Max Diversity problem.

Práctica desarrollada por Iván García Campos.

1. Introducción.

Sea dado un conjunto S = {s_1, s_2, …, s_n} de n elementos, en el que cada elemento si es un vector de tamaño k. Sea, asimismo, dij la distancia entre los elementos i y j. Si m < n es el tamaño del subconjunto que se busca el problema puede formularse como:

$$\text{Maximizar } z = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} d_{ij} x_i x_j$$

sujeto a:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = m$$

$$x_i \in \{0,1\} \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

donde:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si } s_i \text{ pertenece a la solución} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Se ha desarrollado:

1. Algoritmo Voraz Constructivo.
2. Algoritmo Voraz Destructivo.
3. Algoritmo Grasp con Búsqueda Local, eliminar un vértice, añadir uno de los vecinos.
4. Algoritmo Aleatorio con Búsqueda Local, eliminar un vértice, añadir uno de los vecinos.
5. Algoritmo Ramificación y poda, amplitud para m = 2.

2. Algoritmo Voraz Constructivo. Apartado A.

Se plantea la implementación de un algoritmo constructivo voraz partiendo de la solución vacía. Se calcula el centro de gravedad entre todos los nodos candidatos siguiendo la siguiente fórmula:

$$centro(X) = \frac{1}{|X|}\left(\sum_{i \in I} s_{i1}, \sum_{i \in I} s_{i2}, \ldots, \sum_{i \in I} s_{iK}\right)$$

A continuación, se añade el vector con mayor distancia euclídea al centro de gravedad.

A partir de ahora, el centro de gravedad se calculará siempre sobre el nodo solución y se añadirá a la solución aquellos vectores con mayor distancia euclídea hasta tener una solución de tamaño m.

Pseudocódigo.

Algoritmo constructivo voraz

1: $Elem = S$;
2: $S = \emptyset$;
3: Obtener $s_c = centro(Elem)$;
4: **repeat**
5: Obtener el elemento $s_i \in Elem$ más alejado de s_c;
6: $S = S \cup \{s_i\}$;
7: $Elem = Elem - \{s_i\}$;
8: Obtener $s_c = centro(S)$;
9: **until** $(|S| = m)$
10: Devolver S;

Ejemplo sencillo de ejecución: m = 2

```
Matriz de Datos. Problema Maximum Diapersion.

10.0   3.6
6.0   4.0
5.4   5.0
-30.0   40.0
8.4   12.0


Iteracion 1
Centro de gravedad
[-0.040000000000000216, 12.919999999999998]
[3]

Iteracion 2
Centro de gravedad
[-30.0, 40.0]
[3, 0]
Z vale: 54.08289933056474
3747 milisegundos
```

Partimos de una solución cuyo centro de gravedad sea a partir de los vectores candidatos. El vector con distancia euclídea mayor es 3.

A partir de ahora, se calcula el centro de gravedad a partir de los vectores que estén en la solución, en este caso, mediante el vector 3. Buscamos el vector con mayor distancia euclidea. Se elige el vector 3.

Z vale 54.08.

3. Algoritmo Grasp con Búsqueda Local Eliminar 1 Añadir 1.

El algoritmo diseñado sigue una estrategia similar al del punto 1. Se eligen iterativamente y partiendo de una solución vacía los LRC mejores candidatos para mejorar la diversidad.

Se elige aleatoriamente una de ellas y se repite el proceso hasta m.

El centro de gravedad se calculara en la primera iteración a partir de los vectores candidatos (Todos los posibles). Cuando se haya elegido el primer vector de la solución, el centro de gravedad se calculará a partir de la solución. Igual que la estrategia voraz constructiva.

A continuación se aplicará una búsqueda local consistente en eliminar el vector que menor diversidad aporta y buscar entre los vectores que no están en la solución aquel que pueda mejorar la solución.

- Si se encontrase, se repite la búsqueda local sobre esta nueva solución.

- Si no se encontrase, termina el algoritmo.

