Integración: Simpson
$f(x) = x^2 \; cos \; x, \;\; x \in [1, 3]$

Universidad
de La Laguna

FACULTAD DE MATEMATICAS

Adrián R. Mendióroz Morales
Roberto C. Palenzuela Criado

Universidad de La Laguna

13 de mayo de 2013

Facultad de Matemáticas
Universidad de La Laguna

Índice

1. Motivación y Objetivos
2. Fundamentos Teóricos
3. Procedimiento experimental
   - Descripción de los experimentos
   - Descripción del material
   - Resultados obtenidos
   - Análisis de los resultados
4. Conclusiones

Motivación

Aprender a aplicar conocimientos matemáticos de forma profesional en la elaboración y defensa de argumentos y en la resolución de problemas.

Objetivos

- Investigar el método numérico de la Regla de Simpson.
- Aplicar la Regla de Simpson a la función $f(x) = x^2 \ cos \ x$, en el intervalo $[1, 3]$.

Fundamentos Teóricos

La necesidad de aproximar numéricamente el valor de una integral surge fundamentalmente por dos motivos:

- La dificultad o imposibilidad en el cálculo de una primitiva.
- La función a integrar sólo se conoce por una tabla de valores.

El problema básico considerado por la integración numérica es calcular una solución aproximada a la integral definida:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

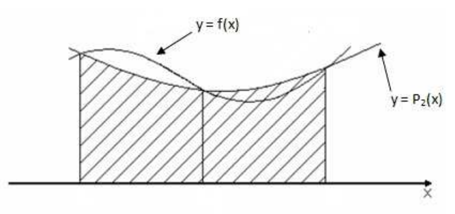
Los métodos más comunes de integración numérica son:

- La regla del Trapecio.
- La regla de Simpson.

Regla de Simpson

Se desea aproximar la integral:

$$I = \int_a^b f(x) dx$$



Fundamentos Teóricos

Regla de Simpson

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

$$\text{Error asociado: } -\frac{1}{90}(b-a)^5 f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in (a,b)$$

Regla de Simpson Compuesta

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 2\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} f(x_{2j-1}) + f(x_n) \right]$$

Error asociado: $-\dfrac{1}{180}(b-a)h^4 f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in (a, b)$

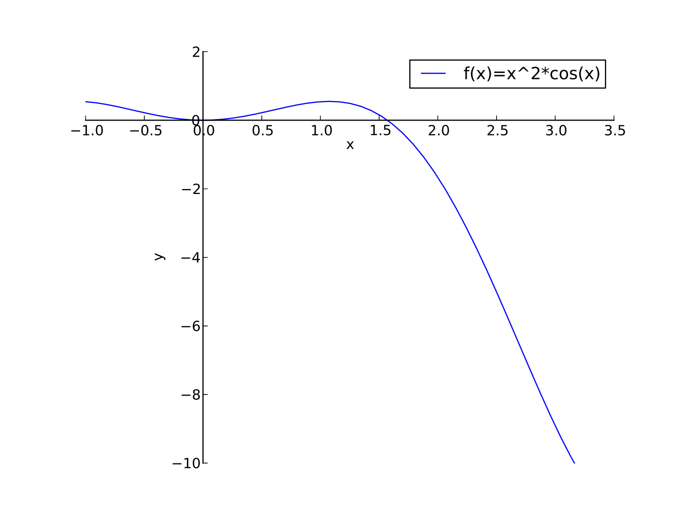
Procedimiento experimental

Descripción de los experimentos

- Representación gráfica de la función.
- Cálculo del valor exacto de la integral definida.
- Comparación gráfica.
- Aproximación por la Regla de Simpson.
- Cálculo de errores y cifras significativas.
- Aproximación por la Regla de Simpson compuesta.

