3 Processus de Poisson

Processus de Poisson non-homogène

Définition

Un processus de dénombrement $\{N(t); t \geq 0\}$ est dit être un processus de Poisson non-homogène avec fonction d'intensité $\lambda(t)$ si

(1) $N(0) = 0$;

(2) $\{N(t); t \geq 0\}$ a des accroissements indépendants;

(3) $\Pr(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda(t)h + o(h)$;

(4) $\Pr(N(t+h) - N(t) \geq 2) = o(h)$ où $o(h)$ est une fonction négligeable.

Proposition 1

$$\Pr(N(t+s) - N(t) = n) = \frac{(m(t+s) - m(s))^n}{n!} e^{-(m(t+s)-m(s))}$$

où $m(t) = \int_0^t \lambda(x)dx$. On a alors que

$$N(t+s) - N(s) \sim Pois(m(t+s) - m(s))$$

Proposition 2

Si S_n désigne le temps d'occurence du n^e évènement, alors

$$f_{S_n}(t) = \lambda(t) \frac{m(t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-m(t)}$$

Proposition 3

Si $T_n = S_n - S_{n-1}$, alors on a, pour $n \geq 2$,

$$f_{T_n}(t) = \frac{1}{(n-2)!} \int_0^\infty \lambda(s)\lambda(t+s)m(s)^{n-2} e^{-m(t+s)} ds$$

Processus de Poisson composé

Définition

Un processus stochastique $\{N(t); t \geq 0\}$ est dit être un processus de Poisson composé s'il peut être représenté comme suit :

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$$

où $\{N(t); t \geq 0\}$ est un Processus de Poisson avec paramètre $\lambda > 0$ et $\{Y_i; i \in \mathbb{N}\}$ est une suite de v.a. *iid* indépendantes de $N(t)$.

Proposition 1

Soit $\{X(t); t \geq 0\}$ un processus de Poisson composé avec paramètre $\lambda > 0$ et supposons que $\Pr\left(Y_i = \alpha_j\right) = p_j, \sum p_j = 1$. Alors,

$$X(t) = \sum_j \alpha_j N_j(t)$$

où $N_j(t)$ est le nombre de fois que se produit l'évènement α_j dans l'intervalle de temps $[0, t]$, et $\{N(t); t \geq 0\}$ forme une suite de v.a. indépentantes telles que $N_j(t) \sim Pois(\lambda p_j t$.

Lorsque $t \to \infty$, alors $X(t)$ est asymptotiquement normal, i.e.

$$X(t) \sim \mathcal{N}\left(\lambda t \mathrm{E}[Y], \lambda t \mathrm{E}\left[Y^2\right]\right)$$

Proposition 2

Si $\{X(t); t \geq 0\}$ et $\{Y(t); t \geq 0\}$ sont 2 processus de Poisson composés indépendants avec paramètres et fonctions de répartition λ_1, F_{X_1} et λ_2, F_{Y_1} respectivement, alors $\{X(t) + Y(t); t \geq 0\}$ est aussi un processus de Poisson composé avec paramètre $\lambda_1\lambda_2$ et fonction de répartition $F_{X_1+Y_1}$ telle que

$$F_{X_1+Y_1} = \frac{\lambda_1 F_{X_1} + \lambda_2 F_{Y_1}}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

Processus de Poisson conditionnel

Définition

Un processus de dénombrement avec un taux aléatoire $\Lambda > 0$ est un processus de Poisson conditionnel si $\{N(t)|\Lambda = \lambda; t \geq 0\}$ est un processus de Poisson avec taux $\lambda > 0$.

