



Universidad
de La Laguna

Método de Simpson Integración numérica

Iván Trujillo Trujillo
Samuel Santos Lucas Castilla

Grupo 2J

Técnicas Experimentales. 1^{er} curso. 2^{do} cuatrimestre

Lenguajes y Sistemas Informáticos

Facultad de Matemáticas

Universidad de La Laguna

La Laguna, 15 de mayo de 2013

Índice general

1. Motivación y objetivos	1
1.1. Objetivos específicos	1
2. Fundamentos teóricos	2
2.1. Método de Simpson	3
2.2. Deducción del modelo a partir de la Ecuación de la parábola	3
3. Procedimiento experimental	6
3.1. Descripción de los experimentos	6
3.2. Descripción del material	7
3.3. Resultados obtenidos	7
3.4. Análisis de los resultados	7
4. Conclusiones	10
A. Programa en Python	11
A.1. Algoritmo para el cálculo de área	11
A.2. Algoritmo para la representación gráfica	12
Bibliografía	13

Índice de figuras

3.1. Gráfica de la función y su parábola	9
--	---

Índice de cuadros

3.1. Valores de x escogidos para la representacion y sus imagenes correspondientes para la funcion y la parabola.	8
---	---

Capítulo 1

Motivación y objetivos

El objetivo principal de este trabajo es implementar un programa en Python que sea capaz de resolver el problema del cálculo del área bajo una función conocida en un intervalo cerrado.

Para llevar a cabo este proyecto debemos hacer uso de la integración numérica utilizando el método de Simpson, teniendo en cuenta los siguientes aspectos:

1. Debemos comprender los conceptos básicos de la integración aproximada empleando el método de Simpson.
2. Debemos valorar el error producido entre el valor real y la aproximación obtenida.
3. Debemos analizar las representaciones gráficas de la función estudiada y de la parábola hallada por el método de Simpson.

1.1. Objetivos específicos

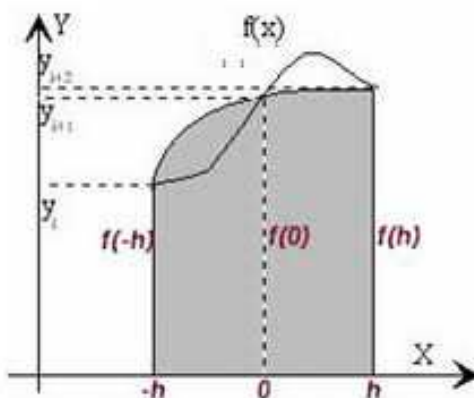
Se realizará el experimento con una función conocida y definida en intervalos cerrados. La función dada es:

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^x}, \quad x \in [1, 6]$$

Capítulo 2

Fundamentos teóricos

Hay que mencionar que el cálculo de áreas es uno de los problemas que más frecuentemente se le presentan a los matemáticos. Para la realización de este cálculo se tiene que hacer uso de una función $f(x)$, el eje x y los límites a y b . Por ejemplo, para realizar el cálculo del área que se observa en la figura siguiente se debe considerar que dicha área se encuentra comprendida entre los límites a y b , y por debajo de la función $f(x)$.



Para dicha resolución se parte de que se conoce la función $f(x)$ y los valores de a y b , considerando a tales valores, el límite inferior y el límite superior, respectivamente. Tras haber realizado dicho cálculo se puede llegar a obtener dos tipos de soluciones:

- Soluciones algebraicas: se obtiene una fórmula exacta y precisa del área solicitada.
- Soluciones numéricas: se calcula de manera numérica una estimación o aproximación del área.

Analizando estos dos tipos de soluciones, se puede deducir de antemano que las soluciones algebraicas son mucho mejores que las soluciones numéricas dado que son más exactas. Pero en alguna ocasión se puede dar el caso en el que la obtención de las soluciones

algebraicas es bastante dificultoso y latoso dada la complejidad de algunas funciones, por ello en estos casos es normal utilizar las soluciones numéricas que permiten ahorrar tiempo. Como ejemplo de ellos se tiene el Método de Simpson.

2.1. Método de Simpson

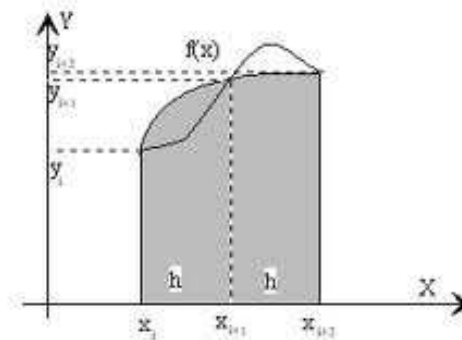
El método de Simpson consiste en usar polinomios de orden superior para conectar los puntos, concretamente de orden 2, es decir, de la forma: $ax^2 + bx + c$, de manera o con el fin de obtener una estimación más exacta de una integral.

