

**UNIVERSIDAD DE PANAMÁ
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA
CENTRO REGIONAL UNIVERSITARIO DE VERAGUAS**

**ASOCIACIÓN NACIONAL DE ESTUDIANTES DE
MATEMÁTICA (A.N.E.MAT.)
CAPÍTULO DE VERAGUAS**

SEMANA DE LA MATEMÁTICA

CONFERENCIA: **INTEGRACIÓN NUMÉRICA POR EL MÉTODO DE LOS
TRAPECIOS.**

EXPOSITOR: **RAÚL ENRIQUE DUTARI DUTARI.**

FECHA: **16 DE NOVIEMBRE DE 1994.**

HORA: **10:00 A. M.**

LUGAR: **AULA B-5 DEL CENTRO REGIONAL UNIVERSITARIO DE
VERAGUAS.**

DIRIGIDA A: **PROFESORES Y ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS DE
MATEMÁTICA QUE PARTICIPARON EN EL EVENTO.**

DURACIÓN: **45 MINUTOS.**

OBJETIVOS GENERALES

1. Comprender las bases conceptuales de la integración aproximada.
2. Comprender los rasgos generales de la integración aproximada utilizando el método de los trapecios.
3. Comprender la aproximación del error por truncamiento de la integración aproximada utilizando el método de los trapecios, frente al valor exacto.
4. Resolver problemas de integración aproximada utilizando el método de los trapecios.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Conocer la interpretación geométrica de la integral definida.
2. Reconocer que el método de los trapecios representa, geométricamente, el área bajo una función polinomial de primer orden (lineal).
3. Deducir la fórmula de los trapecios a partir de la interpretación geométrica de la integral definida.
4. Acotar el error cometido en la integración numérica por el método de los trapecios.
5. Explicar la obtención de fórmulas más precisas para calcular, numéricamente, integrales definidas.
6. Aplicar el método de los trapecios, para calcular, numéricamente, las aproximaciones de algunas integrales definidas.

TABLA DE CONTENIDOS

1.	Observaciones preliminares.....	1
2.	El método de los trapecios: Planteamiento general.....	2
3.	Construcción geométrica del método de los trapecios.....	3
4.	Fundamentos matemáticos del método de los trapecios: la interpolación polinomial.....	7
4.1.	El polinomio de interpolación de Lagrange.....	9
4.2.	Construcción analítica del método de los trapecios.....	15
5.	El error por truncamiento en el método de los trapecios.....	17
6.	Dos ejemplos elementales del método de los trapecios.....	24
7.	Otras fórmulas de integración aproximada.....	28
8.	Observaciones finales.....	29
	Bibliografía	31

1. Observaciones preliminares.

Cuando realizamos un experimento, generalmente, se obtiene una tabla de valores que, se espera, tengan un comportamiento funcional. Sin embargo, no obtenemos la representación explícita de la función que representa la regla de correspondencia entre las variables involucradas. En estos casos, la realización de cualquier operación matemática sobre la nube de puntos, que pretenda tratarla como una relación funcional, tropezará con dificultades considerables, al no conocerse la expresión explícita de dicha relación. Entre estas operaciones encontramos la integración de funciones.

Además, es conocido que existen relativamente pocas fórmulas y técnicas de integración, frente a la cantidad existente de funciones que se pueden integrar. Es decir, un gran número de integrales de funciones elementales no puede ser expresada en términos de ellas. Entre estos casos singulares tenemos, a manera de ejemplo:

$$\int e^{x^2} dx, \int \frac{dx}{\ln(x)}, \int \sqrt{1+x^3} dx, \int \sqrt{1+x^4} dx, \int \sin(x^2) dx, \dots$$

Para aclarar la contradicción antes señalada, debemos recordar la condición necesaria para que una función sea integrable. Dicha condición la mencionamos de inmediato, sin demostración:

Proposición 1 (Condición necesaria de integrabilidad).

Si una función f es continua en el intervalo $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$. ♦

Los interesados en una demostración rigurosa de la Proposición 1 pueden ubicarla en HAASER, Norman B., LASALLE, Joseph P., y SULLIVAN, Joseph A. Análisis matemático 1: Curso de introducción, [8, 545].

No obstante que las condiciones de la Proposición 1 son sumamente generales, no tenemos garantía de que, al aplicar los métodos usualmente conocidos para resolver integrales, podamos encontrar la antiderivada de una función $f(x)$ cualquiera, necesaria para obtener la integral definida.

Esta conferencia pretende ilustrar a la audiencia con una de las técnicas básicas que nos permiten resolver dicha situación, a través de la denominada “INTEGRACIÓN APROXIMADA, POR EL MÉTODO DE LOS TRAPECIOS”.

2. El método de los trapecios: Planteamiento general.

El método de los trapecios tiene su origen directamente en la interpretación geométrica de la “INTEGRAL DEFINIDA”.

Recordemos que la integral definida se puede interpretar como el área comprendida entre el eje de las abscisas, la función a integrar, y los límites de integración. Esta área es calculada a través de un proceso de paso al límite usando una partición del área total, generalmente en rectángulos y haciendo tender al infinito el número de rectángulos. La implementación numérica de este concepto, se conoce como “MÉTODO DE LOS RECTÁNGULOS”, y de hecho, este método se constituye en el soporte teórico de la solución de problemas de aplicación de integrales definidas.

La diferencia entre el método de los trapecios y el anterior método, consiste en que a la partición del área total, se le reemplazan los rectángulos

usados originalmente, por otra figura geométrica que aproxime mejor el área buscada, particularmente, usando trapecios. Además, al igual que en método de los rectángulos, se eliminará el proceso de límite, de modo que el resultado obtenido será una aproximación del valor exacto.

