

Rappel de Math. financière

Facteurs d'actualisation

$$a_{\overline{m}|} = \frac{1 - v^t}{i}$$

$$a_{\infty|} = \frac{1}{i}$$

$$\bar{a}_{\overline{m}|} = \int_0^n v^t dt = \frac{1 - v^n}{\delta}$$

Facteur d'accumulation

$$s_{\overline{m}|} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$\ddot{s}_{\overline{m}|} = \frac{(1+i)^n - 1}{d}$$

1 Survie et mortalité

1.1 Définitions de base

X : Âge au décès d'un nouveau-né

T_x : Durée de vie résiduelle d'un individu d'âge x .

$$T_x = (X - x | X \geq x)$$

$$f_{T_x} = {}_t p_x \mu_{x+t}$$

$$F_{T_x} = {}_t q_x = \frac{S_X(x) - S_X(x+t)}{S_X(x)}$$

$$\Pr(t \leq T_x \leq t+u) = {}_t u q_x = {}_x p_{tu} q_{x+t}$$

$$S_{T_x}(t) = \frac{S_X(x+t)}{S_X(x)} = \exp \left\{ - \int_0^t \mu_{x+s} ds \right\}$$

K_x : Durée de vie résiduelle entière d'un individu d'âge x .

$$K_x = \lfloor T_x \rfloor$$

$$\Pr(K_x = k) = \Pr(\lfloor T_x \rfloor = k) = {}_k | p_x$$

μ_x : Force de mortalité pour (x)

$$\mu_x = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{{}_t q_x}{t} = \frac{\partial}{\partial x} (\ln(S_X(x)))$$

$$\mu_{x+t} = - \frac{\partial}{\partial t} (\ln({}_t p_x))$$

1.2 Tables de mortalité

ℓ_0 : Nombre d'individus initial dans une cohorte.

ℓ_x : Nombre d'individu de la cohorte ayant survécu jusqu'à l'âge x .

$${}_t q_x = \frac{\ell_x - \ell_{x+t}}{\ell_x}$$

$${}_t p_x = \frac{\ell_{x+t}}{\ell_x}$$

$${}_t | u q_x = \frac{{}_u d_{x+t}}{\ell_x}$$

$I_j(x)$: Indicateur de survie du j^e individu jusqu'à l'âge x .

$$I_j(x) \sim \text{Bin}(1, S_X(x))$$

\mathcal{L}_x : v.a. du nombre de survivants jusqu'à l'âge x .

$$\ell_x = E[\mathcal{L}_x] = \sum_{j=1}^{\ell_0} I_j(x)$$

${}_n \mathcal{D}_x$: v.a. du nombre de décès entre l'âge x et $x+n$.

$${}_n \mathcal{D}_x = \mathcal{L}_x - \mathcal{L}_{x+n}$$

$${}_n d_x = E[{}_n \mathcal{D}_x] = \ell_x - \ell_{x+n}$$

1.3 Espérance de vie résiduelle

$$\bar{e}_x = E[T_x] = \int_0^{\omega-x} {}_t p_x \mu_{x+t} dt = \int_0^{\omega-x} {}_t p_x dt$$

$$\bar{e}_{x:\overline{m}|} = \left(\int_0^n {}_t p_x \mu_{x+t} dt \right) + n \cdot {}_n p_x = \int_0^n {}_t p_x dt$$

1.4 Hypothèses d'interpolation

Pour $t \in [0, 1]$ et $x \in \mathbb{Z}$.

Distribution uniforme des décès (DUD)

$$\ell_{x+t} = (1-t)\ell_x + t\ell_{x+1}$$

Force constante (FC)

$$\ell_{x+t} = \ell_x^{(1-t)} \ell_{x+1}^{(t)}$$

1.5 Loïs de mortalité

DeMoivre

$$X \sim \text{Unif}(0, \omega)$$

$$S_X(x) = 1 - \frac{x}{\omega}, 0 < x < \omega$$

$$T_x \sim \text{Unif}(0, \omega - x)$$

$$S_{T_x}(t) = 1 - \frac{t}{\omega - x}, 0 < t < \omega - x$$

Loi Exponentielle

$$x \sim \text{Exp}(\mu)$$

$$S_X(x) = e^{-\mu x}, x \geq 0$$

$$T_x \sim \text{Exp}(\mu)$$

$$S_{T_x}(t) = e^{-\mu t}, t \geq 0$$

2 Contrats d'assurance-vie

Le paiement est soit en continu, soit à la fin de l'année ou à la fin de la $\frac{1}{m}$ d'année.

