Método de Simpson
Integración numérica

Iván Trujillo Trujillo
Samuel Santos Lucas Castilla

Grupo 2J

Técnicas Experimentales. 1^{er} *curso.* 2^{do} *cuatrimestre*

Lenguajes y Sistemas Informáticos

Facultad de Matemáticas

Universidad de La Laguna

La Laguna, 14 de mayo de 2013

Índice general

Índice de figuras

Índice de cuadros

Capítulo 1

Motivación y objetivos

El objetivo principal de este trabajo es implementar un programa en Python que sea capaz de resolver el problema del cálculo del área bajo una función conocida en un intervalo cerrado.

Para llevar a cabo este proyecto debemos hacer uso de la integración numérica utilizando el método de Simpson, teniendo en cuenta los siguientes aspectos:

1. Debemos comprender los conceptos básicos de la integración aproximada empleando el método de Simpson.

2. Debemos valorar el error producido entre el valor real y la aproximación obtenida.

3. Debemos analizar las representaciones gráficas de la función estudiada y de la parábola hallada por el método de Simpson.

1.1. Objetivos específicos

Se realizará el experimento con una función conocida y definida en intervalos cerrados. La función dada es:

$$f(x) = \frac{1}{1+e^x}, \quad x \in [1,6]$$

Capítulo 2

Fundamentos teóricos

Hay que mencionar que el cálculo de áreas es uno de los problemas que más frecuentemente se le presentan a los matemáticos. Para la realización de este cálculo se tiene que hacer uso de una función f(x), el eje x y los límites a y b.Por ejemplo, para realizar el cálculo del área que se observa en la figura 1 hay que recalcar previamente que dicha área se encuentra comprendida entre los límites a y b, y por debajo de la función f(x).

Para dicha resolcuión se parte de que se conoce la función f(x) y los valores de a y b, considerando a tales valores, el límite inferior y el límite superior, respectivamente. Tras aver realizado dicho cálculo se puede llegar a obtener dos tipos de soluciones:

Para dicha resolución se parte de que se conoce la función f(x) y los valores de a y b, considerando a tales valores, el límite inferior y el límite superior, respectivamente. Tras haber realizado dicho cálculo se puede llegar a obtener dos tipos de soluciones:

- Soluciones algebraicas: se obtiene una fórmula exacta y precisa del área solicitada.

- Soluciones numéricas: se calcula de manera numérica una estimación o aproximacion del área.

Analizando estos dos tipos de soluciones, se puede deducir de antemano que las soluciones algebraicas son mucho mejores que las soluciones numéricas doado que son más exactas. Pero en alguna ocación se puede dar el caso en el que la obtención de las soluciones algebraicas es bastante dificultoso y latoso dada la complejidad de algunas funciones, por ello en estos casos es normal utilizar las soluciones numéricas que permiten ahorrar tiempo. Como ejemplo de ello se tiene el Método de Simpson.

Analizando estos dos tipos de soluciones, se puede deducir de antemano que las soluciones algebraicas son mucho mejores que las soluciones numéricas dado que son más exactas. Pero en alguna ocasión se puede dar el caso en el que la obtención de las soluciones algebraicas es bastante dificultoso y latoso dada la complejidad de algunas funciones, por ello en estos casos es normal utilizar las soluciones numéricas que permiten ahorrar tiempo. Como ejemplo de ellos se tine el Método de Simpson.

2.1. Método de Simpson

El método de Simpson consiste en usar polinomios de orden superior para conectar los puntos, concretamente de orden 2, es decir, de la forma: $ax^2 + bx + c$, de manera o con el fin de obtener una estimación más exacta de una integral.

Se les llama reglas de Simpson a las fórmulas que resultan de calcular la integral bajo estos polinomios.

En este procedimiento, se toma el intervalo de anchura 2h, comprendido entre x_i y x_{i+2}, y se sustituye la funcion f(x) por la parábola que pasa por los puntos (x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1}), y (x_{i+2}, y_{i+2}).

2.2. Deducción del modelo a partir de la Ecuación de la parábola

Para demostrar el método de Simpson hay que asumir que cada sub área es un pequeño arco de parábola de la forma $ax^2 + bx + c$ cuyos límites son los siguientes: límite inferior en -h , límite superior en h y por ende la mitad de la sub área se encontrará en el punto 0, tal y como se ve en la figura 2.

