1 Probabilités conditionnelles

- Distribution conditionnelle :

$$\Pr(X_1 = x_1|X_2 = x_2) = \frac{\Pr(X_1 = x_1, X_2 = x_2)}{\Pr(X_2 = x_2)}$$

- L'espérance d'une fonction conditionnelle :

$$E[g(X_1)|X_2 = x_2] = \sum_{i=0}^{\infty} g(x)\Pr(X_1 = x_1|X_2 = x_2)$$

- La variance d'une fonction conditionnelle :

$$Var(g(X_1)|X_2) = E\left[g(X_1)^2|X_2\right] - E[g(X_1)|X_2]^2$$

- L'espérance conditionnelle :

$$E[X_1] = E[E[X_1|X_2]] = \sum_{x_2=0}^{\infty} E[X_1|X_2]\Pr(X_2 = x_2)$$

$$E[X_1] = E[E[X_1|X_2]] = \int_{-\infty}^{\infty} E[X_1|X_2] f_{X_2}(x_2)dx_2$$

- La variance conditionnelle :

$$Var(X_1) = E[Var(X_1|X_2)] + Var(E[X_1|X_2])$$

Lorsqu'il y a 3 v.a., l'espérance devient

$$\begin{aligned} E[X_1|X_2] &= E[E[X_1|X_2, X_3]|X_2] \\ &= \sum_{x_3=0}^{\infty} E[X_1|X_2, X_3]\Pr(X_3 = x_3|X_2 = x_2) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} E[X_1|X_2, X_3] f_{X_3|X_2}(x_3|x_2)dx_3 \end{aligned}$$

Et la variance conditionnelle devient

$$Var(X_1) = E[Var(X_1|X_2, X_3)] + Var(E[X_1|X_2, X_3])$$

Poisson composée

- Soit $S = X_1 + ... + X_N$, où les X_i sont *iid*, $N \sim Pois(\lambda)$ est stochastiquement indépendant des X_i. Alors, on a

$$E[Sh(S)] = \lambda E[Xh(S+X)]$$

- On peut aussi trouver que

$$E[S^n] = \lambda \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} E\left[S^j\right] E\left[X^{n-j}\right]$$

Mesures de risque

- Value-At-Risk (VaR) : représente le quantile au niveau κ de X.

$$VaR_\kappa(X) = F_X^{-1}(\kappa) = \inf\{x \geq 0 : F_X(x) \geq \kappa\}$$

- Tail Value-At-Risk (aussi appelée *Conditional Tail Expectation*) : représente la perte moyenne de X, sachant qu'elle est au dessus de la valeur $VaR_\kappa(X)$.

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(X) &= E[X|X > VaR_\kappa(X)] \\ &= \int_0^\infty x f_{X|X>VaR_\kappa(X)}(x)dx \\ &= \int_{VaR_\kappa(X)}^\infty \frac{x f_X(x)}{\overline{F}_X(VaR_\kappa(X))}dx \\ &= \frac{1}{1-\kappa}\int_{VaR_\kappa(X)}^\infty x f_X(x)dx \end{aligned}$$

2 Chaînes de Markov

Définition

Une chaîne de Markov est homogène si

$$\begin{aligned} \Pr(X_{n+1} = j|X_n = i, ..., X_0 = i_0) &= \Pr(X_{n+1} = j|X_n = i) \\ &= p_{ij} \end{aligned}$$

On définit la matrice des probabilités de transition

$$P = [p_{ij}]_{i\times j}$$

Équation de Chapman-Kolmogorov

$$p_{ij}^{(n)} = \Pr(X_{k+n} = j|X_k = i)$$

$$p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)}$$

Note : soit P la matrice des probabilités de transition. On peut trouver $P^{(n+m)} = P^{(n)} \cdot P^{(m)}$, avec $P^{(n)} = P^n = P \cdot P \cdot P \cdot ... \cdot P$.

$$\begin{aligned} \Pr(X_n = j) &= \sum_{i=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} p_{x_0}(i) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \Pr(X_n = j|X_0 = i)\Pr(X_0 = i) \end{aligned}$$

États accessibles et communicants

- j est accessible de i si $p_{ij}^{(n)} > 0$, pour $n \in \mathbb{N}$.
- si i et j sont accessibles réciproquement ($i \leftrightarrow i$), alors ils sont **communicants**. Ils forment donc une classe (ainsi que les autres états communicants).
- Une chaîne de Markov est dite <u>irréductible</u> si elle est composée d'une seule classe.