Ejemplo sencillo de ejecución: m = 2

```
Iteracion 1
Centro de gravedad
[-0.040000000000000216, 12.919999999999998]
Candidatos
[]

Candidatos
[Point2D.Double[13.699051062026157, 0.0]]

Candidatos
[Point2D.Double[13.699051062026157, 0.0], Point2D.Double[10.772557727856462, 1.0]]

Se quiere añadir un nuevo nodo con distancia 9.60832971957145 pos 2
el peor elemento de la lista es 10.772557727856462 en la pos 1
Candidatos
[Point2D.Double[13.699051062026157, 0.0], Point2D.Double[10.772557727856462, 1.0]]

Se quiere añadir un nuevo nodo con distancia 40.38474959684658 pos 3
el peor elemento de la lista es 10.772557727856462 en la pos 1
Eliminado el nodo de peor calidad entre los candidatos: 1
Añadiendo 40.38474959684658
Candidatos
[Point2D.Double[13.699051062026157, 0.0], Point2D.Double[40.38474959684658, 3.0]]

Se quiere añadir un nuevo nodo con distancia 8.48999411071645 pos 4
el peor elemento de la lista es 13.699051062026157 en la pos 0
Random vale: 1
Elegido elemento Point2D.Double[40.38474959684658, 3.0] en pos 1
[3]
```

```
Iteracion 2
Centro de gravedad
[-30.0, 40.0]
Candidatos
[]

Candidatos
[Point2D.Double[54.08289933056474, 0.0]]

Candidatos
[Point2D.Double[54.08289933056474, 0.0], Point2D.Double[50.91168824543142, 1.0]]

Se quiere añadir un nuevo nodo con distancia 49.78112091948111 pos 2
el peor elemento de la lista es 50.91168824543142 en la pos 1
Candidatos
[Point2D.Double[54.08289933056474, 0.0], Point2D.Double[50.91168824543142, 1.0]]

Se quiere añadir un nuevo nodo con distancia 47.524309568893266 pos 4
el peor elemento de la lista es 50.91168824543142 en la pos 1
Random vale: 0
Elegido elemento Point2D.Double[54.08289933056474, 0.0] en pos 0
[3, 0]

BUSQUEDA LOCAL
Centro de gravedad
[10.0, 3.6]
Solucion actual [0]
Centro de gravedad
[-30.0, 40.0]
Solucion actual [3]
el elemento a quitar es -1 por -1
mejora la distancia de: 54.08289933056474 a 0.0
[3, 0]
```

Se buscan los LRC mejores candidatos a introducir en la solución, en este caso el vector 3 y el 3. Se elige uno aleatoriamente, eligiendo el 3. Se repite la estrategia eligiendo el vector 0.

Se aplica una búsqueda local, que en este caso no mejora la solución actual.

Solución final [0 3] con Z = 54.0829

4. Algoritmo Aleatorio con Búsqueda Local.

Se ha implementado un algoritmo que crea una solución aleatoria de tamaño m entre los nodos candidatos.

A esta solución, se le aplica una búsqueda local para encontrar posibles mejores soluciones. Si se encontrara, se aplica de nuevo la búsqueda local sobre esta nueva solución.

Ejemplo sencillo de ejecución:

```
Solucion inicial []
Solucion final
[2, 1]
Z vale: 1.16619037896906
BUSQUEDA LOCAL
Centro de gravedad
[6.0, 4.0]
Solucion actual [1]
ESTE CAMBIO MEJORA
Actual 4.019950248448356 antes 1.16619037896906
[1, 0]
ESTE CAMBIO MEJORA
Actual 50.91168824543142 antes 1.16619037896906
[1, 3]
Centro de gravedad
[5.4, 5.0]
Solucion actual [2]
el elemento a quitar es 2 por 3
mejora la distancia de: 1.16619037896906 a 50.91168824543142
Solucion [1, 3]
Centro de gravedad
[-12.0, 22.0]
MEJORANDO Y VOLVEMOS A EJECUTAR BUSQUEDA LOCAL
```

```
Centro de gravedad
[-30.0, 40.0]
Solucion actual [3]
ESTE CAMBIO MEJORA
Actual 54.08289933056474 antes 50.91168824543142
[3, 0]
Centro de gravedad
[6.0, 4.0]
Solucion actual [1]
el elemento a quitar es 1 por 0
mejora la distancia de: 50.91168824543142 a 54.08289933056474
Solucion [3, 0]
Centro de gravedad
[-10.0, 21.8]
MEJORANDO Y VOLVEMOS A EJECUTAR BUSQUEDA LOCAL
Centro de gravedad
[10.0, 3.6]
Solucion actual [0]
Centro de gravedad
[-30.0, 40.0]
Solucion actual [3]
el elemento a quitar es -1 por -1
mejora la distancia de: 54.08289933056474 a 0.0
[3, 0]
Z vale 54.08289933056474
4483 milisegundos
```

