

Integración: Simpson

$$f(x) = x^2 \cos x, \quad x \in [1, 3]$$

Adrián R. Mendióroz Morales
Roberto C. Palenzuela Criado

Universidad de La Laguna

13 de mayo de 2013

Facultad de Matemáticas
Universidad de La Laguna

- 1 Motivación y Objetivos
- 2 Fundamentos Teóricos
- 3 Procedimiento experimental
 - Descripción de los experimentos
 - Descripción del material
 - Resultados obtenidos
 - Análisis de los resultados
- 4 Conclusiones

Aprender a aplicar conocimientos matemáticos de forma profesional en la elaboración y defensa de argumentos y en la resolución de problemas.

- Investigar el método numérico de la Regla de Simpson.
- Aplicar la Regla de Simpson a la función $f(x) = x^2 \cos x$, en el intervalo $[1, 3]$.

La necesidad de aproximar numéricamente el valor de una integral surge fundamentalmente por dos motivos:

- La dificultad o imposibilidad en el cálculo de una primitiva.
- La función a integrar sólo se conoce por una tabla de valores.

El problema básico considerado por la integración numérica es calcular una solución aproximada a la integral definida:

$$\int_a^b f(x) \, dx$$

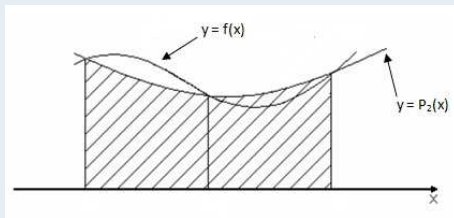
Los métodos más comunes de integración numérica son:

- La regla del Trapecio.
- La regla de Simpson.

Regla de Simpson

Se desea aproximar la integral:

$$I = \int_a^b f(x) dx$$



Regla de Simpson

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$$

$$\text{Error asociado: } -\frac{1}{90}(b-a)^5 f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in (a, b)$$

Regla de Simpson Compuesta

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} \left[f(x_0) + 2 \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2j}) + 4 \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} f(x_{2j-1}) + f(x_n) \right]$$

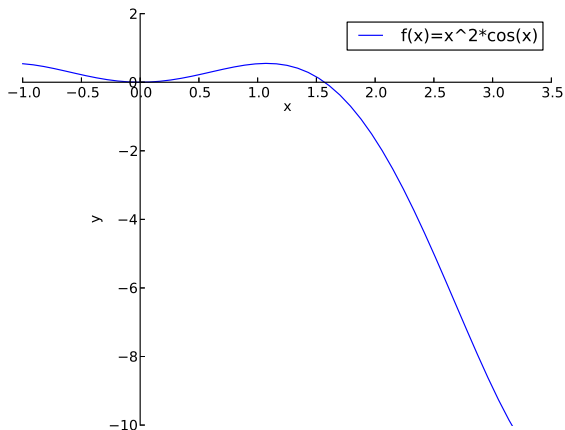
$$\text{Error asociado: } -\frac{1}{180}(b-a)h^4 f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in (a, b)$$

Descripción de los experimentos


- Representación gráfica de la función.
- Cálculo del valor exacto de la integral definida.
- Comparación gráfica.
- Aproximación por la Regla de Simpson.
- Cálculo de errores y cifras significativas.
- Aproximación por la Regla de Simpson compuesta.

Descripción de los experimentos

Representación gráfica de la función



Cálculo del valor exacto de la integral definida


$$\int_1^3 x^2 \cos x \, dx$$

Cálculo del valor exacto de la integral definida

- $$\int_1^3 x^2 \cos x \, dx$$

- $$\int x^2 \cos x \, dx = 2x \cos x + (x^2 - 2) \sin x + C = F(x) + C$$

Cálculo del valor exacto de la integral definida

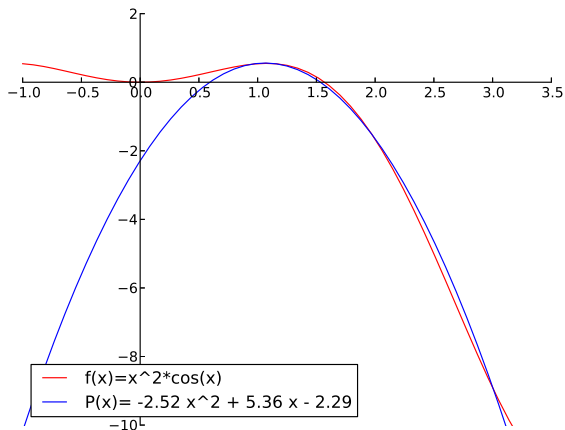
- $$\int_1^3 x^2 \cos x \, dx$$

- $$\int x^2 \cos x \, dx = 2x \cos x + (x^2 - 2) \sin x + C = F(x) + C$$

- $$\int_1^3 x^2 \cos x \, dx = F(3) - F(1)$$

Descripción de los experimentos

Comparación Gráfica



Aproximación por la regla de Simpson

Función:

```
def regla_simpson(f,a,b):  
    return (b-a)/6.0*(f(a)+4*f((a+b)/2.0)+f(b))
```

Programa Principal:

```
from simpson import regla_simpson  
from math import *  
F=(2*3*cos(3)+(3**2-2)*sin(3))-(2*1*cos(1)+(1**2-2)*sin(1))  
print '\nValor real= ',F  
aprox=regla_simpson(lambda x:(x**2*cos(x)),1,3)  
print '\nAproximacion por la regla de Simpson: ',aprox
```