3. Construcción geométrica del método de los trapecios.

En este apartado construiremos la regla de los trapecios utilizando un enfoque basado en el planteamiento general, esbozado previamente. El mismo, lo resumiremos en la siguiente proposición.

Proposición 2 (Regla compuesta de los trapecios).

Consideremos una función $y = f(x)$, así como las rectas $x = x_1, \dots, x = x_n$. Supongamos que la distancia entre cada una de las parejas de valores de la abscisa x_i, x_{i-1} es constante y la denotamos como $\Delta x = x_i - x_{i-1}$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n-1$). Entonces:

$$\int_{x_1}^{x_n} f(x)dx \approx \frac{1}{2} \left(y_1 + 2 \sum_{i=2}^{n-1} y_i + y_n \right) \Delta x$$

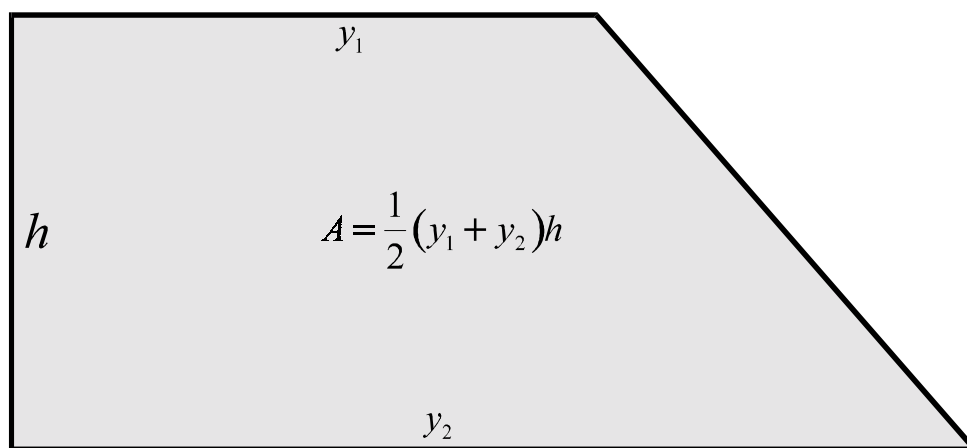
Donde denominamos a la ordenada de la función f en la abscisa x_i como $y_i = f(x_i)$ para $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

Demostración.

Recordemos que el área de un trapecio está dada por la fórmula:

$$A = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)h$$

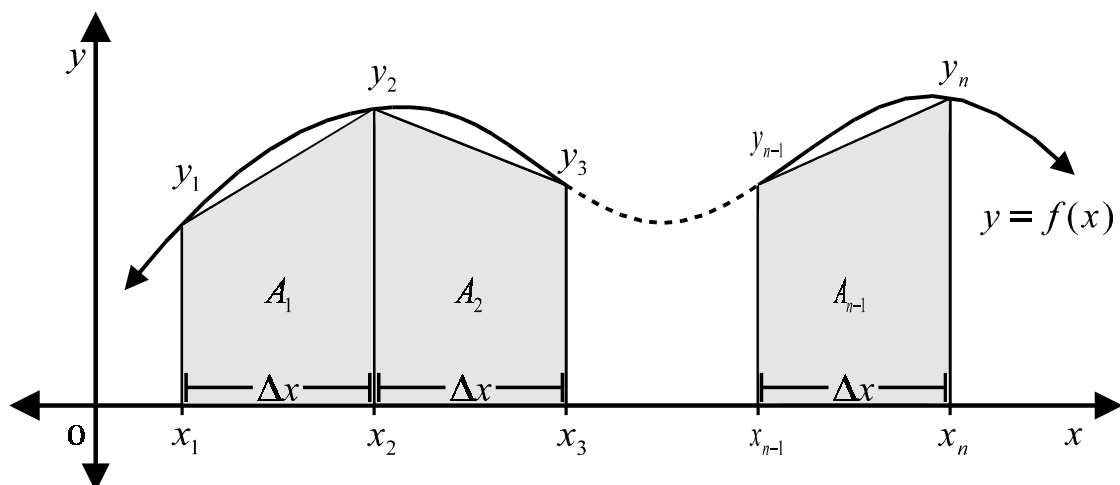
donde h es la altura del trapecio, en tanto que y_1 y y_2 representan las bases del mismo, como se observa en la Ilustración 1:



Área del trapecio

Ilustración 1

Consideremos la función $y = f(x)$, y las rectas $x = x_1, \dots, x = x_n$. Una buena aproximación al área bajo la curva de $f(x)$, se obtiene dividiéndola en $n - 1$ fajas de longitud Δx y aproximando el área de cada faja mediante un trapecio, como se muestra en la Ilustración 2:



Interpretación geométrica del método de los trapecios

Ilustración 2

Por la definición de integral definida, el área que nos interesa calcular está dada por:

$$\int_{x_1}^{x_n} f(x) dx$$

Consideremos que la distancia entre cada una de las parejas de valores de la abscisa: x_i, x_{i-1} es constante; y la denotamos como $\Delta x = x_i - x_{i-1}$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n-1$). Si llamamos a la ordenada de la función f en la abscisa x_i como $y_i = f(x_i)$ para $i = 1, 2, 3, \dots, n$, entonces, las áreas de los trapecios A_i $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$, estarán definidas por:

$$A_i = \frac{1}{2}(y_i + y_{i+1})\Delta x \quad (1)$$

En consecuencia, el área comprendida entre la función $y = f(x)$, el eje de las abscisas, y las rectas $x = x_1$ y $x = x_n$ será, aproximadamente, la suma de las áreas de los trapecios, es decir:

$$A \approx \sum_{i=1}^{n-1} A_i = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)\Delta x + \frac{1}{2}(y_2 + y_3)\Delta x + \dots + \frac{1}{2}(y_{n-1} + y_n)\Delta x$$