Se les llama reglas de Simpson a las fórmulas que resultan de calcular la integral bajo estos polinomios.

En este procedimiento, se toma el intervalo de anchura $2h$, comprendido entre x_i y x_{i+2} , y se sustituye la función $f(x)$ por la parábola que pasa por los puntos (x_i, y_i) , (x_{i+1}, y_{i+1}) , y (x_{i+2}, y_{i+2}) .

2.2. Deducción del modelo a partir de la Ecuación de la parábola

Para demostrar el método de Simpson hay que asumir que cada sub área es un pequeño arco de parábola de la forma $ax^2 + bx + c$ cuyos límites son los siguientes: límite inferior en $-h$, límite superior en h y por ello la mitad de la sub área se encontrará en el punto 0, tal y como se ve en esta figura.



Se procede a la integración de dicho arco de parábola entre los límites descritos:

$$\int_{-h}^h (ax^2 + bx + c) dx = \left[\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx \right]_{-h}^h$$

Si se reemplazan cada uno de los límites se obtiene lo siguiente:

$$\left[\frac{ah^3}{3} + \frac{bh^2}{2} + ch \right] - \left[-\frac{ah^3}{3} + \frac{bh^2}{2} - ch \right]$$

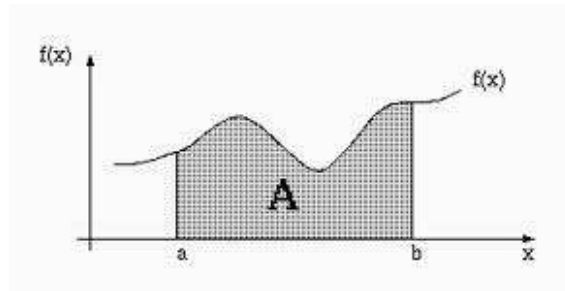
Si se quitan los corchetes se tiene que:

$$\frac{ah^3}{3} + \frac{bh^2}{2} + ch + \frac{ah^3}{3} - \frac{bh^2}{2} + ch = 2\frac{ah^3}{2ch}$$

Y si se simplifica obtenemos la ecuación 1 que se muestra a continuación:

Ecuación 1:

$$\int_{-h}^h (ax^2 + bx + c) dx = \frac{h}{3} [2ah^2 + 6c]$$



En la figura 3 se observa, respecto a las notaciones, las siguientes igualdades:

- $fx_i = y_i = f(-h)$
- $fx_{i+1} = y_{i+1} = f(0)$
- $fx_{i+2} = y_{i+2} = f(h)$

Entonces se podría obtener, evaluando la ecuación general $ax^2 + bx + c$ en cada uno de los puntos de la sub área $[-h, 0, h]$, el siguiente sistema de ecuaciones:

$f(-h) = ah^2 - bh + c$, se puede tomar esta altura como $y_0 = fx_i$.

$f(0) = c$, se toma esta altura como $y_1 = fx_{i+1}$.

$f(h) = ah^2 + bh + c$, y esta altura como $y_2 = fx_{i+2}$.

De lo anterior se puede deducir las siguientes dos ecuaciones:

Ecuación 2: $y_0 + y_2 = 2ah^2 + 2c$.

Ecuación 3: $y_i = c$.

Si se vuelve a la Ecuación 1 se ve que se puede expresar igualmente de la siguiente forma:

Ecuación 4: $\int_{-h}^h (ax^2 + bx + c) dx = \frac{h}{3} [2ah^2 + 2c + 4c]$.

Si se reemplaza las ecuaciones 2 y 3 en la Ecuación 4 se obtiene que:

Ecuación 5: $\int_{-h}^h (ax^2 + bx + c) dx = \frac{h}{3} [y_0 + 4y_1 + y_2] = A_1$.

Ahora se interpreta la Ecuación 5 con base en la sub área seleccionada A_1 para el desarrollo del método de Simpson, se diría que el área del segmento es igual a la suma de la altura o función evaluada en el lado izquierdo más cuatro veces la función evaluada en la parte central de la sub área más la función evaluada en el lado derecho de la sub área, y todo ello multiplicado por el ancho del sub área y dividido por 3.