Assurance-vie entière On verse le capital au décès de l'assuré

$$\bar{A}_x = \int_0^{\omega-x} v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt$$

$$A_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} v^{k+1} {}_k | q_x$$

$$= \sum_{k=0}^{\omega-x-1} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k}$$

$$A_x = v q_x + v p_x A_{x+1}$$

Assurance-vie temporaire On verse le capital au décès de l'assuré, s'il survient dans les n prochaines années.

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt$$

$$A_{x:\overline{n}|}^1 = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_k | q_x$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k}$$

Assurance-vie dotation pure On verse le capital à l'assuré si celui-ci est toujours en vie après n années.

$$A_{x:\overline{n}|} = {}_n p_x v^n = {}_n E_x$$

où ${}_n E_x$ est un facteur d'actualisation actuarielle.

Assurance mixte On verse le capital à l'assuré si il décède dans les n prochaines années, ou si il est toujours en vie après cette période.

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt + v^n {}_n p_x$$

$$= \bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 + A_{x:\overline{n}|}$$

$$A_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_k | q_x + v^n {}_n p_x$$

Assurance différée On verse le capital à l'assuré lors de son décès seulement si le décès survient dans plus de m années¹

$$\begin{aligned}
 {}_m|\bar{A}_x &= \int_m^{\omega-x} v^t p_x \mu_{x+t} dt \\
 &= v^m {}_m p_x \int_0^{\omega-x-m} v^t p_{x+m} \mu_{(x+m)+t} dt \\
 &= {}_m E_x \bar{A}_{x+m} \\
 {}_m|A_x &= \sum_{k=m}^{\omega-x-1} v^{k+1} {}_k|q_x \\
 &= \sum_{k=0}^{\omega-x-m-1} v^{k+1+m} {}_{(k+m)}|q_x \\
 &= v^m {}_m p_x \sum_{k=0}^{\omega-(x+m)-1} v^{k+1} {}_k p_{x+m} q_{x+m+k} \\
 &= {}_m E_x A_{x+m}
 \end{aligned}$$

Lien entre assurance différée, assurance vie entière et assurance-vie temporaire

$${}_m|\bar{A}_x = \bar{A}_x - \bar{A}_{x:\overline{m}|}^1$$

Assurance Vie entière croissante On verse le capital au décès de l'assuré. Ce capital augmente chaque années.

$$\begin{aligned}
 (I\bar{A})_x &= \int_0^{\omega-x} t v^t p_x \mu_{x+t} dt \\
 (I\bar{A})_x &= \int_0^{\omega-x} (1 + \lfloor t \rfloor) v^t p_x \mu_{x+t} dt \\
 &= \bar{A}_x + {}_1|\bar{A}_x + {}_2|\bar{A}_x + \dots
 \end{aligned}$$

Assurance Vie temporaire croissante On verse le capital au décès de l'assuré, s'il survient dans les n prochaines années. Ce capital croît chaque années.

$$\begin{aligned}
 (I\bar{A})_{x:\overline{n}|}^1 &= \int_0^n t v^t p_x \mu_{x+t} dt \\
 (I\bar{A})_{x:\overline{n}|}^1 &= \int_0^n (1 + \lfloor t \rfloor) v^t p_x \mu_{x+t} dt \\
 &= \bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 + {}_1|\bar{A}_{x:\overline{n-1}|}^1 + \dots + {}_{n-1}|\bar{A}_{x:\overline{1}|}^1
 \end{aligned}$$

Assurance vie entière croissante temporairement On verse le capital au décès de l'assuré. Ce capital croît pendant n années

$$\begin{aligned}
 (I_{\overline{m}}\bar{A})_x &= \int_0^n (1 + \lfloor t \rfloor) v^t p_x \mu_{x+t} dt \\
 &+ \int_n^{\omega-x} n v^t p_x \mu_{x+t} dt \\
 &= \bar{A}_x + {}_1|\bar{A}_x + \dots + {}_{n-1}|\bar{A}_x
 \end{aligned}$$

Assurance Vie temporaire décroissante On verse le capital au décès de l'assuré, s'il survient dans les n prochaines années. Ce capital décroît chaque années.

