

1 Régression linéaire simple

Postulats

H₁ Linéarité : $E[\varepsilon_i] = 0$

H₂ Homoscédasticité : $Var(\varepsilon_i) = \sigma^2$

H₃ Indépendance : $Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$

H₄ Normalité : $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$

Modèle

$$\begin{aligned} E[Y_i|x_i] &= \beta_0 + \beta_1 x_i \\ Var(Y_i|x_i) &= \sigma^2 \\ Y_i|x_i &\stackrel{H_4}{\sim} N(\beta_0 + \beta_1 x_i, \sigma^2) \end{aligned}$$

Estimation des paramètres

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_0 &= \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} \\ \hat{\beta}_1 &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i Y_i - \bar{Y} \sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x} \sum_{i=1}^n x_i} = \frac{S_{XY}}{S_{XX}} \end{aligned}$$

Estimation de σ^2

$$\hat{\sigma}^2 = s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{\varepsilon}_i^2}{n - p'} = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n - 2}$$

Propriété des estimateurs

$$\begin{aligned} E[\hat{\beta}_1] &= \beta_1, \quad Var(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{S_{XX}} \\ \hat{\beta}_1 &\stackrel{H_4}{\sim} N\left(\beta_1, \frac{\sigma^2}{S_{XX}}\right) \\ E[\hat{\beta}_0] &= \beta_0, \quad Var(\hat{\beta}_0) = \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{XX}} \right) \\ \hat{\beta}_0 &\stackrel{H_4}{\sim} N\left(\beta_0, \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{XX}} \right)\right) \\ Cov(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) &= -\frac{\bar{x} \sigma^2}{S_{XX}} \end{aligned}$$

Tests d'hypothèse sur les paramètres

$H_0 : \hat{\beta} = \theta_0, H_1 : \hat{\beta} \neq \theta_0$

$$t_{obs} = \frac{\hat{\beta} - \theta_0}{\sqrt{Var(\hat{\beta})}} \sim T_{n-2}$$

On Rejette H_0 si $t_{obs} > |t_{n-2}(1 - \frac{\alpha}{2})|$

Intervalle de confiance

Pour la droite de régression ($E[Y_0|x_0]$)

Sachant que $E[Y_0|x_0] = \beta_0 + \beta_1 x_0$, on a l'IC suivant

$$\hat{Y}_0 \pm t_{n-2} \left(\frac{\alpha}{2} \right) \sqrt{s^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{XX}} \right)}$$

Pour la prévision de Y_0

Sachant que $Y_0 = \beta_0 + \beta_1 x_0 + \varepsilon$, on a l'IC suivant

$$\hat{Y}_0 \pm t_{n-2} \left(\frac{\alpha}{2} \right) \sqrt{s^2 \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{XX}} \right)}$$

Analyse de la variance (ANOVA)

Source	dl	Sum of squares	Mean squares	f
Model	$p = 1$	$SSR = \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2$	$MSR = \frac{SSR}{dl_1}$	$F = \frac{MSR}{MSE}$
Residual error	$n - 2$	$SSE = \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2$	$MSE = \frac{SSE}{dl_2}$	
Total	$n - 2 + p$	$SST = \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2$		

Test F de Fisher pour la validité globale de la régression

H_0 : La régression n'est pas pertinente (i.e. $\beta_1 = 0$)

H_1 : La régression est pertinente

$$F_{obs} = \frac{MSR}{MSE} \sim F_{1, n-2}$$

On rejette H_0 si $F_{obs} > F_{1, n-2} \left(\frac{\alpha}{2} \right)$

Distribution d'un résidu ε

$$E[\hat{\varepsilon}_i] = 0, \quad Var(\hat{\varepsilon}_i) = \sigma^2(1 - h_{ii})$$

où $h_{ii} = \frac{1}{n} + \frac{(\bar{x} - x_i)^2}{S_{XX}}$.

2 Régression linéaire multiple