Integración Trapecio $f(x) = sen(\Pi x)$, $x \in [-2, -1]$

Lara Kristjansdottir, Javier Hernández Pérez

Grupo (2 | F)

Técnicas Experimentales. 1^{er} *curso.* 2^{do} *semestre*

Lenguajes y Sistemas Informáticos

Facultad de Matemáticas

Universidad de La Laguna

La Laguna, 16 de mayo de 2013

Índice general

Índice de figuras

Índice de cuadros

Capítulo 1

Motivación y objetivos

1.1. Utilidad el método

No todas las integrales se pueden resolver por ello es muy importante el hecho de tener algunos métodos que nos permitan aproximar las integrales cuando tenemos una integral definida. En este caso nos centraremos en el método de los trapecios.

Además este método tiene una importancia extra. Si un método, como este, es sencillo.Teniendo en cuenta que con funciones en la vida real, midiendo un terreno por ejemplo,normalmente (salvo casos particulares como por ejemplo una persona con un terreno cuadrado que quiera que cada uno de sus dos hijos hereden la mitad de su terreno dividido por la función $sen(\pi x)$) estas haciendo una aproximación.Usar directamente el método de los trapecios parece una opción lógica.

Por ejemplo hallas el área de un cuadrado al medio del terreno y vas eligiendo puntos de la frontera del terreno que esten unidos aproximadamente por lineas rectas. Ya solo queda hallar el area de los trapecios con base el lado del cuadrado que les quede más cerca y sumar.

1.2. Nuestra integral $f(x) = sen(\pi x)$, $x \in [-2, -1]$ se puede resolver

Nuestra integral es facil resolverla, lo cual es una gran ventaja ya que nos permite comprobar. Lo rápido que aproxima el método de los trapecios, y la efectividad del ordenador con dicho método.

Resolvamos ahora $\int_{-2}^{-1} sen(\pi x)dx$. Haciendo el cambio $y = \pi x$ teniendo en cuenta que $\frac{\partial y}{\partial x} = \pi$, $x = -2 \Rightarrow y = -2 \cdot \pi$, $x = -1 \Rightarrow y = -\pi$ obtenemos que $\int_{-2}^{-1} sen(\pi x)dx = \frac{\int_{-2\pi}^{-1\pi} sen(y)dy}{\pi} = \frac{-cos(-\pi)+cos(-2\cdot\pi)}{\pi} = \frac{1+1}{\pi} = \frac{2}{\pi} \simeq 0,6366197724$

- Item 1

- Item 2

- Item 3

Capítulo 2

Fundamentos teóricos

2.1. Método de los trapecios

El método de los trapecios consiste en evaluar la función a integrar en algunos puntos que se unen con líneas rectas para aproximar el resto. Si unimos el eje y los puntos evaluados con rectas perpendiculares al eje. Hemos obtenido los trapecios formados por las rectas perpendiculares a los ejes, el eje y las rectas que unen a los puntos evaluados.La suma del area de esos trapecios es muy parecida a el area de debajo de la función es decir la integral. El área de esos trapecios es facil de hallar$\frac{h}{2}(a+b)$ donde h es la longitud del eje entre la imagen en el eje de los dos puntos por la recta perpendicular al punto, a y b la evaluación de la función en los dos puntos.

2.2. Convergencia del método de los trapecios

Teorema:
Sea f:$[a,b] \to \mathbb{R}$ una función integrable en el intervalo cerrado $[a,b]$. Si $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$ es la partición de $[a,b]$ que divide a este intervalo en n partes iguales, entonces el siguiente número aproxima a la integral $\int_a^b f(x)dx$.

$$I_t = \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + ... + f(x_{n-1}) + \frac{f(b)}{2}\right)$$

La aproximación tiene un error de si la función f es C^2 (derivable 2 veces con derivada continua).

