



Universidad
de La Laguna

Método de Simpson Integración numérica

Iván Trujillo Trujillo
Samuel Santos Lucas Castilla

Grupo 2

Técnicas Experimentales. 1^{er} curso. 2^{do} semestre

Lenguajes y Sistemas Informáticos

Facultad de Matemáticas

Universidad de La Laguna

La Laguna, 8 de mayo de 2013

Índice general

1. Motivación y objetivos	1
1.1. Objetivos específicos	1
2. Fundamentos teóricos	2
2.1. Método de Simpson	2
2.2. Deducción del modelo a partir de la Ecuación de la parábola	3
3. Procedimiento experimental	5
3.1. Descripción de los experimentos	5
3.2. Descripción del material	5
3.3. Resultados obtenidos	5
3.4. Análisis de los resultados	6
4. Conclusiones	7
A. Título del Apéndice 1	9
A.1. Algoritmo XXX	9
A.2. Algoritmo YYY	9
B. Título del Apéndice 2	10
B.1. Otro apendice: Seccion 1	10
B.2. Otro apendice: Seccion 2	10
Bibliografía	10

Índice de figuras

3.1. Ejemplo de figura	6
----------------------------------	---

Índice de cuadros

3.1. Resultados experimentales de tiempo (s) y velocidad (m/s)	6
--	---

Capítulo 1

Motivación y objetivos

El objetivo principal de este trabajo es implementar un programa en Python que sea capaz de resolver el problema del cálculo del área bajo una función conocida en un intervalo cerrado.

Para llevar a cabo este proyecto debemos hacer uso de la integración numérica utilizando el método de Simpson, teniendo en cuenta los siguientes aspectos:

1. Debemos comprender los conceptos básicos de la integración aproximada empleando el método de Simpson.
2. Debemos valorar el error producido entre el valor real y la aproximación obtenida.
3. Debemos analizar las representaciones gráficas de la función estudiada y de la parábola hallada por el método de Simpson.

1.1. Objetivos específicos

Se realizará el experimento con una función conocida y definida en intervalos cerrados. La función dada es:

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^x}, \quad x \in [1, 6]$$

Capítulo 2

Fundamentos teóricos

Se puede decir que uno de los problemas más frecuentes en las matemáticas es el cálculo del área que se obtiene a partir de una función $f(x)$, el eje x y los límites a y b . Por ejemplo, si se quiere calcular el área de la figura 1, hay que recalcar que dicha área está comprendida entre los límites a y b , y por debajo de la función $f(x)$:

Partiendo de que se conoce la función y los valores de a y b ; considerándose b como el límite superior y a como el inferior, se puede obtener dos tipos de soluciones:

- Soluciones algebraicas: se obtiene una fórmula exacta y precisa del área solicitada.
- Soluciones numéricas: se calcula de manera numérica una estimación o aproximación del área.

Respecto a estos tipos de soluciones se sabe de antemano que las soluciones algebraicas son mejores que las numéricas, dado que son exactas. Pero se da el caso de que a veces, la complejidad de las funciones hace difícil la obtención de la solución algebraica, por lo que la solución numérica permite ahorrar tiempo. Como ejemplo de esta aproximación se tiene el Método de Simpson.

2.1. Método de Simpson

El método de Simpson se trata de una manera de obtener una estimación aproximada, pero aún más exacta de una integral, consiste en usar polinomios de orden superior para conectar los puntos, concretamente de orden 2, es decir, de la forma: $ax^2 + bx + c$.

Se les llama reglas de Simpson a las fórmulas que resultan de calcular la integral bajo estos polinomios.

En este procedimiento, se toma el intervalo de anchura $2h$, comprendido entre x_i y x_{i+2} , y se sustituye la función $f(x)$ por la parábola que pasa por los puntos (x_i, y_i) , (x_{i+1}, y_{i+1}) , y (x_{i+2}, y_{i+2}) .

2.2. Deducción del modelo a partir de la Ecuación de la parábola

Para demostrar el método de Simpson se asume cada sub área como un pequeño arco de parábola de la forma $ax^2 + bx + c$ con límites de esta manera: límite inferior en $-h$, límite superior en h y por ende la mitad de la sub área se encontrará en el punto 0, tal y como se ve en la figura 2.