Se procede a la integración de dicho arco de parábola entre los límites descritos:

$$\int_{-h}^{h} \left(\mathrm{a}x^2 + \mathrm{b}x + \mathrm{c}\right) \mathrm{d}x = \left[\frac{\mathrm{a}x^3}{3} + \frac{\mathrm{b}x^2}{2} + \mathrm{c}x\right]_{-h}^{h}$$

Si se reemplazan cada uno de los límites se obtiene lo siguiente:

$$\left[\frac{\mathrm{ah}^3}{3} + \frac{\mathrm{bh}^2}{2} + \mathrm{ch}\right] - \left[-\frac{\mathrm{ah}^3}{3} + \frac{\mathrm{bh}^2}{2} - \mathrm{ch}\right]$$

Si se quitan los corchetes se tiene que:

$$\frac{\mathrm{ah}^3}{3} + \frac{\mathrm{bh}^2}{2} + \mathrm{ch} + \frac{\mathrm{ah}^3}{3} - \frac{\mathrm{bh}^2}{2} + \mathrm{ch} = 2\frac{\mathrm{ah}^3}{2\mathrm{ch}}$$

Y si se simplifica obtenemos la ecuación 1 que se muestra a continuación:

Ecuación 1:

$$\int_{-h}^{h} \left((\mathrm{a}x^2 + \mathrm{b}x + \mathrm{c}\right) \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{h}}{3}\left[2\mathrm{ah}^2 + 6\mathrm{c}\right]$$

En la figura 3 se observa, respecto a las notaciones, las siguientes igualdades:

- $\mathrm{f}x_i = y_i =$ f(-h)
- $\mathrm{f}x_{i+1} = y_{i+1} =$ f(0)
- $\mathrm{f}x_{i+2} = y_{i+2} =$ f(h)

Entonces se podría obtener, evaluando la ecuación general $\mathrm{a}x^2 + \mathrm{b}x + \mathrm{c}$ en cada uno de los puntos de la sub área [-h,0,h], el siguiente sistema de ecuaciones:

f(-h) $= \mathrm{ah}^2 - \mathrm{bh} + \mathrm{c}$, se puede tomar esta altura como $y_0 = \mathrm{f}x_i$.

f(0) = c, se toma esta altura como $y_1 = \mathrm{f}x_{i+1}$.

f(h) $= \mathrm{ah}^2 + \mathrm{bh} + \mathrm{c}$, y esta altura como $y_2 = \mathrm{f}x_{i+2}$.

De lo anterior se puede deducir las siguientes dos ecuaciones:

Ecuación 2: $y_0 + y_2 = 2\mathrm{ah}^2 + 2\mathrm{c}$.

Ecuación 3: $y_i = \mathrm{c}$.

Si se vuelve a la Ecuación 1 se ve que se puede expresar igualmente de la siguiente forma:

Ecuación 4: $\int_{-h}^{h} (\mathrm{a}x^2 + \mathrm{b}x + \mathrm{c})\, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{h}}{3}\left[2\mathrm{ah}^2 + 2\mathrm{c} + 4\mathrm{c}\right]$.

Si se remplaza las ecuanciones 2 y 3 en la Ecuación 4 se obtiene que:

Ecuación 5: $\int_{-h}^{h} (\mathrm{a}x^2 + \mathrm{b}x + \mathrm{c})\, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{h}}{3}[y_0 + 4y_1 + y_2] = \mathrm{A}_1$.

Ahora se interpreta la Ecuación 5 con base en la sub área seleccionada A_1 para el desarrollo del método de Simpson, se diría que el área del segmento es igual a la suma de la altura o función evaluada en el lado izquierdo más cuatro veces la función evaluada en la parte central de la sub área más la función evaluada en el lado derecho de la sub área, y todo ello multiplicado por el ancho del sub área y dividido por 3.

Si se toma a y b como x_0 y x_2, y $\mathrm{f}_i\,(x_i)$ se representa mediante un polinomio de Lagrange de segundo orden, luego la integral que quedaría sería la siguiente:

$$\mathrm{I} = \int_{x_0}^{x_2} \left[\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}\mathrm{f}(x_0) + \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}\mathrm{f}(x_1) + \frac{(x-x_1)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}\mathrm{f}(x_2)\right] \mathrm{d}x$$

Después de integrar y de reordenar los términos, se obtiene como resultado la siguiente ecuación:

$$\mathrm{I} = (\mathrm{b}-\mathrm{a})\,\frac{\mathrm{f}\,(x_0) + 4\mathrm{f}\,(x_1) + \mathrm{f}\,(x_2)}{6}$$

Capítulo 3

Procedimiento experimental

A continuación se procederá a describir detalladamente el experimento llevado a cabo. Se hablará de en qué consiste exactamente, en qué se basa y como se ha planteado su resolución. Seguidamente, se enumerará el material necesario para realizar la prueba. Otro apartado estará dedicado a mencionar los resultados que se han obtenido sin realizar ninguna objeción sobre la implicación de los mismos. Por último, se hará uso de los conocimientos expuestos en el capítulo 2 para poder analizar los datos que hemos obtenido y, así mismo, lo que ello supone.