Rappel sur la loi Gamma

La fonction de répartition de la loi Gamma, lorsque $\alpha \in \mathbb{Z}$, est définie par

$$F_X(x) = 1 - \sum_{k=1}^{\alpha-1} \frac{(\lambda x)^k e^{-\lambda x}}{k!}$$

Remarques importantes

(1) Un processus de Poisson conditionnel a des accroissements stationnaires (i.e. l'accroissement ne dépend pas d'où on est, mais plutôt de l'intervalle de temps);

(2) Mais le processus de Poisson conditionnel n'a pas nécessairement des accroissements indépendants;

(3) Identité Poisson-Gamma : si on a $\Lambda \sim \Gamma(m, \theta)$, alors [1]

$$N(t) \sim NB\left(r = m, p = \frac{\theta}{\theta + t}\right)$$

(4) L'espérance et la variance d'un processus de Poisson conditionnel sont définies par

$$\mathrm{E}[N(t)] = t\mathrm{E}[\Lambda]$$
$$\mathrm{Var}(N(t)) = t\mathrm{E}[\Lambda] + t^2 \mathrm{Var}(\Lambda)$$

(5) En utilisant le théorème de Bayes, on peut trouver la fonction de répartition $F_{\Lambda|N(t)}(x|n)$ et fonction de densité $f_{\Lambda|N(t)}(x|n)$ telles que

$$\begin{aligned} F_{\Lambda|N(t)}(x|n) &= \frac{\Pr(\Lambda \leq x|N(t) = n)}{\Pr(N(t) = n)} \\ &= \frac{\Pr(N(t) = n|\Lambda) f_\Lambda(\lambda)d\lambda}{\int_0^\infty \Pr(N(t) = n|\Lambda = \lambda) f_\Lambda(\lambda)d\lambda} \end{aligned}$$

1. Être capable de faire cette démonstration pour l'examen

(6) On a, $\forall t > 0$,

$$\Pr\left(N(t) > n\right) = \int_0^\infty \overline{F}_\Lambda\left(\frac{x}{n}\right)\frac{x^n}{n!}e^{-x}dx$$

4 Processus de renouvellement

Définitions générales

- T_n : intervalle de temps entre le $(n-1)^{e}$ et le n^{e} renouvellement ;
- $S_n = \sum_{i=1}^n T_i$: le temps d'occurence du n^{e} renouvellement. On va souvent noter $S_{N(t)}$, avec $N(t)$ comme temps d'arrêt du processus [2] ;
- $\mu = \mathrm{E}\left[T_i\right]$: temps moyen d'attente entre 2 renouvellements ;

Distribution de $N(t)$

On définit $N(t)$ comme $N(t) = \max\{n : S_n \leq t\}$. Alors,

$$\Pr\left(N(t) = n\right) = F_T^{*n}(t) - F_T^{*(n+1)}(t)$$

Dans le cas où $T \sim Erlang(m, \lambda)$, alors

$$\Pr\left(N(t) = n\right) = \sum_{k=mn}^{m(n+1)-1} \frac{(\lambda x)^k e^{-\lambda x}}{k!}$$

Fonction de renouvellement

La fonction de renouvellement est le nombre moyen d'occurences dans l'intervalle $[0, t]$:

$$m(t) = \mathrm{E}\left[N(t)\right] = \sum_{n=1}^\infty F_T^{*(n)}(t)$$

Solution de l'équation de renouvellement

$m(t)$ satisfait *l'équation de renouvellement*, soit

$$m(t) = F_T(t) + \int_0^t m(t-x) f_T(x) dx$$

Relation biunivoque entre $m(t)$ et F_T

Avec la transformée de Laplace de $m(t)$, $\hat{m}(s)$, on a

$$\begin{aligned}\hat{m}(s) &= \frac{\hat{f}_T(s)}{s} + \hat{m}(s)\hat{f}_T(s) \\ &= \frac{\hat{f}(s)}{s\left(1 - \hat{f}(s)\right)}\end{aligned}$$

Théorèmes limites

(1) On a que $N(\infty) = \infty$ avec probabilité 1. De plus,

$$\frac{N(t)}{t} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\mu}$$

i

(2)

Distribution de $S_{N(t)}$

On peut définir la fonction de répartition et l'espérance de $S_{N(t)}$ comme

$$F_{S_{N(t)}} = \overline{F}_T(t) + \int_0^\infty$$

2. $N(t)$ est le temps d'arrêt dans le sens où on cesse le processus de dénombrement lorsqu'on atteint $N(t)$.