Ahora, si agrupamos los términos de esta suma, adecuadamente, obtenemos:

$$A \approx \sum_{i=1}^{n-1} A_i = \frac{1}{2}(y_1 + 2y_2 + 2y_3 + \dots + 2y_{n-2} + 2y_{n-1} + y_n)\Delta x$$

$$A \approx \frac{1}{2}\left(y_1 + 2\sum_{i=2}^{n-1} y_i + y_n\right)\Delta x \quad (2)$$

La ecuación **(1)** es denominada como “REGLA DEL TRAPECIO”, en tanto que la ecuación **(2)** se conoce como “REGLA COMPUESTA DE LOS TRAPECIOS”.♦

A manera de aclaración, dentro de la integración numérica, se acostumbra denominar “FÓRMULA COMPUESTA”, a las ecuaciones que se obtienen a través de la aplicación repetitiva de las fórmulas básicas de integración, adaptadas para cubrir intervalos más amplios.

Es claro desde el punto de vista intuitivo, que si el valor de n crece y repetimos la construcción sobre el intervalo $[x_1, x_n]$, tendremos un número mayor de divisiones, y podremos mejorar la aproximación del área buscada, frente a la cuantificación anterior. Es decir, el “error” cometido al aproximar la

integral de la función $f(x)$, en el intervalo $[x_1, x_n]$ a través de la regla compuesta de los trapecios, será cada vez menor.

Todo lo que hemos planteado a nivel geométrico parece ser correcto; sin embargo, es importante conocer más a fondo el fundamento matemático de este enfoque del problema. Es decir, determinar bajo qué condiciones específicas, podemos esperar que nuestro planteamiento aproxime, “adecuadamente” el área que deseamos cuantificar. Además, sería conveniente contar con una acotación del error cometido en nuestra aproximación.

4. Fundamentos matemáticos del método de los trapecios: la interpolación polinomial.

Para justificar, matemáticamente, al método de los trapecios debemos obtener una manera de reemplazar la función $f(x)$, que originalmente deseamos integrar, por otra función $g(x)$, que es una “buena aproximación”, de $f(x)$, en los puntos x_i , con $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Es decir, si $f(x_i) \approx g(x_i), \forall x_i$, con $i = 1, 2, 3, \dots, n$,

$$\Rightarrow \int_{x_1}^{x_n} f(x_i)dx \approx \int_{x_1}^{x_n} g(x_i)dx.$$

Ambas funciones, evidentemente, deben cumplir la condición de integrabilidad establecida de antemano (Proposición 1). Es decir, son continuas en el intervalo de integración $[x_1, x_n]$. Lógicamente, debemos preguntarnos qué funciones nos permiten realizar esta “aproximación” tan particular.

Las funciones que nos permiten realizar esta acción son, las aplicaciones polinomiales. El fundamento de esta afirmación lo establece el “TEOREMA DE APROXIMACIÓN DE WEIERSTRASS”. El resultado en mención lo enunciamos sin demostración:

Proposición 3 (Teorema de aproximación de Weierstrass).

Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[x_1, x_n]$, entonces, dado cualquier $\varepsilon > 0$, existe un $n, n = n(\varepsilon)$, y un polinomio $P_n(x)$ de grado n , tales que:

$$|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon, \forall x \in [x_1, x_n]. \blacklozenge$$

Es decir, la Proposición 3 nos garantiza que: una función f , continua en un intervalo finito cerrado, puede ser aproximada, tanto como se desee, utilizando un polinomio de interpolación, de grado suficientemente elevado.

Los interesados en una demostración rigurosa de la Proposición 3 pueden ubicarla en BARTLE, Robert G. Introducción al análisis matemático, [2, 199].

Conociendo este resultado, pasaremos a estudiar un tipo particular de polinomio de interpolación: el polinomio de interpolación de Lagrange.

4.1. El polinomio de interpolación de Lagrange.

Para construir el polinomio de interpolación de Lagrange, asumiremos que se conocen n puntos del plano cartesiano, $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, cuyas abscisas no están igualmente espaciadas.

Entonces, si denominamos a la ordenada de la función f en la abscisa x_i como $y_i = f(x_i)$ con $i = 1, 2, 3, \dots, n$, el polinomio de interpolación de Lagrange de orden n para estos puntos está definido por la función:

$$P_n(x) = \sum_{i=1}^n L_i(x) \cdot f(x_i) \quad (3)$$

donde:

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \quad (4)$$

A continuación probaremos algunos resultados básicos de los polinomios de interpolación de Lagrange.

Proposición 4.

La función $P_n(x)$ define a un polinomio de grado $n - 1$, a lo sumo.

Demostración:

El fundamento de la prueba, que es inmediata, se encuentra en las características de las operaciones indicadas en las ecuaciones (3) y (4).

