

## Rappel de Math. financière

### Annuités

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1-v^n}{i}$$

$$a_{\infty|i} = \frac{1}{i}$$

$$\bar{a}_{\overline{n}|i} = \int_0^n v^t dt = \frac{1-v^n}{\delta}$$

## 1 Survie et mortalité

### Définitions de base

$X$  : Âge au décès d'un nouveau-né

$T_x$  : Durée de vie résiduelle d'un individu d'âge  $x$ .

$$T_x = (X - x | X \geq x)$$

$$f_{T_x} = {}_t p_x \mu_{x+t}$$

$$F_{T_x} = {}_t q_x = \frac{S_X(x) - S_X(x+t)}{S_X(x)}$$

$$\Pr(t \leq T_x \leq t+u) = {}_t | u q_x = {}_x p_{tu} q_{x+t}$$

$$S_{T_x}(t) = \frac{S_X(x+t)}{S_X(x)} = \exp \left\{ - \int_0^t \mu_{x+s} ds \right\}$$

$K_x$  : Durée de vie résiduelle entière d'un individu d'âge  $x$ .

$$K_x = \lfloor T_x \rfloor$$

$$\Pr(K_x = k) = \Pr(\lfloor T_x \rfloor = k) = {}_k | p_x$$

$\mu_x$  : Force de mortalité pour  $(x)$

$$\mu_x = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{{}_t q_x}{t} = \frac{\partial}{\partial x} (\ln(S_X(x)))$$

$$\mu_{x+t} = - \frac{\partial}{\partial t} (\ln({}_t p_x))$$

### Définitions des tables de mortalité

$\ell_0$  : Nombre d'individus initial dans une cohorte.

$\ell_x$  : Nombre d'individu de la cohorte ayant survécu jusqu'à l'âge  $x$ .

$${}_t q_x = \frac{\ell_x - \ell_{x+t}}{\ell_x}$$

$${}_t p_x = \frac{\ell_{x+t}}{\ell_x}$$

$${}_t | u q_x = \frac{u d_{x+t}}{\ell_x}$$

$I_j(x)$  : Indicateur de survie du  $j^{\text{e}}$  individu jusqu'à l'âge  $x$ .

$$I_j(x) \sim \text{Bin}(1, S_X(x))$$

$\mathcal{L}_x$  : v.a. du nombre de survivants jusqu'à l'âge  $x$ .

$$\ell_x = E[\mathcal{L}_x] = \sum_{j=1}^{\ell_0} I_j(x)$$

${}_n \mathcal{D}_x$  : v.a. du nombre de décès entre l'âge  $x$  et  $x+n$ .

ffl

$${}_x \mathcal{D}_x = \mathcal{L}_x - \mathcal{L}_{x+n}$$

$${}_n d_x = E[{}_n \mathcal{D}_x] = \ell_x - \ell_{x+n}$$

### Espérance de vie résiduelle

$$e_x = E[T_x] = \int_0^{\omega-x} {}_t p_x \mu_{x+t} dt = \int_0^{\omega-x} {}_t p_x dt$$

$$e_{x:\overline{n}|} = \left( \int_0^n {}_t p_x \mu_{x+t} dt \right) + n \cdot {}_n p_x = \int_0^n {}_t p_x dt$$

**Hypothèses d'interpolation** Pour  $t \in [0, 1]$  et  $x \in \mathbb{Z}$ .

**Distribution uniforme des décès (DUD)**

$$\ell_{x+t} = (1-t)\ell_x + t\ell_{x+1}$$

**Force constante (FC)**

$$\ell_{x+t} = \ell_x^{(1-t)} \ell_{x+1}^{(t)}$$

### Loi de Moivre

$$X \sim \text{Uni}(0, \omega)$$

$$S_X(x) = 1 - \frac{x}{\omega}, 0 < x < \omega$$

$$T_x \sim \text{Uni}(0, \omega - x)$$

$$S_{T_x}(t) = 1 - \frac{t}{\omega - x}, 0 < t < \omega - x$$

### Loi Exponentielle

$$x \sim \text{Exp}(\mu)$$

$$S_X(x) = e^{-\mu x}, x \geq 0$$

$$T_x \sim \text{Exp}(\mu)$$

$$S_{T_x}(t) = e^{-\mu t}, t \geq 0$$

## 2 Contrats d'assurance-vie

Le paiement est soit en continu, soit à la fin de l'année ou à la fin de la  $\frac{1}{m}$  d'année.

