Trabajo de técnicas experimentales

Lorena Díaz Morales
Jennifer Cabrera Mesa
Claudio García Vargas

15 de mayo de 2013

Índice general

Índice de cuadros

Índice de figuras

Capítulo 1

Motivación y objetivos

- Objetivo principal : Implementación en python del desarrollo de Taylor
- Objetivo especifico : Como se comporta la interpolación de una función logaritmica

1.1. Justificación del trabajo

Cursando la asignatura de tecnicas experimentales, realizamos este trabajo para aplicar los conocimientos adquiridos durante el curso sobre python, latex y beamer. Con ello, queremos hacer un estudio sobre la interpolación de Taylor de una función dada.Veamos las ventajas que tiene este metodo de aproximacion:

- La derivacion del polinomio se puede realizar termino a termino lo que hace que resulten operaciones triviales.
- Se puede utilizar para calcular valores aproximados de la funcion.
- Si es posible transformar una funcion mediante el polinomio de Taylor se comprueba que seria la aproximacion optima posible.

Algunas funciones no se pueden escribir como serie de Taylor porque presentan singularidades.Por ejemplo, aquellas funciones que presenten oscilaciones en un intervalo pequeño. En estos casos se puede conseguir un desarrollo en serie utilizando potencias negativas de x.

1.2. Objetivos

- Implementación en python para calcular el desarrollo en serie de Taylor para la función $f(x)=\ln(6x)$, $x \in [1,7]$

- Adquirir práctica a la hora de redactar documentos científicos con latex.
- Realizar presentaciones con beamer para la exposición en público.

Capítulo 2

Fundamentos teóricos

Para este trabajo es necesario presentar los fundamentos que se emplean en la interpolación de Taylor. Se hará una breve descripción histórica y presentaremos los teoremas y las anotaciones necesarias para el desarrollo del polinomio de Taylor.

2.1. Notas históricas sobre el polinomio de Taylor

Los inicios del polinomio de Taylor se remontan a la época de Zenón de Elea que consideró el problema de sumar una serie infinita para lograr un resultado finito. Al final dió por imposible este problema pero lo retomaron Demócrito y Arquímedes quedando resuelto el contenido matemático mediante un método exhaustivo. En el siglo XIV, se dice que los primeros ejemplos del uso de series de Taylor fueron dados por Madhava of Sangamagrama.Tres siglos después, James Gregory publicó varias series de McLaurin, idea que tomó Taylor perfeccionándola con una formula general para abordar mas casos.

Brook Taylor fue un matemático inglés, nacido en el año 1685, que estudió diversos problemas de las matemáticas de su época. En su obra Methodus Incrementorum Directa et Inversa, publicada en 1715 , desarrollo una nueva parte de la investigación matemática, hoy llamada cálculo de las diferencias finitas. Entre las distintas aplicaciones, se encontraba el tema de este trabajo, la fórmula del teorema de Taylor. cuya importancia la descubrió, tiempo después, Lagrange en el año 1772, casi 60 años después de que Taylor la formulara.

Este teorema permite obtener aproximaciones polinómicas de una función en un entorno de un punto en que la función sea diferenciable. Además el teorema permite acotar el error obtenido mediante dicha estimación.

2.2. El polinomio de Taylor

Si una función f(x) admite derivadas hasta el orden n en a, entonces se puede calcular su polinomio de Taylor de grado n centrado en a como se detalla a continuación:

$$f(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Expresado como sumatorio, queda de la siguiente forma

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Este polinomio de grado n, se denota $P_n(x;a)$. Es la suma de los n+1 primeros términos de la serie de Taylor.

El teorema de Taylor también se compone de un término llamado resto $R_n(x;a)$, definida por la ecuación

$$f(x) = P_n(x;a) + R_n(x;a)$$

Siendo $R_n(x;a)$

$$R_n(x;a) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{n+1}(t)dt$$

Para funciones cuyo comportamiento es bueno, lo esperado es que este término, el resto, tienda a cero cuando n tiende a infinito. En nuestro caso, la función se comporta de acuerdo a lo descrito

$$R_n(x;a) \to 0, n \to \infty$$

Capítulo 3

Procedimiento experimental

3.1. Descripción de los experimentos

Para realizar las pruebas, se han seguido los pasos que se indican a continuación. Se han tomado algunos valores en el intervalo indicado. Para cada uno de ellos, se han tomado diferentes puntos donde centrar el polinomio y también se ha ido variando el grado del polinomio para comprobar en qué medida es mejor el ajuste obtenido, para cada uno de los puntos.