En la ecuación (4), debemos observar que, para $i = 1, 2, 3, \dots, n$, se cumple, por construcción, que:

- Todos los $L_i(x)$, consisten en funciones racionales, donde numerador y denominador consisten en el producto de $n-1$ diferencias de valores conocidos (las constantes x_i), y desconocidos (la variable x).
- El denominador de cada $L_i(x)$, es un número real (puesto que el producto de diferencias de números reales, es otro número real).
- El numerador de cada $L_i(x)$, no es más que la representación factorizada del polinomio cuyas raíces son, precisamente, los valores x_j , $j = 1, 2, 3, \dots, n$, $j \neq i$.
- En consecuencia, cada $L_i(x)$ puede ser representado por una expresión de la forma:

$$L_i(x) = \alpha_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (x - x_j), \quad (5)$$

donde

$$\alpha_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{(x_i - x_j)}$$

- Luego, a través de operaciones algebraicas fundamentales, el miembro derecho de la ecuación **(5)** puede ser llevado a la forma:

$$L_i(x) = \alpha_i \sum_{k=0}^{n-1} a'_k x_k, \quad a'_{n-1} \neq 0 \quad \wedge \quad \alpha_i \neq 0$$

La última afirmación, sustenta el hecho de que $P_n(x)$ es la suma de funciones polinomiales, multiplicadas por constantes reales conocidas, es decir, es una función de la forma:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x_i, \quad a_{n-1} \neq 0$$

donde los a_i , $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$ se definen con base a operaciones algebraicas fundamentales sobre los a'_k , $k = 1, 2, 3, \dots, n-1$. Es decir, $P_n(x)$ es un polinomio de grado $n-1$ a lo sumo. ♦

Proposición 5.

El polinomio $P_n(x)$ posee $n-1$ raíces, cuando mucho.

Demostración.

Es inmediata, pues es ampliamente conocido que un polinomio de grado $n-1$ a lo sumo, posee $n-1$ raíces, cuando mucho, con base a los teoremas

de descomposición primaria de polinomios (ver LANG, Serge. Álgebra lineal, [12, 281-]. ♦

Proposición 6.

El polinomio $P_n(x)$ satisface los valores conocidos de la función $y_i = f(x_i)$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

Demostración.

Es inmediata, puesto que si evaluamos a $L_i(x)$ en cada uno de los puntos x_k , con $k = 1, 2, 3, \dots, n$, obtenemos:

$$L_i(x_k) = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$$

y como

$$P_n(x) = \sum_{i=1}^n L_i(x) \cdot f(x_i)$$

obtenemos que, al evaluar a $P_n(x)$ en un valor x_k , cualquiera, todos los sumandos de la expresión se anularán (cuando $i \neq k$), salvo uno (donde $i = k$). Luego, la expresión se reduce a:

$$P_n(x_k) = 0f(x_1) + 0f(x_2) + \dots + 1f(x_k) + \dots + 0f(x_n) = f(x_k) \quad (6)$$

y la ecuación (6) se satisface para $k = 1, 2, 3, \dots, n$, es decir, el polinomio de interpolación de Lagrange satisface, por construcción, a los valores conocidos de la función f . ♦

Proposición 7.

El polinomio $P_n(x)$ es el único que tiene las características antes señaladas en las proposiciones 4, 5 y 6.

Demostración.

La unicidad de $P_n(x)$ podemos probarla por reducción al absurdo. Así, consideremos que existe otro polinomio de grado $n-1$ a lo sumo, que denominaremos como $Q_n(x)$, y satisface a la nube de puntos dada, es decir:

$$y_i = P_n(x_i) = Q_n(x_i), \forall x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Lógicamente, asumiremos que $Q_n(x)$ es distinto de $P_n(x)$, en los otros puntos del intervalo definido por $[x_1, x_n]$, es decir:

$$P_n(x) \neq Q_n(x), \quad \forall x \in [x_1, x_n], \quad x \neq x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Construyamos otro polinomio $R(x)$, dado por la diferencia entre $Q_n(x)$ y $P_n(x)$, es decir:

$$R(x) = P_n(x) - Q_n(x)$$

Puesto que $P_n(x)$ y $Q_n(x)$ son ambos de grado $n-1$, a lo sumo, **el grado de $R(x)$ debe ser menor o igual que $n-1$, por construcción (*)**.

Por otro lado, como $P_n(x_i) = Q_n(x_i), \forall x_i$, con $i = 1, 2, 3, \dots, n$, deducimos que $R(x)$ se anula en n puntos del plano, es decir, **$R(x)$ es un polinomio de grado n (**)**.

Como las afirmaciones (*) y (**) son mutuamente contradictorias, termina la prueba y concluimos que el polinomio de interpolación de Lagrange es el único que tiene las características antes tratadas. ♦

Debemos observar que, todo lo antes expuesto, garantiza la siguiente proposición:

Proposición 8 (Existencia y unicidad del polinomio de interpolación de Lagrange).

Si la función f es continua en el intervalo $[x_1, x_n]$, entonces podemos construir un único polinomio de interpolación de Lagrange $P_n(x)$ de grado n , a lo sumo, tal que:

$$f(x_i) = P_n(x_i), \forall x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

y que:

$$f(x) \approx P_n(x), \forall x \in [x_1, x_n] \quad \blacklozenge$$

4.2. Construcción analítica del método de los trapecios.

Ahora, si replanteamos nuevamente nuestro problema (resolver integrales definidas), utilizando toda la teoría previamente construida, podemos enfrentar la demostración de la Proposición 2 desde un punto de vista analítico y riguroso.

Proposición 2 (Regla compuesta de los trapecios).

Consideremos una función $y = f(x)$, así como las rectas $x = x_1, \dots, x = x_n$. Supongamos que la distancia entre cada una de las parejas de valores de la abscisa x_i, x_{i-1} es constante y la denotamos como $\Delta x = x_i - x_{i-1}$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n-1$). Entonces:

$$\int_{x_1}^{x_n} f(x)dx \approx \frac{1}{2} \left(y_1 + 2 \sum_{i=2}^{n-1} y_i + y_n \right) \Delta x$$

Donde denominamos a la ordenada de la función f en la abscisa x_i como $y_i = f(x_i)$ para $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

Demostración.

