1 Probabilités conditionnelles

> Rappel théorème de Bayes :

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)} = \frac{\Pr(B|A)\Pr(A)}{\Pr(B)}$$

> Distribution conditionnelle:

$$\Pr(X_1 = x_1 | X_2 = x_2) = \frac{\Pr(X_1 = x_1, X_2 = x_2)}{\Pr(X_2 = x_2)}$$

> L'espérance d'une fonction conditionnelle :

$$E[g(X_1)|X_2 = x_2] = \sum_{i=0}^{\infty} g(x) \Pr(X_1 = x_1|X_2 = x_2)$$

> La variance d'une fonction conditionnelle :

$$Var(g(X_1)|X_2) = E\left[g(X_1)^2|X_2\right] - E\left[g(X_1)|X_2\right]^2$$

> L'espérance conditionnelle :

$$E[X_1] = E[E[X_1|X_2]] = \sum_{x_2=0}^{\infty} E[X_1|X_2] \Pr(X_2 = x_2)$$

$$E[X_1] = E[E[X_1|X_2]] = \int_{-\infty}^{\infty} E[X_1|X_2] f_{X_2}(x_2) dx_2$$

> La variance conditionnelle :

$$Var(X_1) = E[Var(X_1|X_2)] + Var(E[X_1|X_2])$$

Lorsqu'il y a 3 v.a., l'espérance devient

$$\begin{split} E\left[X_{1}|X_{2}\right] &= E\left[E\left[X_{1}|X_{2},X_{3}\right]|X_{2}\right] \\ &= \sum_{x_{3}=0}^{\infty} E\left[X_{1}|X_{2},X_{3}\right] \Pr\left(X_{3} = x_{3}|X_{2} = x_{2}\right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} E\left[X_{1}|X_{2},X_{3}\right] f_{X_{3}|X_{2}}(x_{3}|x_{2}) dx_{3} \end{split}$$

Et la variance conditionnelle devient

$$Var(X_1) = E[Var(X_1|X_2, X_3)] + Var(E[X_1|X_2, X_3])$$

Poisson composée

> Soit $S = X_1 + ... + X_N$, où les X_i sont iid, $N \sim Pois(\lambda)$ est stochastiquement indépendant des X_i . Alors, on a

$$E[Sh(S)] = \lambda E[Xh(S+X)]$$

> On peut aussi trouver que

$$E[S^n] = \lambda \sum_{j=0}^{n-1} {n-1 \choose j} E[S^j] E[X^{n-j}]$$

Mesures de risque

 Value-At-Risk (VaR): représente le quantile au niveau κ de X.

$$VaR_{\kappa}(X) = F_X^{-1}(\kappa) = \inf\{x \ge 0 : F_X(x) \ge \kappa\}$$

> Tail Value-At-Risk (aussi appelée *Conditional Tail Expectation*) : représente la perte moyenne de X, sachant qu'elle est au dessus de la valeur $VaR_{\kappa}(X)$.

$$TVaR_{\kappa}(X) = E[X|X > VaR_{\kappa}(X)]$$

$$= \int_{0}^{\infty} x f_{X|X > VaR_{\kappa}(X)}(x) dx$$

$$= \int_{VaR_{\kappa}(X)}^{\infty} \frac{x f_{X}(x)}{\overline{F}_{X}(VaR_{\kappa}(X))} dx$$

$$= \frac{1}{1 - \kappa} \int_{VaR_{\kappa}(X)}^{\infty} x f_{X}(x) dx$$

2 Chaînes de Markov

Définition

Une chaîne de Markov est homogène si

$$\Pr(X_{n+1} = j | X_n = i, ..., X_0 = i_0) = \Pr(X_{n+1} = j | X_n = i)$$

= p_{ij}

On définit la matrice des probabilités de transition

$$P = [p_{ii}]_{i \times i}$$

Équation de Chapman-Kolmogorov

$$p_{ij}^{(n)} = \Pr(X_{k+n} = j | X_k = i)$$

$$p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)}$$

Note : soit P la matrice des probabilités de transition. On peut trouver $P^{(n+m)}=P^{(n)}\cdot P^{(m)}$, avec $P^{(n)}=P^n=P\cdot P\cdot P\cdot ...\cdot P$.

$$\Pr(X_n = j) = \sum_{i=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} p_{x_0}(i)$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty} \Pr(X_n = j | X_0 = i) \Pr(X_0 = i)$$

États accessibles et communicants

- $\Rightarrow j$ est accessible de i si $p_{ij}^{(n)} > 0$, pour $n \in \mathbb{N}$.
- \rightarrow si i et j sont accessibles réciproquement ($i \leftrightarrow i$), alors ils sont **communicants**. Ils forment donc une classe (ainsi que les autres états communicants).
- > Une chaîne de Markov est dite <u>irréductible</u> si elle est composée d'une seule classe.

