

## 1 Probabilités conditionnelles

### À 2 variables aléatoires

› Distribution conditionnelle :

$$\Pr(X_1 = x_1 | X_2 = x_2) = \frac{\Pr(X_1 = x_1, X_2 = x_2)}{\Pr(X_2 = x_2)}$$

› L'espérance d'une fonction conditionnelle :

$$E[g(X_1) | X_2 = x_2] = \sum_{i=0}^{\infty} g(x) \Pr(X_1 = x_1 | X_2 = x_2)$$

› La variance d'une fonction conditionnelle :

$$\text{Var}(g(X_1) | X_2) = E[g(X_1)^2 | X_2] - E[g(X_1) | X_2]^2$$

› L'espérance conditionnelle :

$$E[X_1] = E[E[X_1 | X_2]] = \sum_{x_2=0}^{\infty} E[X_1 | X_2] \Pr(X_2 = x_2)$$

$$E[X_1] = E[E[X_1 | X_2]] = \int_{-\infty}^{\infty} E[X_1 | X_2] f_{X_2}(x_2) dx_2$$

› La variance conditionnelle :

$$\text{Var}(X_1) = E[\text{Var}(X_1 | X_2)] + \text{Var}(E[X_1 | X_2])$$

Lorsqu'il y a 3 v.a., l'espérance devient

$$\begin{aligned} E[X_1 | X_2] &= E[E[X_1 | X_2, X_3] | X_2] \\ &= \sum_{x_3=0}^{\infty} E[X_1 | X_2, X_3] \Pr(X_3 = x_3 | X_2 = x_2) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} E[X_1 | X_2, X_3] f_{X_3 | X_2}(x_3 | x_2) dx_3 \end{aligned}$$

Et la variance conditionnelle devient

$$\text{Var}(X_1) = E[\text{Var}(X_1 | X_2, X_3)] + \text{Var}(E[X_1 | X_2, X_3])$$

### Poisson composée

› Soit  $S = X_1 + \dots + X_N$ , où les  $X_i$  sont iid,  $N \sim \text{Pois}(\lambda)$  est stochastiquement indépendant des  $X_i$ . Alors, on a

$$E[Sh(S)] = \lambda E[Xh(S + X)]$$

› On peut aussi trouver que

$$E[S^n] = \lambda \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} E[S^j] E[X^{n-j}]$$

### Mesures de risque

› Value-At-Risk (VaR) : représente le quantile au niveau  $\kappa$  de  $X$ .

$$\text{VaR}_{\kappa}(X) = F_X^{-1}(\kappa) = \inf\{x \geq 0 : F_X(x) \geq \kappa\}$$

› Tail Value-At-Risk (aussi appelée *Conditional Tail Expectation*) : représente la perte moyenne de  $X$ , sachant qu'elle est au dessus de la valeur  $\text{VaR}_{\kappa}(X)$ .

$$\begin{aligned} \text{TVaR}_{\kappa}(X) &= E[X | X > \text{VaR}_{\kappa}(X)] \\ &= \int_0^{\infty} x f_{X|X > \text{VaR}_{\kappa}(X)}(x) dx \\ &= \int_{\text{VaR}_{\kappa}(X)}^{\infty} \frac{x f_X(x)}{\bar{F}_X(\text{VaR}_{\kappa}(X))} dx \\ &= \frac{1}{1 - \kappa} \int_{\text{VaR}_{\kappa}(X)}^{\infty} x f_X(x) dx \end{aligned}$$

## 2 Chaînes de Markov

### Définition

Une chaîne de Markov est homogène si

$$\Pr(X_{n+1} = j | X_n = i, \dots, X_0 = i_0) = \Pr(X_{n+1} = j | X_n = i) = p_{ij}$$

On définit la matrice des probabilités de transition

$$P = [p_{ij}]_{i \times j}$$

### Équation de Chapman-Kolmogorov

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(n)} &= \Pr(X_{k+n} = j | X_k = i) \\ p_{ij}^{(n+m)} &= \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)} \end{aligned}$$

Note : soit  $P$  la matrice des probabilités de transition. On peut trouver  $p^{(n+m)} = p^{(n)} \cdot p^{(m)}$ , avec  $p^{(n)} = p^n = P \cdot P \cdot P \dots \cdot P$ .

$$\begin{aligned} \Pr(X_n = j) &= \sum_{i=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} p_{x_0}(i) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \Pr(X_n = j | X_0 = i) \Pr(X_0 = i) \end{aligned}$$

### États accessibles et communicants

- ›  $j$  est accessible de  $i$  si  $p_{ij}^{(n)} > 0$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ .
- › si  $i$  et  $j$  sont accessibles réciproquement ( $i \leftrightarrow j$ ), alors ils sont **communicants**. Ils forment donc une classe (ainsi que les autres états communicants).
- › Une chaîne de Markov est dite irréductible si elle est composée d'une seule classe.