$$|I_t - \int_a^b f(x)dx| \leq |\frac{(b-a)^3}{12n^2}f''(\xi)|$$

Para algún $\xi \in [a,b]$, luego si K es una cota superior de la derivada segunda en cualquier punto de $[a,b]$ tenemos:

$$|I_t - \int_a^b f(x)dx| \leq |\frac{(b-a)^3}{12n^2}K|$$

Aunque esto no lo vamos a demostrar (pues es una cota mala y $f(x) = sen(\Pi x)$ es C^∞) si f no es C^2 solo pidiendole monotonía en el intervalo se tiene:
$|I_t - \int_a^b f(x)dx| \leq \frac{b-a}{n}|f(b) - f(a)|$

Demostración:

Primero veamos que: $I_t = \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + ... + f(x_{n-1}) + \frac{f(b)}{2}\right)$ aproxima a la función

Esto es cierto pues $\frac{b-a}{n}$ es la parte del eje x del trapecio entre cada 2 puntos.Si haces todos los trapecios cada punto se repite 2 veces salvo los extremos asi que son solo los extremos los que se dividen entre 2 cuando sumas todas las areas de los trapecios.

Ahora veamos que $|I_t - \int_a^b f(x)dx| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2}K$ es una cota del error

Sea α un punto de la partición P sea $h = \frac{b-a}{n}$ por simplificar notación. La h es la longitud de cada uno de los n intervalos.

Cojamos una función que nos lo hace en intervalos más pequeños que los h para ir hallando el error y que cuando t vale h es un solo trapecio de los n que tenemos menos la integral en ese trapecio es decir el error en un trapecio.

$F_\alpha : [0, h] \to \mathbb{R}$
$t \to F_\alpha(t) = \frac{t}{2}(f(\alpha) + f(\alpha + t)) - \int_\alpha^{\alpha+t} fdt$

Derivando obtenemos:
$F'_\alpha(t) = \frac{1}{2}(f(\alpha) + f(\alpha + t)) + \frac{t}{2}0 + \frac{t}{2}f'(\alpha+t) - f(\alpha+t) + 0 = \frac{1}{2}(f(\alpha) + f(\alpha + t)) + \frac{t}{2}f'(\alpha+t) - f(\alpha + t) = \frac{1}{2}(f(\alpha) - f(\alpha + t)) + \frac{t}{2}f'(\alpha + t)$

Derivando de nuevo

$F''_\alpha(t) = \frac{1}{2}(0 - f'(\alpha + t)) + \frac{1}{2}f'(\alpha+t) + \frac{t}{2}f''(\alpha+t) = -\frac{1}{2}f'(\alpha+t) + \frac{1}{2}f'(\alpha+t) + \frac{t}{2}f''(\alpha+t) = \frac{t}{2}f''(\alpha + t)$

Elijamos ξ es decir cojemos el K cota superior de la derivada segunda.
Así que tenemos que $|F''_\alpha(t)| \leq |\frac{t}{2}K|$

Integrando que tenemos la ventaja de que K no depende de t y que $F'_\alpha(0) = \frac{1}{2}(f(\alpha) - f(\alpha + 0)) + \frac{0}{2}f'(\alpha + 0) = 0 + 0 = 0$ tenemos:

$|\int_0^t F''_\alpha(t)| \leq |\int_0^t \frac{t}{2}K| \Rightarrow |F'_\alpha(t) - F'_\alpha(0)| \leq |\frac{t^2}{4}K - \frac{0^2}{4}K| \Rightarrow |F'_\alpha(t)| \leq |\frac{t^2}{4}K|$
Ahora integremos entre 0 y h que es donde se mueve la función $F_\alpha(t)$ con la ventaja de que $F_\alpha(0) = \frac{0}{2}(f(\alpha) + f(\alpha + 0)) - \int_\alpha^{\alpha+0} fdt = 0 - 0 = 0$