$$\begin{aligned}
 (D\bar{A})_{x:\overline{n}|}^1 &= \int_0^{\omega-x} (n - t) v^t p_x \mu_{x+t} dt \\
 (D\bar{A})_{x:\overline{n}|}^1 &= \int_0^{\omega-x} (n - \lfloor t \rfloor) v^t p_x \mu_{x+t} dt \\
 &= \bar{A}_{x:\overline{1}|}^1 + \bar{A}_{x:\overline{2}|}^1 + \dots + \bar{A}_{x:\overline{n}|}^1
 \end{aligned}$$

3 Contrats de rente

Rente viagère On verse une rente à l'assuré jusqu'à son décès.

$$\begin{aligned}
 Y &= \bar{a}_{\overline{T_x}|} = \frac{1 - v^{T_x}}{\delta} = \frac{1 - \bar{Z}_x}{\delta} \\
 \bar{a}_x &= \int_0^\infty \bar{a}_{\overline{T_x}|} p_x \mu_{x+t} dt \\
 &= \int_0^\infty v^t p_x dt \\
 &= \frac{1 - \bar{A}_x}{\delta} \\
 \text{Var}(Y) &= \text{Var}\left(\frac{1 - v^{T_x}}{\delta}\right) = \frac{{}_2\bar{A}_x - \bar{A}_x^2}{\delta^2}
 \end{aligned}$$

Rente temporaire n années Ce contrat de rentes prévoit payer une rente à l'assuré s'il est en vie, au maximum n années.

$$\begin{aligned}
 Y &= \begin{cases} \bar{a}_{\overline{T_x}|} & , T_x < n \\ \bar{a}_{\overline{n}|} & , T_x \geq n \end{cases} = \frac{1 - \bar{Z}_{x:\overline{n}|}}{\delta} \\
 \bar{a}_{x:\overline{n}|} &= \int_0^n \bar{a}_{\overline{t}|} p_x \mu_{x+t} dt \\
 &= \int_0^n v^t p_x dt \\
 &= \frac{1 - \bar{A}_{x:\overline{n}|}}{\delta} \\
 \text{Var}(Y) &= \frac{{}_2\bar{A}_{x:\overline{n}|} - \bar{A}_{x:\overline{n}|}^2}{\delta^2}
 \end{aligned}$$

Rente viagère différée m années C'est un contrat de rente viagère, qui débute dans m années (si (x) est en vie).

$$\begin{aligned}
 Y &= \begin{cases} 0 & T_x < m \\ v^m \bar{a}_{\overline{T_x-m}|} & T_x \geq m \end{cases} = \frac{\bar{Z}_{20:\overline{10}|} - m|\bar{Z}_{20}}{\delta} \\
 {}_m|\bar{a}_x &= \int_m^\infty \bar{a}_{\overline{t-m}|} p_x \mu_{x+t} dt \\
 &= {}_m E_x \bar{a}_{x+m} \\
 &= \bar{a}_x - \bar{a}_{x:\overline{m}|}
 \end{aligned}$$

Rente garantie (certaine) n années Le contrat prévoit une rente minimale de n années, pouvant se prolonger jusqu'au décès de l'assuré.

$$\begin{aligned}
 Y &= \begin{cases} \bar{a}_{\overline{n}|} & = T_x < n \\ \bar{a}_{\overline{T_x}|} & = T_x \geq n \end{cases} = \bar{Y}_{x:\overline{n}|} + {}_n|Y_x \\
 \bar{a}_{x:\overline{n}|} &= \bar{a}_{\overline{n}|} \cdot n q_x + \int_n^\infty \bar{a}_{\overline{t}|} p_x \mu_{x+t} dt \\
 &= \bar{a}_{\overline{n}|} + {}_n|\bar{a}_x
 \end{aligned}$$

4 Primes nivelées

4.1 Notation et définitions

On définit L comme la perte à l'émission d'un contrat pour l'assureur. Dans ce chapitre, le paiement de la PUN s'étale sur une période de temps, et est conditionnel à la survie de l'assuré. Dans le cas d'une assurance-vie,

$$L = Z - Y$$

où Z est la valeur présente actuarielle des prestations à payer et Y la valeur présente actuarielle des primes à recevoir. De même, pour les rentes,

$$L = Y_1 - Y_2$$

où Y_1 représente la valeur présente actuarielle des prestations de rente à payer et Y_2 la valeur présente actuarielle des primes à recevoir.