3.1. Descripción de los experimentos

Para la realización del experimento se ha utilizado básicamente un editor de texto para escribir el código fuente de Python y un intérprete del mismo. El experimento consiste en la realización de un programa en Python que sea capaz de calcular el valor de una integral definida en un intervalo cerrado, que a su vez calcule su aproximación por el método de Simpson, halle los errores relativo y absoluto entre los dos valores obtenidos y realice la representación gráfica de la función que se desea integrar y la parábola generada por el método utilizado para su aproximación. Como hemos mencionado anteriormente, se ha trabajado con una función dada ($f(x) = \frac{1}{1+e^x}$) definida en el intervalo $x \in [1, 6]$.

Hay que considerar que la integral de f es $f'(x) = \ln e^x - \ln(e^x + 1)$ para poder resolver la integral y hallar el valor real del área. También debemos saber que la parábola que se ha de representar está formada por los puntos f(a),f(b) y f($\frac{a+b}{2}$), por lo que la ecuación es $y = 0{,}0169x^2 - 0{,}17x + 0{,}422$.

El programa en Python se ha dividido en dos módulos: uno para el cálculo de la integral y el análisis del error y otro para la representación gráfica. En el primero se han definido varias funciones para evaluar la función, su integral y la parábola, además de para hallar el a?ea real y aproximada y calcular los errores. Si se ejecuta este módulo se podrá obtener cada uno de los parámetros mencionados.

En el segundo módulo se han importado las funciones del primero para poder utilizar algunas. Si se ejecuta, se define x como una lista de 20 valores aleatorios comprendidos entre 1 y 6 y, a partir de este, se crean dos listas más con los valores correspondientes a la función y a la parábola. Se imprime una tabla con los valores de estas tres listas. Por último, se dibuja en un sólo lienzo la función y la parábola ayudándonos de las listas y se guarda el resultado.

3.2. Descripción del material

En cuestión al material empleado para realizar el experimento se ha utilizado un computador con un procesador Intel(R) Core(TM)2 Quad CPU Q6600 @ 2.40GHz 2.39 GHz y una memoria RAM de 3,00 GB. El sistema operativo que contenía el computador era Bardinux 3.4 Beta3 de 32 bits. Para escribir los códigos fuente de LaTeX se usaron los programas Texmaker y Kate (versiones 3.2 y 3.8.5, respectivamente) y para el código fuente de Python solamente se utilizó Kate. Además, para registrar los cambios realizados en el trabajo y subirlos a GitHub se hizo uso de Git (1.7.9.5). Como compiladores se empleó el intérprete de Python (2.7.3) y el compilador de Tex (pdfTeX 3.1415926-1.40.10-2.2 (TeX Live 2009/Debian)).

3.3. Resultados obtenidos

Antes de detallar los resultados cabe destacar los valores de x utilizados para la elaboración del experimento. Los valores aleatorios obtenidos en una de las ejecuciones y sus correspondientes imágenes se han incorporado en el Cuadro 3.1.

Como se observa, las imágenes obtenidas en x=1, x=3.5 y x=6 para las dos funciones son aproximadamente iguales.

La gráfica que se ha obtenido corresponde a la Figura 3.1.

Por otra parte, en el primer módulo, se ha obtenido que el área real por debajo de la función vale 0.3107860 unidades cuadradas mientras que el valor aproximado por el método Simpson vale 0.3238858 unidades cuadradas. Tras realizar el cálculo de los errores se ha calculado que el error absoluto es 0.0130998039 y el error relativo es 0.0421505595.

3.4. Análisis de los resultados

En primer lugar se debe apreciar que la ecuación de la parábola es una aproximación ya que las imágenes de la función en los puntos x=1, x=3.5 y x=6 son números irracionales que fueron aproximados para una mejor utilización posteriormente. Por ello, las verdaderas imágenes de la parábola no son las obtenidas. También, si analizamos la representación gráfica se observa que las dos curvas son muy parecidas (se debe tener en cuenta que se han representado los valores en el intervalo [-0.1, 0.4] en el eje Y). Este hecho se origina al ser la función tratada una curva de dibujo similar a una parábola, por lo tanto, al aplicar el método de Simpson y trazar la parábola que se produce se ve que la diferencia de la curvatura es mínima. Esto se traduce en una aproximación considerablemente exacta, es decir, con un error prácticamente nulo.

