

3 Processus de Poisson

Processus de Poisson non-homogène

Définition

Un processus de dénombrement $\{N(t); t \geq 0\}$ est dit être un processus de Poisson non-homogène avec fonction d'intensité $\lambda(t)$ si

- (1) $N(0) = 0$;
- (2) $\{N(t); t \geq 0\}$ a des accroissements indépendants;
- (3) $\Pr(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda(t)h + o(h)$;
- (4) $\Pr(N(t+h) - N(t) \geq 2) = o(h)$ où $o(h)$ est une fonction négligeable.

Proposition 1

$$\Pr(N(t+s) - N(t) = n) = \frac{(m(t+s) - m(s))^n}{n!} e^{-(m(t+s) - m(s))}$$

où $m(t) = \int_0^t \lambda(x) dx$. On a alors que

$$N(t+s) - N(s) \sim \text{Pois}(m(t+s) - m(s))$$

Proposition 2

Si S_n désigne le temps d'occurrence du n^{e} évènement, alors

$$f_{S_n}(t) = \lambda(t) \frac{m(t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-m(t)}$$

Proposition 3

Si $T_n = S_n - S_{n-1}$, alors on a, pour $n \geq 2$,

$$f_{T_n}(t) = \frac{1}{(n-2)!} \int_0^\infty \lambda(s) \lambda(t+s) m(s)^{n-2} e^{-m(t+s)} ds$$

1. Être capable de faire cette démonstration pour l'examen

Processus de Poisson composé

Définition

Un processus stochastique $\{N(t); t \geq 0\}$ est dit être un processus de Poisson composé s'il peut être représenté comme suit :

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$$

où $\{N(t); t \geq 0\}$ est un Processus de Poisson avec paramètre $\lambda > 0$ et $\{Y_i; i \in \mathbb{N}\}$ est une suite de v.a. iid indépendantes de $N(t)$.

Proposition 1

Soit $\{X(t); t \geq 0\}$ un processus de Poisson composé avec paramètre $\lambda > 0$ et supposons que $\Pr(Y_i = \alpha_j) = p_j, \sum p_j = 1$. Alors,

$$X(t) = \sum_j \alpha_j N_j(t)$$

où $N_j(t)$ est le nombre de fois que se produit l'évènement α_j dans l'intervalle de temps $[0, t]$, et $\{N(t); t \geq 0\}$ forme une suite de v.a. indépendantes telles que $N_j(t) \sim \text{Pois}(\lambda p_j t)$. Lorsque $t \rightarrow \infty$, alors $X(t)$ est asymptotiquement normal, i.e.

$$X(t) \sim \mathcal{N}(\lambda t E[Y], \lambda t E[Y^2])$$

Proposition 2

Si $\{X(t); t \geq 0\}$ et $\{Y(t); t \geq 0\}$ sont 2 processus de Poisson composés indépendants avec paramètres et fonctions de répartition λ_1, F_{X_1} et λ_2, F_{Y_1} respectivement, alors $\{X(t) + Y(t); t \geq 0\}$ est aussi un processus de Poisson composé avec paramètre $\lambda_1 \lambda_2$ et fonction de répartition $F_{X_1+Y_1}$ telle que

$$F_{X_1+Y_1} = \frac{\lambda_1 F_{X_1} + \lambda_2 F_{Y_1}}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

Processus de Poisson conditionnel

Définition

Un processus de dénombrement avec un taux aléatoire $\Lambda > 0$ est un processus de Poisson conditionnel si $\{N(t)|\Lambda = \lambda; t \geq 0\}$ est un processus de Poisson avec taux $\lambda > 0$.

