

Integración numérica de Simpson

Samuel Santos Lucas Castilla
Iván Trujillo Trujillo

Universidad de La Laguna

17 de mayo de 2013

Facultad de Matemáticas
Universidad de La Laguna

1 Motivación y Objetivos

1 Motivación y Objetivos

2 Fundamentos Teóricos

- Deducción del modelo a partir de la ecuación de la parábola

1 Motivación y Objetivos

2 Fundamentos Teóricos

- Deducción del modelo a partir de la ecuación de la parábola

3 Procedimiento experimental

- Descripción de los experimentos
- Descripción del material
- Resultados obtenidos
- Análisis de los resultados

1 Motivación y Objetivos

2 Fundamentos Teóricos

- Deducción del modelo a partir de la ecuación de la parábola

3 Procedimiento experimental

- Descripción de los experimentos
- Descripción del material
- Resultados obtenidos
- Análisis de los resultados

4 Conclusiones

Definición

...

Ejemplo

- Implementar un programa en Python que sea capaz de resolver el problema del cálculo del área bajo una función conocida en un intervalo cerrado.

Ejemplo

- Implementar un programa en Python que sea capaz de resolver el problema del cálculo del área bajo una función conocida en un intervalo cerrado.
- Entender los conceptos básicos de la integración aproximada empleando el método de Simpson, para posteriormente, saber emplearlos en Python.

El método de Simpson se trata de un procedimiento por el cual se obtiene una estimación más exacta de una integral. Para ello se utilizan polinomios de orden superior para conectar los puntos, concretamente de orden 2, es decir, de la forma: $ax^2 + bx + c$.

En este procedimiento, se toma el intervalo de anchura $2h$, comprendido entre x_i y x_{i+2} , y se sustituye la función $f(x)$ por la parábola que pasa por los puntos (x_i, y_i) , (x_{i+1}, y_{i+1}) , y (x_{i+2}, y_{i+2}) .

Fundamentos Teóricos

Para demostrar el método de Simpson hay que asumir que cada sub área es un pequeño arco de parábola de la forma $ax^2 + bx + c$ cuyos límites son los siguientes: límite inferior en $-h$, límite superior en h y por ende la mitad de la sub área se encontrará en el punto 0, tal y como se ve en la figura 2. Se procede a la integración de dicho arco de parábola entre los límites descritos:

$$\int_{-h}^h (ax^2 + bx + c) dx = \left[\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx \right]_{-h}^h$$

Si se reemplazan cada uno de los límites y se quitan los corchetes se obtiene lo siguiente:

$$\frac{ah^3}{3} + \frac{bh^2}{2} + ch + \frac{ah^3}{3} - \frac{bh^2}{2} + ch = 2\frac{ah^3}{3} + 2ch$$

Y si se simplifica obtenemos la ecuación 1 que se muestra a continuación:
Ecuación 1:

$$\int_{-h}^h (ax^2 + bx + c) dx = \frac{h}{3} [2ah^2 + 6c]$$

En la figura 3 se observa, respecto a las notaciones, las siguientes igualdades:

- $f x_i = y_i = f(-h)$

En la figura 3 se observa, respecto a las notaciones, las siguientes igualdades:

- $fx_i = y_i = f(-h)$
- $fx_{i+1} = y_{i+1} = f(0)$

En la figura 3 se observa, respecto a las notaciones, las siguientes igualdades:

- $f x_i = y_i = f(-h)$
- $f x_{i+1} = y_{i+1} = f(0)$
- $f x_{i+2} = y_{i+2} = f(h)$

En la figura 3 se observa, respecto a las notaciones, las siguientes igualdades:

- $fx_i = y_i = f(-h)$
- $fx_{i+1} = y_{i+1} = f(0)$
- $fx_{i+2} = y_{i+2} = f(h)$

Entonces se podría obtener, evaluando la ecuación general $ax^2 + bx + c$ en cada uno de los puntos de la sub área $[-h,0,h]$, el siguiente sistema de ecuaciones:

$f(-h) = ah^2 - bh + c$, se puede tomar esta altura como $y_0 = fx_i$.

$f(0) = c$, se toma esta altura como $y_1 = fx_{i+1}$.

$f(h) = ah^2 + bh + c$, y esta altura como $y_2 = fx_{i+2}$.