**Assurance-vie entière** On verse le capital au décès de l'assuré

$$\bar{A}_x = \int_0^{\omega-x} v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt$$

$$A_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} v^{k+1} {}_k | q_x$$

$$= \sum_{k=0}^{\omega-x-1} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k}$$

$$A_x = v q_x + v p_x A_{x+1}$$

**Assurance-vie temporaire** On verse le capital au décès de l'assuré, s'il survient dans les  $n$  prochaines années.

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt$$

$$A_{x:\overline{n}|}^1 = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_k | q_x$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k}$$

**Assurance-vie dotation pure** On verse le capital à l'assuré si celui-ci est toujours en vie après  $n$  années.

$$A_{x:\overline{n}|}^1 = {}_n p_x v^n = {}_m E_x$$

où  ${}_m E_x$  est un facteur d'actualisation actuarielle.

**Assurance mixte** On verse le capital à l'assuré si il décède dans les  $n$  prochaines années, ou si il est toujours en vie après cette période.

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt + v^n {}_n p_x$$

$$= \bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 + A_{x:\overline{n}|}^1$$

$$A_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_k | q_x + v^n {}_n p_x$$

**Assurance différée** On verse le capital à l'assuré lors de son décès seulement si le décès survient dans plus de  $m$  années<sup>1</sup>

1. Interprétation : Une assurance-vie entière qui débute dans  $m$  années.

$$\begin{aligned}
{}_m|\bar{A}_x &= \int_m^{\omega-x} v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt \\
&= v^m {}_m p_x \int_0^{\omega-x-m} v^t {}_t p_{x+m} \mu_{(x+m)+t} dt \\
&= {}_m E_x \bar{A}_{x+m} \\
{}_m|A_x &= \sum_{k=m}^{\omega-x-1} v^{k+1} {}_k q_x \\
&= \sum_{k=0}^{\omega-x-m-1} v^{k+1+m} {}_{(k+m)} q_x \\
&= v^m {}_m p_x \sum_{k=0}^{\omega-(x+m)-1} v^{k+1} {}_k p_{x+m} {}_k q_{x+m+k} \\
&= {}_m E_x A_{x+m}
\end{aligned}$$

**Lien entre assurance différée, assurance vie entière et assurance-vie temporaire**

$${}_m|\bar{A}_x = \bar{A}_x - \bar{A}_{x:\overline{m}|}^1$$

**Assurance Vie entière croissante** On verse le capital au décès de l'assuré. Ce capital augmente chaque années.

$$\begin{aligned}
(I\bar{A})_x &= \int_0^{\omega-x} t v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt \\
(I\bar{A})_x &= \int_0^{\omega-x} (1 + \lfloor t \rfloor) v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt \\
&= \bar{A}_x + {}_1|\bar{A}_x + {}_2|\bar{A}_x + \dots
\end{aligned}$$

**Assurance Vie temporaire croissante** On verse le capital au décès de l'assuré, s'il survient dans les  $n$  prochaines années. Ce capital croit chaque années.

$$\begin{aligned}
(I\bar{A})_{x:\overline{n}|}^1 &= \int_0^n t v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt \\
(I\bar{A})_{x:\overline{n}|}^1 &= \int_0^n (1 + \lfloor t \rfloor) v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt \\
&= \bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 + {}_1|\bar{A}_{x:\overline{n-1}|}^1 + \dots + {}_{n-1}|\bar{A}_{x:\overline{1}|}^1
\end{aligned}$$

**Assurance vie entière croissante temporairement** On verse le capital au décès de l'assuré. Ce capital croit pendant  $n$  années

$$\begin{aligned}
(I\bar{A})_x &= \int_0^n (1 + \lfloor t \rfloor) v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt \\
&+ \int_n^{\omega-x} n v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt \\
&= \bar{A}_x + {}_1|\bar{A}_x + \dots + {}_{n-1}|\bar{A}_x
\end{aligned}$$

**Assurance Vie temporaire décroissante** On verse le capital au décès de l'assuré, s'il survient dans les  $n$  prochaines années. Ce capital décroît chaque années.