En relación a los datos obtenidos de la integral y su aproximación se puede comprobar que lo expuesto en el párrafo anterior es cierto. Se ha obtenido un error absoluto muy

Valores de x	**Y(funcion)**	**Y(parabola)**
1.0000	0.2689	0.2689
1.2631	0.2204	0.2338
1.5263	0.1785	0.2011
1.7895	0.1431	0.1707
2.0526	0.1137	0.1427
2.3158	0.0898	0.1169
2.5789	0.0705	0.0935
2.8421	0.0551	0.0725
3.1052	0.0428	0.0538
3.3684	0.0333	0.0374
3.6316	0.0258	0.0233
3.8947	0.0199	0.0116
4.1579	0.0154	0.0023
4.4211	0.0119	-0.0048
4.6842	0.0092	-0.0095
4.9474	0.0071	-0.0119
5.2105	0.0054	-0.0120
5.4737	0.0042	-0.0096
5.7368	0.0032	-0.0050
6.0000	0.0025	0.0025

Cuadro 3.1: Valores de x escogidos para la representacion y sus imagenes correspondientes para la funcion y la parabola.

cercano a cero, igual que el error relativo. Esto se explica por la curvatura de la función estudiada.

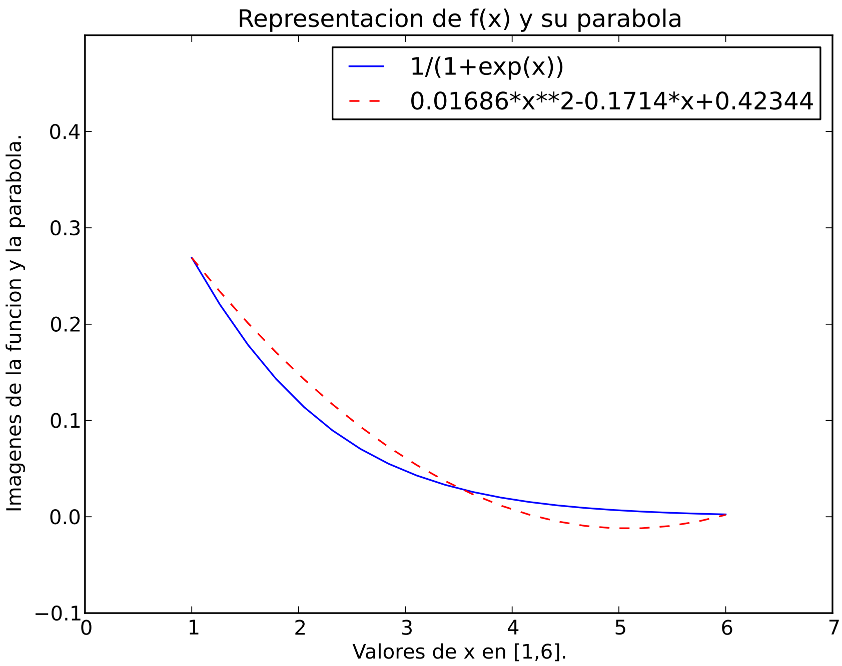

Figura 3.1: Gráfica de la función y su parábola

Capítulo 4

Conclusiones

- El mÃ©todo de Simpson es muy Ãºtil para funciones con una curva similar a una parÃ¡bola en un intervalo cerrado.
- El mÃ©todo de Simpson produce una mala aproximacion si la funcion en el intervalo cerrado presenta una recta o mÃ¡s de una curva.
- El mÃ©todo de Simpson facilita en gran medida la integracion de funciones muy difÃciles de resolver por otros mÃ©todos.
- El mÃ©todo de Simpson es fÃ¡cil de aplicar ya que solo hace falta utilizar una formula y hallar las imÃ¡genes de la funcion en tres puntos diferentes.
- El mÃ©todo de Simpson puede ser utilizado para comprobar el resultado de una integracion y sabemos que el error es mÃnimo.
- El mÃ©todo de Simpson es algo complicado de demostrar si no se tienen cierto conocimientos matemÃ¡ticos, por eso suele ser un mÃ©todo mÃ¡s sistemÃ¡tico.

