

3 Processus de Poisson

Processus de Poisson non-homogène

Définition

Un processus de dénombrement $\{N(t); t \geq 0\}$ est dit être un processus de Poisson non-homogène avec fonction d'intensité $\lambda(t)$ si

- (1) $N(0) = 0$;
- (2) $\{N(t); t \geq 0\}$ a des accroissements indépendants;
- (3) $\Pr(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda(t)h + o(h)$;
- (4) $\Pr(N(t+h) - N(t) \geq 2) = o(h)$ où $o(h)$ est une fonction négligeable.

Proposition 1

$$\Pr(N(t+s) - N(t) = n) = \frac{(m(t+s) - m(s))^n}{n!} e^{-(m(t+s) - m(s))}$$

où $m(t) = \int_0^t \lambda(x) dx$. On a alors que $N(t+s) - N(s) \sim \text{Pois}(m(t+s) - m(s))$

Proposition 2

Si S_n désigne le temps d'occurrence du n^{e} évènement, alors

$$f_{S_n}(t) = \lambda(t) \frac{m(t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-m(t)}$$

Proposition 3

Si $T_n = S_n - S_{n-1}$, alors on a, pour $n \geq 2$,

$$f_{T_n}(t) = \frac{1}{(n-2)!} \int_0^\infty \lambda(s) \lambda(t+s) m(s)^{n-2} e^{-m(t+s)} ds$$

1. Être capable de faire cette démonstration pour l'examen
2. $N(t)$ est le temps d'arrêt dans le sens où on cesse le processus de dénombrement lorsqu'on atteint $N(t)$.

Processus de Poisson composé

Définition

Un processus stochastique $\{N(t); t \geq 0\}$ est dit être un processus de Poisson composé s'il peut être représenté comme suit :

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$$

où $\{N(t); t \geq 0\}$ est un Processus de Poisson avec paramètre $\lambda > 0$ et $\{Y_i; i \in \mathbb{N}\}$ est une suite de v.a. iid indépendantes de $N(t)$.

Proposition 1

Soit $\{X(t); t \geq 0\}$ un processus de Poisson composé avec paramètre $\lambda > 0$ et supposons que $\Pr(Y_i = \alpha_j) = p_j, \sum p_j = 1$. Alors,

$$X(t) = \sum_j \alpha_j N_j(t)$$

où $N_j(t)$ est le nombre de fois que se produit l'évènement α_j dans l'intervalle de temps $[0, t]$, et $\{N(t); t \geq 0\}$ forme une suite de v.a. indépendantes telles que $N_j(t) \sim \text{Pois}(\lambda p_j t)$. Lorsque $t \rightarrow \infty$, alors $X(t)$ est asymptotiquement normal, i.e.

$$X(t) \sim \mathcal{N}(\lambda t E[Y], \lambda t E[Y^2])$$

Proposition 2

Si $\{X(t); t \geq 0\}$ et $\{Y(t); t \geq 0\}$ sont 2 processus de Poisson composés indépendants avec paramètres et fonctions de répartition λ_1, F_{X_1} et λ_2, F_{Y_1} respectivement, alors $\{X(t) + Y(t); t \geq 0\}$ est aussi un processus de Poisson composé avec paramètre $\lambda_1 \lambda_2$ et fonction de répartition $F_{X_1+Y_1}$ telle que

$$F_{X_1+Y_1} = \frac{\lambda_1 F_{X_1} + \lambda_2 F_{Y_1}}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

Processus de Poisson conditionnel

Définition

Un processus de dénombrement avec un taux aléatoire $\Lambda > 0$ est un processus de Poisson conditionnel si $\{N(t) | \Lambda = \lambda; t \geq 0\}$ est un processus de Poisson avec taux $\lambda > 0$.