Se procede a la integración de dicho arco de parábola entre los límites descritos:

$$\int_{-h}^h (ax^2 + bx + c) dx = \left[\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx \right]_{-h}^h$$

Si se reemplazan cada uno de los límites se obtiene lo siguiente:

$$\left[\frac{ah^3}{3} + \frac{bh^2}{2} + ch \right] - \left[-\frac{ah^3}{3} + \frac{bh^2}{2} - ch \right]$$

Si se quitan los corchetes se tiene que:

$$\frac{ah^3}{3} + \frac{bh^2}{2} + ch + \frac{ah^3}{3} - \frac{bh^2}{2} + ch = 2\frac{ah^3}{2ch}$$

Y si se simplifica obtenemos la ecuación 1 que se muestra a continuación:

Ecuación 1:

$$\int_{-h}^h (ax^2 + bx + c) dx = \frac{h}{3} [2ah^2 + 6c]$$

En la figura 3 se observa, respecto a las notaciones, las siguientes igualdades:

- $fx_i = y_i = f(-h)$
- $fx_{i+1} = y_{i+1} = f(0)$
- $fx_{i+2} = y_{i+2} = f(h)$

Entonces se podría obtener, evaluando la ecuación general $ax^2 + bx + c$ en cada uno de los puntos de la sub área $[-h, 0, h]$, el siguiente sistema de ecuaciones:

$f(-h) = ah^2 - bh + c$, se puede tomar esta altura como $y_0 = fx_i$.

$f(0) = c$, se toma esta altura como $y_1 = fx_{i+1}$.

$f(h) = ah^2 + bh + c$, y esta altura como $y_2 = fx_{i+2}$.

De lo anterior se puede deducir las siguientes dos ecuaciones:

Ecuación 2: $y_0 + y_2 = 2ah^2 + 2c$.

Ecuación 3: $y_i = c$.

Si se vuelve a la Ecuación 1 se ve que se puede expresar igualmente de la siguiente forma:

$$\text{Ecuación 4: } \int_{-h}^h (ax^2 + bx + c) dx = \frac{h}{3} [2ah^2 + 2c + 4c].$$

Si se reemplaza las ecuaciones 2 y 3 en la Ecuación 4 se obtiene que:

Ecuación 5: $\int_{-h}^h (ax^2 + bx + c) dx = \frac{h}{3} [y_0 + 4y_1 + y_2] = A_1$.

Ahora se interpreta la Ecuación 5 con base en la sub área seleccionada A_1 para el desarrollo del método de Simpson, se diría que el área del segmento es igual a la suma de la altura o función evaluada en el lado izquierdo más cuatro veces la función evaluada en la parte central de la sub área más la función evaluada en el lado derecho de la sub área, y todo ello multiplicado por el ancho del sub área y dividido por 3.

Si se toma a y b como x_0 y x_2 , y $f_i(x_i)$ se representa mediante un polinomio de Lagrange de segundo orden, luego la integral que quedaría sería la siguiente:

$$I = \int_{x_0}^{x_2} \left[\frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) + \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) + \frac{(x - x_1)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f(x_2) \right] dx$$

Después de integrar y de reordenar los términos, se obtiene como resultado la siguiente ecuación:

$$I = (b - a) \frac{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)}{6}$$

Capítulo 3

Procedimiento experimental

A continuación se procederá a describir detalladamente el experimento llevado a cabo. Se hablará de en qué consiste exactamente, en qué se basa y como se ha planteado su resolución. Seguidamente, se enumerará el material necesario para realizar la prueba. Otro apartado estará dedicado a mencionar los resultados que se han obtenido sin realizar ninguna objeción sobre la implicación de los mismos. Por último, se hará uso de los conocimientos expuestos en el capítulo 2 para poder analizar los datos que hemos obtenido y, así mismo, lo que ello supone.

3.1. Descripción de los experimentos

bla, bla, etc.

3.2. Descripción del material

En cuestión al material empleado para realizar el experimento se ha utilizado un computador con un procesador Intel(R) Core(TM)2 Quad CPU Q6600 @ 2.40GHz 2.39 GHz y una memoria RAM de 3,00 GB. El sistema operativo que contenía el computador era Windows 7 Home Premium de 32 bits. Para escribir los códigos fuente de LaTeX se usaron los programas Texmaker y Kate (versiones 3.2 y 3.8.5, respectivamente) y para el código fuente de Python solamente se utilizó Kate. Además, para registrar los cambios realizados en el trabajo y subirlos a GitHub se hizo uso de Git (1.7.9.5). Como compiladores se empleó el intérprete de Python y el compilador de Tex.

