Partition

Sawan J. Kapai Harpalani   Adrián González Martín   Sara Martín Molina   Enrique Tejera González

Universidad de La Laguna

December 10, 2014

Partition

- Teorema: Partition es NP-Completo.
- Instancia: A a $\in$ A S(a) $\in \mathbb{Z}^+$.
- Prueba: Es fácil ver que partition $\in$ NP, puesto que es un algoritmo no determinista necesita sólo encontrar un subconjunto A' de A y comprobar el tiempo polinomial que suma los tamaños de los elementos de A' es igual a la suma de los elementos de A-A'.

Transformación 3DM a Partition

- Se fijan los conjuntos W, X, Y con tamao q y M que será una instancia arbitraria del 3DM (M $\subseteq W \times X \times Y$).

$$W = w_1, w_2, w_3, \cdot \ldots \cdot w_q$$

$$X = x_1, x_2, x_3, \cdot \ldots \cdot x_q$$

$$Y = y_1, y_2, y_3, \cdot \ldots \cdot y_q$$

$$M = m_1, m_2, m_3, \cdot \ldots \cdot m_k$$

$$k = |M|$$

- Se debe construir un conjunto A, donde cada elemento tiene tamaño tal que S(a) $\in \mathbb{Z}^+$ y ese A debe contener un subconjunto A' tal que:

$$\sum_{a \in A'} S(a) = \sum_{a \in A - A'} S(a) \iff matching(M)$$

- El conjunto A contendrá k + 2 elementos.

Construcción

Se construye en dos pasos:

1. Primer paso:
   - Los primeros k elementos de A están asociados con las k tripletas de M

$$a_i \Rightarrow m_i, 1 \leq i \leq k$$

   - El tamaño de cada elementos se obtiene de su representación binaria.

$$|w| = |x| = |y| = q \Rightarrow p$$

$$p = [\log_2(k+1)]$$

Construcción

1. Primer paso:
   - La representación para el tamaño del elemento a_i depende de la tripleta:

     $$m_i = (w_{f(i)}, x_{g(i)}, y_{h(i)}) \in matching(M)$$

   - Otra forma de obtener el tamaño de a_i:

     $$S(a_i) = 2^{\mathrm{p(3q\ -\ f(i))}} + 2^{\mathrm{p(2q\ -\ g(i))}} + 2^{\mathrm{p(q\ -\ h(i))}}$$

Construcción

1. Primer paso:
   - Si se fija:

$$B = \sum_{j=0}^{3q-1} 2^{\mathrm{pj}}$$

   - Entonces:

$$A' \subseteq a_i : 1 \leq i \leq k$$

$$\sum_{a \in A'} = B \iff M' = m_i : a_i \in A' \Rightarrow matching(M)$$

Construcción

2. Segundo paso:
   - Se especifican los dos últimos elementos de A (b_1 y b_2) cuyos tamaños son:

$$S(b_1) = 2(\sum_{i=1}^{k} S(a_i)) - B = B$$

$$S(b_2) = 2(\sum_{i=1}^{k} S(a_i)) + B = 2B$$

   - Ambos pueden ser especificados en binario con más de (3pq + 1) bits.

Construcción

2. Segundo paso:
   - Suponiendo que se tiene un conjunto $A' \subseteq A$ se cumple:

$$\sum_{a \in A'} S(a) = \sum_{a \in A - A'} S(a)$$

   - Por lo que las sumas de ambos será:

$$2 \sum_{i=1}^{k} S(a_i)$$

   - A o A - A1 contendrá b_1 pero no b_2.

Construcción

2. Segundo paso:
   - El resto de elementos formarán un conjunto

$$a_i : 1 \leq i \leq k$$

   - La suma de los tamaños suman B por lo que es un matching de M' en M.
   - A la inversa:

$$M' \subseteq M \Rightarrow matching(M) \Rightarrow b_1 \bigcup a_1 : m_i \in M'$$

FIN