Rappel sur la loi Gamma

La fonction de répartition de la loi Gamma, lorsque $\alpha \in \mathbb{Z}$, est définie par

$$F_X(x) = 1 - \sum_{k=1}^{\alpha-1} \frac{(\lambda x)^k e^{-\lambda x}}{k!}$$

Remarques importantes

- (1) Un processus de Poisson conditionnel a des accroissements stationnaires (i.e. l'accroissement ne dépend pas d'où on est, mais plutôt de l'intervalle de temps);
- (2) Mais le processus de Poisson conditionnel n'a pas nécessairement des accroissements indépendants;
- (3) Identité Poisson-Gamma : si on a $\Lambda \sim \Gamma(m, \theta)$, alors ¹

$$N(t) \sim NB\left(r = m, p = \frac{\theta}{\theta + t}\right)$$

- (4) L'espérance et la variance d'un processus de Poisson conditionnel sont définies par

$$E[N(t)] = tE[\Lambda]$$

$$\text{Var}(N(t)) = tE[\Lambda] + t^2 \text{Var}(\Lambda)$$

- (5) En utilisant le théorème de Bayes, on peut trouver la fonction de répartition $F_{\Lambda|N(t)}(x|n)$ et fonction de densité $f_{\Lambda|N(t)}(x|n)$ telles que

$$\begin{aligned} F_{\Lambda|N(t)}(x|n) &= \frac{\Pr(\Lambda \leq x | N(t) = n)}{\Pr(N(t) = n)} \\ &= \frac{\Pr(N(t) = n | \Lambda) f_{\Lambda}(\lambda) d\lambda}{\int_0^\infty \Pr(N(t) = n | \Lambda = \lambda) f_{\Lambda}(\lambda) d\lambda} \end{aligned}$$

- (6) On a, $\forall t > 0$,

$$\Pr(N(t) > n) = \int_0^\infty \bar{F}_{\Lambda}\left(\frac{x}{n}\right) \frac{x^n}{n!} e^{-x} dx$$

4 Processus de renouvellement

Définitions générales

- › T_n : intervalle de temps entre le $(n-1)^e$ et le n^e renouvellement;
- › $S_n = \sum_{i=1}^n T_i$: le temps d'occurrence du n^e renouvellement. On va souvent noter $S_{N(t)}$, avec $N(t)$ comme temps d'arrêt du processus²;
- › $\mu = E[T_i]$: temps moyen d'attente entre 2 renouvellements;

Distribution de $N(t)$

On définit $N(t)$ comme $N(t) = \max\{n : S_n \leq t\}$. Alors,

$$\Pr(N(t) = n) = F_T^{*n}(t) - F_T^{*(n+1)}(t)$$

Dans le cas où $T \sim \text{Erlang}(m, \lambda)$, alors

$$\Pr(N(t) = n) = \sum_{k=mn}^{m(n+1)-1} \frac{(\lambda x)^k e^{-\lambda x}}{k!}$$

Fonction de renouvellement

La fonction de renouvellement est le nombre moyen d'occurrences dans l'intervalle $[0, t]$:

$$m(t) = E[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F_T^{*(n)}(t)$$

Solution de l'équation de renouvellement

$m(t)$ satisfait l'équation de renouvellement, soit

$$m(t) = F_T(t) + \int_0^t m(t-x) f_T(x) dx$$

Relation biunivoque entre $m(t)$ et F_T

Avec la transformée de Laplace de $m(t)$, $\hat{m}(s)$, on a

$$\begin{aligned} \hat{m}(s) &= \frac{\hat{f}_T(s)}{s} + \hat{m}(s) \hat{f}_T(s) \\ &= \frac{\hat{f}(s)}{s(1 - \hat{f}(s))} \end{aligned}$$

Théorèmes limites

- (1) On a que $N(\infty) = \infty$ avec probabilité 1. De plus, $\frac{N(t)}{t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \frac{1}{\mu}$ avec une probabilité *presque certaine*.
- (2) *Théorème élémentaire du renouvellement* : avec $t \rightarrow \infty$, on a $\frac{m(t)}{t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \frac{1}{\mu}$
- (3) Lorsque $t \rightarrow \infty$, $N(t)$ est asymptotiquement normale, telle que

$$N(t) \sim \mathcal{N}\left(\frac{t}{E[T]}, \frac{t \text{Var}(T)}{E[T]^3}\right)$$