$$\begin{aligned}
(\bar{D}\bar{A})_{x:\overline{n}|}^1 &= \int_0^{\omega-x} (n-t) v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt \\
(D\bar{A})_{x:\overline{n}|}^1 &= \int_0^{\omega-x} (n - \lfloor t \rfloor) v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt \\
&= \bar{A}_{x:\overline{1}|}^1 + \bar{A}_{x:\overline{2}|}^1 + \dots + \bar{A}_{x:\overline{n}|}^1
\end{aligned}$$

### 3 Contrats de rente

**Rente viagère** On verse une rente à l'assuré jusqu'à son décès.

$$\begin{aligned}
Y &= \bar{a}_{\overline{T_x}|} = \frac{1 - v^{T_x}}{\delta} = \frac{1 - \bar{Z}_x}{\delta} \\
\bar{a}_x &= \int_0^\infty \bar{a}_{\overline{t}|} {}_t p_x \mu_{x+t} dt \\
&= \int_0^\infty v^t {}_t p_x dt \\
&= \frac{1 - \bar{A}_x}{\delta} \\
Var(Y) &= Var\left(\frac{1 - v^{T_x}}{\delta}\right) = \frac{{}_2\bar{A}_x - \bar{A}_x^2}{\delta^2}
\end{aligned}$$

**Rente temporaire  $n$  années** Ce contrat de rentes prévoit payer une rente à l'assuré s'il est en vie, au maximum  $n$  années.

$$\begin{aligned}
Y &= \begin{cases} \bar{a}_{\overline{T_x}|} & , T_x < n \\ \bar{a}_{\overline{n}|} & , T_x \geq n \end{cases} = \frac{1 - \bar{Z}_{x:\overline{n}|}}{\delta} \\
\bar{a}_{x:\overline{n}|} &= \int_0^n \bar{a}_{\overline{t}|} {}_t p_x \mu_{x+t} dt \\
&= \int_0^n v^t {}_t p_x dt \\
&= \frac{1 - \bar{A}_{x:\overline{n}|}}{\delta} \\
Var(Y) &= \frac{{}_2\bar{A}_{x:\overline{n}|} - \bar{A}_{x:\overline{n}|}^2}{\delta^2}
\end{aligned}$$

**Rente viagère différée  $m$  années** C'est un contrat de rente viagère, qui débute dans  $m$  années (si  $(x)$  est en vie).

$$\begin{aligned}
Y &= \begin{cases} 0 & T_x < m \\ v^m \bar{a}_{\overline{T_x-m}|} & T_x \geq m \end{cases} = \frac{\bar{Z}_{20:\overline{10}|} - m|\bar{Z}_{20}}{\delta} \\
{}_m|\bar{a}_x &= \int_m^\infty \bar{a}_{\overline{t-m}|} {}_t p_x \mu_{x+t} dt \\
&= {}_m E_x \bar{a}_{x+m} \\
&= \bar{a}_x - \bar{a}_{x:\overline{m}|}
\end{aligned}$$

**Rente garantie (certaine)  $n$  années** Le contrat prévoit une rente minimale de  $n$  années, pouvant se prolonger jusqu'au décès de l'assuré.

$$\begin{aligned}
Y &= \begin{cases} \bar{a}_{\overline{n}|} & T_x < n \\ \bar{a}_{\overline{T_x}|} & T_x \geq n \end{cases} = \bar{Y}_{x:\overline{n}|} + {}_n|Y_x \\
\bar{a}_{x:\overline{n}|} &= \bar{a}_{\overline{n}|} \cdot n q_x + \int_n^\infty \bar{a}_{\overline{t}|} {}_t p_x \mu_{x+t} dt \\
&= \bar{a}_{\overline{n}|} + {}_n|\bar{a}_x
\end{aligned}$$

### 4 Primes nivelées

#### 4.1 hello

On définit  $L$  comme la perte à l'émission d'un contrat pour l'assureur. Dans ce chapitre, le paiement de la PUN s'étale sur une période de temps, et est conditionnel à la survie de l'assuré. Dans le cas d'une assurance-vie,

$$L = Z - Y$$

où  $Z$  est la valeur présente actuarielle des prestations à payer et  $Y$  la valeur présente actuarielle des primes à recevoir. De même, pour les rentes,

$$L = Y_1 - Y_2$$

où  $Y_1$  représente la valeur présente actuarielle des prestations de rente à payer et  $Y_2$  la valeur présente actuarielle des primes à recevoir.