Por otra parte, se ha experimentado, tomando un punto fijo y manteniendo el grado del polinomio, pero variando el lugar de centralización.

3.2. Descripción del material

Las pruebas de cálculo han sido llevadas a cabo en un ordenador con las siguientes características de hardware y software

- Tipo de CPU: Intel(R) Core(TM)2 Duo CPU T5800 @ 2.00GHz
- Caché: 2048 KB
- Sistema Operativo: Linux
- Versión: Linux Mint 14 Nadia
- Kernel: 3.5.0-27-generic
- Versión de Python: 2.7.3

3.3. Resultados obtenidos

Se presentan en las siguientes tablas, los resultados obtenidos.

Cuadro 3.1: Tabla para x=2

Grado	Centro	Aproximación	Valor de f(x)	Diferencia
3	1.75	2.46921379883	2.48490664979	0.0156928509579
3	1.9	2.48240502207	2.48490664979	0.00250162772088
3	2.1	2.48240514729	2.48490664979	0.00250150249723
3	2.25	2.46922614378	2.48490664979	0.0156805060103
5	1.75	2.46915886719	2.48490664979	0.0157477825985
5	1.9	2.48240352207	2.48490664979	0.00250312772088
5	2.1	2.48240352209	2.48490664979	0.00250312749723
5	2.25	2.46915900511	2.48490664979	0.0157476446822
10	1.75	2.46915829281	2.48490664979	0.0157483569776
10	1.9	2.48240351957	2.48490664979	0.00250313021812
10	2.1	2.48240351957	2.48490664979	0.00250313021812
10	2.25	2.46915829283	2.48490664979	0.0157483569562
15	1.75	2.46915829282	2.48490664979	0.0157483569681
15	1.9	2.48240351957	2.48490664979	0.00250313021812
15	2.1	2.48240351957	2.48490664979	0.00250313021812
15	2.25	2.46915829282	2.48490664979	0.0157483569681

Cuadro 3.2: Tabla para x=3

Grado	Centro	Aproximación	Valor de f(x)	Diferencia
3	2.75	2.88341439325	2.8903717579	0.00695736464395
3	2.9	2.88926032968	2.8903717579	0.00111142821889
3	3.1	2.88926034615	2.8903717579	0.00111141174491
3	3.25	2.88341600878	2.8903717579	0.00695574911659
5	2.75	2.88340314068	2.8903717579	0.00696861721597
5	2.9	2.88926002927	2.8903717579	0.00111172863041
5	3.1	2.88926002928	2.8903717579	0.00111172861734
5	3.25	2.8834031487	2.8903717579	0.00696860919889
10	2.75	2.88340308858	2.8903717579	0.00696866931621
10	2.9	2.88926002904	2.8903717579	0.00111172885269
10	3.1	2.88926002904	2.8903717579	0.00111172885269
10	3.25	2.88340308858	2.8903717579	0.00696866931596
15	2.75	2.88340308858	2.8903717579	0.00696866931609
15	2.9	2.88926002904	2.8903717579	0.00111172885269
15	3.1	2.88926002904	2.8903717579	0.00111172885269
15	3.25	2.88340308858	2.8903717579	0.00696866931609

Cuadro 3.3: Tabla para x=4

Grado	Centro	Aproximación	Valor de f(x)	Diferencia
3	3.75	3.17414356442	3.17805383035	0.00391026592924
3	3.9	3.1774287307	3.17805383035	0.000625099650957
3	4.1	3.1774287346	3.17805383035	0.000625095742962
3	4.25	3.17414394696	3.17805383035	0.0039098833919
5	3.75	3.17413994046	3.17805383035	0.00391388989164
5	3.9	3.17742863499	3.17805383035	0.000625195354082
5	4.1	3.17742863500	3.17805383035	0.000625195352337
5	4.25	3.17413994152	3.17805383035	0.00391788882403
10	3.75	3.17413993103	3.17805383035	0.00391389932114
10	3.9	3.17742863495	3.17805383035	0.000625195393918
10	4.1	3.17742863495	3.17805383035	0.000625195393919
10	4.25	3.17805383035	3.17805383035	0.00391389932113
15	3.75	3.17413993103	3.17805383035	0.00391389932114
15	3.9	3.17742863495	3.17805383035	0.000625195393918
15	4.1	3.17742863495	3.17805383035	0.000625195393919
15	4.25	3.17413993103	3.17805383035	0.00391389932114

