Integración: Simpson

$f(x) = x^2\ cos\ x,\ \ x \in [1, 3]$

Adrián R. Mendióroz Morales
Roberto C. Palenzuela Criado

Grupo 2

Técnicas Experimentales. 1^{er} *curso.* 2^{do} *semestre*

Lenguajes y Sistemas Informáticos

Facultad de Matemáticas

Universidad de La Laguna

La Laguna, 8 de mayo de 2013

Índice general

1. Motivación y objetivos **1**
1.1. Objetivo principal 1

2. Fundamentos teóricos **2**
2.1. Integración Numérica. Regla de Simpson. 2
2.2. Regla de Simpson 3
2.3. Regla de Simpson Compuesta 4

3. Procedimiento experimental **6**
3.1. Descripción de los experimentos 6
3.1.1. Cálculo del valor de la integral definida 6
3.1.2. Aproximación por la Regla de Simpson 7
3.1.3. Aproximación por la Regla de Simpson Compuesta 7
3.1.4. Comparativa de Resultados 7
3.2. Descripción del material 7
3.3. Resultados obtenidos 7
3.4. Análisis de los resultados 8

4. Conclusiones **9**

A. Título del Apéndice 1 **11**
A.1. Algoritmo XXX 11
A.2. Algoritmo YYY 11

B. Título del Apéndice 2 **12**
B.1. Otro apendice: Seccion 1 12
B.2. Otro apendice: Seccion 2 12

Bibliografía **12**

Índice de figuras

2.1. Descripción gráfica de la regla de Simpson 3

3.1. Ejemplo de figura 8

Índice de cuadros

3.1. Resultados experimentales de tiempo (s) y velocidad (m/s) 8

Capítulo 1

Motivación y objetivos

Como finalidad de la asignatura de Técnicas Experimentales del Grado en Matemáticas se debe saber aplicar conocimientos en el área de las Matemáticas de una forma profesional y poseer las competencias que suelen demostrarse por medio de la elaboración y defensa de argumentos y la resolución de problemas.

1.1. Objetivo principal

Los matemáticos suelen encontrarse con el problema de integrar funciones que no están definidas de forma explícita. Se pueden utilizar métodos gráficos, pero los métodos numéricos son mucho más precisos.

El objetivo de este proyecto es investigar sobre el método numérico La Regla de Simpson y aplicarlo sobre la función determinada: $f(x) = x^2\ cos\ x,\ x \in [1, 3]$

Capítulo 2

Fundamentos teóricos

La integración numérica consiste en encontrar una buena aproximación al área bajo la curva que representa una función $f(x)$, que ha sido determinada a partir de datos experimentales o a partir de una expresión matemática.
Los métodos más comunes de integración numérica son:

- La Regla del Trapecio.
- La Regla de Simpson.

Son conocidas como Fórmulas de Cuadratura de Newton-Cotes, y consisten en reemplazar una función complicada con una función aproximada que sea más sencilla de integrar.

2.1. Integración Numérica. Regla de Simpson.

Una forma de obtener una aproximación adecuada de una integral es usar polinomios de grado superior para unir los puntos y aproximar la función real.

El método de Simpson, a diferencia de la Regla del Trapecio, intenta no recurrir en un mayor número de subdivisiones; se trata de ajustar una curva de orden superior en lugar de una línea recta como en la Regla del Trapecio.

La metodología será la siguiente: Sea una función $f(x)$, si $f(a) \neq f(b)$ entonces existe un punto intermedio $f(c)$ por el que se puede ajustar una parábola que una $f(a)$ y $f(b)$.

En la FIGURA 1 se muestra la representación gráfica de la función real $f(x)$ y la parábola que aproxima a dicha función entre $f(a)$ y $f(b)$. La integral que se desea calcular es el área bajo la parábola que une los puntos. La Regla de Simpson no es más que las fórmulas resultantes de tomar integrales bajo estos polinomios.

Figura 2.1: Descripción gráfica de la regla de Simpson

2.2. Regla de Simpson

Utilizando una interpolación polinomial de segundo orden que aproxima a la función integrando $f(x)$ entre los puntos a y b, se desea aproximar la integral:

FORMULA 1
La interpolación polinomial que se busca es un polinomio de Lagrange de orden 2, $P_2(x)$, tal que, siendo FORMULA 3

FORMULA 4
Sustituyendo en la integral que se quiere calcular, se obtiene:

FORMULA 5
Se toma:

FORMULA 6
Se despeja b de forma que:

FORMULA 7
Se sustituye la expresión $(a-c)(a-b)$ de la siguiente forma:

FORMULA 8
Obteniéndose así que:

FORMULA 9
Realizando un cambio de variable tal que $u = x - a$:

FORMULA 10
De la misma forma:

FORMULA 11
De lo que se obtiene que:

FORMULA 12
Análogamente se deduce que:

FORMULA 13
Por tanto, se tiene que:

FORMULA 14
Recordando que la expresión FORMULA 15 , la expresión anterior se puede expresar como:

FORMULA 16
A esta ecuación se le conoce como Regla de Simpson, y al aproximar tiene un error asociado tal que:

FORMULA 17
Donde FORMULA 18 y ξ pertenece al intervalo $[a, b]$.

Se observa que el error es proporcional a la cuarta derivada, de lo que se sigue que el método de Simpson obtiene soluciones exactas para ecuaciones de tercer grado o inferior.