Cálculo de errores y cifras significativas

$$\text{Error absoluto} = |v - v^*|$$

$$\text{Error relativo} = \frac{|v - v^*|}{|v|}$$

Siendo t el número de dígitos significativos (o cifras exactas):

$$\frac{|v - v^*|}{|v|} < 5 \cdot 10^{-t}$$

```
print '      Error absoluto: ', abs(F-aprox)
print '      Error relativo: ', abs(F-aprox)/abs(F)
print 'Cifras significativas: ', int(-log10((abs(F-aprox)/abs(F))/5))
```


Aproximación por la regla de Simpson compuesta

Función:

```
def regla_simpson_compuesta(f,a,b,n):  
    h=(b-a)/float(n)  
    aprox=0  
    for l in range(0,n):  
        aprox+=regla_simpson(lambda x:(x**2*cos(x)),  
            a+l*h,a+(l+1)*h)  
    return aprox
```

Aproximación por la regla de Simpson compuesta

Programa Principal:

```
from simpson import regla_simpson_compuesta
from math import *
F=(2*3*cos(3)+(3**2-2)*sin(3))-(2*1*cos(1)+(1**2-2)*sin(1))
print 'Valor real= ',F
print 'Aproximacion por la regla de Simpson compuesta: '
print '%25s %15s %15s %15s' % ('Numero de subintervalos',
'Aproximacion','Error absoluto','Error relativo')
n=[2,6,10,50,100]
aprox=0
i=0
for l in n:
    aprox=regla_simpson_compuesta(lambda x:(x**2*cos(x)),1,3,1)
    print '%16d %24.10f %15.10f %15.10f' %(n[i],aprox,abs(F-aprox),
    abs(F-aprox)/abs(F))
    i=i+1
```

Hardware

- CPU type: Intel(R) Atom(TM) CPU N270 @ 1.60GHz
- CPU speed: 800.000Hz
- Cache size: 512 KB

Software

En cuanto al sistema operativo, se ha utilizado “Linux-3.2.0-39-generic-i686-with-Ubuntu-12.04-precise”. Los ficheros en lenguaje Python fueron realizados con el editor de textos avanzado para KDE “Kate”.

Valor exacto	Aproximación
-5.19124855011	-5.0093265161

Cuadro: Aproximación de la regla de Simpson

Número de subintervalos	Aproximación
2	-5.1817934049
6	-5.1911377092
10	-5.1912342437
50	-5.1912485273
100	-5.1912485487

Cuadro: Aproximación de la regla de Simpson compuesta

Análisis de los resultados

V. exacto	Aprox.	E. absoluto	E. relativo	C. signific.
-5.19124855	-5.0093265	0.18192203	0.03504398	2

Cuadro: Aproximación y error de la regla de Simpson

N	Aproximación	E. absoluto	E. relativo	C. S.
2	-5.1817934049	0.0094551452	0.0018213625	3
6	-5.1911377092	0.0001108409	0.0000213515	5
10	-5.1912342437	0.0000143064	0.0000027559	6
50	-5.1912485273	0.0000000228	0.0000000044	9
100	-5.1912485487	0.0000000014	0.0000000003	10

Cuadro: Aproximación y error de la regla de Simpson compuesta

- 1 La integración numérica reduce el cálculo del valor de la integral definida en el caso de funciones muy complejas, a simples operaciones aritméticas.

- 1 La integración numérica reduce el cálculo del valor de la integral definida en el caso de funciones muy complejas, a simples operaciones aritméticas.
- 2 La Regla de Simpson simplifica el cálculo de una integral definida compleja, aproximando su valor al de la integral de un polinomio de segundo grado.

- 1 La integración numérica reduce el cálculo del valor de la integral definida en el caso de funciones muy complejas, a simples operaciones aritméticas.
- 2 La Regla de Simpson simplifica el cálculo de una integral definida compleja, aproximando su valor al de la integral de un polinomio de segundo grado.
- 3 La Regla de Simpson es más precisa que otros métodos como la Regla del Trapecio a la hora de aproximar la integral.

- 1 La integración numérica reduce el cálculo del valor de la integral definida en el caso de funciones muy complejas, a simples operaciones aritméticas.
- 2 La Regla de Simpson simplifica el cálculo de una integral definida compleja, aproximando su valor al de la integral de un polinomio de segundo grado.
- 3 La Regla de Simpson es más precisa que otros métodos como la Regla del Trapecio a la hora de aproximar la integral.
- 4 La Regla de Simpson proporciona aproximaciones exactas para polinomios de grado menor o igual a tres.

- 1 La Regla de Simpson Compuesta proporciona aproximaciones más precisas que la Regla de Simpson.

- 1 La Regla de Simpson Compuesta proporciona aproximaciones más precisas que la Regla de Simpson.
- 2 En la Regla de Simpson Compuesta, el error es inversamente proporcional al número de subintervalos.

- 1 La Regla de Simpson Compuesta proporciona aproximaciones más precisas que la Regla de Simpson.
- 2 En la Regla de Simpson Compuesta, el error es inversamente proporcional al número de subintervalos.
- 3 En la Regla de Simpson Compuesta, el error es directamente proporcional a la amplitud del intervalo.



David Kincaid and Ward Cheney.

Análisis Numérico. Las matemáticas del cálculo científico.
Addison-Wesley Iberoamericana, 1994.



Leslie Lamport.

L^AT_EX: A Document Preparation System.
Addison-Wesley Pub. Co., Reading, MA, 1986.



ACM LaTeX Style.

http://www.acm.org/publications/latex_style/.



Till Tantau.

User's guide to the beamer class.
2010.



Eric W. Weisstein.

<http://mathworld.wolfram.com/SimpsonsRule.html>.