

Partition

Sawan J. Kapai Harpalani Adrián González Martín Sara Martín
Molina Enrique Tejera González

Universidad de La Laguna

December 16, 2014

- Teorema: Partition es NP-Completo.
- Instancia: A , $a \in A$ y $S(a) \in (\mathbb{Z})^+$.
- Prueba: Es fácil ver que $\text{partition} \in \text{NP}$, puesto que es un algoritmo no determinista necesita sólo encontrar un subconjunto A' de A y comprobar el tiempo polinomial que suma los tamaños de los elementos de A' es igual a la suma de los elementos de $A - A'$.

Transformación 3DM a Partition

- Se fijan los conjuntos W, X, Y con tamaño q y M que será una instancia arbitraria del 3DM ($M \subseteq W \times X \times Y$).

$$W = w_1, w_2, w_3, \dots, w_q$$

$$X = x_1, x_2, x_3, \dots, x_q$$

$$Y = y_1, y_2, y_3, \dots, y_q$$

$$M = m_1, m_2, m_3, \dots, m_k$$

$$k = |M|$$

- Se debe construir un conjunto A , donde cada elemento tiene tamaño tal que $S(a) \in (\mathbb{Z})^+$ y ese A debe contener un subconjunto A' tal que:

$$\sum_{a \in A'} S(a) = \sum_{a \in A - A'} S(a) \iff \text{si } M \text{ contiene Matching}$$

- El conjunto A contendrá $k + 2$ elementos.

El conjunto A se construye en dos pasos:

① Primer paso:

- Los primeros k elementos de A están asociados con las k tripletas de M

$$a_i \Rightarrow m_i, 1 \leq i \leq k$$

- El tamaño de cada elemento se obtiene de su representación binaria. Esta representación contendrá q zonas con p bits cada una.

$$|W| = |X| = |Y| = q$$

$$p = \lceil \log_2(k+1) \rceil$$

1 Primer paso:

- La representación binaria del elemento a_i depende de la tripleta:

$$m_i = (w_{f(i)}, x_{g(i)}, y_{h(i)}) \in M$$

- Otra forma de obtener el tamaño de a_i :

$$S(a_i) = 2^{p(3q - f(i))} + 2^{p(2q - g(i))} + 2^{p(q - h(i))}$$

1 Primer paso:

- Si se fija:

$$B = \sum_{j=0}^{3q-1} 2^{pj}$$

- Entonces:

$$A' \subseteq a_i : 1 \leq i \leq k$$

$$\sum_{a \in A'} = B \iff M' = m_i : a_i \in A' \Rightarrow \text{matching}(M)$$

② Segundo paso:

- Se especifican los dos últimos elementos de A (b_1 y b_2) cuyos tamaños son:

$$S(b_1) = 2\left(\sum_{i=1}^k S(a_i)\right) - B$$

$$S(b_2) = \left(\sum_{i=1}^k S(a_i)\right) + B$$

- Ambos pueden ser especificados en binario con no más de $(3pq + 1)$ bits.

② Segundo paso:

- Suponiendo que se tiene un conjunto $A' \subseteq A$ se cumple:

$$\sum_{a \in A'} S(a) = \sum_{a \in A - A'} S(a)$$

- Por lo que las sumas de ambos será:

$$2 \sum_{i=1}^k S(a_i)$$

- Uno de los conjuntos, A' o $A - A'$, contendrá b_1 pero no b_2 .

2 Segundo paso:

- El resto de elementos formarán un subconjunto de:

$$a_i : 1 \leq i \leq k$$

- La suma de los tamaños de esos elementos es igual a B, por lo que ese subconjunto es un matching de M' en M .
- A la inversa, si tenemos un matching M' :

$$b_1 \cup a_1 : m_i \in M' \text{ forma } A' \text{ para la instancia de Partition}$$

- Por lo tanto 3DM se puede transformar en Partition en tiempo polinomial

Ejemplo

	W			X			Y			
	W1	W2	W3	X1	X2	X3	Y1	Y2	Y3	
m1:	01	00	00	01	00	00	01	00	00	= 66576
m2:	00	01	00	00	01	00	00	01	00	= 16644
m3:	00	00	01	00	00	01	00	00	01	= 4161
m4:	01	00	00	00	00	01	00	00	01	= 65601
m5:	01	00	00	00	01	00	00	00	01	= 65793
m6:	01	00	00	00	00	01	00	01	00	= 65604
Matching:	01	01	01	01	01	01	01	01	01	= 87381 = B

Figure: Ejemplo

FIN