3 Processus de Poisson

Processus de Poisson non-homogène

Définition

Un processus de dénombrement $\{N(t); t \geq 0\}$ est dit être un processus de Poisson non-homogène avec fonction d'intensité $\lambda(t)$ si

(1) $N(0) = 0$;

(2) $\{N(t); t \geq 0\}$ a des accroissements indépendants;

(3) $\Pr(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda(t)h + o(h)$;

(4) $\Pr(N(t+h) - N(t) \geq 2) = o(h)$ où $o(h)$ est une fonction négligeable.

Proposition 1

$$\Pr(N(t+s) - N(t) = n) = \frac{(m(t+s) - m(s))^n}{n!} e^{-(m(t+s)-m(s))}$$

où $m(t) = \int_0^t \lambda(x)dx$. On a alors que

$$N(t+s) - N(s) \sim Pois(m(t+s) - m(s))$$

Proposition 2

Si S_n désigne le temps d'occurence du n^e évènement, alors

$$f_{S_n}(t) = \lambda(t) \frac{m(t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-m(t)}$$

Proposition 3

Si $T_n = S_n - S_{n-1}$, alors on a, pour $n \geq 2$,

$$f_{T_n}(t) = \frac{1}{(n-2)!} \int_0^\infty \lambda(s)\lambda(t+s)m(s)^{n-2} e^{-m(t+s)} ds$$

Processus de Poisson composé

Définition

Un processus stochastique $\{N(t); t \geq 0\}$ est dit être un processus de Poisson composé s'il peut être représenté comme suit :

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$$

où $\{N(t); t \geq 0\}$ est un Processus de Poisson avec paramètre $\lambda > 0$ et $\{Y_i; i \in \mathbb{N}\}$ est une suite de v.a. *iid* indépendantes de $N(t)$.

Proposition 1

Soit $\{X(t); t \geq 0\}$ un processus de Poisson composé avec paramètre $\lambda > 0$ et supposons que $\Pr\left(Y_i = \alpha_j\right) = p_j, \sum p_j = 1$. Alors,

$$X(t) = \sum_j \alpha_j N_j(t)$$

où $N_j(t)$ est le nombre de fois que se produit l'évènement α_j dans l'intervalle de temps $[0, t]$, et $\{N(t); t \geq 0\}$ forme une suite de v.a. indépentantes telles que $N_j(t) \sim Pois(\lambda p_j t$. Lorsque $t \to \infty$, alors $X(t)$ est asymptotiquement normal, i.e.

$$X(t) \sim \mathcal{N}\left(\lambda t \mathrm{E}[Y], \lambda t \mathrm{E}\left[Y^2\right]\right)$$

Proposition 2

Si $\{X(t); t \geq 0\}$ et $\{Y(t); t \geq 0\}$ sont 2 processus de Poisson composés indépendants avec paramètres et fonctions de répartition λ_1, F_{X_1} et λ_2, F_{Y_1} respectivement, alors $\{X(t) + Y(t); t \geq 0\}$ est aussi un processus de Poisson composé avec paramètre $\lambda_1\lambda_2$ et fonction de répartition $F_{X_1+Y_1}$ telle que

$$F_{X_1+Y_1} = \frac{\lambda_1 F_{X_1} + \lambda_2 F_{Y_1}}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

Processus de Poisson conditionnel

Définition

Un processus de dénombrement avec un taux aléatoire $\Lambda > 0$ est un processus de Poisson conditionnel si $\{N(t)|\Lambda = \lambda; t \geq 0\}$ est un processus de Poisson avec taux $\lambda > 0$.

Rappel sur la loi Gamma

La fonction de répartition de la loi Gamma, lorsque $\alpha \in \mathbb{Z}$, est définie par

$$F_X(x) = 1 - \sum_{k=1}^{\alpha-1} \frac{(\lambda x)^k e^{-\lambda x}}{k!}$$

Remarques importantes

(1) Un processus de Poisson conditionnel a des accroissements stationnaires (i.e. l'accroissement ne dépend pas d'où on est, mais plutôt de l'intervalle de temps);

(2) Mais le processus de Poisson conditionnel n'a pas nécessairement des accroissements indépendants;

