

1 Probabilités conditionnelles

- › Rappel théorème de Bayes :

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)} = \frac{\Pr(B|A) \Pr(A)}{\Pr(B)}$$

- › Distribution conditionnelle :

$$\Pr(X_1 = x_1 | X_2 = x_2) = \frac{\Pr(X_1 = x_1, X_2 = x_2)}{\Pr(X_2 = x_2)}$$

- › L'espérance d'une fonction conditionnelle :

$$E[g(X_1) | X_2 = x_2] = \sum_{i=0}^{\infty} g(x) \Pr(X_1 = x_1 | X_2 = x_2)$$

- › La variance d'une fonction conditionnelle :

$$\text{Var}(g(X_1) | X_2) = E[g(X_1)^2 | X_2] - E[g(X_1) | X_2]^2$$

- › L'espérance conditionnelle :

$$E[X_1] = E[E[X_1 | X_2]] = \sum_{x_2=0}^{\infty} E[X_1 | X_2] \Pr(X_2 = x_2)$$

$$E[X_1] = E[E[X_1 | X_2]] = \int_{-\infty}^{\infty} E[X_1 | X_2] f_{X_2}(x_2) dx_2$$

- › La variance conditionnelle :

$$\text{Var}(X_1) = E[\text{Var}(X_1 | X_2)] + \text{Var}(E[X_1 | X_2])$$

Lorsqu'il y a 3 v.a., l'espérance devient

$$\begin{aligned} E[X_1 | X_2] &= E[E[X_1 | X_2, X_3] | X_2] \\ &= \sum_{x_3=0}^{\infty} E[X_1 | X_2, X_3] \Pr(X_3 = x_3 | X_2 = x_2) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} E[X_1 | X_2, X_3] f_{X_3|X_2}(x_3 | x_2) dx_3 \end{aligned}$$

Et la variance conditionnelle devient

$$\text{Var}(X_1) = E[\text{Var}(X_1 | X_2, X_3)] + \text{Var}(E[X_1 | X_2, X_3])$$

Poisson composée

- › Soit $S = X_1 + \dots + X_N$, où les X_i sont iid, $N \sim \text{Pois}(\lambda)$ est stochastiquement indépendant des X_i . Alors, on a

$$E[Sh(S)] = \lambda E[Xh(S + X)]$$

- › On peut aussi trouver que

$$E[S^n] = \lambda \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} E[S^j] E[X^{n-j}]$$

Mesures de risque

- › Value-At-Risk (VaR) : représente le quantile au niveau κ de X .

$$\text{VaR}_{\kappa}(X) = F_X^{-1}(\kappa) = \inf\{x \geq 0 : F_X(x) \geq \kappa\}$$

- › Tail Value-At-Risk (aussi appelée *Conditional Tail Expectation*) : représente la perte moyenne de X , sachant qu'elle est au dessus de la valeur $\text{VaR}_{\kappa}(X)$.

$$\begin{aligned} \text{TVaR}_{\kappa}(X) &= E[X | X > \text{VaR}_{\kappa}(X)] \\ &= \int_0^{\infty} x f_{X|X > \text{VaR}_{\kappa}(X)}(x) dx \\ &= \int_{\text{VaR}_{\kappa}(X)}^{\infty} \frac{x f_X(x)}{\bar{F}_X(\text{VaR}_{\kappa}(X))} dx \\ &= \frac{1}{1 - \kappa} \int_{\text{VaR}_{\kappa}(X)}^{\infty} x f_X(x) dx \end{aligned}$$

2 Chaînes de Markov

Définition

Une chaîne de Markov est homogène si

$$\Pr(X_{n+1} = j | X_n = i, \dots, X_0 = i_0) = \Pr(X_{n+1} = j | X_n = i) = p_{ij}$$

On définit la matrice des probabilités de transition

$$P = [p_{ij}]_{i \times j}$$

Équation de Chapman-Kolmogorov

$$p_{ij}^{(n)} = \Pr(X_{k+n} = j | X_k = i)$$

$$p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)}$$

Note : soit P la matrice des probabilités de transition. On peut trouver $P^{(n+m)} = P^{(n)} \cdot P^{(m)}$, avec $P^{(n)} = P^n = P \cdot P \cdot P \cdot \dots \cdot P$.

$$\Pr(X_n = j) = \sum_{i=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} p_{x_0}(i)$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \Pr(X_n = j | X_0 = i) \Pr(X_0 = i)$$

États accessibles et communicants

- › j est accessible de i si $p_{ij}^{(n)} > 0$, pour $n \in \mathbb{N}$.
- › si i et j sont accessibles réciproquement ($i \leftrightarrow j$), alors ils sont **communicants**. Ils forment donc une classe (ainsi que les autres états communicants).
- › Une chaîne de Markov est dite irréductible si elle est composée d'une seule classe.