Équation de renouvellement

De façon générale, si on a une équation intégrale d'une fonction $g(t)$ telle que

$$g(t) = h(t) + \int_0^t g(t-x) dF_T(x)$$

Alors, la seule solution est

$$g(t) = h(t) + \int_0^t h(t-x) dm(x)$$

Distribution de $S_{N(t)}$

On peut définir la fonction de répartition et l'espérance de $S_{N(t)}$ comme

$$F_{S_{N(t)}}(x) = \bar{F}_T(t) + \int_0^x \bar{F}_T(t-y) dm(y)$$

et

$$E[S_{N(t)}] = tF_T(t) - \int_0^t (t-y) \bar{F}_T(t-y) dm(y)$$

De plus,

$$E[S_{N(t)+1}] = E[T](m(t) + 1)$$

Key renewal theorem

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t h(t-x) dm(x) = \frac{1}{E[T]} \int_0^\infty h(x) dx$$

Processus de renouvellement avec délai

- › Soit $\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$ des temps entre des renouvellements succesifs qui sont *iid* tel que $F_{T_n}(t) = F_{T_2}(t)$ pour $n \geq 2$ et $F_{T_1}(t) \neq F_{T_2}(t)$. Alors $\{N_d(t); t \geq 0\}$ est dit être un processus de renouvellement avec délai.

- › La distribution de $N_d(t)$ est

$$\Pr(N_d(t) = n) = F_{T_1} * F_{T_2}^{*(n-1)}(t) - F_{T_1} * F_{T_2}^{*(n)}(t)$$

- › la fonction de renouvellement $m_d(t)$ est donc

$$m_d(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_{T_1} * F_{T_2}^{*(n-1)}(t)$$

- › De plus, $m_d(t)$ satisfait aussi l'équation de renouvellement, telle que

$$m_d(t) = F_{T_1}(t) + \int_0^t m_o(t-x) f_{T_1}(x) dx$$

où $m_o(t)$ est la fonction de renouvellement d'un processus de renouvellement ordinaire qui débute à T_2 .

Processus de renouvellement stationnaire

- › Un processus de renouvellement $\{N_e(t); t \geq 0\}$ est dit stationnaire si

$$F_{T_1} = F_e(t) = \frac{\int_0^t \bar{F}_{T_2}(x) dx}{E[T_2]}$$

- › La fonction de renouvellement $m_e(t)$ est définie par

$$m_e(t) = E[N_e(t)] = \frac{t}{E[T_2]}$$

- › La distribution de $N_e(t)$ est définie par

$$\Pr(N_e(t+h) - N_e(t) = n) = \Pr(N_e(h) = n)$$

Car les accroissements sont stationnaires.

Processus de renouvellement alterné

- › Soit la suite $\{(T_n, T'_n); n \in \mathbb{N}\}$ des vecteurs *iid* où les composantes (T_n, T'_n) peuvent être dépendante. T_n représente un intervalle de temps dans lequel le processus (de renouvellement) est *on* et T'_n un intervalle de temps où le processus est *off*.

- › On peut donc définir 2 processus (*on* et *off*) :

- $\{N_1(t); t \geq 0\}$ est un processus de renouvellement *avec délai* généré par la suite des temps $\{T_1, T'_n + T_{n+1}; n \in \mathbb{Z}\}$, et sa fonction de renou-

vement est

$$\begin{aligned} m_1(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} F_{T_1} * F_{T_2+T_1}^{*(n-1)}(t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} F_{T_1}^{*(n)}(t) * F_{T_1}^{*(n-1)}(t) \end{aligned}$$