3.3. Resultados obtenidos

bla, bla, etc.

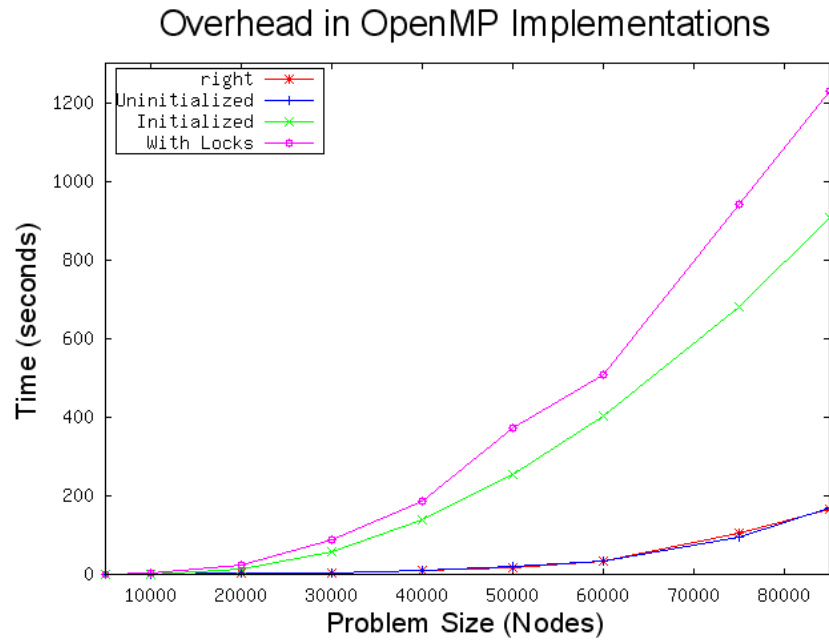


Figura 3.1: Ejemplo de figura

Tiempo (± 0.001 s)	Velocidad (± 0.1 m/s)
1.234	67.8
2.345	78.9
3.456	89.1
4.567	91.2

Cuadro 3.1: Resultados experimentales de tiempo (s) y velocidad (m/s)

3.4. Análisis de los resultados

bla, bla, etc.

Capítulo 4

Conclusiones

bla, bla, bla, etc.

Apéndice A

Título del Apéndice 1

A.1. Algoritmo XXX

```
#####  
# Fichero .py  
#####  
#  
# AUTORES  
#  
# FECHA  
#  
# DESCRIPCION  
#  
#####
```

A.2. Algoritmo YYY

```
/#####  
# Fichero .h  
#####  
#  
# AUTORES  
#  
# FECHA  
#  
# DESCRIPCION  
#  
#####
```

Apéndice B

Título del Apéndice 2

B.1. Otro apendice: Seccion 1

Texto

B.2. Otro apendice: Seccion 2

Texto

Bibliografía

- [1] Anita de Waard. A pragmatic structure for research articles. In *Proceedings of the 2nd international conference on Pragmatic web*, ICPW '07, pages 83–89, New York, NY, USA, 2007. ACM.
- [2] J. Gibaldi and Modern Language Association of America. *MLA handbook for writers of research papers*. Writing guides. Reference. Modern Language Association of America, 2009.
- [3] G.D. Gopen and J.A. Swan. The Science of Scientific Writing. *American Scientist*, 78(6):550–558, 1990.
- [4] Leslie Lamport. *LaTeX: A Document Preparation System*. Addison–Wesley Pub. Co., Reading, MA, 1986.
- [5] Coromoto León. *Diseño e implementación de lenguajes orientados al modelo PRAM*. PhD thesis, 1996.
- [6] Guido Rossum. Python library reference. Technical report, Amsterdam, The Netherlands, The Netherlands, 1995.
- [7] Guido Rossum. Python reference manual. Technical report, Amsterdam, The Netherlands, The Netherlands, 1995.
- [8] Guido Rossum. Python tutorial. Technical report, Amsterdam, The Netherlands, The Netherlands, 1995.
- [9] ACM LaTeX Style. http://www.acm.org/publications/latex_style/.