Se genera la solución aleatoria [2, 1] con Z = 1,16

Aplicando la búsqueda local, se intercambia el vector 2 por el 3 mejorando la dispersión a Z = 50,911. Se aplica de nuevo la búsqueda local intercambiando el vector 1 por el 0 y mejorando la dispersión a Z = 54,08. Se aplica de nuevo la búsqueda local sin éxito.

Solución final [0 3] con Z = 54.0829

5. Algoritmo Ramificación y Poda.

Ejemplo sencillo de ejecución: m = 2

```
10.0   3.6
6.0   4.0
5.4   5.0
-30.0   40.0
8.4   12.0

[3, 0]
Solucion Z = 54.08289933056474
Cota inferior 54.08289933056474
Nodo actual []
Nodos hijos:
[0] [1] [2] [3]
CORTAMOS RAMA [0, 1]
CORTAMOS RAMA [0, 2]
CORTAMOS RAMA [1, 0]
CORTAMOS RAMA [1, 2]
CORTAMOS RAMA [1, 3]
CORTAMOS RAMA [2, 0]
CORTAMOS RAMA [2, 1]
CORTAMOS RAMA [2, 3]
CORTAMOS RAMA [3, 1]
CORTAMOS RAMA [3, 2]
Terminado
Solucion [0, 3] con Z 54.08289933056474
15900 milisegundos
Salir
```

Partimos de una solución voraz con resultado Z = 54.08 y la guardamos como cota Inferior del árbol.

El nodo raíz del árbol contendrá la solución vacía y se irán rellenando los hijos con los vectores candidatos a introducir en la solución. 0, 1, 2, 3, 4. Si calcularCota de dicha solución < cotaInferior, dicha rama se podará y no se seguirá explorando. Si es mayor, se expanden los nodos hijos añadiendo otro posible candidato a la solución de la forma: [0 1] [0 2] [0 3] [0 4]

Se repetirá la estrategia hasta que se llegue a m en el tamaño de la solución.

En este caso se han podado 10 ramas de las 20 posibles. Se elige la solución 0 3 como la que más aumenta la diversidad.

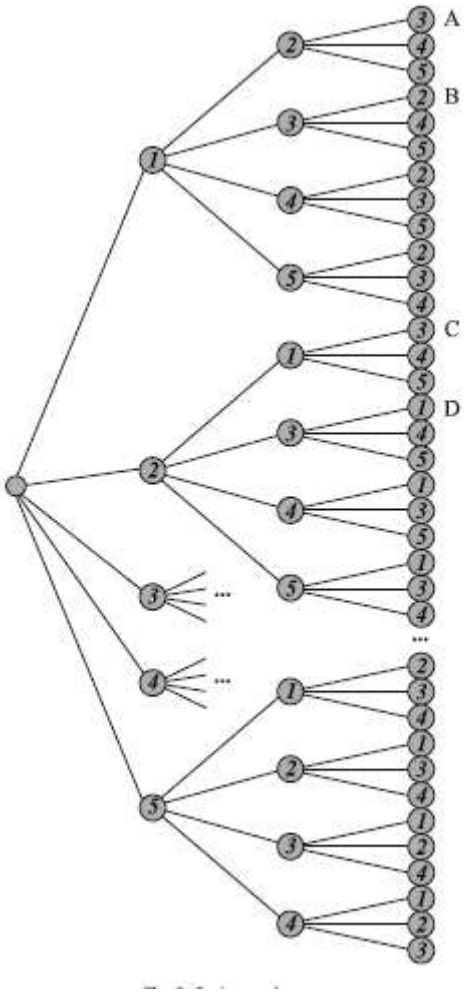
NOTA.