- $\{N_2(t); t \geq 0\}$ est un processus de renouvellement ordinaire généré par la suite des temps $\{T_n + T'_n; n \in \mathbb{Z}\}$, et sa fonction de renouvellement est

$$m_2(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_{T_1 T'_1}^{*(n)}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_{T_1}^{*(n)} * F_{T'_1}^{*(n)}(t)$$

- › **Proposition 1 :** Supposons que T_n est indépendant de $T'_n, \forall n \in \mathbb{N}$ et soit $p_i(t)$ la probabilité que le processus de renouvellement alterné soit dans l'état i au temps t , $i = 1, 2$. Alors,

$$p_1(t) = m_2(t) - m_1(t) + 1 = 1 - p_2(t)$$

- › **Proposition 2 :** Avec les mêmes hypothèses qu'à la proposition 1, on a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_1(t) = \frac{E[T_1]}{E[T_1] + E[T'_1]} = 1 - \lim_{t \rightarrow \infty} p_2(t)$$

Application : somme de renouvellements avec réclamations escomptées

- › On considère le processus des réclamations escomptées à $t = 0$, soit $\{Z(t); t \geq 0\}$, défini par

$$Z(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} e^{-\delta S_k} X_k$$

où

- $\{N(t); t \geq 0\}$ un processus de renouvellement ordinaire;
- S_k est le moment où se produit la k^e réclamation;
- La suite $\{X_n; n \in \mathbb{Z}\}$ de v.a. iid et indépendantes de $N(t)$ représentant les montants de réclamations;
- δ est la force d'intérêt appliquée pour actualiser les réclamations.
- › Dans un processus de renouvellement ordinaire, on a, pour $k = 1, 2, \dots, n$,

$$f_{S_k|N(t)}(x|n) = f_{S_k}(x) \frac{\Pr(N(t-x) = n-k)}{\Pr(N(t) = n)}$$

- › On peut calculer le premier moment du processus des réclamations escomptées $\{Z(t); t \geq 0\}$:

$$E[Z(t)] = E[X] \int_0^t e^{-\delta x} dm(x)$$

où $m(t)$ est la fonction de renouvellement du processus de renouvellement $\{N(t); t \geq 0\}$.

5 Mouvement Brownien

Définitions

Définition générale

Un processus stochastique $\{X(t); t \geq 0\}$ est dit être un mouvement Brownien avec paramètre de variance σ^2 si

- (1) $X(0) = 0$;
- (2) $\{X(t); t \geq 0\}$ a des accroissements indépendants et stationnaires;
- (3) $\forall t > 0, X(t) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 t)$.

Note : on appelle aussi σ le paramètre de volatilité ou coefficient de diffusion. Un mouvement Brownien est dit standard si $\sigma = 1$.

Proposition 1

Considérons un mouvement Brownien standard. Alors, $\forall 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$, on a

$$f_{X_1(t_1), \dots, X_n(t_n)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x_1^2}{t_1} + \frac{(x_2 - x_1)^2}{t_2 - t_1} + \dots + \frac{(x_n - x_{n-1})^2}{t_n - t_{n-1}} \right)}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} (t_1 (t_2 - t_1) \dots (t_n - t_{n-1}))}$$

Proposition 2

Considérons un mouvement Brownien standard. Alors, $\forall 0 < s < t, X(s)|X(t)$ obéit à une loi normale, tel que

$$E[X(s)|X(t) = x] = \frac{s}{t}x$$

$$\text{Var}(X(s)|X(t) = x) = \frac{s}{t}(t-s)$$

Temps d'atteinte d'une barrière

- › Soit T_a le premier moment où le mouvement Brownien standard atteint le niveau a . Alors,

$$\Pr(T_a \leq t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{|a|/\sqrt{t}}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

- › On peut trouver la distribution de la valeur maximale que peut prendre $\{X(s); 0 \leq s \leq t\}$, telle que

$$\Pr\left(\max_{0 \leq s \leq t} X(s) \geq a\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{a/\sqrt{t}}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Variations sur le mouvement Brownien

Mouvement Brownien avec dérive

Un mouvement Brownien avec dérive (*drifted*) a exactement la même définition qu'un mouvement Brownien standard, à l'exception que

$$X(t) \sim \mathcal{N}(\mu t, \sigma^2 t)$$

où μ est le paramètre de dérive. Note : on a donc que $X(t) = \mu t + \sigma B(t)$, où $B(t)$ est un mouvement Brownien standard.