Las propiedades básicas de la integral definida nos permiten afirmar que:

$$\int_{x_1}^{x_n} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

donde $x, x_i \in [x_1, x_n]$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

Para cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$ con $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$, construyamos el polinomio de interpolación de Lagrange respectivo. Su ecuación está dada por:

$$P_2(x) = \frac{(x - x_{i+1})}{(x_i - x_{i+1})} f(x_i) + \frac{(x - x_i)}{(x_{i+1} - x_i)} f(x_{i+1}), \quad (7)$$

donde $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$. La ecuación (7) puede ser replanteada, al factorizarla adecuadamente, como:

$$P_2(x) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} x + \frac{x_{i+1}f(x_i) - x_i f(x_{i+1})}{x_{i+1} - x_i} \quad (8)$$

Para hacernos una idea de lo que representa la ecuación (8), debemos observar que simboliza la formulación analítica de una línea recta, en la forma pendiente-ordenada en el origen, planteada en base a los valores conocidos de la función en los extremos del intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ con $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$.

Luego, al integrar a $P_2(x)$ en el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ obtenemos:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} P_2(x) dx = \frac{(x_{i+1} - x_i)[f(x_i) + f(x_{i+1})]}{2} = \frac{\Delta x [f(x_i) + f(x_{i+1})]}{2}$$

ya que por hipótesis, sabemos que $\Delta x = x_i - x_{i-1}$, con $i = 2, 3, \dots, n$.

Ahora, el Teorema de aproximación de Weierstrass (Proposición 3) nos garantiza que, en el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, $P_2(x)$ representa una buena aproximación de la función f , de modo que se puede afirmar que:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_2(x)dx \quad (9)$$

De este modo, al reemplazar cada una de las integraciones de $f(x)$ por su respectiva aproximación, a través de la integración de $P_2(x)$ en cada uno de los subintervalos, obtenemos:

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_n} f(x)dx &\approx \frac{1}{2}(y_1 + y_2)\Delta x + \frac{1}{2}(y_2 + y_3)\Delta x + \dots + \frac{1}{2}(y_{n-1} + y_n)\Delta x \\ &\approx \frac{1}{2}(y_1 + 2y_2 + 2y_3 + \dots + 2y_{n-2} + 2y_{n-1} + y_n)\Delta x \\ &\approx \frac{1}{2}\left(y_1 + 2\sum_{i=2}^{n-1} y_i + y_n\right)\Delta x \end{aligned}$$

recordando que $y_i = f(x_i)$ con $i = 1, 2, 3, \dots, n$, lo que completa la prueba de la proposición. ♦

5. El error por truncamiento en el método de los trapecios.

Aún tenemos la incógnita de “qué tan precisa” es la aproximación realizada por el método de los trapecios, frente a la que se obtendría si pudiéramos realizar la integración aplicando los conceptos de antiderivada. A continuación, presentamos resultados que son conocidos y que despejan esta incógnita.

Llamaremos “ERROR POR TRUNCAMIENTO”, a la diferencia que existe entre un valor, que consideramos preciso y exacto, y otro valor, que aproxima al valor preciso y exacto.

Según nuestro planteamiento, debemos determinar, en primer término, cual es el grado de aproximación que nos garantiza el polinomio de interpolación de Lagrange, es decir, cuantificar una función $E(x)$ de modo que:

$$f(x) = P_n(x) + E(x), \forall x \in [x_1, x_n]$$

en consecuencia:

$$E(x) = f(x) - P_n(x)$$

A continuación enunciaremos, sin demostración, una proposición donde se define el valor de $E(x)$ que satisface la última igualdad.

Proposición 9.

Si la función f es continua en orden $(n+1)$ en el intervalo $[x_1, x_n]$, entonces, para cada $x \in [x_1, x_n]$, existe un único $\lambda \in (x_1, x_n)$, tal que:

$$f(x) = P_n(x) + E(x)$$

donde $P_n(x)$ es el polinomio de interpolación de Lagrange de grado n , de la función f en $[x_1, x_n]$, y $E(x)$ se define como:

$$E(x) = \frac{f^{(n+1)}(\lambda)}{(n+1)!} \prod_{i=1}^n (x - x_i) \quad (10)$$

con $f^{(n+1)}$ denotando a la derivada de orden $(n+1)$ de la función f . ♦

Es decir, la Proposición 9 nos garantiza que existe una función polinomial, que acota el error que se comete al interpolar a una función cualquiera utilizando polinomios de interpolación de Lagrange.

Los interesados en una demostración rigurosa de la Proposición 9 pueden ubicarla en NAKAMURA, Shoichiro. Métodos numéricos aplicados con software, [16, 527].

Consideremos como acotar a $\int E(x)dx$ dentro de uno de los subintervalos de $[x_1, x_n]$, digamos $[x_1, x_n]$, $i = 1, 2, \dots, n-1$. La siguiente proposición nos permite realizar dicha acotación.

Proposición 10.

Si la función f es continua de orden 2 en el intervalo $[x_1, x_n]$, entonces:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} E(x)dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f(x) - P_n(x))dx \leq \frac{|(x_{i+1} - x_i)^3 M_i^2|}{12}$$

donde:

$$M_i^2 = \max\{f^{(2)}(x), : x_i \leq x \leq x_{i+1}\}.$$

Demostración.

Para el caso particular en estudio, recordemos que $P_n(x)$ representa a una función lineal (ecuación **(7)**), de modo que la ecuación **(10)** se puede reducir a:

$$E(x) = \frac{f^{(2)}(\lambda)}{2}(x - x_i)(x - x_{i+1}) = f(x) - P_n(x) \quad (11)$$

donde $x \in [x_i, x_{i+1}]$.