De lo anterior se puede deducir las siguientes dos ecuaciones:

Ecuación 2: $y_0 + y_2 = 2ah^2 + 2c$.

Ecuación 3: $y_i = c$.

Si se vuelve a la Ecuación 1 se ve que se puede expresar igualmente de la siguiente forma:

Ecuación 4: $\int_{-h}^h (ax^2 + bx + c) dx = \frac{h}{3} [2ah^2 + 2c + 4c]$.

Si se reemplaza las ecuaciones 2 y 3 en la Ecuación 4 se obtiene que:

Ecuación 5: $\int_{-h}^h (ax^2 + bx + c) dx = \frac{h}{3} [y_0 + 4y_1 + y_2] = A_1$.

Ahora se interpreta la Ecuación 5 con base en la sub área seleccionada A_1 para el desarrollo del método de Simpson, se diría que el área del segmento es igual a la suma de la altura o función evaluada en el lado izquierdo más cuatro veces la función evaluada en la parte central de la sub área más la función evaluada en el lado derecho de la sub área, y todo ello multiplicado por el ancho del sub área y dividido por 3.

Si se toma a y b como x_0 y x_2 , y $f_i(x_i)$ se representa mediante un polinomio de Lagrange de segundo orden, luego la integral que quedaría sería la siguiente:

$$I = \int_{x_0}^{x_2} \left[\frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) + \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) + \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f(x_2) \right] dx$$

Después de integrar y de reordenar los términos, se obtiene como resultado la siguiente ecuación:

$$I = (b - a) \frac{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)}{6}$$

A continuación se procederá a describir el experimento realizado, los materiales empleados para su realización, los resultados obtenidos y a analizar dichos resultados.

Descripción de los experimentos

En este experimentos se lleva a cabo la implementación e interpretación de un programa en Python que este capacitado para calcular el valor de una integral definida en un intervalo cerrado, una aproximación por el método de Simpson, halle los errores relativo y absoluto entre los dos valores obtenidos y realice la representación gráfica de la función que se desea integrar y la parábola generada por el método utilizado para su aproximación.

❶ La función con la que se ha trabajado es: $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$.

Descripción de los experimentos

En este experimentos se lleva a cabo la implementación e interpretación de un programa en Python que este capacitado para calcular el valor de una integral definida en un intervalo cerrado, una aproximación por el método de Simpson, halle los errores relativo y absoluto entre los dos valores obtenidos y realice la representación gráfica de la función que se desea integrar y la parábola generada por el método utilizado para su aproximación.

- 1 La función con la que se ha trabajado es: $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$.
- 2 Y el intervalo en la se definine es: $x \in [1, 6]$.

Descripción de los experimentos

En este experimentos se lleva a cabo la implementación e interpretación de un programa en Python que este capacitado para calcular el valor de una integral definida en un intervalo cerrado, una aproximación por el método de Simpson, halle los errores relativo y absoluto entre los dos valores obtenidos y realice la representación gráfica de la función que se desea integrar y la parábola generada por el método utilizado para su aproximación.

- 1 La función con la que se ha trabajado es: $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$.
- 2 Y el intervalo en la se define es: $x \in [1, 6]$.
- 3 Consideremos $f'(x)$ como $\ln e^x - \ln(e^x + 1)$

Descripción de los experimentos

En este experimentos se lleva a cabo la implementación e interpretación de un programa en Python que este capacitado para calcular el valor de una integral definida en un intervalo cerrado, una aproximación por el método de Simpson, halle los errores relativo y absoluto entre los dos valores obtenidos y realice la representación gráfica de la función que se desea integrar y la parábola generada por el método utilizado para su aproximación.

- ① La función con la que se ha trabajado es: $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$.
- ② Y el intervalo en la se define es: $x \in [1, 6]$.
- ③ Consideremos $f'(x)$ como $\ln e^x - \ln(e^x + 1)$
- ④ La parábola ha representar viene dado por los puntos:
 - ① $f(a)$

Descripción de los experimentos

En este experimentos se lleva a cabo la implementación e interpretación de un programa en Python que este capacitado para calcular el valor de una integral definida en un intervalo cerrado, una aproximación por el método de Simpson, halle los errores relativo y absoluto entre los dos valores obtenidos y realice la representación gráfica de la función que se desea integrar y la parábola generada por el método utilizado para su aproximación.