Cuadro 3.4: Tabla para x=5

Grado	Centro	Aproximación	Valor de f(x)	Diferencia
3	4.75	3.39869575394	3.40119738166	0.00250162772088
3	4.9	3.40079734101	3.40119738166	0.000400040650853
3	5.1	3.40079734229	3.40119738166	0.000400039370487
3	5.25	3.39869587916	3.40119738166	0.00250150249724
5	4.75	3.39869425394	3.40119738166	0.00250312772088
5	4.9	3.40079730165	3.40119738166	0.000400080010853
5	5.1	3.40079730165	3.40119738166	0.000400080010487
5	5.25	3.39869425416	3.40119738166	0.00250312749723
10	4.75	3.39869425144	3.40119738166	0.00250313021812
10	4.9	3.40079730164	3.40119738166	0.00040008002134
10	5.1	3.40079730164	3.40119738166	0.00040008002134
10	5.25	3.39869425144	3.40119738166	0.00250313021812
15	4.75	3.39869425144	3.40119738166	0.00250313021812
15	4.9	3.40079730164	3.40119738166	0.00040008002134
15	5.1	3.40079730164	3.40119738166	0.00040008002134
15	5.25	3.39869425144	3.40119738166	0.00250313021812

Cuadro 3.5: Tabla para x=6

Grado	Centro	Aproximación	Valor de f(x)	Diferencia
10	5	3.55534806127	3.58351893846	0.028170877184
10	5.1	3.56076195126	3.58351893846	0.0227569871918
10	5.2	3.56558123775	3.58351893846	0.0179377007058
10	5.3	3.56981434695	3.58351893846	0.0137045915056
10	5.4	3.5734686026	3.58351893846	0.0100503358543
10	5.5	3.57655026914	3.58351893846	0.00696866931621
10	5.6	3.57906458811	3.58351893846	0.00445435034939
10	5.7	3.58101580824	3.58351893846	0.00250313021812
10	5.8	3.5824072096	3.58351893846	0.00111172885269
10	5.9	3.58324112209	3.58351893846	0.000277816365171