Ahora, debemos garantizar la existencia de $\lambda \in [x_i, x_{i+1}]$ para que la ecuación **(11)** tenga sentido. Así, representemos al máximo y mínimo locales de $f^{(2)}$ en $[x_i, x_{i+1}]$, como $M_i^2 \wedge m_i^2$, respectivamente. Puesto que f es continua de orden 2 en el intervalo $[x_1, x_n]$, el teorema del valor intermedio nos permite afirmar que $\exists \lambda \in [x_i, x_{i+1}]$ tal que:

$$m_i^2 \leq f^{(2)}(\lambda) \leq M_i^2 \quad (12)$$

Si aplicamos la desigualdad **(12)** en la ecuación **(11)**, de modo que calculemos una acotación, obtenemos que:

$$E(x) = \frac{f^{(2)}(\lambda)}{2}(x - x_i)(x - x_{i+1}) \leq \frac{M_i^2}{2}(x - x_i)(x - x_{i+1}) \quad (13)$$

Si integramos la desigualdad **(13)**, miembro a miembro, en el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, logramos que:

$$\begin{aligned}
\int_{x_i}^{x_{i+1}} E(x) dx &\leq \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{2} M_i^2 dx \\
\Rightarrow \int_{x_i}^{x_{i+1}} E(x) dx &\leq M_i^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{2} dx
\end{aligned} \tag{14}$$

pues M_i^2 no depende de x en todo el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, y como:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{2} dx = -\frac{(x_{i+1}-x_i)^3}{12} \tag{15}$$

al reemplazar la ecuación **(15)** en la desigualdad **(13)**, y aplicar las reglas comunes del álgebra, obtenemos:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} E(x) dx \leq -\frac{(x_{i+1}-x_i)^3}{12} M_i^2$$

ahora, recordando que:

$$-\frac{(x_{i+1}-x_i)^3}{12} M_i^2 \leq \frac{|(x_{i+1}-x_i)^3 M_i^2|}{12}$$

podemos, finalmente, hacer la mayoración:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} E(x) dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f(x) - P_n(x)) dx \leq \frac{|(x_{i+1}-x_i)^3 M_i^2|}{12}$$

donde:

$$M_i^2 = \max\{f^{(2)}(x), : x_i \leq x \leq x_{i+1}\}. \blacklozenge$$

Corolario 1.

Si la función f es continua en orden (2) en el intervalo $[x_1, x_n]$, entonces, el error cometido al aproximar a $\int_{x_1}^{x_n} f(x)dx$ utilizando el método de los trapecios, no puede ser mayor que:

$$\int_{x_1}^{x_n} E(x)dx < \frac{(x_n - x_1)^3 M^2}{12(n-1)^2}$$

donde:

$$M^2 = \max\{f^{(2)}(x), : x_1 \leq x \leq x_n\}.$$

Demostración.

La aplicación sucesiva de la Proposición 10, a lo largo de todo el intervalo $[x_1, x_n]$, nos conduce a la desigualdad:

$$\int_{x_1}^{x_n} E(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} E(x)dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} E(x)dx \leq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(x_{i+1} - x_i)^3 M_i^2}{12} \quad (16)$$

Además, recordemos que la distancia entre cada uno de los valores de la abscisa es constante, y tenemos $n - 1$ subintervalos en $[x_1, x_n]$, de modo que:

$$x_{i+1} - x_i = \frac{x_n - x_1}{n - 1} \Rightarrow (x_{i+1} - x_i)^3 = \left(\frac{x_n - x_1}{n - 1} \right)^3 \quad (17)$$

luego, reemplazando la ecuación (17) en la ecuación (16), obtenemos:

$$\int_{x_1}^{x_n} E(x) dx \leq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\left| \frac{(x_n - x_1)^3 M_i^2}{(n-1)^3} \right|}{12}$$

Ahora, como $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n > 0$, luego podemos decir, sin pérdida de generalidad, que:

$$\int_{x_1}^{x_n} E(x) dx \leq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\left| \frac{(x_n - x_1)^3 M_i^2}{(n-1)^3} \right|}{12} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\left| (x_n - x_1)^3 M_i^2 \right|}{12(n-1)^3}$$

Por otro lado, sea $M^2 = \max\{M_1^2, M_2^2, \dots, M_{n-1}^2\}$, como $M^2 \geq M_i^2, i=1, 2, \dots, n-1$. tenemos que al mayorar a todas las M_i^2 por M^2 , obtenemos la expresión:

$$\int_{x_1}^{x_n} E(x) dx \leq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\left| (x_n - x_1)^3 M_i^2 \right|}{12(n-1)^3} < \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\left| (x_n - x_1)^3 M^2 \right|}{12(n-1)^3}$$

luego, al realizar las operaciones indicadas en la sumatoria, obtenemos finalmente que:

$$\int_{x_1}^{x_n} E(x)dx < \frac{(x_n - x_1)^3 M^2}{12(n-1)^2} \quad (18)$$

lo que culmina la prueba. ♦

Corolario 2.

Si la segunda derivada de la función f es nula, $\forall x \in [x_1, x_n]$, entonces el resultado obtenido a través de la aplicación del método de los trapecios, en dicho intervalo, será exacto.

Demostración.

Basta con observar que al construir la cota del error en el Corolario 1, se asume, implícitamente, que $M^2 \neq 0$, es decir, se trabaja con base de que la segunda derivada de la función f en el intervalo $[x_1, x_n]$, no se hace cero, pues si se anulara en dicho intervalo, la desigualdad **(18)** sería acotada por un valor nulo. ♦

6. Dos ejemplos elementales del método de los trapecios.

Para ilustrar la forma en que se debe aplicar el método de los trapecios, presentamos, a continuación, dos ejemplos elementales.

- Aproximar a $\int_{0.00}^{5.00} (2x+1)dx$ utilizando 5 subintervalos y estime una cota del error cometido en la integración del primer subintervalo (trabaje sin cifras decimales).