No se ha desarrollado correctamente el algoritmo calcular cotas que tiene la expresión:

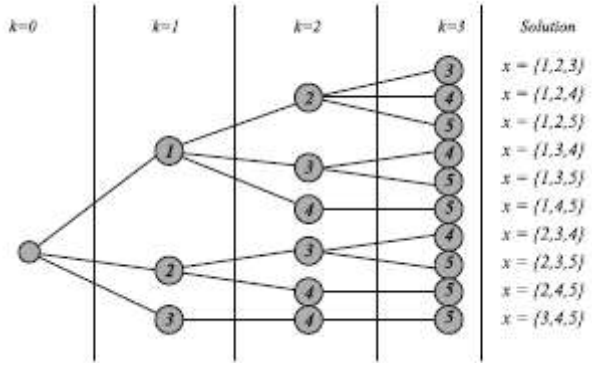
$$z = \sum_{j=2}^{m} d(u, s_j) + \sum_{i=2}^{m-1} \sum_{j=i+1}^{m} d(s_i, s_j) \leqslant 2d_{\max}(u) + \sum_{i=2}^{m-1} \sum_{j=i+1}^{m} d(s_i, s_j).$$

Diseño y Análisis de algoritmos. Ramificación y Poda.

Se ha logrado implementar un algoritmo parecido solo para m = 2. La generación del árbol de búsqueda expande todos los nodos de la forma



y no como se propone en la práctica:



6. Tablas

Algoritmo Voraz.

Problema	M	Ejecución	Z	Subconjunto	CPU
max-mean-div-15_2.txt	2	1	11.8592	[8, 6]	2,783 ms
max-mean-div-15_2.txt	3	2	25.7262	[8, 6, 3]	5,318 ms
max-mean-div-15_2.txt	4	3	48.4139	[8, 6, 3, 10]	3,278 ms
max-mean-div-15_2.txt	5	4	73.5619	[8, 6, 3, 10, 1]	5,862 ms
max-mean-div-15_3.txt	2	1	13.2732	[11, 8]	10,547 ms
max-mean-div-15_3.txt	3	2	30.3241	[11, 8, 4]	4,338 ms
max-mean-div-15_3.txt	4	3	59.7637	[11, 8, 4, 10]	4,652 ms
max-mean-div-15_3.txt	5	4	94.7487	[11, 8, 4, 10, 13]	4,016 ms
max-mean-div-20_2.txt	2	1	8.5103	[17, 18]	2,923 ms
max-mean-div-20_2.txt	3	2	21.9961	[17, 18, 8]	2,880 ms
max-mean-div-20_2.txt	4	3	39.5682	[17, 18, 8, 2]	3,535 ms
max-mean-div-20_2.txt	5	4	61.2393	[17, 18, 8, 2, 12]	3,063 ms
max-mean-div-20_3.txt	2	1	11.8003	[12, 13]	4,028 ms
max-mean-div-20_3.txt	3	2	30.8726	[12, 13, 7]	5,522 ms
max-mean-div-20_3.txt	4	3	56.53472	[12, 13, 7, 2]	2,871 ms
max-mean-div-20_3.txt	5	4	92.8297	[12, 13, 7, 2, 16]	3,703 ms
max-mean-div-30_2.txt	2	1	11.6571	[8, 27]	3,927 ms
max-mean-div-30_2.txt	3	2	28.9443	[8, 27, 1]	4,277 ms
max-mean-div-30_2.txt	4	3	52.7711	[8, 27, 1, 10]	5,340 ms
max-mean-div-30_2.txt	5	4	80.9102	[8, 27, 1, 10, 12]	2,938 ms
max-mean-div-30_3.txt	2	1	13.0737	[16, 6]	2,428 ms
max-mean-div-30_3.txt	3	2	33.8422	[16, 6, 23]	2,015 ms
max-mean-div-30_3.txt	4	3	63.5184	[16, 6, 23, 13]	3,164 ms
max-mean-div-30_3.txt	5	4	99.5088	[16, 6, 23, 13, 14]	2,858 ms