(3) Identité Poisson-Gamma : si on a $\Lambda \sim \Gamma(m, \theta)$, alors [1]

$$N(t) \sim NB\left(r = m, p = \frac{\theta}{\theta + t}\right)$$

(4) L'espérance et la variance d'un processus de Poisson conditionnel sont définies par

$$\mathrm{E}[N(t)] = t\mathrm{E}[\Lambda]$$
$$\mathrm{Var}(N(t)) = t\mathrm{E}[\Lambda] + t^2 \mathrm{Var}(\Lambda)$$

(5) En utilisant le théorème de Bayes, on peut trouver la fonction de répartition $F_{\Lambda|N(t)}(x|n)$ et fonction de densité $f_{\Lambda|N(t)}(x|n)$ telles que

$$F_{\Lambda|N(t)}(x|n) = \frac{\Pr(\Lambda \leq x | N(t) = n)}{\Pr(N(t) = n)} = \frac{\Pr(N(t) = n|\Lambda) f_\Lambda(\lambda) d\lambda}{\int_0^\infty \Pr(N(t) = n|\Lambda = \lambda) f_\Lambda(\lambda) d\lambda}$$

1. Être capable de faire cette démonstration pour l'examen

(6) On a, $\forall t > 0$,

$$\Pr\left(N(t) > n\right) = \int_0^\infty \overline{F}_\Lambda\left(\frac{x}{n}\right)\frac{x^n}{n!}e^{-x}dx$$

4 Processus de renouvellement

Définitions générales

- T_n : intervalle de temps entre le $(n-1)^e$ et le n^e renouvellement ;
- $S_n = \sum_{i=1}^n T_i$: le temps d'occurence du n^e renouvellement. On va souvent noter $S_{N(t)}$, avec $N(t)$ comme temps d'arrêt du processus [2] ;
- $\mu = \mathrm{E}[T_i]$: temps moyen d'attente entre 2 renouvellements ;

Distribution de $N(t)$

On définit $N(t)$ comme $N(t) = \max\{n : S_n \leq t\}$. Alors,

$$\Pr\left(N(t) = n\right) = F_T^{*n}(t) - F_T^{*(n+1)}(t)$$

Dans le cas où $T \sim Erlang(m, \lambda)$, alors

$$\Pr\left(N(t) = n\right) = \sum_{k=mn}^{m(n+1)-1} \frac{(\lambda x)^k e^{-\lambda x}}{k!}$$

Fonction de renouvellement

La fonction de renouvellement est le nombre moyen d'occurences dans l'intervalle $[0, t]$:

$$m(t) = \mathrm{E}\left[N(t)\right] = \sum_{n=1}^\infty F_T^{*(n)}(t)$$

Solution de l'équation de renouvellement

$m(t)$ satisfait *l'équation de renouvellement*, soit

$$m(t) = F_T(t) + \int_0^t m(t-x) f_T(x)dx$$

Relation biunivoque entre $m(t)$ et F_T

Avec la transformée de Laplace de $m(t)$, $\hat{m}(s)$, on a

$$\begin{aligned}\hat{m}(s) &= \frac{\hat{f}_T(s)}{s} + \hat{m}(s)\hat{f}_T(s) \\ &= \frac{\hat{f}(s)}{s\left(1-\hat{f}(s)\right)}\end{aligned}$$

Théorèmes limites

(1) On a que $N(\infty) = \infty$ avec probabilité 1. De plus,

$$\frac{N(t)}{t} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\mu}$$

avec une probabilité *presque certaine*.

(2) *Théorème élémentaire du renouvellement* : avec $t \to \infty$, on a

$$\frac{m(t)}{t} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\mu}$$

(3) Lorsque $t \to \infty$, $N(t)$ est aymptotiquement normale, telle que

$$N(t) \sim \mathcal{N}\left(\frac{t}{\mathrm{E}[T]}, \frac{t\mathrm{Var}(T)}{\mathrm{E}[T]^3}\right)$$

Équation de renouvellement

De façon générale, si on a une équation intégrale d'une fonction $g(t)$ telle que

$$g(t) = h(t) + \int_0^t g(t-x)dF_T(x)$$

Alors, la seule solution est

$$g(t) = h(t) + \int_0^t h(t-x)dm(x)$$

Distribution de $S_{N(t)}$

On peut définir la fonction de répartition et l'espérance de $S_{N(t)}$ comme

$$F_{S_{N(t)}}(x) = \overline{F}_T(t) + \int_0^x \overline{F}_T(t-y)dm(y)$$

et

$$\mathrm{E}\left[S_{N(t)}\right] = tF_T(t) - \int_0^t (t-y)\overline{F}_T(t-y)dm(y)$$