2.3. Regla de Simpson Compuesta

En casos donde la Regla de Simpson devuelva un error elevado debido a la excesiva amplitud del intervalo $[a, b]$, se utiliza una variación de la Regla de Simpson conocida como Regla de Simpson compuesta, que consiste en dividir el intervalo $[a, b]$ en n (par) subintervalos iguales de longitud FORMULA 19 , de tal manera que:

FORMULA 20
Dividiendo la integral en n subintervalos:

FORMULA 21
Aplicando la Regla de Simpson a cada subintervalo ($x_i = a + ih; i = 0, 1, 2, \ldots, n$) se sigue que, para cada $[x_{j-1}, x_{j+1}]$ donde $j = 1, 3, 5, \ldots, n-1$, se obtiene que:

FORMULA 22
Con lo que, recordando que FORMULA 23 , la suma de las integrales de todos los subintervalos da como resultado:

FORMULA 24

Ecuación a la que se conoce como Regla de Simpson Compuesta, cuyo error se puede acotar tal que:

FORMULA 25

Capítulo 3

Procedimiento experimental

3.1. Descripción de los experimentos

En este apartado se explicará el procedimiento que se ha seguido para la resolución de la integral definida de la función $f(x) = x^2 \; cos \; x$ en el intervalo acotado $[1, 3]$ utilizando el segundo teorema fundamental del cálculo integral (o Regla de Barrow) para calcular fácilmente el valor de la integral definida a partir de cualquiera de las primitivas de la función.

Una vez obtenido el valor de la integral de la función, se procederá a la aplicación de la Regla de Simpson para obtener una aproximación de dicha integral y comparar así ambos resultados.

3.1.1. Cálculo del valor de la integral definida

A continuación se detallarán los pasos seguidos para obtener el valor exacto de la integral definida.

Se quiere calcular:

$$\int_1^3 x^2 \; cos \; x \; \mathrm{d}x$$

Primero se resuelve la integral indefinida aplicando el método de integración por partes ($\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u$) tal que:

$$u = x^2, \quad \mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}v = cos \; x\mathrm{d}x, \quad v = sen \; x$$

Con lo que se obtiene:

$$\int x^2 \; cos \; x \; \mathrm{d}x = x^2 sen \; x - \int 2x sen \; x\mathrm{d}x =$$

Empleando de nuevo la integración por partes:

$$u = 2x, \quad \mathrm{d}u = 2\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}v = sen\ x\mathrm{d}x, \quad v = -cos\ x$$

Se sigue:

$$= x^2 sen\ x - \left[-2xcos\ x + 2\int cos\ x\ \mathrm{d}x\right] = x^2 sen\ x + 2xcos\ x - 2sen\ x =$$

$$2xcos\ x + (x^2 - 2)sen\ x \tag{3.1}$$

Por último se obtiene el valor buscado a través de la Regla de Barrow en el intervalo $[1, 3]$. Para ello se empleará el lenguaje de programación interpretado Python, a través de una función que evalúa la expresión 3.1.

3.1.2. Aproximación por la Regla de Simpson

Para el cálculo de una aproximación de la integral:

$$\int_1^3 x^2\ cos\ x\ \mathrm{d}x$$

se emplea el lenguaje Python implementando una función que recibe por parámetros la expresión a estudiar y lo extremos del intervalo donde se va a calcular, devolviendo la aproximación buscada. (Ver Apéndice 1).

3.1.3. Aproximación por la Regla de Simpson Compuesta

Para un mejor análisis de los resultados, se repite el estudio aplicando la Regla de Simpson Compuesta, implementando una función en Python que recibe por parámetros la expresión a estudiar. los extremos del intervalo y el número de subintervalos en los que se ha dividido, devolviendo la aproximación buscada. (Ver Apéndice 1)

3.1.4. Comparativa de Resultados

Para finalizar el experimento se realiza una comparativa de las aproximaciones obtenidas a través de la Regla de Simpson con el valor exacto de la función $f(x)$ objeto de estudio en el intervalo dado.

Como puede verse en el Apéndice 2, se implementa un programa en Python que muestra por pantalla los errores absolutos y relativos de cada experimento.

3.2. Descripción del material

3.3. Resultados obtenidos

bla, bla, etc.

Figura 3.1: Ejemplo de figura

Tiempo (± 0.001 s)	**Velocidad (± 0.1 m/s)**
1.234	67.8
2.345	78.9
3.456	89.1
4.567	91.2

Cuadro 3.1: Resultados experimentales de tiempo (s) y velocidad (m/s)

3.4. Análisis de los resultados

bla, bla, etc.

Capítulo 4

Conclusiones

bla, bla, bla, etc.

Apéndice A

Título del Apéndice 1

A.1. Algoritmo XXX

```
##################################################################################
# Fichero .py
##################################################################################
#
# AUTORES
#
# FECHA
#
# DESCRIPCION
#
##################################################################################
```

A.2. Algoritmo YYY

```
/###################################################################################
 # Fichero .h
 ###################################################################################
 #
 # AUTORES
 #
 # FECHA
 #
 # DESCRIPCION
 #
 ##################################################################################
```

Apéndice B

Título del Apéndice 2

B.1. Otro apendice: Seccion 1

`Texto`

B.2. Otro apendice: Seccion 2

`Texto`