Si se toma a y b como x_0 y x_2 , y $f_i(x_i)$ se representa mediante un polinomio de Lagrange de segundo orden, luego la integral que quedaría sería la siguiente:

$$I = \int_{x_0}^{x_2} \left[\frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) + \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) + \frac{(x - x_1)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f(x_2) \right] dx$$

Después de integrar y de reordenar los términos, se obtiene como resultado la siguiente ecuación:

$$I = (b - a) \frac{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)}{6}$$

Capítulo 3

Procedimiento experimental

A continuación se procederá a describir detalladamente el experimento llevado a cabo. Se hablará de en qué consiste exactamente, en qué se basa y como se ha planteado su resolución. Seguidamente, se enumerará el material necesario para realizar la prueba. Otro apartado estará dedicado a mencionar los resultados que se han obtenido sin realizar ninguna objeción sobre la implicación de los mismos. Por último, se hará uso de los conocimientos expuestos en el capítulo 2 para poder analizar los datos que hemos obtenido y, así mismo, lo que ello supone.

3.1. Descripción de los experimentos

Para la realización del experimento se ha utilizado básicamente un editor de texto para escribir el código fuente de Python y un intérprete del mismo. El experimento consiste en la realización de un programa en Python que sea capaz de calcular el valor de una integral definida en un intervalo cerrado, que a su vez calcule su aproximación por el método de Simpson, halle los errores relativo y absoluto entre los dos valores obtenidos y realice la representación gráfica de la función que se desea integrar y la parábola generada por el método utilizado para su aproximación. Como hemos mencionado anteriormente, se ha trabajado con una función dada ($f(x) = \frac{1}{1+e^x}$) definida en el intervalo $x \in [1, 6]$.

Hay que considerar que la integral de f es $f'(x) = \ln e^x - \ln(e^x + 1)$ para poder resolver la integral y hallar el valor real del área. También debemos saber que la parábola que se ha de representar está formada por los puntos $f(a)$, $f(b)$ y $f(\frac{a+b}{2})$, por lo que la ecuación es $y = 0,0169x^2 - 0,17x + 0,422$.

El programa en Python se ha dividido en dos módulos: uno para el cálculo de la integral y el análisis del error y otro para la representación gráfica. En el primero se han definido varias funciones para evaluar la función, su integral y la parábola, además de para hallar el área real y aproximada y calcular los errores. Si se ejecuta este módulo se podrá obtener cada uno de los parámetros mencionados.

En el segundo módulo se han importado las funciones del primero para poder utilizar algunas. Si se ejecuta, se define x como una lista de 20 valores aleatorios comprendidos entre 1 y 6 y, a partir de este, se crean dos listas más con los valores correspondientes a

la función y a la parábola. Se imprime una tabla con los valores de estas tres listas. Por último, se dibuja en un sólo lienzo la función y la parábola ayudándonos de las listas y se guarda el resultado.

3.2. Descripción del material

En cuestión al material empleado para realizar el experimento se ha utilizado un computador con un procesador Intel(R) Core(TM)2 Quad CPU Q6600 @ 2.40GHz 2.39 GHz y una memoria RAM de 3,00 GB. El sistema operativo que contenía el computador era Bordinux 3.4 Beta3 de 32 bits. Para escribir los códigos fuente de LaTeX se usaron los programas Texmaker y Kate (versiones 3.2 y 3.8.5, respectivamente) y para el código fuente de Python solamente se utilizó Kate. Además, para registrar los cambios realizados en el trabajo y subirlos a GitHub se hizo uso de Git (1.7.9.5). Como compiladores se empleó el intérprete de Python (2.7.3) y el compilador de Tex (pdfTeX 3.1415926-1.40.10-2.2 (TeX Live 2009/Debian)).

3.3. Resultados obtenidos

Antes de detallar los resultados cabe destacar los valores de x utilizados para la elaboración del experimento. Los valores aleatorios obtenidos en una de las ejecuciones y sus correspondientes imágenes se han incorporado en el Cuadro 3.1.

Como se observa, las imágenes obtenidas en $x=1$, $x=3.5$ y $x=6$ para las dos funciones son aproximadamente iguales.

La gráfica que se ha obtenido corresponde a la Figura 3.1.

Por otra parte, en el primer módulo, se ha obtenido que el área real por debajo de la función vale 0.3107860 unidades cuadradas mientras que el valor aproximado por el método Simpson vale 0.3238858 unidades cuadradas. Tras realizar el cálculo de los errores se ha calculado que el error absoluto es 0.0130998039 y el error relativo es 0.0421505595.

