



Universidad
de La Laguna

Método de Simpson Integración numérica

Iván Trujillo Trujillo
Samuel Santos Lucas Castilla

Grupo 2J

Técnicas Experimentales. 1^{er} curso. 2^{do} semestre

Lenguajes y Sistemas Informáticos

Facultad de Matemáticas

Universidad de La Laguna

La Laguna, 9 de mayo de 2013

Índice general

1. Motivación y objetivos	1
1.1. Objetivos específicos	1
2. Fundamentos teóricos	2
2.1. Método de Simpson	2
2.2. Deducción del modelo a partir de la Ecuación de la parábola	3
3. Procedimiento experimental	5
3.1. Descripción de los experimentos	5
3.2. Descripción del material	5
3.3. Resultados obtenidos	6
3.4. Análisis de los resultados	6
4. Conclusiones	7
A. Título del Apéndice 1	9
A.1. Algoritmo XXX	9
A.2. Algoritmo YYY	9
B. Título del Apéndice 2	10
B.1. Otro apendice: Seccion 1	10
B.2. Otro apendice: Seccion 2	10
Bibliografía	10

Índice de figuras

3.1. Ejemplo de figura	6
----------------------------------	---

Índice de cuadros

3.1. Resultados experimentales de tiempo (s) y velocidad (m/s)	6
--	---

Capítulo 1

Motivación y objetivos

El objetivo principal de este trabajo es implementar un programa en Python que sea capaz de resolver el problema del cálculo del área bajo una función conocida en un intervalo cerrado.

Para llevar a cabo este proyecto debemos hacer uso de la integración numérica utilizando el método de Simpson, teniendo en cuenta los siguientes aspectos:

1. Debemos comprender los conceptos básicos de la integración aproximada empleando el método de Simpson.
2. Debemos valorar el error producido entre el valor real y la aproximación obtenida.
3. Debemos analizar las representaciones gráficas de la función estudiada y de la parábola hallada por el método de Simpson.

1.1. Objetivos específicos

Se realizará el experimento con una función conocida y definida en intervalos cerrados. La función dada es:

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^x}, \quad x \in [1, 6]$$

Capítulo 2

Fundamentos teóricos

Hay que mencionar que el cálculo de áreas es uno de los problemas que más frecuentemente se le presentan a los matemáticos. Para la realización de este cálculo se tiene que hacer uso de una función $f(x)$, el eje x y los límites a y b . Por ejemplo, para realizar el cálculo del área que se observa en la figura 1 hay que recalcar previamente que dicha área se encuentra comprendida entre los límites a y b , y por debajo de la función $f(x)$.

Para dicha resolución se parte de que se conoce la función $f(x)$ y los valores de a y b , considerando a tales valores, el límite inferior y el límite superior, respectivamente. Tras haber realizado dicho cálculo se puede llegar a obtener dos tipos de soluciones:

- Soluciones algebraicas: se obtiene una fórmula exacta y precisa del área solicitada.
- Soluciones numéricas: se calcula de manera numérica una estimación o aproximación del área.

Analizando estos dos tipos de soluciones, se puede deducir de antemano que las soluciones algebraicas son mucho mejores que las soluciones numéricas dado que son más exactas. Pero en alguna ocasión se puede dar el caso en el que la obtención de las soluciones algebraicas es bastante dificultoso y latoso dada la complejidad de algunas funciones, por ello en estos casos es normal utilizar las soluciones numéricas que permiten ahorrar tiempo. Como ejemplo de ellos se tiene el Método de Simpson.

2.1. Método de Simpson

El método de Simpson consiste en usar polinomios de orden superior para conectar los puntos, concretamente de orden 2, es decir, de la forma: $ax^2 + bx + c$, de manera o con el fin de obtener una estimación más exacta de una integral.

Se les llama reglas de Simpson a las fórmulas que resultan de calcular la integral bajo estos polinomios.

En este procedimiento, se toma el intervalo de anchura $2h$, comprendido entre x_i y x_{i+2} , y se sustituye la función $f(x)$ por la parábola que pasa por los puntos (x_i, y_i) , (x_{i+1}, y_{i+1}) , y (x_{i+2}, y_{i+2}) .

2.2. Deducción del modelo a partir de la Ecuación de la parábola

Para demostrar el método de Simpson hay que asumir que cada sub área es un pequeño arco de parábola de la forma $ax^2 + bx + c$ cuyos límites son los siguientes: límite inferior en $-h$, límite superior en h y por ende la mitad de la sub área se encontrará en el punto 0, tal y como se ve en la figura 2.