Propriété d'une classe

- ✓ Réflexibilité : $p_{ii}^{(0)} = 1$.
- ✓ Symétrie : $i \leftrightarrow j$ est équivalent à $j \leftrightarrow i$.
- ✓ Transitivité : si i communique avec j (i.e. $p_{ij}^{(n)} > 0$) et que j communique avec k (i.e. $p_{jk}^{(m)} > 0$), alors

$$p_{ik}^{(n+m)} = \sum_{r=0}^{\infty} p_{ir}^{(n)} p_{rk}^{(m)} \geq p_{ij}^{(n)} p_{jk}^{(m)} > 0$$

États récurrents, transients et absorbants

- › f_{ii} : probabilité de revenir éventuellement à l'état i en ayant comme point de départ i .
- › Si $f_{ii} = 1$, i est récurrent. Si $f_{ii} < 1$, alors i est transient.
- › Aussi, si $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$, alors i est récurrent. Sinon, il est transient.
- › Si l'état i est récurrent et que $i \leftrightarrow j$, alors j est récurrent aussi.
- › $f_{ii}^{(n)}$: probabilité de revenir à l'état i pour la première fois après n étapes.
- › Une chaîne de Markov irréductible avec espace d'état fini n'a que des états récurrents.
- › **État absorbant** : j est un état absorbant si $p_{jj} = 1$. De plus, Si j est un état absorbant, alors

$$f_{ij} = \sum_{k=0}^m p_{ik} f_{kj}$$

Probabilité limites

- › **État périodique** : si l'état a une période d , alors il sera possible de revenir à cet état après n étapes, qui est un multiple de d . i.e

$$d(i) = P.G.C.D\{n \in \mathbb{N} \mid p_{ii}^{(n)} > 0\}$$

- › si $d(i) = 1$, alors l'état i est **apériodique**.
- › La périodicité est une propriété de classe : si $i \leftrightarrow j$, alors $d(i) = d(j)$.
- › Le temps de retour moyen pour l'état i est défini par

$$\mu_{ii} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)}$$

- › **État récurrent positif** : si, à partir de l'état i , le temps de retour moyen μ_{ii} à l'état i est fini, alors l'état i est récurrent positif.
- › **État ergodique** : un état qui est à la fois apériodique et récurrent positif.
- › Si une Chaîne de Markov est irréductible et que tous ses états sont ergodiques, alors

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j < \infty$$

$$(2) \pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i p_{ij}$$

$$(3) \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1$$

- › On peut alors résoudre un système d'équations pour trouver nos π_i .

3 Processus de Poisson

Soit $N(t)$ le nombre d'événements qui se sont produits dans l'intervalle t .

Définitions

Définition 1

Un processus de dénombrement $\{N(t); t \geq 0\}$ est dit un processus de Poisson avec $\lambda > 0$ ssi

$$(1) N(0) = 0$$

(2) Le processus a des accroissements indépendants, i.e pour $0 \leq t_1 \leq t_2 < t_3$, les accroissements $(N(t_3) - N(t_2))$ et $(N(t_2) - N(t_1))$ sont stochastiquement indépendants.

$$(3) \forall t, (N(s+t) - N(s)) \sim \text{Pois}(\lambda t). \text{ Alors,}$$

$$\Pr(N(s+t) - N(s) = n) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}$$

Définition 2

Un processus de dénombrement $\{N(t); t \geq 0\}$ est dit un processus de Poisson avec $\lambda > 0$ ssi

$$(1) N(0) = 0$$

(2) a des accroissements indépendants et stationnaires

$$(3) \Pr(N(h) = 1) = \lambda h + o(h)$$

$$(4) \Pr(N(h) \geq 2) = o(h)$$

Avec $o(h)$ une fonction où $f(h) = o(h)$ si $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 0$.

On peut prouver que ces 2 définitions sont équivalentes.

Temps séparant 2 événements successifs

- › Soit T_i le temps entre le $(i-1)^e$ et le i^e événement.
- › Alors, $T_n \sim \text{Exp}(\lambda)$.
- › Soit S_n le moment où se produit le i^e événement. On a

$$S_n = \sum_{i=1}^n T_i$$

- › On peut facilement prouver que $S_n \sim \Gamma(n, \lambda)$.
- › Si $N(t) \geq n$, alors nécessairement $S_n \leq t$.

Processus de Poisson avec événements de type I et II

- › Soit un Processus de Poisson $\{N(t); t \geq 0\}$ où il peut y avoir un événement de type I avec probabilité p ou un de type II avec probabilité q .
- › Nécessairement, on a

$$N(t) = N_1(t) + N_2(t)$$

Avec $N_1(t)$ et $N_2(t)$ qui sont stochastiquement indépendants.

- › $N_i(t) \sim \text{Pois}(\lambda p_i t)$, où p_i est la probabilité que l'événement de type i se produise.

Distribution conditionnelle des temps d'occurrence

- › Pour un processus de Poisson $\{N(t); t \geq 0\}$, la distribution conditionnelle des temps d'occurrence S_1, \dots, S_n sachant que $N(t) = n$ est définie par

$$f_{S_1, \dots, S_n | N(t)}(s_1, \dots, s_n | n) = \frac{n!}{t^n}$$

pour $0 < s_1 < \dots < s_n$.

- › La distribution de $S_1, \dots, S_n | N(t) = n$ a la même distribution que les statistiques d'ordre :

$$U_{(1)}, \dots, U_{(n)} \sim U(0, t)$$