Propriété d'une classe

- ✔ Réflexibilité : $p_{ii}^{(0)} = 1$.
- ✔ Symétrie : $i \leftrightarrow j$ est équivalent à $j \leftrightarrow i$.
- ✔ Transitivité : si i communique avec j (i.e. $p_{ij}^{(n)} > 0$) et que j communique avec k (i.e. $p_{jk}^{(m)} > 0$), alors

$$p_{ik}^{(n+m)} = \sum_{r=0}^{\infty} p_{ir}^{(n)} p_{rk}^{(m)} \geq p_{ij}^{(n)} p_{jk}^{(m)} > 0$$

États récurrents, transcients et absorbants

- f_{ii} : probabilité de revenir éventuellement à l'état i en ayant comme point de départ i.
- Si $f_{ii} = 1$, i est récurrent. Si $f_{ii} < 1$, alors i est transcient.
- Aussi, si $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$, alors i est récurrent. Sinon, il est transcient.
- Si l'état i est récurrent et que $i \leftrightarrow j$, alors j est récurrent aussi.
- $f_{ii}^{(n)}$: probabilité de revenir à l'état i pour la première fois après n étapes.
- Une chaîne de Markov irréductible avec espace d'état fini **n'a que des états récurrents**.

- **État absorbant** : j est un état absorbant si $p_{jj} = 1$. De plus, Si j est un état absorbant, alors

$$f_{ij} = \sum_{k=0}^{m} p_{ik} f_{kj}$$

Probabilité limites

- **État périodique** : si l'état a une période d, alors il sera possible de revenir à cet état après n étapes, qui est un multiple de d. i.e

$$d(i) = P.G.C.D\{n \in \mathbb{N} \mid p_{ii}^{(n)} > 0\}$$

- si $d(i) = 1$, alors l'état i est **apériodique**.
- La périodicité est une propriété de classe : si $i \leftrightarrow j$, alors $d(i) = d(j)$.
- Le temps de retour moyen pour l'état i est défini par

$$\mu_{ii} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)}$$

- **État récurrent positif** : si, à partir de l'état i, le temps de retour moyen μ_{ii} à l'état i est fini, alors l'état i est récurrent positif.
- **État ergodique** : un état qui est à la fois apériodique et récurrent positif.
- Si une Chaîne de Markov est irréductible et que tout ses états sont ergodiques, alors
  (1) $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j < \infty$
  (2) $\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i p_{ij}$
  (3) $\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1$
- On peut alors résoudre un système d'équations pour trouver nos π_i.

3 Processus de Poisson

Soit $N(t)$ le nombre d'évènements qui se sont produits dans l'intervalle t.

Définitions

Définition 1

Un processus de dénombrement $\{N(t); t \geq 0\}$ est dit un processus de Poisson avec $\lambda > 0$ ssi

(1) $N(0) = 0$

(2) Le processus a des accroissements indépendants, i.e pour $0 \leq t_1 \leq t_2 < t_3$, les accroissements $(N(t_3) - N(t_2))$ et $(N(t_2) - N(t_1))$ sont stochastiquement indépendants.

(3) $\forall t$, $(N(s+t) - N(s)) \sim Pois(\lambda t)$. Alors,

$$\Pr\left(N(s+t) - N(s) = n\right) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}$$

Définition 2

Un processus de dénombrement $\{N(t); t \geq 0\}$ est dit un processus de Poisson avec $\lambda > 0$ ssi

(1) $N(0) = 0$

(2) a des accroissements indépendants et stationnaires

(3) $\Pr\left(N(h) = 1\right) = \lambda h + o(h)$

(4) $\Pr\left(N(h) \geq 2\right) = o(h)$

Avec $o(h)$ une fonction où $f(h) = o(h)$ si $\lim_{n\to\infty} \frac{f(h)}{h} = 0$.

On peut prouver que ces 2 définitions sont équivalents.

Temps séparant 2 évènements successifs

- Soit T_i le temps entre le $(i-1)^{\text{e}}$ et le i^{e} évènement.
- Alors, $T_n \sim Exp(\lambda)$.
- Soit S_n le moment où se produit le i^{e} évènement. On a

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} T_i$$

- On peut facilement prouver que $S_n \sim \Gamma(n, \lambda)$.
- Si $N(t) \geq n$, alors nécessairement $S_n \leq t$.

Processus de Poisson avec évènements de type I et II

- Soit un Processus de Poisson $\{N(t); t \geq 0\}$ où il peut y avoir un évènement de type I avec probabilité p ou un de type II avec probabilité q.
- Nécessairement, on a

$$N(t) = N_1(t) + N_2(t)$$

  Avec $N_1(t)$ et $N_2(t)$ qui sont stochastiquement indépendants.
- $N_i(t) \sim Pois(\lambda p_i t)$, où p_i est la probabilité que l'évènement de type i se produise.

Distribution conditionnelle des temps d'occurence

- Pour un processus de Poisson $\{N(t); t \geq 0\}$, la distribution conditionnelle des temps d'occurence $S_1, \ldots S_n$ sachant que $N(t) = n$ est définie par

$$f_{S_1,\ldots,S_n|N(t)}(s_1, \ldots, s_n|n) = \frac{n!}{t^n}$$

  pour $0 < s_1 < \ldots < s_n$.
- La distribution de $S_1, \ldots, S_n|N(t) = n$ a la même distribution que les statistiques d'ordre :

$$U_{(1)}, \ldots, U_{(n)} \sim U(0, t)$$