Apéndice A

Programa en Python

A.1. Algoritmo para el calculo de area

```
####################################################################################
# Integracion_Simpson.py
####################################################################################
#
# AUTORES:
#  Ivan Trujillo Trujillo
#  Samuel Santos Lucas Castilla
#
# FECHA: 10 de mayo de 2013
#
# DESCRIPCION
#
#  !/usr/bin/python
#
#  from math import *
#
#  def ev_funcion(x):
#    return 1/(1+exp(x))
#
#  def ev_parabola(x):
#    return 0.01686*x**2-0.1714*x+0.42344
#
#  def ev_funcion_int(x):
#  return log(exp(x))-log(exp(x)+1)
#
#  def int_real(a, b):
#    return ev_funcion_int(b)-ev_funcion_int(a)
#
#  def int_simpson(a, b):
#    return ((b-a)/6)*(ev_funcion(a)+4*ev_funcion((a+b)/2)+ev_funcion(b))
#
#  def error_abs(a, b):
#    return abs(int_real(a,b)-int_simpson(a,b))
#
#  def error_rel(a, b):
```

```
#    return abs(int_real(a,b)-int_simpson(a,b))/abs(int_real(a,b))
#
#  if __name__ == '__main__':
#    funcion='1/(1+exp(x))'
#    a=1.0
#    b=6.0
#
#
#    print ("La integral definida entre %.1f y %.1f de %s es realmente %.7f unidades cuadradas." %
#    (a,b,funcion,int_real(a,b)))
#    print ("La integral definida entre %.1f y %.1f de %s es aproximadamente %.7f unidades cuadradas
#    por el metodo de Simpson." % (a,b,funcion,int_simpson(a,b)))
#    print ("El error absoluto entre los dos calculos es %.10f." % error_abs(a, b))
#    print ("El error relativo entre los dos calculos es %.10f." % error_rel(a, b))
#
#
####################################################################################
```

A.2. Algoritmo para la representacion grafica

```
/####################################################################################
 # Integracion_Simpson_representacion.py
 ####################################################################################
 #
 # AUTORES:
 #  Ivan Trujillo Trujillo
 #  Samuel Santos Lucas Castilla
 #
 # FECHA: 13 de mayo de 2013
 #
 # DESCRIPCION: Representacion de una funcion y la parabola formada para el metodo de Simpson
 #
 #  !/usr/bin/python
 #
 #  from matplotlib.pylab import *
 #  from Integracion_Simpson import *
 #
 #  if __name__ == '__main__':
 #
 #   expr_f = '1/(1+exp(x))'
 #   expr_p = '0.01686*x**2-0.1714*x+0.42344'
 #
 #   x = linspace(1,6,20)
 #
 #   y_f = zeros(len(x))
 #   j=0
 #   for i in x:
 #      y_f[j] = ev_funcion(i)
 #      j+=1
 #
 #   y_p = zeros(len(x))
 #   j=0
 #   for i in x:
```

```
#       y_p[j] = ev_parabola(i)
#       j+=1
#
#    print '\n    X:          Y(funcion):          Y(parabola):'
#    for i in range(len(x)):
#      print (" %5f %15f %20f" % (x[i], y_f[i], y_p[i]))
#
#    plot(x, y_f, 'b', x, y_p, 'r--')
#    xlim(0, 7)
#    ylim(-0.1, 0.5)
#    xlabel('Valores de x en [1,6].')
#    ylabel('Imagenes de la funcion y la parabola.')
#    title('Representacion de f(x) y su parabola')
#    legend([expr_f, expr_p])
#
#    savefig('rep_funcion.eps')
#
#    show()
#
#
################################################################################
```

Bibliografía

[1] Anita de Waard. A pragmatic structure for research articles. In *Proceedings of the 2nd international conference on Pragmatic web*, ICPW '07, pages 83–89, New York, NY, USA, 2007. ACM.

[2] J. Gibaldi and Modern Language Association of America. *MLA handbook for writers of research papers*. Writing guides. Reference. Modern Language Association of America, 2009.

[3] G.D. Gopen and J.A. Swan. The Science of Scientific Writing. *American Scientist*, 78(6):550–558, 1990.

[4] Leslie Lamport. *LaTeX: A Document Preparation System*. Addison–Wesley Pub. Co., Reading, MA, 1986.

[5] Coromoto León. *Diseño e implementación de lenguajes orientados al modelo PRAM*. PhD thesis, 1996.

[6] Guido Rossum. Python library reference. Technical report, Amsterdam, The Netherlands, The Netherlands, 1995.

[7] Guido Rossum. Python reference manual. Technical report, Amsterdam, The Netherlands, The Netherlands, 1995.

[8] Guido Rossum. Python tutorial. Technical report, Amsterdam, The Netherlands, The Netherlands, 1995.

[9] ACM LaTeX Style. http://www.acm.org/publications/latex_style/.