- ① La función con la que se ha trabajado es: $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$.
- ② Y el intervalo en la se define es: $x \in [1, 6]$.
- ③ Consideremos $f'(x)$ como $\ln e^x - \ln(e^x + 1)$
- ④ La parábola ha representar viene dado por los puntos:
 - ① $f(a)$
 - ② $f(b)$

Descripción de los experimentos

En este experimentos se lleva a cabo la implementación e interpretación de un programa en Python que este capacitado para calcular el valor de una integral definida en un intervalo cerrado, una aproximación por el método de Simpson, halle los errores relativo y absoluto entre los dos valores obtenidos y realice la representación gráfica de la función que se desea integrar y la parábola generada por el método utilizado para su aproximación.

- ❶ La función con la que se ha trabajado es: $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$.
- ❷ Y el intervalo en la se define es: $x \in [1, 6]$.
- ❸ Consideremos $f'(x)$ como $\ln e^x - \ln(e^x + 1)$
- ❹ La parábola ha representar viene dado por los puntos:
 - ❶ $f(a)$
 - ❷ $f(b)$
 - ❸ $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

Descripción de los experimentos

En este experimentos se lleva a cabo la implementación e interpretación de un programa en Python que este capacitado para calcular el valor de una integral definida en un intervalo cerrado, una aproximación por el método de Simpson, halle los errores relativo y absoluto entre los dos valores obtenidos y realice la representación gráfica de la función que se desea integrar y la parábola generada por el método utilizado para su aproximación.

- ① La función con la que se ha trabajado es: $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$.
- ② Y el intervalo en la se define es: $x \in [1, 6]$.
- ③ Consideremos $f'(x)$ como $\ln e^x - \ln(e^x + 1)$
- ④ La parábola ha representar viene dado por los puntos:
 - ① $f(a)$
 - ② $f(b)$
 - ③ $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$
- ⑤ Por tanto, la ecuación obtenida es: $y = 0,0169x^2 - 0,17x + 0,422$

Ejemplo

- 1 *Descripción del hardware*

Ejemplo

- 1 *Descripción del hardware*
- 2 *Descripción del software*

Resultados obtenidos

Tiempo (± 0.001 s)	Velocidad (± 0.1 m/s)
1.234	67.8
2.345	78.9
3.456	89.1
4.567	91.2

Cuadro: Resultados experimentales de tiempo (s) y velocidad (m/s)

Overhead in OpenMP Implementations

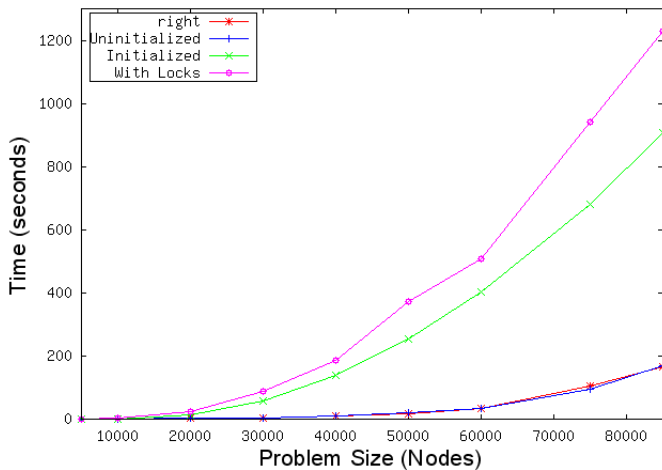


Figura: Ejemplo de figura

Ejemplo

❶ *Conclusión 1*

Ejemplo

- 1 *Conclusión 1*
- 2 *Conclusión 2*

Documento de verificación del grado. (2011)

Guía docente. (2013)

[http : //eguia.ull.es/matematicas/query.php?codigo = 299341201](http://eguia.ull.es/matematicas/query.php?codigo=299341201)

CTAN. [http : //www.ctan.org/](http://www.ctan.org/)

Tantau, Till. *User's Guide to the BEAMER Class, Version 3.06, 2005*

[http : //ctang.tug.org/tex – archive/macros/latex/contrib/beamer](http://ctang.tug.org/tex-archive/macros/latex/contrib/beamer)