$|\int_0^h F'_\alpha(t)| \leq |\int_0^h \frac{t^2}{4}K| \Rightarrow |F_\alpha(h) - F_\alpha(0)| \leq |\frac{h^3}{12}K| - \frac{0^3}{12}K| \Rightarrow |F_\alpha(h)| \leq |\frac{h^3}{12}K|$
Hemos obtenido que:

$|F_\alpha(h)| = |\frac{h}{2}(f(\alpha) + f(\alpha + h)) - \int_\alpha^{\alpha+h} f dh| \leq |\frac{h^3}{12}K|$

Si hacemos n veces esta $F_\alpha(h)$ obtenemos todos los errores en los trapecios del intervalo por tanto la cota que nos interesa es:

$n|\frac{h^3}{12}K|$

Teniendo en cuenta que habiamos defindo h como:

$h = \frac{b-a}{n}$

Obtenemos:

$n|\frac{(b-a)^3}{12(n^3)}K| \Rightarrow |\frac{(b-a)^3}{12(n^2)}K|$

Como queriamos demostrar $\smile$.

2.3. Realización por el método de los trapecios de $f(x) = sen(\Pi x)$, $x \in [-2, -1]$

$f(x) = sen(\Pi x)$, $x \in [-2, -1]$

Capítulo 3

Procedimiento experimental

3.1. Descripción de los experimentos

Vamos a aplicar la regla del trapecio a la función sin(pi*x) en el intervalo [-2,-1] utilizando una cantidad variable de subintervalos, n. Para cada valor de n, mediremos el error absoluto y el tiempo de ejecución del método. Adicionalmente, aplicaremos la regla de Simpson a la misma función con iguales parámetros para comparar ambos métodos.

3.2. Descripción del material

Los experimentos han tenido lugar sobre un procesador Intel Core i3-2350M a 2.30 GHz. Nótese que aunque la máquina tiene cuatro procesadores, sólo se empleó uno para realizar los cálculos. El sistema operativo fue Linux Mint 14.1 (Nadia) con la versión 3.5.0-17 del kernel. Los algoritmos fueron implementados en Python y la versión del intérprete fue la 2.7.3.

3.3. Resultados obtenidos

Aquí vamos a esperar hasta tener la tabla resumen, las gráficas y el cálculo analítico de la cota del error.

3.4. Análisis de los resultados

bla, bla, etc.

n	**error**	**tiempo**
1.0000000000	0.6366197724	0.0000181198
2.0000000000	0.1366197724	0.0000450611
3.0000000000	0.0592695032	0.0000541210
4.0000000000	0.0330663818	0.0000619888
5.0000000000	0.0210830649	0.0000700951
6.0000000000	0.0146113044	0.0000779629
7.0000000000	0.0107217341	0.0000860691
8.0000000000	0.0082023359	0.0000941753
9.0000000000	0.0064773480	0.0001020432
10.0000000000	0.0052446209	0.0001111031
20.0000000000	0.0013095356	0.0001251698
30.0000000000	0.0005818828	0.0001411438
40.0000000000	0.0003272829	0.0001599789
50.0000000000	0.0002094533	0.0001840591
60.0000000000	0.0001454508	0.0002100468
70.0000000000	0.0001068605	0.0002391338
80.0000000000	0.0000818144	0.0002720356
90.0000000000	0.0000646431	0.0003080368
100.0000000000	0.0000523607	0.0003480911

Capítulo 4

Conclusiones

bla, bla, bla, etc.

Apéndice A

Título del Apéndice 1

A.1. Algoritmo XXX

```
###################################################################################
# Fichero .py
###################################################################################
#
# AUTORES
#
# FECHA
#
# DESCRIPCION
#
###################################################################################
```

A.2. Algoritmo YYY

```
/###################################################################################
 # Fichero .h
 ###################################################################################
 #
 # AUTORES
 #
 # FECHA
 #
 # DESCRIPCION
 #
 ##################################################################################
```

Apéndice B

Título del Apéndice 2

B.1. Otro apendice: Seccion 1

`Texto`

B.2. Otro apendice: Seccion 2

`Texto`