Tenemos que $\Delta x = \frac{5-0}{5} = 1$

Por otro lado, los cálculos de los valores de las ordenadas los tenemos resumidos en el siguiente cuadro:

x	k	f(x) = 2x + 1	k f(x)
0	1	1	1
1	2	3	6
2	2	5	10
3	2	7	14
4	2	9	18
5	1	11	11
S u m a			60

Finalmente, el valor de la integral será:

$$I = \frac{1}{2}(1)(60) = 30.$$

Por otro lado, fácilmente se puede comprobar que la segunda derivada de la función a integrar se anula en todo el intervalo de integración, por lo que el valor antes obtenido para la integral, es exacto.

- Aproximar a $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ utilizando 5 subintervalos y estime una cota del error cometido en la integración del primer subintervalo (trabaje con 5 cifras decimales).

$$\text{Tenemos que } \Delta x = \frac{2-1}{5} = \frac{1}{5} = 0.2$$

Por otro lado, los cálculos de los valores de las ordenadas los tenemos resumidos en el siguiente cuadro:

x	k	f(x)=1/x	kf(x)
1.00000	1	1.00000	1.00000
1.20000	2	0.83333	1.66667
1.40000	2	0.71429	1.42857
1.60000	2	0.62500	1.25000
1.80000	2	0.55556	1.11111
2.00000	1	0.50000	0.50000
Suma			6.95635

Finalmente, el valor de la integral será:

$$I = \frac{1}{2}(0.2)(6.95635) = 0.69563.$$

Por otro lado, fácilmente se puede comprobar que la segunda derivada de la función a integrar no se anula en todo el intervalo de integración, puesto que:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{1}{x} \right) = \frac{2}{x^3} \neq 0, \Leftrightarrow x^3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0, \forall x \in [1,2].$$

por lo que el valor antes obtenido para la integral, no es exacto.

Para cuantificar el error cometido en la aproximación, aplicamos la ecuación **(18)**. Debemos observar que el valor máximo de la segunda derivada del integrando, se presenta cuando la variable x asume el valor $x = 1$. Luego, podemos afirmar que:

$$M^2 = \frac{2}{1^3} = 2$$

Por otro lado, es obvio que $x_1 = 1, x_n = 2 \quad \wedge \quad n = 5$, de modo que nuestra cota del error cometido será:

$$\int_{x_1}^{x_n} E(x) dx < \frac{(x_n - x_1)^3 M^2}{12(n-1)^2} = \frac{(2-1)^3 2}{12(5-1)^2} = \frac{1}{96} \approx 0.01041 = 1.041\%$$

es decir, el porcentaje de error cometido no es mayor que un 1%, al comparar el valor obtenido al aplicar el método de los trapecios, frente al que se obtendría si realizamos la integración utilizando métodos exactos.

7. Otras fórmulas de integración aproximada.

Podemos repetir la construcción de polinomios de interpolación de Lagrange, aplicando fórmulas de interpolación de mayor grado, de modo que obtengamos fórmulas de integración aproximada, más precisas que las obtenidas hasta el momento.

Esta afirmación se basa en lo establecido por el teorema de Weierstrass (Proposición 3). Al ser realizado este proceso, en general, se obtienen las “FÓRMULAS DE NEWTON-COTES”. Las Fórmulas de Newton-Cotes tienen la forma general:

$$\int_{x_1}^{x_n} f(x)dx = C \left(\sum_{i=1}^n c_i y_i \right) \Delta x$$

Dentro de ellas, el método de los trapecios es un caso particular, pues si $n = 2$, $C = \frac{1}{2}$, $\wedge c_1 = c_2 = 1$, obtenemos a la fórmula de los trapecios para el intervalo $[x_1, x_2]$.

Otro método de integración numérica, muy conocido, que se deriva como otro caso particular de las Fórmulas de Newton-Cotes es la Regla de Simpson de $\frac{1}{3}$, cuya formulación está dada por:

$$\int_{x_1}^{x_n} f(x)dx \approx \frac{1}{3} \left(y_1 + 4 \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} y_{2i} + 2 \sum_{i=1}^{\frac{n-3}{2}} y_{2i+1} + y_n \right) \Delta x \quad (19)$$

recordando que $y_i = f(x_i)$ con $i = 1, 2, 3, \dots, n$. El método, tal como aparece planteado en la ecuación (19), requiere que el número de valores conocidos $y_i = f(x_i)$ sea impar, es decir; $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$.

La regla de Simpson tiene su origen al realizar la aproximación de la función f en el intervalo $[x_1, x_n]$, utilizando un polinomio de interpolación de Lagrange de segundo grado. Su sentido geométrico consiste en aproximar la función utilizando una parábola, en vez de la línea recta que utiliza el método de los trapecios.

Se puede obtener mayores detalles acerca de éste método en la bibliografía que acompaña a este trabajo.

8. Observaciones finales.

Con base a lo que hemos tratado en nuestra exposición, no debemos pensar que la integración aproximada es un tema completamente resuelto. En efecto, el control de los distintos tipos de error que se involucran en los procesos de cálculo, principalmente a realizar la aproximación práctica de la integral, presentan problemas que aún no han sido resueltos a satisfacción.

Así, a manera de estímulo para la investigación en el tema, señalaremos algunos de estas situaciones problema, así como algunas referencias bibliográficas donde se puede profundizar en dichos tópicos.

Hasta este momento, sólo fue tratado el caso del error por truncamiento en la aproximación trapezoidal, asumiendo que todos los cálculos involucrados en el proceso son exactos y precisos (es decir, se cuenta con una cantidad infinita de cifras decimales en cada uno de los números involucrados en las

operaciones aritméticas). Sin embargo, existen otros tipos de errores inmersos en el proceso de aproximación de la integral, que dependen de la cantidad de cifras significativas que se manipulan, y contribuyen a que la respuesta obtenida por el método, varíe más de lo que se podía esperar.