De plus,

$$\mathrm{E}\left[S_{N(t)+1}\right] = \mathrm{E}[T]\left(m(t)+1\right)$$

Key renewal theorem

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t h(t-x)dm(x) = \frac{1}{\mathrm{E}[T]}\int_0^\infty h(x)dx$$

Processus de renouvellement avec délai

- Soit $\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$ des temps entre des renouvellements succesifs qui sont *iid* tel que $F_{T_n}(t) = F_{T_2}(t)$ pour $n \geq 2$ et $F_{T_1(t)} \neq F_{T_2}(t)$. Alors $\{N_d(t); t \geq 0\}$ est dit être un processus de renouvellement avec délai.
- La distribution de $N_d(t)$ est

$$\Pr\left(N_d(t) = n\right) = F_{T_1} * F_{T_2}^{*(n-1)}(t) - F_{T_1} * F_{T_2}^{*(n)}(t)$$

- la fonction de renouvellement $m_d(t)$ est donc

$$m_d(t) = \sum_{n=1}^\infty F_{T_1} * F_{T_2}^{*(n-1)}(t)$$

- De plus, $m_d(t)$ satisfait aussi l'équation de renouvellement, telle que

$$m_d(t) = F_{T_1}(t) + \int_0^t m_o(t-x)f_{T_1}(x)dx$$

où $m_o(t)$ est la fonction de renouvellement d'un processus de renouvellement ordinaire qui débute à T_2.

Processus de renouvellement *stationnaire*

- Un processus de renouvellement $\{N_e(t); t \geq 0\}$ est dit stationnaire si

$$F_{T_1} = F_e(t) = \frac{\int_0^t \overline{F}_{T_2}(x)dx}{\mathrm{E}[T_2]}$$

- La fonction de renouvellement $m_e(t)$ est définie par

$$m_e(t) = \mathrm{E}\left[N_e(t)\right] = \frac{t}{\mathrm{E}[T_2]}$$

2. $N(t)$ est le temps d'arrêt dans le sens où on cesse le processus de dénombrement lorsqu'on atteint $N(t)$.

- La distribution de $N_e(t)$ est définie par
$$\Pr\left(N_e(t+h) - N_e(t) = n\right) = \Pr\left(N_e(h) = n\right)$$
Car les accroissements sont stationnaires.

Processus de renouvellement alterné

- Soit la suite $\{(T_n, T'_n); n \in \mathbb{N}\}$ des vecteurs *iid* où les composantes (T_n, T'_n) peuvent être dépendante. T_n représente un intervalle de temps dans lequel le processus (de renouvellement) est *on* et T'_n un intervalle de temps où le processus est *off*.
- On peut donc définir 2 processus (*on* et *off*) :
  - $\{N_1(t); t \geq 0\}$ est un processus de renouvellement *avec délai* généré par la suite des temps $\{T_1, T'_n + T_{n+1}; n \in \mathbb{Z}\}$, et sa fonction de renouvellement est
$$\begin{aligned} m_1(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} F_{T_1} * F^{*(n-1)}_{T_2+T_1}(t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} F^{*(n)}_{T_1}(t) * F^{*(n-1)}_{T'_1}(t) \end{aligned}$$
  - $\{N_2(t); t \geq 0\}$ est un processus de renouvellement *ordinaire* généré par la suite des temps $\{T_n + T'_n; n \in \mathbb{Z}\}$, et sa fonction de renouvellement est
$$m_2(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{*(n)}_{T_1 T'_1}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{*(n)}_{T_1} * F^{*(n)}_{T'_1}(t)$$
- **Proposition 1 :** Supposons que T_n est indépendant de T'_n, $\forall n \in \mathbb{N}$ et soit $p_i(t)$ la probabilité que le processus de renouvellement alterné soit dans l'état i au temps t, $i = 1, 2$. Alors,
$$p_1(t) = m_2(t) - m_1(t) + 1 = 1 - p_2(t)$$
- **Proposition 2 :** Avec les mêmes hypothèses qu'à la proposition 1, on a
$$\lim_{t\to\infty} p_1(t) = \frac{\mathrm{E}[T_1]}{\mathrm{E}[T_1] + \mathrm{E}[T'_1]} = 1 - \lim_{t\to\infty} p_2(t)$$