3.4. Análisis de los resultados

En primer lugar se debe apreciar que la ecuación de la parábola es una aproximación ya que las imágenes de la función en los puntos $x=1$, $x=3.5$ y $x=6$ son números irracionales que fueron aproximados para una mejor utilización posteriormente. Por ello, las verdaderas imágenes de la parábola no son las obtenidas. También, si analizamos la representación gráfica se observa que las dos curvas son muy parecidas (se debe tener en cuenta que se han representado los valores en el intervalo $[-0.1, 0.4]$ en el eje Y). Este hecho se origina al ser la función tratada una curva de dibujo similar a una parábola, por lo tanto, al aplicar el método de Simpson y trazar la parábola que se produce se ve que la diferencia de la curvatura es mínima. Esto se traduce en una aproximación considerablemente exacta, es decir, con un error prácticamente nulo.

En relación a los datos obtenidos de la integral y su aproximación se puede comprobar que lo expuesto en el párrafo anterior es cierto. Se ha obtenido un error absoluto muy

Valores de x	Y(funcion)	Y(parabola)
1.0000	0.2689	0.2689
1.2631	0.2204	0.2338
1.5263	0.1785	0.2011
1.7895	0.1431	0.1707
2.0526	0.1137	0.1427
2.3158	0.0898	0.1169
2.5789	0.0705	0.0935
2.8421	0.0551	0.0725
3.1052	0.0428	0.0538
3.3684	0.0333	0.0374
3.6316	0.0258	0.0233
3.8947	0.0199	0.0116
4.1579	0.0154	0.0023
4.4211	0.0119	-0.0048
4.6842	0.0092	-0.0095
4.9474	0.0071	-0.0119
5.2105	0.0054	-0.0120
5.4737	0.0042	-0.0096
5.7368	0.0032	-0.0050
6.0000	0.0025	0.0025

Cuadro 3.1: Valores de x escogidos para la representacion y sus imagenes correspondientes para la funcion y la parabola.

cercano a cero, igual que el error relativo. Esto se explica por la curvatura de la función estudiada.

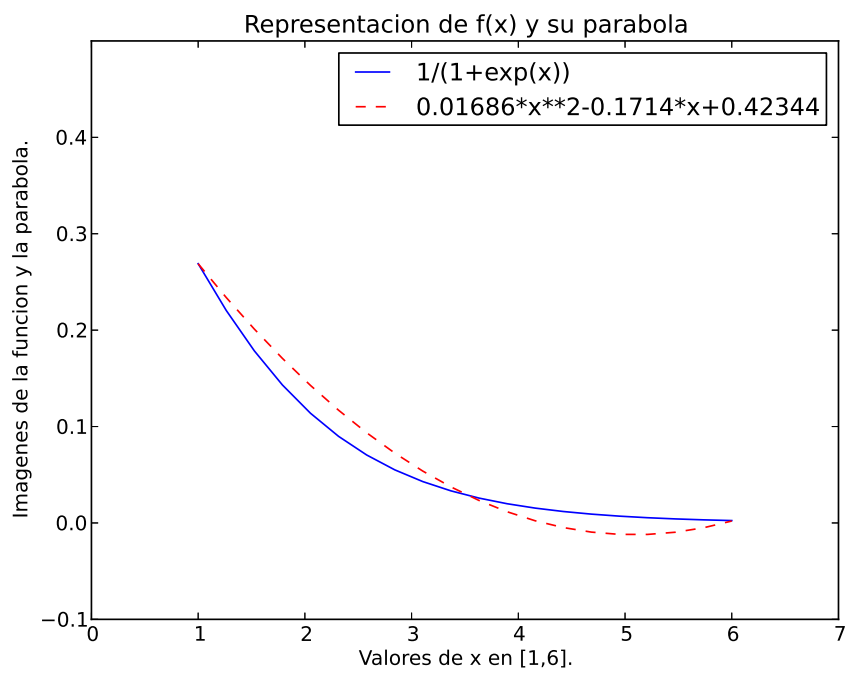


Figura 3.1: Gráfica de la función y su parábola

Capítulo 4

Conclusiones

- El método de Simpson es muy útil para funciones con una curva similar a una parábola en un intervalo cerrado.
- El método de Simpson produce una mala aproximación si la función en el intervalo cerrado presenta una recta o más de una curva.
- El método de Simpson facilita en gran medida la integración de funciones muy difíciles de resolver por otros métodos.
- El método de Simpson es fácil de aplicar ya que solo hace falta utilizar una fórmula y hallar las imágenes de la función en tres puntos diferentes.
- El método de Simpson puede ser utilizado para comprobar el resultado de una integración y sabemos que el error es mínimo.
- El método de Simpson es algo complicado de demostrar si no se tienen ciertos conocimientos matemáticos, por eso suele ser un método más sistemático.