Rappel sur la loi Gamma

La fonction de répartition de la loi Gamma, lorsque $\alpha \in \mathbb{Z}$, est définie par

$$F_X(x) = 1 - \sum_{k=1}^{\alpha-1} \frac{(\lambda x)^k e^{-\lambda x}}{k!}$$

Remarques importantes

- (1) Un processus de Poisson conditionnel a des accroissements stationnaires (i.e. l'accroissement ne dépend pas d'où on est, mais plutôt de l'intervalle de temps);
- (2) Mais le processus de Poisson conditionnel n'a pas nécessairement des accroissements indépendants;
- (3) Identité Poisson-Gamma : si on a $\Lambda \sim \Gamma(m, \theta)$, alors ¹

$$N(t) \sim NB\left(r = m, p = \frac{\theta}{\theta + t}\right)$$

- (4) L'espérance et la variance d'un processus de Poisson conditionnel sont définies par

$$E[N(t)] = tE[\Lambda]$$

$$\text{Var}(N(t)) = tE[\Lambda] + t^2 \text{Var}(\Lambda)$$

- (5) En utilisant le théorème de Bayes, on peut trouver la fonction de répartition $F_{\Lambda|N(t)}(x|n)$ et fonction de densité $f_{\Lambda|N(t)}(x|n)$ telles que

$$\begin{aligned} F_{\Lambda|N(t)}(x|n) &= \frac{\Pr(\Lambda \leq x | N(t) = n)}{\Pr(N(t) = n)} \\ &= \frac{\Pr(N(t) = n | \Lambda) f_{\Lambda}(\lambda) d\lambda}{\int_0^\infty \Pr(N(t) = n | \Lambda = \lambda) f_{\Lambda}(\lambda) d\lambda} \end{aligned}$$

(6) On a, $\forall t > 0$,

$$\Pr(N(t) > n) = \int_0^\infty \bar{F}_\Lambda\left(\frac{x}{n}\right) \frac{x^n}{n!} e^{-x} dx$$

4 Processus de renouvellement

Définitions générales

- › T_n : intervalle de temps entre le $(n-1)^{\text{e}}$ et le n^{e} renouvellement;
- › $S_n = \sum_{i=1}^n T_i$: le temps d'occurrence du n^{e} renouvellement. On va souvent noter $S_{N(t)}$, avec $N(t)$ comme temps d'arrêt du processus²;
- › $\mu = E[T_i]$: temps moyen d'attente entre 2 renouvellements;

Distribution de $N(t)$

On définit $N(t)$ comme $N(t) = \max\{n : S_n \leq t\}$. Alors,

$$\Pr(N(t) = n) = F_T^{*n}(t) - F_T^{*(n+1)}(t)$$

Dans le cas où $T \sim \text{Erlang}(m, \lambda)$, alors

$$\Pr(N(t) = n) = \sum_{k=mn}^{m(n+1)-1} \frac{(\lambda x)^k e^{-\lambda x}}{k!}$$

Fonction de renouvellement

La fonction de renouvellement est le nombre moyen d'occurrences dans l'intervalle $[0, t]$:

$$m(t) = E[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F_T^{*(n)}(t)$$

Solution de l'équation de renouvellement

$m(t)$ satisfait l'équation de renouvellement, soit

$$m(t) = F_T(t) + \int_0^t m(t-x) f_T(x) dx$$

2. $N(t)$ est le temps d'arrêt dans le sens où on cesse le processus de dénombrement lorsqu'on atteint $N(t)$.

Relation biunivoque entre $m(t)$ et F_T

Avec la transformée de Laplace de $m(t)$, $\hat{m}(s)$, on a

$$\begin{aligned} \hat{m}(s) &= \frac{\hat{f}_T(s)}{s} + \hat{m}(s) \hat{f}_T(s) \\ &= \frac{\hat{f}(s)}{s(1 - \hat{f}(s))} \end{aligned}$$

Théorèmes limites

(1) On a que $N(\infty) = \infty$ avec probabilité 1. De plus,

$$\frac{N(t)}{t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \frac{1}{\mu}$$

avec une probabilité *presque certaine*.

(2) *Théorème élémentaire du renouvellement* : avec $t \rightarrow \infty$, on a

$$\frac{m(t)}{t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \frac{1}{\mu}$$

(3) Lorsque $t \rightarrow \infty$, $N(t)$ est asymptotiquement normale, telle que

$$N(t) \sim \mathcal{N}\left(\frac{t}{E[T]}, \frac{t \text{Var}(T)}{E[T]^3}\right)$$

