# Rappel de Math. financière

### Annuitées

$$a_{\overline{n}|} = \frac{1-v^t}{i}$$
$$a_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{i}$$
$$\bar{a}_{\overline{n}|} = \int_0^n v^t dt = \frac{1-v^t}{\delta}$$

# 1 Avant l'Examen 1

À ajouter plus tard (prendre ce que Nich avait déjà fait avant l'intra)

### Loi de Moivre

$$X \sim Uni(0,\omega)$$
$$S_x(x) = 1 - \frac{x}{\omega},\ 0 < x < \omega$$
$$T_x \sim Uni(0,\omega - x)$$
$$S_{T_x}(t) = 1 - \frac{t}{\omega - x},\ 0 < t < \omega - x$$

### Loi Exponentielle

$$x \sim Exp(\mu)$$
$$S_x(x) = e^{-\mu x},\ x \geq 0$$
$$T_x \sim Exp(\mu)$$
$$S_{T_x}(t) = e^{-\mu t},\ t \geq 0$$

# 2 Contrats d'assurance-vie

Le paiement est soit en continu, soit à la fin de l'année ou à la fin de la $\frac{1}{m}$ d'année.

**Assurance-vie entière** On verse le capital au décès de l'assuré

$$\bar{A}_x = \int_0^{\omega-x} v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt$$
$$A_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} v^{k+1} {}_{k|}q_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} v^{k+1} {}_kp_x q_{x+k}$$

**Assurance-vie temporaire** On verse le capital au décès de l'assuré, s'il survient dans les $n$ prochaines années.

$$\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt$$
$$A^1_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_{k|}q_x = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_kp_x q_{x+k}$$

**Assurance-vie dotation pure** On verse le capital à l'assuré si celui-ci est toujours en vie après $n$ années.

$$A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = {}_np_x v^n$$

**Assurance mixte** On verse le capital à l'assuré si il décède dans les $n$ prochaines années, ou si il est toujours en vie après cette période.

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt + v^n {}_np_x = \bar{A}^1_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}$$
$$A_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_{k|}q_x + v^n {}_np_x$$

**Assurance différée** On verse le capital à l'assuré lors de son décès seulement si le décès survient dans plus de $m$ années [1]

$$\begin{aligned} {}_{m|}\bar{A}_x &= \int_m^{\omega-x} v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt \\ &= v^m {}_mp_x \int_0^{\omega-x-m} v^t {}_tp_{x+m} \mu_{(x+m)+t} dt \\ &= {}_mE_x \bar{A}_{x+m} \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} {}_{m|}A_x &= \sum_{k=m}^{\omega-x-1} v^{k+1} {}_{k|}q_x \\ &= \sum_{k=0}^{\omega-x-m-1} v^{k+1+m} {}_{(k+m)|}q_x \\ &= v^m {}_mp_x \sum_{k=0}^{\omega-(x+m)-1} v^{k+1} {}_kp_{x+m} q_{x+m+k} \\ &= {}_mE_x A_{x+m} \end{aligned}$$

où ${}_mE_x$ est un facteur d'actualisation actuarielle.

**Assurance Vie entière croissante** On verse le capital au décès de l'assuré. Ce capital augmente chaque années.

$$(\bar{I}\bar{A})_x = \int_0^{\omega-x} t v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt$$
$$(I\bar{A})_x = \int_0^{\omega-x} (1 + \lfloor t \rfloor) v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt = \bar{A}_x + {}_{1|}\bar{A}_x + {}_{2|}\bar{A}_x + \ldots$$

**Assurance Vie temporaire croissante** On verse le capital au décès de l'assuré, s'il survient dans les $n$ prochaines années. Ce capital croit chaque années.

$$(\bar{I}\bar{A})^1_{x:\overline{n}|} = \int_0^n t v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt$$
$$(I\bar{A})^1_{x:\overline{n}|} = \int_0^n (1 + \lfloor t \rfloor) v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt = \bar{A}^1_{x:\overline{n}|} + {}_{1|}\bar{A}^1_{x:\overline{n-1}|} + \ldots + {}_{n-1|}\bar{A}^1_{x:\overline{1}|}$$

**Assurance vie entière croissante temporairement** On verse le capital au décès de l'assuré. Ce capital croit pendent $n$ années

$$(I_{\overline{n}|}\bar{A})_x = \int_0^n (1 + \lfloor t \rfloor) v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt + \int_n^{\omega-x} n v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt = \bar{A}_x + {}_{1|}\bar{A}_x + \ldots + {}_{n-1|}\bar{A}_x$$

**Assurance Vie temporaire décroissante** On verse le capital au décès de l'assuré, s'il survient dans les $n$ prochaines années. Ce capital décroit chaque années.

$$(\bar{D}\bar{A})^1_{x:\overline{n}|} = \int_0^{\omega-x} (n-t) v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt$$
$$(D\bar{A})^1_{x:\overline{n}|} = \int_0^{\omega-x} (n - \lfloor t \rfloor) v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt = \bar{A}^1_{x:\overline{1}|} + \bar{A}^1_{x:\overline{2}|} + \ldots + \bar{A}^1_{x:\overline{n}|}$$

1. Interprétation : Une assurance-vie entière qui débute dans $m$ années.