1 Estimation non-paramétrique

Moments à savoir

$$\begin{aligned}
\mu'_k &= E\left[X^k\right] \\
\mu_k &= E\left[(X-\mu)^k\right] \\
CV &= \frac{\sigma}{E[X]} \\
\gamma_1 &= \frac{\mu_3}{\sigma^3} \\
\gamma_2 &= \frac{\mu_4}{\sigma^4}
\end{aligned}$$

Fonction empirique

$$\begin{aligned}
F_n(x) &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} I_{\{x_j \leq x\}} \\
f_n(x) &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} I_{\{x_j = x\}} \\
nF_n(x) &\sim \text{bin}(n, F(x)) \\
E[F_n(x)] &= \frac{nF_n(x)}{n} = F_n(x) \\
\widehat{Var}[F_n(x)] &= \frac{nF_n(x)(1-F)n(x)}{n^2} \\
&= \frac{F_n(x)(1-F_n(x))}{n} \\
\widehat{Var}[S_n(x)] &= \frac{S_n(x)(1-S_n(x))}{n} \\
F_n(x) &= \begin{cases} 0, & x < y_1 \\ 1-\frac{r_j}{n}, & y_{j-1} \leq x < y_j, j = 2, ..., k \\ 1, & x > y_k \end{cases}
\end{aligned}$$

Estimateur de Nelson-Aalen

- L'estimateur de Nelson–Aalen est une alternative à la fonction de répartition empirique comme estimateur de la fonction de survie dans le cas de données complètes.

$$\begin{aligned}
h(x) &= -lnS(x) \\
\hat{H}(x) &= \begin{cases} 0, & x < y_1 \\ \sum_{i=1}^{j-1} \frac{s_i}{r_i}, & y_{j-1} \leq x < y_j, j = 2, ..., k \\ \sum_{i=1}^{k} \frac{s_i}{r_i}, & x > y_k \end{cases} \\
\hat{S}(x) &= e^{-\hat{H}(x)} \\
\frac{s_i}{r_i} &= \frac{s_i/n}{r_i/n} \\
&= \frac{s_i/n}{1-(1-F_n(y_{i-1}))} \\
&= \frac{f_n(y_i)}{1-(1-F_n(y_{i-1}))} \\
E[\hat{H}(y_j)] &= H(y_j) \\
\widehat{Var}[\hat{H}(y_j)] &\approx \sum_{i=1}^{j} \frac{s_i}{r_i^2}
\end{aligned}$$

Estimateur de Kaplan-Meier

$$\begin{aligned}
r_i &= \text{\# sujets sortis du groupe à ou après } y_i \\
&= \text{\# sujets non encore entrés dans le groupe à } y_i \\
\hat{S}(x) &= \begin{cases} 1, & 0 \leq x < y_1 \\ \prod_{i=1}^{j-1} \frac{r_i - s_i}{r_i}, & y_{j-1} \leq x < y_j, j = 2, ..., k \\ \prod_{i=1}^{k} \frac{r_i - s_i}{r_i}, & x > y_k \text{ (0 si données complètes)} \end{cases} \\
E[\hat{S}(x)] &= \frac{S(y_i)}{S(y_1)} \text{ i.e. sans biais à } y_i \\
\widehat{Var}[\hat{S}(y_j)] &= [\hat{S}(y_j)]^2 \sum_{i=1}^{j} \frac{s_i}{r_i(r_i - s_i)} \textbf{ (Aprox. GreenWood)}
\end{aligned}$$