Se procede a la integración de dicho arco de parábola entre los límites descritos:

$$\int_{-h}^h (ax^2 + bx + c) dx = \left[\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx \right]_{-h}^h$$

Si se reemplazan cada uno de los límites se obtiene lo siguiente:

$$\left[\frac{ah^3}{3} + \frac{bh^2}{2} + ch \right] - \left[-\frac{ah^3}{3} + \frac{bh^2}{2} - ch \right]$$

Si se quitan los corchetes se tiene que:

$$\frac{ah^3}{3} + \frac{bh^2}{2} + ch + \frac{ah^3}{3} - \frac{bh^2}{2} + ch = 2\frac{ah^3}{2ch}$$

Y si se simplifica obtenemos la ecuación 1 que se muestra a continuación:

Ecuación 1:

$$\int_{-h}^h (ax^2 + bx + c) dx = \frac{h}{3} [2ah^2 + 6c]$$

En la figura 3 se observa, respecto a las notaciones, las siguientes igualdades:

- $fx_i = y_i = f(-h)$
- $fx_{i+1} = y_{i+1} = f(0)$
- $fx_{i+2} = y_{i+2} = f(h)$

Entonces se podría obtener, evaluando la ecuación general $ax^2 + bx + c$ en cada uno de los puntos de la sub área $[-h, 0, h]$, el siguiente sistema de ecuaciones:

$f(-h) = ah^2 - bh + c$, se puede tomar esta altura como $y_0 = fx_i$.

$f(0) = c$, se toma esta altura como $y_1 = fx_{i+1}$.

$f(h) = ah^2 + bh + c$, y esta altura como $y_2 = fx_{i+2}$.

De lo anterior se puede deducir las siguientes dos ecuaciones:

Ecuación 2: $y_0 + y_2 = 2ah^2 + 2c$.

Ecuación 3: $y_i = c$.

Si se vuelve a la Ecuación 1 se ve que se puede expresar igualmente de la siguiente forma:

$$\text{Ecuación 4: } \int_{-h}^h (ax^2 + bx + c) dx = \frac{h}{3} [2ah^2 + 2c + 4c].$$

Si se reemplaza las ecuaciones 2 y 3 en la Ecuación 4 se obtiene que:

Ecuación 5: $\int_{-h}^h (ax^2 + bx + c) dx = \frac{h}{3} [y_0 + 4y_1 + y_2] = A_1$.

Ahora se interpreta la Ecuación 5 con base en la sub área seleccionada A_1 para el desarrollo del método de Simpson, se diría que el área del segmento es igual a la suma de la altura o función evaluada en el lado izquierdo más cuatro veces la función evaluada en la parte central de la sub área más la función evaluada en el lado derecho de la sub área, y todo ello multiplicado por el ancho del sub área y dividido por 3.

Si se toma a y b como x_0 y x_2 , y $f_i(x_i)$ se representa mediante un polinomio de Lagrange de segundo orden, luego la integral que quedaría sería la siguiente:

$$I = \int_{x_0}^{x_2} \left[\frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) + \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) + \frac{(x - x_1)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f(x_2) \right] dx$$

Después de integrar y de reordenar los términos, se obtiene como resultado la siguiente ecuación:

$$I = (b - a) \frac{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)}{6}$$

Capítulo 3

Procedimiento experimental

A continuación se procederá a describir detalladamente el experimento llevado a cabo. Se hablará de en qué consiste exactamente, en qué se basa y como se ha planteado su resolución. Seguidamente, se enumerará el material necesario para realizar la prueba. Otro apartado estará dedicado a mencionar los resultados que se han obtenido sin realizar ninguna objeción sobre la implicación de los mismos. Por último, se hará uso de los conocimientos expuestos en el capítulo 2 para poder analizar los datos que hemos obtenido y, así mismo, lo que ello supone.

3.1. Descripción de los experimentos

Para la realización del experimento se ha utilizado básicamente un editor de texto para escribir el código fuente de Python y un intérprete del mismo. El experimento consiste en la realización de un programa en Python que sea capaz de calcular el valor de una integral definida en un intervalo cerrado, que a su vez calcule su aproximación por el método de Simpson, halle los errores relativo y absoluto entre los dos valores obtenidos y realice la representación gráfica de la función que se desea integrar y la parábola generada por el método utilizado para su aproximación. Como hemos mencionado anteriormente, se ha trabajado con una función dada ($f(x) = \frac{1}{1+e^x}$) definida en el intervalo $x \in [1, 6]$.

Hay que considerar que la integral de f es $f'(x) = \ln e^x - \ln(e^x + 1)$ para poder resolver la integral y hallar el valor real del área. También debemos saber que la parábola que se ha de representar está formada por los puntos $f(a)$, $f(b)$ y $f(\frac{a+b}{2})$, por lo que la ecuación es $y = 0,0169x^2 - 0,17x + 0,422$.