Descripción de los experimentos

Representación gráfica de la función



Descripción de los experimentos

Cálculo del valor exacto de la integral definida

- $$\int_{1}^{3} x^2 \, cos \, x \, \mathrm{d}x$$

Cálculo del valor exacto de la integral definida

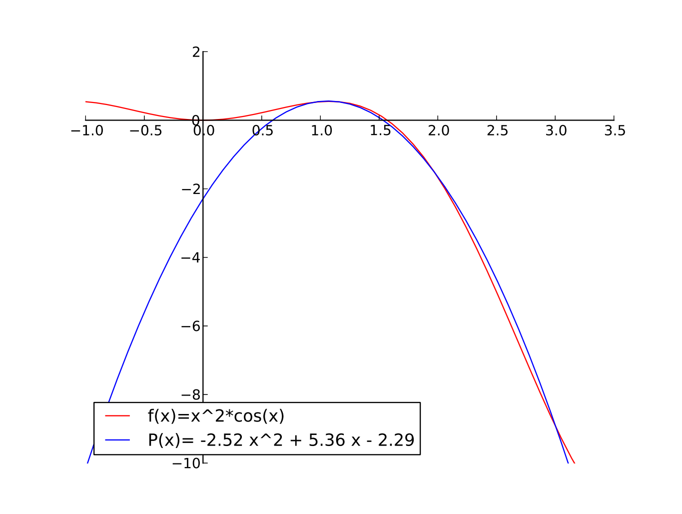
- $$\int_1^3 x^2 \, cos \; x \; \mathrm{d}x$$
- $$\int x^2 \, cos \; x \; \mathrm{d}x = 2xcos \; x + (x^2 - 2)sen \; x + C = F(x) + C$$

Descripción de los experimentos

Cálculo del valor exacto de la integral definida

- $$\int_1^3 x^2 \, cos \; x \, \mathrm{d}x$$
- $$\int x^2 \, cos \; x \, \mathrm{d}x = 2x cos \; x + (x^2 - 2) sen \; x + C = F(x) + C$$
- $$\int_1^3 x^2 \, cos \; x \, \mathrm{d}x = F(3) - F(1)$$

Comparación Gráfica



Procedimiento experimental

Aproximación por la regla de Simpson

Función:

```
def regla_simpson(f,a,b):
  return (b-a)/6.0*(f(a)+4*f((a+b)/2.0)+f(b))
```

Programa Principal:

```
from simpson import regla_simpson
from math import *
F=(2*3*cos(3)+(3**2-2)*sin(3))-(2*1*cos(1)+(1**2-2)*sin(1))
print '\nValor real= ',F
aprox=regla_simpson(lambda x:(x**2*cos(x)),1,3)
print '\nAproximacion por la regla de Simpson: ',aprox
```

Cálculo de errores y cifras significativas

$$\text{Error absoluto} = |v - v^*|$$

$$\text{Error relativo} = \frac{|v - v^*|}{|v|}$$

Siendo t el número de dígitos significativos (o cifras exactas):

$$\frac{|v - v^*|}{|v|} < 5{,}10^{-t}$$

```
print '\t\t        Error absoluto: ', abs(F-aprox)
print '\t\t        Error relativo: ', abs(F-aprox)/abs(F)
print '\t\tCifras significativas: ', int(-log10((abs(F-aprox)/abs(F))/5))
```

Aproximación por la regla de Simpson compuesta

Función:

```
def regla_simpson_compuesta(f,a,b,n):
  h=(b-a)/float(n)
  aprox=0
  for l in range(0,n):
    aprox+=regla_simpson(lambda x:(x**2*cos(x)),
    a+l*h,a+(l+1)*h)
  return aprox
```

Aproximación por la regla de Simpson compuesta

Programa Principal:

```
from simpson import regla_simpson_compuesta
from math import *
F=(2*3*cos(3)+(3**2-2)*sin(3))-(2*1*cos(1)+(1**2-2)*sin(1))
print 'Valor real= ',F
print 'Aproximacion por la regla de Simpson compuesta: '
print '%25s %15s %15s %15s' % ('Numero de subintervalos',
'Aproximacion','Error absoluto','Error relativo')
n=[2,6,10,50,100]
aprox=0
i=0
for l in n:
  aprox=regla_simpson_compuesta(lambda x:(x**2*cos(x)),1,3,l)
  print '%16d %24.10f %15.10f %15.10f' %(n[i],aprox,abs(F-aprox),
  abs(F-aprox)/abs(F))
  i=i+1
```

Descripción del material

Hardware

- CPU type: Intel(R) Atom(TM) CPU N270 @ 1.60GHz
- CPU speed: 800.000Hz
- Cache size: 512 KB

Software

En cuanto al sistema operativo, se ha utilizado "Linux-3.2.0-39-generic-i686-with-Ubuntu-12.04-precise". Los ficheros en lenguaje Python fueron realizados con el editor de textos avanzado para KDE "Kate".