On définit la prime nette nivelée π selon 3 principes.

4.2 Principe d'équivalence (PE)

Sous le principe d'équivalence, π^{PE} est la solution de

$$E[L] = 0$$

$$E[Z] - E[Y] = 0$$

$$E[Z] = E[Y]$$

1. Interprétation : Une assurance-vie entière qui débute dans m années.

4.3 Principe de la perte maximale probable (PPMP)

Sous le Principe de la perte maximale probable, π^{PPMP} est la solution de

$$\Pr(L < \lambda) \geq \alpha$$

Pour résoudre, on va plutôt exprimer $\Pr(L < \lambda) \leftrightarrow {}_t^*p_x$ pour solutionner π^{PPMP} .

4.4 Principe du portefeuille (PP)

Similaire au PPMP, en terme de *portefeuille* : π^{PP} est la solution de

$$\Pr\left(\frac{L_1 + \dots + L_n}{n} < \lambda\right) \geq \alpha$$

$$\Pr(L_1 + \dots + L_n < n\lambda) \geq \alpha$$

On passe par le Théorème central limite (TCL) pour évaluer cette expression. Ainsi,

$$\Pr\left(\frac{L_1 + \dots + L_n - E[L_1 + \dots + L_n]}{\sqrt{\text{Var}(L_1 + \dots + L_n)}} < \frac{n\lambda - E[L_1 + \dots + L_n]}{\sqrt{n\text{Var}(L)}}\right) \geq \alpha$$

Puisque les pertes à l'émission sont *iid*,

$$\Pr\left(Z < \frac{n\lambda - nE[L]}{\sqrt{n\text{Var}(L)}}\right) \geq \alpha$$

Par le TCL,

$$\Phi\left(\frac{n\lambda - nE[L]}{\sqrt{n\text{Var}(L)}}\right) \geq \alpha$$

Où $Z \sim N(0,1)$ et Φ la fonction de répartition de Z . Le défi se trouve dans le calcul de $\text{Var}(L)$, où

$$\begin{aligned}\text{Var}(L) &= \text{Var}(Z - Y) \\ &= \text{Var}(Z) + \text{Var}(Y) - 2\text{Cov}(Z, Y) \\ &= \text{Var}(Z) + \text{Var}(Y) - 2(E[ZY] - E[Z]E[Y])\end{aligned}$$

4.5 Retour de primes

- › Certains contrats (surtout rentes différée) vont prévoir un remboursement partiel (α) ou total des cotisations (accumulées au taux $j < i$)² en cas de décès de l'assuré pendant la période différée.

- › On introduit la v.a. W , qui représente la valeur présente ac-

tuarielle d'un retour de prime, telle que

$$W = \begin{cases} \alpha \pi v_i^{K_x+1} \ddot{s}_{\overline{K_x+1}|j} & K_x = 0, 1, \dots, n-1 \\ 0 & K_x = n, n+1, \dots \end{cases}$$

Alors,

$$L = Y_1 - Y_2 + W$$

- › Aussi, on trouve que

$$E[W] = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha \pi v_i^{k+1} \ddot{s}_{\overline{k+1}|j|k|} q_x = \alpha \pi \psi$$

4.6 Primes brutes

- › Pour tenir compte des dépenses de l'assureur, on calcule la prime *brute* G , qui considère la valeur actualisée des dépenses de l'assureur D dans le calcul de la perte à l'émission.

- › Alors, on a

$$L = Z + D - Y$$

avec Y qui est fonction de G (la prime brute), et non π .

- › Il y a 3 types de dépenses :

I) Dépenses initiales ;

- À l'émission du contrat ;
- Commission des ventes (% de G ou du montant d'assurance M) ;
- Coût des employés qui saisissent les informations dans le système ;
- Impression et envoi par courrier de la police.
- ...

II) Dépenses de renouvellement ;

- Commission de renouvellement (% de G ou du montant d'assurance M), si G est payée (i.e. conditionnel à la survie de l'assuré).

III) Dépenses de fin de contrat.

- Saisie informatique et frais de fermeture de dossier ;
- Émission du chèque de prestations ;
- Enquête (dans certains cas).

2. Le taux i est le taux préférentiel de l'assureur, tandis que le taux j est le taux offert à l'assuré pour l'accumulation de ses cotisations dans sa clause de retour de primes.