Algoritmo Voraz Destructivo

Problema	M	Ejecución	Z	Subconjunto	CPU
max-mean-div-15_2.txt	2	1	11.8592	[6, 8]	3,998 ms
max-mean-div-15_2.txt	3	2	23.7964	[1, 6, 8]	3,593 ms
max-mean-div-15_2.txt	4	3	46.6528	[1, 6, 8, 10]	3,484 ms
max-mean-div-15_2.txt	5	4	73.5619	[1, 3, 6, 8, 10]	3,147 ms
max-mean-div-15_3.txt	2	1	13.2732	[8, 11]	3,779ms
max-mean-div-15_3.txt	3	2	30.3240	[4, 8, 11]	3,159 ms
max-mean-div-15_3.txt	4	3	58.7287	[4, 8, 11, 13]	4,966 ms
max-mean-div-15_3.txt	5	4	96.0858	[3, 4, 8, 11, 13]	3,519 ms
max-mean-div-20_2.txt	2	1	8.5103	[17, 18]	3,382 ms
max-mean-div-20_2.txt	3	2	21.9961	[8, 17, 18]	5,316 ms
max-mean-div-20_2.txt	4	3	39.5682	[2, 8, 17, 18]	1,972 ms
max-mean-div-20_2.txt	5	4	60.4301	[2, 8, 10, 17, 18]	1,733 ms
max-mean-div-20_3.txt	2	1	11.5909	[2, 16]	3,709 ms
max-mean-div-20_3.txt	3	2	29.1574	[2, 12, 16]	3,145 ms
max-mean-div-20_3.txt	4	3	56.6903	[2, 12, 13, 16]	2,295 ms
max-mean-div-20_3.txt	5	4	92.8297	[2, 7, 12, 13, 16]	2,052 ms
max-mean-div-30_2.txt	2	1	11.6571	[8, 27]	3,692 ms
max-mean-div-30_2.txt	3	2	28.9443	[1, 8, 27]	2,550 ms
max-mean-div-30_2.txt	4	3	52.7712	[1, 8, 10, 27]	2,644 ms
max-mean-div-30_2.txt	5	4	80.9102	[1, 8, 10, 12, 27]	2,330 ms
max-mean-div-30_3.txt	2	1	12.6137	[5, 16]	4,789 ms
max-mean-div-30_3.txt	3	2	34.2905	[5, 16, 23]	5,778 ms
max-mean-div-30_3.txt	4	3	63.7019	[5, 13, 16, 23]	2,809 ms
max-mean-div-30_3.txt	5	4	99.5920	[5, 13, 14, 16, 23]	2,960 ms

Algoritmo Grasp con búsqueda local eliminar uno, añadir uno.

LRC = 3.

Máximo de Búsquedas Locales = 10.

Problema	M	Ejecución	Z	Subconjunto	CPU
max-mean-div-15_2.txt	2	1	11.8592	[6, 8]	7,772 ms
max-mean-div-15_2.txt	3	2	27.3727	[8, 6, 0]	6,886 ms
max-mean-div-15_2.txt	4	3	49.8267	[8, 6, 5, 0]	8,069 ms
max-mean-div-15_2.txt	5	4	79.1295	[8, 3, 6, 0, 5]	9,623 ms
max-mean-div-15_3.txt	2	1	13.2732	[11, 8]	5,440 ms
max-mean-div-15_3.txt	3	2	31.8685	[4, 11, 6]	8,296 ms
max-mean-div-15_3.txt	4	3	59.7637	[4, 10, 11, 8]	4,770 ms
max-mean-div-15_3.txt	5	4	96.0858	[11, 4, 8, 13, 3]	7,644 ms
max-mean-div-20_2.txt	2	1	8.36900	[2, 8]	5,674 ms
max-mean-div-20_2.txt	3	2	21.9961	[17, 8, 18]	5,221 ms
max-mean-div-20_2.txt	4	3	40.0022	[8, 18, 1, 2]	7,403 ms
max-mean-div-20_2.txt	5	4	63.6516	[18, 17, 8, 1, 13]	9,107 ms
max-mean-div-20_3.txt	2	1	11.8003	[12, 13]	6,046 ms
max-mean-div-20_3.txt	3	2	30.8726	[12, 13, 7]	6,218 ms
max-mean-div-20_3.txt	4	3	56.6903	[13, 12, 16, 2]	5,230 ms
max-mean-div-20_3.txt	5	4	92.8297	[13, 12, 16, 2, 7]	9,688 ms
max-mean-div-30_2.txt	2	1	11.6571	[27, 8]	11,404 ms
max-mean-div-30_2.txt	3	2	28.9443	[27, 8, 1]	7,335 ms
max-mean-div-30_2.txt	4	3	52.7711	[27, 1, 10, 8]	9,343 ms
max-mean-div-30_2.txt	5	4	80.9102	[27, 1, 10, 8, 12]	9,942 ms
max-mean-div-30_3.txt	2	1	13.0737	[16, 6]	14,275 ms
max-mean-div-30_3.txt	3	2	34.2905	[16, 23, 5]	10,016 ms
max-mean-div-30_3.txt	4	3	63.7019	[16, 23, 13, 5]	11,561 ms
max-mean-div-30_3.txt	5	4	99.5920	[23, 13, 16, 14, 5]	12,599 ms