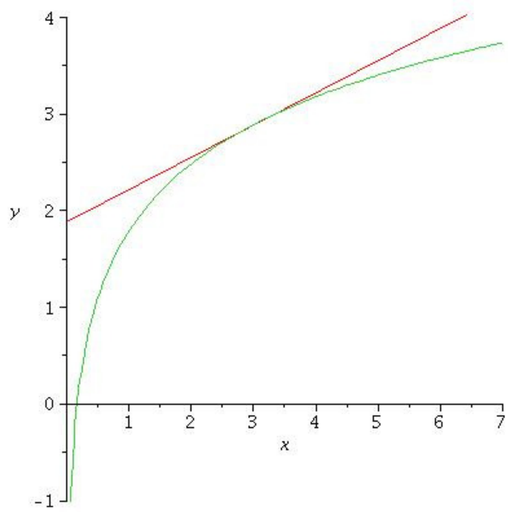

Figura 3.1: Polinomio de Taylor. Centrado en 6, de grado 2

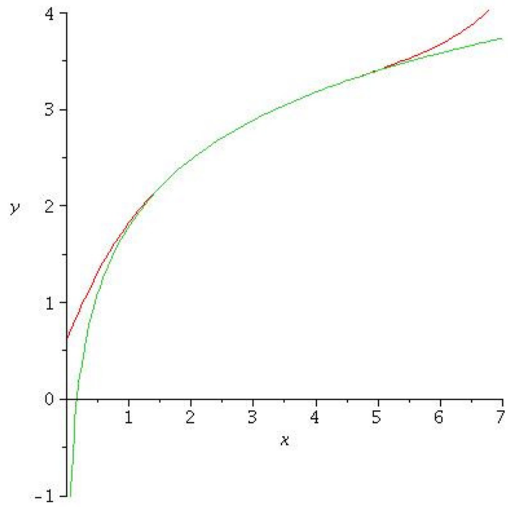

Figura 3.2: Polinomio de Taylor. Centrado en 6, de grado 6

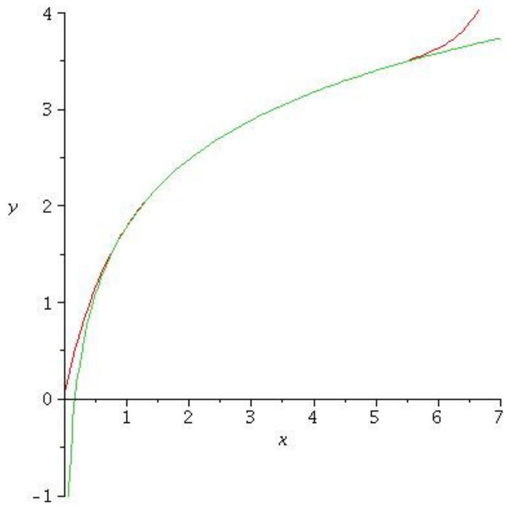

Figura 3.3: Polinomio de Taylor. Centrado en 6, de grado 10

3.4. Análisis de los resultados

La aproximación de Taylor es de gran importancia para calcular aproximaciones a funciones. Los errores van decreciendo a medida que el grado del polinomio va aumentando, ya que se incluyen más términos en la suma y aproxima de una manera más cercana si cabe al valor de la función que queremos hallar en dicho punto.

Otro aspecto a tener muy en cuenta, a la hora de aproximar, es la del centro del polinomio. Esto influye en la calidad de la aproximación, ya que dependiendo del valor donde se centre, el polinomio tendrá una aproximación deficiente a valores lejanos, porque por muchos términos que se introduzcan, no es posible salvar, en general, esa deficiencia. Por contra, si elegimos un centro relativamente cerca del punto a estudiar, lo más normal es que se aproxime muy bien al valor original de la función que se está aproximando.

Capítulo 4

Conclusiones

En esta sección, presentamos las conclusiones finales del trabajo

- Las series de Taylor pueden utilizarse para generar esquemas en diferencias finitas. Dichos esquemas se utilizan para aproximar la derivada de una función en un punto donde esté definida la función a estudiar.
- Las series de Taylor, dependiendo de la naturaleza de la función, pueden llevar asociados un error, que tenderá a cero si tomamos una función lo suficientemente buena como pueden ser: $\operatorname{sen}(x)$, $\cos(x)$, $ln(x)$, ...
- La aproximación de Taylor se aproxima tanto como queramos, poniendo una mayor cantidad de términos en el polinomio.
- Es una herramienta matemática que facilita mucho los cálculos de aproximación de funciones.
- Se puede programar rápidamente, ya que no es de gran complejidad. Sólo necesitamos un punto, un lugar donde centrar el polinomio y el grado que queremos. Ofrece resultados de manera muy precisa.

Apéndice A

Algoritmos

A.1. Interpolador de Taylor

```
#funcion_taylor.py
#!/usr/bin/python

#Autores: Lorena Díaz Morales, Jennifer Cabrera Mesa, Claudio García Vargas

import sys
from math import *

def taylor(x,n,d):
  subtotal=0
  tot=0
  i=1
  while i<=n :
   ti = ((((-1)**(i+1))*factorial(i-1))/((x**i)*(factorial(i))))*((x-d)**i)
   subtotal = float(subtotal)+float(ti)
   i+=1
  valor = float(log(6*d))
  tot = float(valor) + float(subtotal)
  return tot
if __name__=='__main__':
  x = float(sys.argv[1])
  n = int(sys.argv[2])
  d = float(sys.argv[3])
  print ''
  print 'La aproximacion de Taylor es',taylor(x,n,d)
```

```
diferencia=float(float(log(6*x))-float((taylor(x,n,d))))
l=float(log(6*x))
print 'La diferencia entre el valor real  interpolacion es',diferencia
print 'Valor de la funcion orignial en el punto:',l
```

Bibliografía

[1] Larson, Hostetler, Edwards. *Cálculo*. McGraw Hill. 2006. Octava edición.

[2] Sherman K. Stein. *Cálculo y geometría analítica*. McGraw Hill. 1987. Tercera edición.

[3] Tobias Oetiker y otros. *LaTeX 2ε en 127 minutos*. Versión 4.20.2, 23 Febrero de 2010

[4] Raúl González Duque. *Python para todos*.

[5] Till Tantau, Josep Wright, Vedran Miletić. *Beamer User Guide*. Versión 3.26, 4 Enero de 2013

[6] `www.guiasdeapoyo.net/guias/cuart_mat_e/SeriedeTaylor.pdf`

[7] `http://www.fceia.unr.edu.ar/lcc/cdrom/Instalaciones/LaTex/latex.html`