Équation de renouvellement

De façon générale, si on a une équation intégrale d'une fonction $g(t)$ telle que

$$g(t) = h(t) + \int_0^t g(t-x) dF_T(x)$$

Alors, la seule solution est

$$g(t) = h(t) + \int_0^t h(t-x) dm(x)$$

Distribution de $S_{N(t)}$

On peut définir la fonction de répartition et l'espérance de $S_{N(t)}$ comme

$$F_{S_{N(t)}}(x) = \bar{F}_T(t) + \int_0^x \bar{F}_T(t-y) dm(y)$$

et

$$E[S_{N(t)}] = tF_T(t) - \int_0^t (t-y) \bar{F}_T(t-y) dm(y)$$

De plus,

$$E[S_{N(t)+1}] = E[T](m(t) + 1)$$

Key renewal theorem

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t h(t-x) dm(x) = \frac{1}{E[T]} \int_0^\infty h(x) dx$$

Processus de renouvellement avec délai

› Soit $\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$ des temps entre des renouvellements successifs qui sont *iid* tel que $F_{T_n}(t) = F_{T_2}(t)$ pour $n \geq 2$ et $F_{T_1}(t) \neq F_{T_2}(t)$. Alors $\{N_d(t); t \geq 0\}$ est dit être un processus de renouvellement avec délai.

› La distribution de $N_d(t)$ est

$$\Pr(N_d(t) = n) = F_{T_1} * F_{T_2}^{*(n-1)}(t) - F_{T_1} * F_{T_2}^{*(n)}(t)$$

› la fonction de renouvellement $m_d(t)$ est donc

$$m_d(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_{T_1} * F_{T_2}^{*(n-1)}(t)$$

› De plus, $m_d(t)$ satisfait aussi l'équation de renouvellement, telle que

$$m_d(t) = F_{T_1}(t) + \int_0^t m_o(t-x) f_{T_2}(x) dx$$

où $m_o(t)$ est la fonction de renouvellement d'un processus de renouvellement ordinaire qui débute à T_2 .

Processus de renouvellement stationnaire

› Un processus de renouvellement $\{N_e(t); t \geq 0\}$ est dit stationnaire si

$$F_{T_1} = F_e(t) = \frac{\int_0^t \bar{F}_{T_2}(x) dx}{E[T_2]}$$

› La fonction de renouvellement $m_e(t)$ est définie par

$$m_e(t) = E[N_e(t)] = \frac{t}{E[T_2]}$$

Processus de renouvellement alterné

- › Soit la suite $\{(T_n, T'_n); n \in \mathbb{N}\}$ des vecteurs *iid* où les composantes (T_n, T'_n) peuvent être dépendante. T_n représente un intervalle de temps dans lequel le processus (de renouvellement) est *on* et T'_n un intervalle de temps où le processus est *off*.
- › On peut donc définir 2 processus (*on* et *off*) :

- $\{N_1(t); t \geq 0\}$ est un processus de renouvellement *avec délai* généré par la suite des temps $\{T_1, T'_1 + T_2, T'_2 + T_3, \dots\}$, et sa fonction de renouvellement est

$$\begin{aligned} m_1(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} F_{T_1} * F_{T_2+T'_1}^{*(n-1)}(t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} F_{T_1}^{*(n)}(t) * F_{T'_1}^{*(n-1)}(t) \end{aligned}$$

- $\{N_2(t); t \geq 0\}$ est un processus de renouvellement *ordinaire* généré par la suite des temps $\{T_n + T'_n; n \in \mathbb{Z}\}$, et sa fonction de renouvellement est

$$m_2(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_{T_1 T'_1}^{*(n)}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_{T_1}^{*(n)} * F_{T'_1}^{*(n)}(t)$$

- › **Proposition 1 :** Supposons que T_n est indépendant de T'_n , $\forall n \in \mathbb{N}$ et soit $p_i(t)$ la probabilité que le processus de renouvellement alterné soit dans l'état i au temps t , $i = 1, 2$. Alors,

$$p_1(t) = m_2(t) - m_1(t) + 1 = 1 - p_2(t)$$

- › **Proposition 2 :** Avec les mêmes hypothèses qu'à la proposition 1, on a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_1(t) = \frac{\mathbb{E}[T_1]}{\mathbb{E}[T_1] + \mathbb{E}[T'_1]} = 1 - \lim_{t \rightarrow \infty} p_2(t)$$