3.2. Descripción del material

En cuestión al material empleado para realizar el experimento se ha utilizado un computador con un procesador Intel(R) Core(TM)2 Quad CPU Q6600 @ 2.40GHz 2.39 GHz y una memoria RAM de 3,00 GB. El sistema operativo que contenía el computador era Windows 7 Home Premium de 32 bits. Para escribir los códigos fuente de LaTeX se usaron los programas Texmaker y Kate (versiones 3.2 y 3.8.5, respectivamente) y para el código

fuelle de Python solamente se utilizó Kate. Además, para registrar los cambios realizados en el trabajo y subirlos a GitHub se hizo uso de Git (1.7.9.5). Como compiladores se empleó el intérprete de Python y el compilador de Tex.

3.3. Resultados obtenidos

bla, bla, etc.

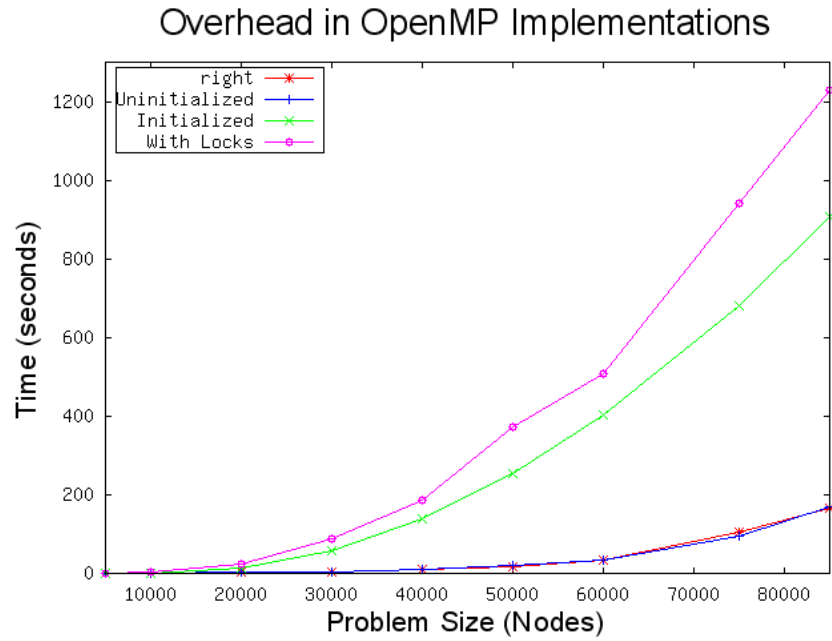


Figura 3.1: Ejemplo de figura

Tiempo (± 0.001 s)	Velocidad (± 0.1 m/s)
1.234	67.8
2.345	78.9
3.456	89.1
4.567	91.2

Cuadro 3.1: Resultados experimentales de tiempo (s) y velocidad (m/s)

3.4. Análisis de los resultados

bla, bla, etc.

Capítulo 4

Conclusiones

bla, bla, bla, etc.

Apéndice A

Título del Apéndice 1

A.1. Algoritmo XXX

```
#####  
# Fichero .py  
#####  
#  
# AUTORES  
#  
# FECHA  
#  
# DESCRIPCION  
#  
#####
```

A.2. Algoritmo YYY

```
/#####  
# Fichero .h  
#####  
#  
# AUTORES  
#  
# FECHA  
#  
# DESCRIPCION  
#  
#####
```

Apéndice B

Título del Apéndice 2

B.1. Otro apéndice: Sección 1

Texto

B.2. Otro apéndice: Sección 2

Texto

Bibliografía

- [1] Anita de Waard. A pragmatic structure for research articles. In *Proceedings of the 2nd international conference on Pragmatic web*, ICPW '07, pages 83–89, New York, NY, USA, 2007. ACM.
- [2] J. Gibaldi and Modern Language Association of America. *MLA handbook for writers of research papers*. Writing guides. Reference. Modern Language Association of America, 2009.
- [3] G.D. Gopen and J.A. Swan. The Science of Scientific Writing. *American Scientist*, 78(6):550–558, 1990.
- [4] Leslie Lamport. *LaTeX: A Document Preparation System*. Addison–Wesley Pub. Co., Reading, MA, 1986.
- [5] Coromoto León. *Diseño e implementación de lenguajes orientados al modelo PRAM*. PhD thesis, 1996.
- [6] Guido Rossum. Python library reference. Technical report, Amsterdam, The Netherlands, The Netherlands, 1995.
- [7] Guido Rossum. Python reference manual. Technical report, Amsterdam, The Netherlands, The Netherlands, 1995.
- [8] Guido Rossum. Python tutorial. Technical report, Amsterdam, The Netherlands, The Netherlands, 1995.
- [9] ACM LaTeX Style. http://www.acm.org/publications/latex_style/.