### Propriété d'une classe

- ✓ Réflexibilité :  $p_{ii}^{(0)} = 1$ .
- ✓ Symétrie :  $i \leftrightarrow j$  est équivalent à  $j \leftrightarrow i$ .
- ✓ Transitivité : si  $i$  communique avec  $j$  (i.e.  $p_{ij}^{(n)} > 0$ ) et que  $j$  communique avec  $k$  (i.e.  $p_{jk}^{(m)} > 0$ ), alors

$$p_{ik}^{(n+m)} = \sum_{r=0}^{\infty} p_{ir}^{(n)} p_{rk}^{(m)} \geq p_{ij}^{(n)} p_{jk}^{(m)} > 0$$

### États récurrents, transients et absorbants

- ›  $f_{ii}$  : probabilité de revenir éventuellement à l'état  $i$  en ayant comme point de départ  $i$ .

- Si  $f_{ii} = 1$ ,  $i$  est récurrent. Si  $f_{ii} < 1$ , alors  $i$  est transcient.
- Aussi, si  $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$ , alors  $i$  est récurrent. Sinon, il est transcient.
- Si l'état  $i$  est récurrent et que  $i \leftrightarrow j$ , alors  $j$  est récurrent aussi.
- $f_{ii}^{(n)}$  : probabilité de revenir à l'état  $i$  pour la première fois après  $n$  étapes.
- Une chaîne de Markov irréductible avec espace d'état fini n'a que des états récurrents.
- État absorbant** :  $j$  est un état absorbant si  $p_{jj} = 1$ . De plus, Si  $j$  est un état absorbant, alors

$$f_{ij} = \sum_{k=0}^m p_{ik} f_{kj}$$

### Probabilité limites

- État périodique** : si l'état a une période  $d$ , alors il sera possible de revenir à cet état après  $n$  étapes, qui est un multiple de  $d$ . i.e

$$d(i) = P.G.C.D\{n \in \mathbb{N} \mid p_{ii}^{(n)} > 0\}$$

- si  $d(i) = 1$ , alors l'état  $i$  est **apériodique**.
- La périodicité est une propriété de classe : si  $i \leftrightarrow j$ , alors  $d(i) = d(j)$ .
- Le temps de retour moyen pour l'état  $i$  est défini par

$$\mu_{ii} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)}$$

- État récurrent positif** : si, à partir de l'état  $i$ , le temps de retour moyen  $\mu_{ii}$  à l'état  $i$  est fini, alors l'état  $i$  est récurrent positif.
- État ergodique** : un état qui est à la fois apériodique et récurrent positif.
- Si une Chaîne de Markov est irréductible et que tous ses états sont ergodiques, alors

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j < \infty$$

$$(2) \pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i p_{ij}$$

$$(3) \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1$$

- On peut alors résoudre un système d'équations pour trouver nos  $\pi_i$ .

## 3 Processus de Poisson

Soit  $N(t)$  le nombre d'événements qui se sont produits dans l'intervalle  $t$ .

### Définitions

#### Définition 1

Un processus de dénombrement  $\{N(t); t \geq 0\}$  est dit un processus de Poisson avec  $\lambda > 0$  ssi

- $N(0) = 0$
- Le processus a des accroissements indépendants, i.e pour  $0 \leq t_1 \leq t_2 < t_3$ , les accroissements  $(N(t_3) - N(t_2))$  et  $(N(t_2) - N(t_1))$  sont stochastiquement indépendants.
- $\forall t, (N(s+t) - N(s)) \sim \text{Pois}(\lambda t)$ . Alors,

$$\Pr(N(s+t) - N(s) = n) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}$$

#### Définition 2

Un processus de dénombrement  $\{N(t); t \geq 0\}$  est dit un processus de Poisson avec  $\lambda > 0$  ssi

- $N(0) = 0$
- a des accroissements indépendants et stationnaires
- $\Pr(N(h) = 1) = \lambda h + o(h)$
- $\Pr(N(h) \geq 2) = o(h)$

Avec  $o(h)$  une fonction où  $f(h) = o(h)$  si  $\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{f(h)}{h} = 0$ .

On peut prouver que ces 2 définitions sont équivalentes.

### Temps séparant 2 événements successifs

- Soit  $T_i$  le temps entre le  $(i-1)^e$  et le  $i^e$  événement.
- Alors,  $T_n \sim \text{Exp}(\lambda)$ .
- Soit  $S_n$  le moment où se produit le  $i^e$  événement. On a

$$S_n = \sum_{i=1}^n T_i$$

- On peut facilement prouver que  $S_n \sim \Gamma(n, \lambda)$ .
- Si  $N(t) \geq n$ , alors nécessairement  $S_n \leq t$ .

### Processus de Poisson avec événements de type I et II

- Soit un Processus de Poisson  $\{N(t); t \geq 0\}$  où il peut y avoir un événement de type I avec probabilité  $p$  ou un de type II avec probabilité  $q$ .

- Nécessairement, on a

$$N(t) = N_1(t) + N_2(t)$$

Avec  $N_1(t)$  et  $N_2(t)$  qui sont stochastiquement indépendants.

- $N_i(t) \sim \text{Pois}(\lambda p_i t)$ , où  $p_i$  est la probabilité que l'événement de type  $i$  se produise.

### Distribution conditionnelle des temps d'occurrence

Pour un processus de Poisson  $\{N(t); t \geq 0\}$ , la distribution conditionnelle des temps d'occurrence  $S_1, \dots, S_n$  sachant que  $N(t) = n$  est définie par

$$f_{S_1, \dots, S_n | N(t)}(s_1, \dots, s_n | n) = \frac{n!}{t^n}$$

pour  $0 < s_1 < \dots < s_n$ .