Por otro lado, la reducción descontrolada de la longitud de los subintervalos, y en consecuencia el aumento de la cantidad de subintervalos, en combinación con la consideración de los errores por redondeo acumulado en los cálculos, nos conduce a otro problema: la pérdida de convergencia a la solución buscada. Es decir, elevar la cantidad de subintervalos de manera arbitraria, no conduce, en la práctica, a un aumento en la precisión de los cálculos. Más allá de ciertas proporciones, dicho incremento hace que el error por truncamiento sea reemplazado por errores por redondeo, de mayor intensidad que los reemplazados.

Una discusión amplia acerca de estos temas se encuentra en MCCRAKEN, Daniel D., y DORN, William S. Métodos numéricos y programación FORTRAN, [15, 183].

Todo lo antes señalado nos indica que la integración numérica es un tema donde se puede realizar descubrimientos y avances del conocimientos en las Ciencias Exactas.

BIBLIOGRAFÍA

1. ALLEN SMITH, W. Análisis Numérico. Traducido por Francisco Javier Sánchez Bernabe. Primera edición. México, D.F., México: Prentice-Hall, 1988. 608 páginas.
2. BARTLE, Robert G. Introducción al análisis matemático. Traducido por María Cristina Gutiérrez González. Primera edición. Primera edición. México, D.F., México: Noriega Limusa, 1980. 519 páginas.
3. BURDEN, Richard L., y FAIRES, J. Douglas. Análisis numérico. Traducido por Simón Mochón C. Primera Edición. México D.F., México: C.E.C.S.A., 1985. 721 páginas.
4. CHAPRA, Steven, y CANALE, Raymond P. Métodos numéricos para ingenieros con aplicaciones en computadoras personales. Traducido por Carlos Zapata S. Primera edición. México D.F., México: McGraw-Hill, 1990. 641 páginas.
5. CONTE, S. D., y DE BOOR, Carl. Análisis numérico. Traducido por Hernando Alfonso Castillo. Segunda Edición. México D.F., México: McGraw-Hill, 1991. 418 páginas.
6. GERALD, Curtis. Análisis numérico. Traducido por Jaime Luis Valls Cabrera. Primera Edición. México D.F., México: Representaciones y Servicios de Ingeniería, 1987. 631 páginas.

7. JAMES, Merlin L, SMITH, Gerald M., y WOLFORD, James C. Métodos numéricos aplicados a la computación digital con FORTRAN. Traducido por José A. Nieto Ramírez. Primera edición. México, D.F., México: Representaciones y Servicios de Ingeniería, 1973. 575 páginas.
8. HAASER, Norman B., LASALLE, Joseph P., y SULLIVAN, Joseph A. Análisis matemático 1: Curso de introducción. Traducido por Federico Velasco Coba. Primera edición. México, D.F., México: Trillas, 1970. 808 páginas.
9. HENRICE, Peter. Elementos de análisis numérico. Traducido por Federico Velasco Coba. Primera edición. México, D.F., México: Trillas, 1972. 363 páginas.
10. KAPLAN, Wilfred. Cálculo avanzado. Traducido por Miguel Lara Aparicio. Primera Edición. México D.F., México: C.E.C.S.A., 1985. 912 páginas.
11. KITCHEN, JR., Joseph W. Cálculo. Traducido por Lorenzo Abellanas Rapún. Primera Edición. México D.F., México: McGraw-Hill, 1987. 863 páginas.
12. LANG, Serge. Álgebra lineal. Traducido por Miguel Lara Aparicio. Primera Edición, México, D. F. México: 1976. 400 páginas.
13. LEITHOLD, Louis. El cálculo con geometría analítica. Traducido por Antonio Eroles Gómez. Sexta Edición. México D.F., México: Harla, 1992. 1563 páginas.

14. LUTHE, Rodolfo, OLIVERA, Antonio, y SCHUTZ, Fernando. Métodos numéricos. Primera edición. México, D.F., México: Limusa, 1986. 443 páginas.
15. MCCRAKEN, Daniel D., y DORN, William S. Métodos numéricos y programación FORTRAN. Traducido por José A. Nieto Ramírez. Primera edición. México, D.F., México: Limusa, 1986. 476 páginas.
16. NAKAMURA, Shoichiro. Métodos numéricos aplicados con software. Traducido por Oscar Alberto Palmas Velasco. Primera Edición. México D.F., México: Prentice-Hall, 1992. 570 páginas.
17. NIKOLSKI, S. Fórmulas de cuadratura. Traducido por K. P. Medkov. Primera Edición. Moscú, U.R.S.S.: Mir, 1990 291 páginas.
18. RALSTON, Anthony. Introducción al análisis numérico. Traducido por Carlos E. Cervantes de Gortari. Primera edición. México, D.F., México: Limusa, 1970. 629 páginas.
19. SCHEID, Francis. Análisis numérico. Traducido por Hernando Alonso Castillo. Primera Edición. México D.F., México: McGraw-Hill, 1972. 422 páginas.
20. SCHEID, Francis, y Di Constanzo, Rosa Elena. Métodos numéricos. Traducido por Gabriel Nagore Cázares. Segunda Edición. México D.F., México: McGraw-Hill, 1991. 709 páginas.
21. STIEFEL, Eduard. Introducción a la matemática numérica. Traducido por Miguel Jeréz Juan. Tercera Edición. Barcelona, España: Labor, 1966. 308 páginas.

22. SWOKOWSKI, Earl W. Cálculo con Geometría Analítica. Traducido por José L. Abreu y Martha Olivero. Segunda Edición. México D.F., México: Grupo editorial Iberoamérica, 1991. 1097 páginas.