Application : somme de renouvellements avec réclamations escomptées

- On considère le processus des réclamations escomptées à $t = 0$, soit $\{Z(t); t \geq 0\}$, défini par
$$Z(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} e^{-\delta S_k} X_k$$
où
  - $\{N(t); t \geq 0\}$ un processus de renouvellement ordinaire ;
  - S_k est le moment où se produit la k^e réclamation ;
  - La suite $\{X_n; n \in \mathbb{Z}\}$ de v.a. *iid* et indépendantes de $N(t)$ représentant les montants de réclamations ;
  - δ est la force d'intérêt appliquée pour actualiser les réclamations.
- Dans un processus de renouvellement ordinaire, on a, pour $k = 1, 2, ..., n$,
$$f_{S_k|N(t)}(x|n) = f_{S_k}(x) \frac{\Pr\left(N(t-x) = n-k\right)}{\Pr\left(N(t) = n\right)}$$
- On peut calculer le premier moment du processus des réclamations escomptées $\{Z(t); t \geq 0\}$:
$$\mathrm{E}[Z(t)] = \mathrm{E}[X] \int_0^t e^{-\delta x} dm(x)$$
où $m(t)$ est la fonction de renouvellement du processus de renouvellement $\{N(t); t \geq 0\}$.

5 Mouvement Brownien

Définitions

Définition générale

Un processus stochastique $\{X(t); t \geq 0\}$ est dit être un mouvement Brownien *avec paramètre de variance* σ^2 si

(1) $X(0) = 0$;

(2) $\{X(t); t \geq 0\}$ a des accroissements indépendants et stationnaires ;

(3) $\forall t > 0$, $X(t) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 t)$.

Note : on appelle aussi σ le *paramètre de volatilité* ou *coefficient de diffusion*. Un mouvement Brownien est dit *standard* si $\sigma = 1$.

Proposition 1

Considérons un mouvement Brownien standard. Alors, $\forall 0 < t_1 < t_2 < ... < t_n$, on a
$$f_{X_1(t_1),...,X_n(t_n)}(x_1, ..., x_n) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1^2}{t_1} + \frac{(x_2-x_1)^2}{t_2-t_1} + ... + \frac{(x_n-x_{n-1})^2}{t_n-t_{n-1}}\right)}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \left(t_1(t_2-t_2)...(t_n-t_{n-1})\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Proposition 2

Considérons un mouvement Brownien standard. Alors, $\forall 0 < s < t$, $X(s)|X(t)$ obéit à une loi normale, tel que
$$\begin{aligned} \mathrm{E}[X(s)|X(t) = x] &= \frac{s}{t} x \\ \mathrm{Var}\left(X(s)|X(t) = x\right) &= \frac{s}{t}(t-s) \end{aligned}$$

Temps d'atteinte d'une barrière

- Soit T_a le le premier moment où le mouvement Brownien standard atteint le niveau a. Alors,
$$\Pr\left(T_a \leq t\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{|a|/\sqrt{t}}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$
- On peut trouver la distribution de la valeur maximale que peut prendre $\{X(s); 0 \leq s \leq t\}$, telle que
$$\Pr\left(\max_{0\leq s\leq t} X(s) \geq a\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{a/\sqrt{t}}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Variations sur le mouvement Brownien

Mouvement Brownien avec dérive

Un mouvement Brownien avec dérive (*drifted*) a exactement la même définition qu'un mouvement Brownien standar, à l'exception que
$$X(t) \sim \mathcal{N}\left(\mu t, \sigma^2 t\right)$$
où μ est le *paramètre de dérive*. Note : on a donc que $X(t) = \mu t + \sigma B(t)$, où $B(t)$ est un mouvement Brownien standard.

Mouvement Brownien géométrique

Définition

Soit $\{X(t); t \geq 0\}$ un mouvement Brownien brownien avec dérive μ et volatilité σ. Alors, le processus $\{X(t); t \geq 0\}$ défini par

$$X(t) = e^{Y(t)}$$

est dit être un mouvement Brownien *géométrique*.

Proposition : Soit $\{X(t); t \geq 0\}$ un mouvement Brownien géométrique avec dérive μ et volatilité σ. Alors,

$$\mathrm{E}\left[X(t)|X(u)\right] = X(s)e^{(t-s)\left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right)}$$

pour $0 \leq u \leq s \leq t$.