] = E[E[X_1|X_2]] = \sum_{x_2=0}^{\infty} E[X_1|X_2] \Pr(X_2 = x_2)$$
$$E[X_1] = E[E[X_1|X_2]] = \int_{-\infty}^{\infty} E[X_1|X_2] f_{X_2}(x_2) dx_2$$

> La variance conditionnelle :

$$\mathit{Var}(X_1) = \mathit{E}\left[\mathit{Var}(X_1|X_2)\right] + \mathit{Var}\left(\mathit{E}\left[X_1|X_2\right]\right)$$

Lorsqu'il y a 3 v.a., l'espérance devient

$$E[X_{1}|X_{2}] = E[E[X_{1}|X_{2}, X_{3}]|X_{2}]$$

$$= \sum_{x_{3}=0}^{\infty} E[X_{1}|X_{2}, X_{3}] \Pr(X_{3} = x_{3}|X_{2} = x_{2})$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} E[X_{1}|X_{2}, X_{3}] f_{X_{3}|X_{2}}(x_{3}|x_{2}) dx_{3}$$

Et la variance conditionnelle devient

$$Var(X_1) = E[Var(X_1|X_2, X_3)] + Var(E[X_1|X_2, X_3])$$

# Poisson composée

⇒ Soit  $S = X_1 + ... + X_N$ , où les  $X_i$  sont iid,  $N \sim Pois(\lambda)$  est stochastiquement indépendant des  $X_i$ . Alors, on a

$$E[Sh(S)] = \lambda E[Xh(S+X)]$$

> On peut aussi trouver que

$$E[S^n] = \lambda \sum_{j=0}^{n-1} {n-1 \choose j} E[S^j] E[X^{n-j}]$$

# Mesures de risque

> Value-At-Risk (VaR) : représente le quantile au niveau  $\kappa$  de X.

$$VaR_{\kappa}(X) = F_X^{-1}(\kappa) = \inf\{x \ge 0 : F_X(x) \ge \kappa\}$$

> Tail Value-At-Risk (aussi appelée *Conditional Tail Expectation*) : représente la perte moyenne de X, sachant qu'elle est au dessus de la valeur  $VaR_{\kappa}(X)$ .

$$TVaR_{\kappa}(X) = E\left[X|X > VaR_{\kappa}(X)\right]$$

$$= \int_{0}^{\infty} x f_{X|X > VaR_{\kappa}(X)}(x) dx$$

$$= \int_{VaR_{\kappa}(X)}^{\infty} \frac{x f_{X}(x)}{\overline{F}_{X}(VaR_{\kappa}(X))} dx$$

$$= \frac{1}{1 - \kappa} \int_{VaR_{\kappa}(X)}^{\infty} x f_{X}(x) dx$$

# 2 Chaînes de Markov

#### **Définition**

Une chaîne de Markov est homogène si

$$\Pr(X_{n+1} = j | X_n = i, ..., X_0 = i_0) = \Pr(X_{n+1} = j | X_n = i)$$
$$= p_{ij}$$

On définit la matrice des probabilités de transition

$$P = [p_{ij}]_{i \times j}$$

# Équation de Chapman-Kolmogorov

$$p_{ij}^{(n)} = \Pr(X_{k+n} = j | X_k = i)$$

$$p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)}$$

Note : soit P la matrice des probabilités de transition. On peut trouver  $P^{(n+m)}=P^{(n)}\cdot P^{(m)}$ , avec  $P^{(n)}=P^n=P\cdot P\cdot P\cdot ...\cdot P$ .

$$\Pr(X_n = j) = \sum_{i=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} p_{x_0}(i)$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty} \Pr(X_n = j | X_0 = i) \Pr(X_0 = i)$$

#### États accessibles et communicants

- > j est accessible de i si  $p_{ij}^{(n)} > 0$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ .
- $\Rightarrow$  si i et j sont accessibles réciproquement ( $i \leftrightarrow i$ ), alors ils sont **communicants**. Ils forment donc une classe (ainsi que les autres états communicants).
- > Une chaîne de Markov est dite <u>irréductible</u> si elle est composée d'une seule classe.

#### Propriété d'une classe

- ✓ Réflexibilité :  $p_{ii}^{(0)} = 1$ .
- **✓** Symétrie :  $i \leftrightarrow j$  est équivalent à  $j \leftrightarrow i$ .
- ✓ Transitivité : si i communique avec j (i.e.  $p_{ij}^{(n)} > 0$ ) et que j communique avec k (i.e.  $p_{jk}^{(m)} > 0$ ), alors

$$p_{ik}^{(n+m)} = \sum_{r=0}^{\infty} p_{ir}^{(n)} p_{rk}^{(m)} \ge p_{ij}^{(n)} p_{jk}^{(m)} > 0$$

# États récurrents, transcients et absorbants

>  $f_{ii}$ : probabilité de revenir éventuellement à l'état i en ayant comme point de départ i.