Algoritmo Búsqueda *Local Sobre Algoritmo Aleatorio.*

Máximo de Búsquedas Locales = 10.

Problema	M	Ejecución	Z	Subconjunto	CPU
max-mean-div-15_2.txt	2	1	11.8592	[8, 6]	9,098 ms
max-mean-div-15_2.txt	3	2	27.3727	[8, 0, 6]	3,826 ms
max-mean-div-15_2.txt	4	3	49.8266	[5, 8, 6, 0]	4,148 ms
max-mean-div-15_2.txt	5	4	79.1295	[3, 6, 8, 5, 0]	5,121 ms
max-mean-div-15_3.txt	2	1	12.1611	[4, 10]	6,505 ms
max-mean-div-15_3.txt	3	2	30.9867	[8, 11, 3]	5,163 ms
max-mean-div-15_3.txt	4	3	59.76376	[11, 4, 8, 10]	4,721 ms
max-mean-div-15_3.txt	5	4	96.0858	[13, 3, 4, 8, 11]	3,999 ms
max-mean-div-20_2.txt	2	1	8.5103	[18, 17]	4,174 ms
max-mean-div-20_2.txt	3	2	21.9961	[8, 18, 17]	5,746 ms
max-mean-div-20_2.txt	4	3	40.0022	[1, 18, 8, 2]	4,489 ms
max-mean-div-20_2.txt	5	4	63.6517	[17, 1, 18, 13, 8]	4,262 ms
max-mean-div-20_3.txt	2	1	11.5909	[16, 2]	4,262 ms
max-mean-div-20_3.txt	3	2	30.8726	[13, 7, 12]	4,723 ms
max-mean-div-20_3.txt	4	3	56.69031	[2, 13, 12, 16]	3,456 ms
max-mean-div-20_3.txt	5	4	92.8297	[16, 2, 12, 13, 7]	3,964 ms
max-mean-div-30_2.txt	2	1	11.6571	[27, 8]	3,054 ms
max-mean-div-30_2.txt	3	2	28.9443	[1, 8, 27]	3,579 ms
max-mean-div-30_2.txt	4	3	52.7712	[27, 8, 1, 10]	4,047 ms
max-mean-div-30_2.txt	5	4	80.9102	[27, 1, 8, 10, 12]	7,641 ms
max-mean-div-30_3.txt	2	1	13.0737	[16, 6]	4,819 ms
max-mean-div-30_3.txt	3	2	34.2905	[16, 23, 5]	4,009 ms
max-mean-div-30_3.txt	4	3	63.7019	[5, 13, 16, 23]	3,779 ms
max-mean-div-30_3.txt	5	4	98.5836	[13, 16, 23, 3, 6]	5,867 ms

Algoritmo Ramificación y Poda

Aproximación Algoritmo Ramificación y Poda. M = 2.

La estrategia de poda es distinta a la planteada. En este caso, se decide la cota Inferior como la Z media entre todos los posibles nodos candidatos.

Ej:

1 -> Z = 10.3

2 -> Z = 9.4

3 -> Z = 8.4

4 -> Z = 40.2

5 -> Z = 11.3

Problema	M	Ejecución	Z	Subconjunto	CPU
max-mean-div-15_2.txt	2	1	11.8592	[6, 8]	5,038 ms
max-mean-div-15_3.txt	2	1	13.2732	[8, 11]	7,521 ms
max-mean-div-20_2.txt	2	1	8.5103	[17, 18]	6,463 ms
max-mean-div-20_3.txt	2	1	11.8003	[12, 13]	9,675 ms
max-mean-div-30_2.txt	2	1	11.6571	[8, 27]	10,354 ms
max-mean-div-30_3.txt	2	1	13.0737	[6, 16]	9,538 ms