Valor exacto	Aproximación
-5.19124855011	-5.0093265161

Cuadro: Aproximación de la regla de Simpson

Número de subintervalos	Aproximación
2	-5.1817934049
6	-5.1911377092
10	-5.1912342437
50	-5.1912485273
100	-5.1912485487

Cuadro: Aproximación de la regla de Simpson compuesta

Análisis de los resultados

Valor exacto	Aproximación	E. absoluto	E.relativo	C.
-5.19124855011	-5.0093265161	0.181922034015	0.0350439845558	

Cuadro: Aproximación y error de la regla de Simpson

N	Aproximación	E. absoluto	E. relativo	C. S.
2	-5.1817934049	0.0094551452	0.0018213625	3
6	-5.1911377092	0.0001108409	0.0000213515	5
10	-5.1912342437	0.0000143064	0.0000027559	6
50	-5.1912485273	0.0000000228	0.0000000044	9
100	-5.1912485487	0.0000000014	0.0000000003	10

Cuadro: Aproximación y error de la regla de Simpson compuesta

Conclusiones

1. La integración numérica reduce el cálculo del valor de la integral definida en el caso de funciones muy complejas, a simples operaciones aritméticas.

Conclusiones

1. La integración numérica reduce el cálculo del valor de la integral definida en el caso de funciones muy complejas, a simples operaciones aritméticas.
2. La Regla de Simpson simplifica el cálculo de una integral definida compleja, aproximando su valor al de la integral de un polinomio de segundo grado.

Conclusiones

1. La integración numérica reduce el cálculo del valor de la integral definida en el caso de funciones muy complejas, a simples operaciones aritméticas.
2. La Regla de Simpson simplifica el cálculo de una integral definida compleja, aproximando su valor al de la integral de un polinomio de segundo grado.
3. La Regla de Simpson es más precisa que otros métodos como la Regla del Trapecio a la hora de aproximar la integral.

Conclusiones

1. La integración numérica reduce el cálculo del valor de la integral definida en el caso de funciones muy complejas, a simples operaciones aritméticas.
2. La Regla de Simpson simplifica el cálculo de una integral definida compleja, aproximando su valor al de la integral de un polinomio de segundo grado.
3. La Regla de Simpson es más precisa que otros métodos como la Regla del Trapecio a la hora de aproximar la integral.
4. La Regla de Simpson proporciona aproximaciones exactas para polinomios de grado menor o igual a tres.

Conclusiones

1. La Regla de Simpson Compuesta proporciona aproximaciones más precisas que la Regla de Simpson.

Conclusiones

1. La Regla de Simpson Compuesta proporciona aproximaciones más precisas que la Regla de Simpson.
2. En la Regla de Simpson Compuesta, el error es inversamente proporcional al número de subintervalos.

Conclusiones

1. La Regla de Simpson Compuesta proporciona aproximaciones más precisas que la Regla de Simpson.
2. En la Regla de Simpson Compuesta, el error es inversamente proporcional al número de subintervalos.
3. En la Regla de Simpson Compuesta, el error es directamente proporcional a la amplitud del intervalo.

Bibliografía

- David Kincaid and Ward Cheney.
  Análisis Numérico. Las matemáticas del cálculo científico.
  Addison-Wesley Iberoamericana, 1994.
- Leslie Lamport.
  LaTeX: A Document Preparation System.
  Addison–Wesley Pub. Co., Reading, MA, 1986.
- ACM LaTeX Style.
  http://www.acm.org/publications/latex_style/.
- Till Tantau.
  User's guide to the beamer class.
  2010.
- Eric W. Weisstein.
  http://mathworld.wolfram.com/SimpsonsRule.html.