Propriété d'une classe

- **✓** Réflexibilité : $p_{ii}^{(0)} = 1$.
- **✓** Symétrie : $i \leftrightarrow j$ est équivalent à $j \leftrightarrow i$.
- ✓ Transitivité : si i communique avec j (i.e. $p_{ij}^{(n)} > 0$) et que j communique avec k (i.e. $p_{ik}^{(m)} > 0$), alors

$$p_{ik}^{(n+m)} = \sum_{r=0}^{\infty} p_{ir}^{(n)} p_{rk}^{(m)} \ge p_{ij}^{(n)} p_{jk}^{(m)} > 0$$

États récurrents, transcients et absorbants

- > f_{ii} : probabilité de revenir éventuellement à l'état i en ayant comme point de départ i.
- \Rightarrow Si $f_{ii}=1$, i est récurrent. Si $f_{ii}<1$, alors i est transcient.
- > Aussi, si $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$, alors i est récurrent. Sinon, il est transcient.
- > Si l'état i est récurrent et que $i \leftrightarrow j$, alors j est récurrent aussi.
- > $f_{ii}^{(n)}$: probabilité de revenir à l'état i pour la première fois après n étapes.
- > Une chaîne de Markov irréductible avec espace d'état fini n'a que des états récurrents.
- > **État absorbant** : j est un état absorbant si $p_{jj} = 1$. De plus, Si j est un état absorbant, alors

$$f_{ij} = \sum_{k=0}^{m} p_{ik} f_{kj}$$

Probabilité limites

> **État périodique** : si l'état a une période *d*, alors il sera possible de revenir à cet état après *n* étapes, qui est un multiple de *d*. i.e

$$d(i) = P.G.C.D\{n \in \mathbb{N} \mid p_{ii}^{(n)} > 0\}$$

- \Rightarrow si d(i) = 1, alors l'état i est apériodique.
- > La périodicité est une propriété de classe : si $i \leftrightarrow j$, alors d(i) = d(j).
- > Le temps de retour moyen pour l'état *i* est défini par

$$\mu_{ii} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)}$$

- > **État récurrent positif** : si, à partir de l'état *i*, le temps de retour moyen μ_{ii} à l'état *i* est fini, alors l'état *i* est récurrent positif.
- > **État ergodique** : un état qui est à la fois apériodique et récurrent positif.
- > Si une Chaîne de Markov est irréductible et que tout ses états sont ergodiques, alors

(1)
$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j < \infty$$

- (2) $\pi_{i} = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_{i} p_{ij}$
- (3) $\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1$
- > On peut alors résoudre un système d'équations pour trouver nos π_i .

3 Processus de Poisson

Soit N(t) le nombre d'évènements qui se sont produits dans l'intervalle t.

Définitions

Définition 1

Un processus de dénombrement $\{N(t); t \ge 0\}$ est dit un processus de Poisson avec $\lambda > 0$ ssi

- (1) N(0) = 0
- (2) Le processus a des accroissements indépendants, i.e pour $0 \le t_1 \le t_2 < t_3$, les accroissements $(N(t_3) N(t_2))$ et $(N(t_2) N(t_1))$ sont stochastiquement indépendants.
- (3) $\forall t$, $(N(s+t)-N(s)) \sim Pois(\lambda t)$. Alors,

$$\Pr\left(N(s+t) - N(s) = n\right) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}$$

Définition 2

Un processus de dénombrement $\{N(t); t \ge 0\}$ est dit un processus de Poisson avec $\lambda > 0$ ssi

- (1) N(0) = 0
- (2) a des accroissements indépendants et stationnaires
- (3) $Pr(N(h) = 1) = \lambda h + o(h)$
- (4) $\Pr(N(h) \ge 2) = o(h)$

Avec o(h) une fonction où f(h) = o(h) si $\lim_{n\to\infty} \frac{f(h)}{h} = 0$.

On peut prouver que ces 2 définitions sont équivalents.

Temps séparant 2 évènements successifs

- > Soit T_i le temps entre le $(i-1)^e$ et le i^e évènement.
- \rightarrow Alors, $T_n \sim Exp(\lambda)$.
- > Soit S_n le moment où se produit le $i^{\rm e}$ évènement. On a

$$S_n = \sum_{i=1}^n T_i$$

- > On peut facilement prouver que S_n ∼ $\Gamma(n, \lambda)$.
- > Si N(t) ≥ n, alors nécessairement S_n ≤ t.

Processus de Poisson avec évènements de type I et II

- > Soit un Processus de Poisson $\{N(t); t \geq 0\}$ où il peut y avoir un évènement de type I avec probabilité p ou un de type II avec probabilité q.
- > Nécessairement, on a

$$N(t) = N_1(t) + N_2(t)$$

Avec $N_1(t)$ et $N_2(t)$ qui sont stochastiquement indépendants.

> $N_i(t) \sim Pois(\lambda p_i t)$, où p_i est la probabilité que l'évènement de type i se produise.

Distribution conditionnelle des temps d'occurence

> Pour un processus de Poisson $\{N(t); t \geq 0\}$, la distribution conditionnelle des temps d'occurence $S_1,...S_n$ sachant que N(t) = n est définie par

$$f_{S_1,...,S_n|N(t)}(s_1,...,s_n|n) = \frac{n!}{t^n}$$

pour $0 < s_1 < ... < s_n$.

> La distribution de $S_1,...,S_n|N(t)=n$ a la même distribution que les statistiques d'ordre :

$$U_{(1)},...,U_{(n)} \sim U(0,t)$$