Mouvement Brownien géométrique

Définition

Soit $\{X(t); t \geq 0\}$ un mouvement Brownien brownien avec dérive μ et volatilité σ . Alors, le processus $\{X(t); t \geq 0\}$ défini par

$$X(t) = e^{Y(t)}$$

est dit être un mouvement Brownien géométrique.

Proposition : Soit $\{X(t); t \geq 0\}$ un mouvement Brownien géométrique avec dérive μ et volatilité σ . Alors,

$$E[X(t)|X(u)] = X(s)e^{(t-s)(\mu + \frac{\sigma^2}{2})}$$

pour $0 \leq u \leq s \leq t$.

Pont Brownien

Processus Gaussien



Un processus stochastique $\{X(t); t \geq 0\}$ est dit être un processus Gaussien si, $\forall 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$, $X(t_1), \dots, X(t_n)$ a une distribution normale multivariée.

Définition alternative d'un mouvement Brownien standard



Un processus $\{X(t); t \geq 0\}$ est un mouvement Brownien standard ssi

- (1) $\{X(t); t \geq 0\}$ est un processus Gaussien;
- (2) $\forall t > 0, E[X(t)] = 0$, avec $X(0) = 0$;
- (3) $\forall 0 \leq s \leq t$, on a $\text{Cov}(X(s), X(t)) = s$.

Définition d'un pont Brownien



Soit $\{X(t); t \geq 0\}$ un mouvement Brownien standard. Alors, le processus conditionnel $\{X(t); 0 \leq t \leq 1 | X(1) = 0\}$ est dit être un *pont* Brownien. De plus, on a

$$E[X(t) | X(1) = 0] = 0$$

Et, pour $s < t < 1$,

$$\text{Cov}(X(s), X(t) | X(1) = 0) = s(1 - t).$$

Une autre condition pour déterminer si le processus $\{Z(t); t \geq 0\}$ est un pont Brownien est de vérifier que l'équation suivante est respectée

$$Z(t) = X(t) - tX(1)$$

Définition de l'Intégrale d'Itô



Soit $\{X(t); t \geq 0\}$ un mouvement Brownien standard et une fonction f est une dérivée continue. Alors, nous définissons l'intégrale stochastique d'Itô comme

$$\int_a^b f(t) dX(t) = f(b)X(b) - f(a)X(a) - \int_a^b X(t) df(t)$$

Définition du mouvement Brownien intégré



Si $\{X(t); t \geq 0\}$ un mouvement Brownien standard, alors le processus $\{Z(t); t \geq 0\}$ défini par (en utilisant l'intégrale d'Itô)

$$Z(t) = \int_0^t X(s) ds = tX(t) - \int_0^t v dX(v)$$

Proposition 2

L'espérance et la variance de $\int_a^b f(t) dX(t)$ sont respectivement

$$E \left[\int_a^b f(t) dX(t) \right] = 0$$

$$\text{Var} \left(\int_a^b f(t) dX(t) \right) = \int_a^b f(t)^2 dt$$

Proposition 3

Le mouvement Brownien intégré (tout comme le mouvement Brownien standard) obéit à une loi Normale. En combinant avec les hypothèses de la proposition 2, on a

$$\int_a^b f(t) dX(t) \sim \mathcal{N} \left(0, \int_a^b f(t)^2 dt \right)$$

et

$$\int_a^b X(t) df(t) \sim \mathcal{N} \left(0, a(f(b) - f(a))^2 + \int_a^b (f(b) - f(t))^2 dt \right)$$

Mouvement Brownien intégré