- > Si  $f_{ii} = 1$ , i est récurrent. Si  $f_{ii} < 1$ , alors i est transcient.
- > Aussi, si  $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$ , alors *i* est récurrent. Sinon, il est transcient.
- > Si l'état i est récurrent et que i ↔ j, alors j est récurrent aussi.
- >  $f_{ii}^{(n)}$ : probabilité de revenir à l'état i pour la première fois après n étapes.
- > Une chaîne de Markov irréductible avec espace d'état fini **n'a que des états récurrents**.
- > **État absorbant** : j est un état absorbant si  $p_{jj} = 1$ . De plus, Si j est un état absorbant, alors

$$f_{ij} = \sum_{k=0}^{m} p_{ik} f_{kj}$$

#### Probabilité limites

> **État périodique** : si l'état a une période *d*, alors il sera possible de revenir à cet état après *n* étapes, qui est un multiple de *d*. i.e

$$d = P.G.C.D\{n \in \mathbb{N} \mid p_{ii}^{(n)>0}\}$$

- $\rightarrow$  si d = 1, alors l'état est apériodique.
- > La périodicité est une propriété de classe : si  $i \leftrightarrow j$ , alors d(i) = d(j).
- > Le temps de retour moyen pour l'état *i* est défini par

$$\mu_{ii} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)}$$

- > État récurrent positif : si, à partir de l'état i, le temps de retour moyen μ<sub>ii</sub> à l'état i est fini, alors l'état i est récurrent positif.
- > État ergodique : un état qui est à la fois apériodique et récurrent positif.
- > Si une Chaîne de Markov est irréductible et que tout ses états sont ergodiques, alors

(1) 
$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j < \infty$$

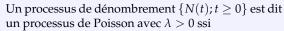
- (2)  $\pi_i = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i p_{ij}$
- (3)  $\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1$

# 3 Processus de Poisson

Soit N(t) le nombre d'évènements qui se sont produits dans l'intervalle t.

#### **Définitions**

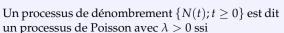
#### Définition 1



- (1) N(0) = 0
- (2) Le processus a des accroissements indépendants, i.e pour  $0 \le t_1 \le t_2 < t_3$ , les accroissements  $(N(t_3) N(t_2))$  et  $(N(t_2) N(t_1))$  sont stochastiquement indépendants.
- (3)  $\forall t$ ,  $(N(s+t)-N(s)) \sim Pois(\lambda t)$ . Alors,

$$\Pr\left(N(s+t) - N(s) = n\right) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}$$

#### Définition 2



- (1) N(0) = 0
- (2) a des accroissements indépendants et stationnaires
- (3)  $Pr(N(h) = 1) = \lambda h + o(h)$
- (4)  $\Pr(N(h) \ge 2) = o(h)$

Avec o(h) une fonction où f(h) = o(h) si  $\lim_{n\to\infty} \frac{f(h)}{h} = 0$ .

On peut prouver que ces 2 définitions sont équivalents.

# Temps séparant 2 évènements successifs

- > Soit  $T_i$  le temps entre le  $(i-1)^e$  et le  $i^e$  évènement.
- $\rightarrow$  Alors,  $T_n \sim Exp(\lambda)$ .
- $\rightarrow$  Soit  $S_n$  le moment où se produit le  $i^e$  évènement. On a

$$S_n = \sum_{i=1}^n T_i$$

- > On peut facilement prouver que  $S_n$  ∼  $\Gamma(n, \lambda)$ .
- > Si N(t) ≥ n, alors nécessairement  $S_n$  ≤ t.

# Processus de Poisson avec évènements de type I et II

- > Soit un Processus de Poisson  $\{N(t); t \geq 0\}$  où il peut y avoir un évènement de type I avec probabilité p ou un de type II avec probabilité q.
- > Nécessairement, on a

$$N(t) = N_1(t) + N_2(t)$$

Avec  $N_1(t)$  et  $N_2(t)$  qui sont stochastiquement indépendants.

>  $N_i(t) \sim Pois(\lambda p_i t)$ , où  $p_i$  est la probabilité que l'évènement de type i se produise.

#### Distribution conditionnelle des temps d'occurence

Pour un processus de Poisson  $\{N(t); t \geq 0\}$ , la distribution conditionnelle des temps d'occurence  $S_1,...S_n$  sachant que N(t) = n est définie par

$$f_{S_1,...,S_n|N(t)}(s_1,...,s_n|n) = \frac{n!}{t^n}$$

pour  $0 < s_1 < ... < s_n$ .