Apéndice A

Programa en Python

A.1. Algoritmo para el cálculo de área

```
#####
# Integracion_Simpson.py
#####
#
# AUTORES:
#   Ivan Trujillo Trujillo
#   Samuel Santos Lucas Castilla
#
# FECHA: 10 de mayo de 2013
#
# DESCRIPCION
#
#   !/usr/bin/python
#
#   from math import *
#
#   def ev_funcion(x):
#       return 1/(1+exp(x))
#
#   def ev_parabola(x):
#       return 0.01686*x**2-0.1714*x+0.42344
#
#   def ev_funcion_int(x):
#       return log(exp(x))-log(exp(x)+1)
#
#   def int_real(a, b):
#       return ev_funcion_int(b)-ev_funcion_int(a)
#
#   def int_simpson(a, b):
#       return ((b-a)/6)*(ev_funcion(a)+4*ev_funcion((a+b)/2)+ev_funcion(b))
#
#   def error_abs(a, b):
#       return abs(int_real(a,b)-int_simpson(a,b))
#
#   def error_rel(a, b):
```

```
#     return abs(int_real(a,b)-int_simpson(a,b))/abs(int_real(a,b))
#
# if __name__ == '__main__':
#     funcion='1/(1+exp(x))'
#     a=1.0
#     b=6.0
#
#
#     print ("La integral definida entre %.1f y %.1f de %s es realmente %.7f unidades cuadradas." %
#           (a,b,funcion,int_real(a,b)))
#     print ("La integral definida entre %.1f y %.1f de %s es aproximadamente %.7f unidades cuadradas
#           por el metodo de Simpson." % (a,b,funcion,int_simpson(a,b)))
#     print ("El error absoluto entre los dos calculos es %.10f." % error_abs(a, b))
#     print ("El error relativo entre los dos calculos es %.10f." % error_rel(a, b))
#
#
#####
```

A.2. Algoritmo para la representación gráfica

```
/#####
# Integracion_Simpson_representacion.py
#####
#
# AUTORES:
#   Ivan Trujillo Trujillo
#   Samuel Santos Lucas Castilla
#
# FECHA: 13 de mayo de 2013
#
# DESCRIPCION: Representacion de una funcion y la parabola formada para el metodo de Simpson
#
# !/usr/bin/python
#
# from matplotlib.pyplot import *
# from Integracion_Simpson import *
#
# if __name__ == '__main__':
#
#     expr_f = '1/(1+exp(x))'
#     expr_p = '0.01686*x**2-0.1714*x+0.42344'
#
#     x = linspace(1,6,20)
#
#     y_f = zeros(len(x))
#     j=0
#     for i in x:
#         y_f[j] = ev_funcion(i)
#         j+=1
#
#     y_p = zeros(len(x))
#     j=0
#     for i in x:
```

```
#     y_p[j] = ev_parabola(i)
#     j+=1
#
#     print '\n      X:           Y(funcion):           Y(parabola):'
#     for i in range(len(x)):
#         print (" %5f %15f %20f" % (x[i], y_f[i], y_p[i]))
#
#     plot(x, y_f, 'b', x, y_p, 'r--')
#     xlim(0, 7)
#     ylim(-0.1, 0.5)
#     xlabel('Valores de x en [1,6].')
#     ylabel('Imagenes de la funcion y la parabola.')
#     title('Representacion de f(x) y su parabola')
#     legend([expr_f, expr_p])
#
#     savefig('rep_funcion.eps')
#
#     show()
#
#####
```

Bibliografía

- [1] Jr. Frank Ayres. *Cálculo diferencial e integral*. SCHAUM Pub. Co., Instituto Tecnológico de México, 1993.
- [2] Marvin Hernández. *Método Numérico: Regla de Simpson*. T-E-C Pub. Co., Instituto Tecnológico de Costa Rica, 2006.
- [3] Ing Yamil Armando Cerquera Rojas. Método de simpson. <http://es.scribd.com/doc/5784437/Metodo-Simpson>.
- [4] Wikipedia. Regla de simpson. <http://es.wikipedia.org/wiki/Regla-de-Simpson>.