

Series de potencias de Taylor: $\ln(x)$

Yoselin Armas Ramos y Bianca E. Kennedy Giménez

Universidad de La Laguna

16 de Mayo de 2014

Facultad de Matemáticas
Universidad de La Laguna

1 Motivación y Objetivos

- 1 Motivación y Objetivos
- 2 Fundamentos Teóricos
 - Historia
 - Series de Taylor

- 1 Motivación y Objetivos
- 2 Fundamentos Teóricos
 - Historia
 - Series de Taylor
- 3 Aplicación de la serie de Taylor de $\ln(x)$

- 1 Motivación y Objetivos
- 2 Fundamentos Teóricos
 - Historia
 - Series de Taylor
- 3 Aplicación de la serie de Taylor de $\ln(x)$
- 4 Procedimiento experimental
 - Descripción de los experimentos
 - Descripción del material

- 1 Motivación y Objetivos
- 2 Fundamentos Teóricos
 - Historia
 - Series de Taylor
- 3 Aplicación de la serie de Taylor de $\ln(x)$
- 4 Procedimiento experimental
 - Descripción de los experimentos
 - Descripción del material
- 5 Resultados obtenidos
 - Variación del centro
 - Variación del punto
 - Variación del grado
 - Tiempo
 - Análisis de los resultados

- 1 Motivación y Objetivos
- 2 Fundamentos Teóricos
 - Historia
 - Series de Taylor
- 3 Aplicación de la serie de Taylor de $\ln(x)$
- 4 Procedimiento experimental
 - Descripción de los experimentos
 - Descripción del material
- 5 Resultados obtenidos
 - Variación del centro
 - Variación del punto
 - Variación del grado
 - Tiempo
 - Análisis de los resultados
- 6 Conclusiones

- 1 Motivación y Objetivos
- 2 Fundamentos Teóricos
 - Historia
 - Series de Taylor
- 3 Aplicación de la serie de Taylor de $\ln(x)$
- 4 Procedimiento experimental
 - Descripción de los experimentos
 - Descripción del material
- 5 Resultados obtenidos
 - Variación del centro
 - Variación del punto
 - Variación del grado
 - Tiempo
 - Análisis de los resultados
- 6 Conclusiones
- 7 Conclusiones

Definición

El objetivo de esta práctica es demostrar los conocimientos adquiridos en Latex, Beamer y Python en el transcurso de la asignatura de Técnicas Experimentales.

- L^AT_EX

Definición

El objetivo de esta práctica es demostrar los conocimientos adquiridos en Latex, Beamer y Python en el transcurso de la asignatura de Técnicas Experimentales.

- \LaTeX
- Beamer

Definición

El objetivo de esta práctica es demostrar los conocimientos adquiridos en Latex, Beamer y Python en el transcurso de la asignatura de Técnicas Experimentales.

- \LaTeX
- Beamer
- Python

Definición

El objetivo de esta práctica es demostrar los conocimientos adquiridos en Latex, Beamer y Python en el transcurso de la asignatura de Técnicas Experimentales.

- \LaTeX
- Beamer
- Python

Objetivos

- Aplicaremos los programas ya mencionados en la realización de un informe sobre la función logaritmo neperiano y su desarrollo de Taylor.
- implementaremos un programa en Python que nos ayudará a realizar varios experimentos para respaldar nuestras afirmaciones sobre el tema planteado.

- El filósofo griego Zenón y sus paradojas.
- Revolución filosófica.
- Siglo VXI, Madhava de Sangamagrama y los primeros usos de la serie de Taylor.
- James Gregory y su interés por las Series de Taylor, series de Maclaurin.
- En el siglo XVIII ,el matemático británico Brook Taylor presentó de manera formal el Desarrollo de Taylor.



Figura: Brook Taylor

- El desarrollo de Taylor parte de una serie infinita y da como resultado un resultado finito.
- Polinomio de Taylor:

$$P_{(n,a)} = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Logaritmo Neperiano

Estudiando los fenómenos de crecimiento y decrecimiento en la naturaleza, se observó que con frecuencia aprecián potencias de un número irracional al que se llamo “e”, cuyo valor aproximado es:

$$e \approx 2,7182818284590452353602874713527.$$

Para estudiar estos fenómenos se aplicaban los logaritmos y sus propiedades, en concreto el logaritmo en base “e”, también llamado “logaritmo neperiano”.

$$\ln(x) = \log_e(x)$$

Aplicación de la serie de Taylor de $\ln(x)$

Se aplica el desarrollo de Taylor de manera general, donde:

$$n = \text{grado}, a = \text{valor}, f^t(a) = \frac{b}{a^t} (1 < t < n)$$

Sea $f(x) = \ln(x)$:

- ① Se calcula la imagen: $f(a) = \ln(a)$
- ② Se calcula la primera derivada y su imagen: $f'(a) = \frac{1}{a}$
- ③ Se calcula la segunda derivada y su imagen: $f''(a) = \frac{-1}{a^2}$
- ④ Se calcula la tercera derivada y su imagen: $f'''(a) = \frac{2}{a^3}$
- ⑤ Calculamos la enésima derivada y su imagen: $f^n(a) = \frac{(n-1) \cdot (-b)}{a^{(n)}} .$

Entonces,

$$P_{(n,a)} = \ln(a) + \frac{1}{a}(x-a) + \frac{-1}{2!}a^2(x-a)^2 + \dots + \frac{\frac{(n-1) \cdot (-b)}{a^{(n)}}}{n!}(x-a)^n .$$

Procedimiento experimental

- 1 Fijamos el grado de la Serie de Taylor($n=10$), el punto en el que deseamos que se aplique ($x=4$) y variamos el centro.
- 2 Fijamos el grado de la Serie de Taylor ($n=8$), el centro ($c=6$) y variamos el punto en el que deseamos que se aplique.
- 3 Fijamos el centro($c=1$) , el punto en el que deseamos que se aplique la aproximación ($x=2$) y variamos el grado.

Todos los experimentos realizados se han llevado a cabo en un ordenador con las siguientes características:

- Sistema operativo : Linux, Ubuntu.
- Procesador: Intel(R) Core(TM) i3
- CPU : M 350 @ 2.27GHz

Resultados obtenidos

Fijando $n=10$ y $x=4$

$\ln(x)=1.38629436111989$

Si el valor de $c= 2$	1,33878210119487
Si el valor de $c= 3$	1,38629396788690
Si el valor de $c= 5$	1,38629436340045
Si el valor de $c= 30$	1,48572417754861
Si el valor de $c= 60$	1,74292118557045

Fijando $n=8$ y $c=6$

$\ln(8) = 2.07944154167984$

$\ln(7) = 1.94591014905531$

$\ln(6) = 1.79175946922805$

$\ln(5) = 1.60943791243410$

$\ln(4) = 1.38629436111989$

Si el valor de $x = 8$	2,07943719692636
Si el valor de $x = 7$	1,94591013946629
Si el valor de $x = 6$	1,79175946922805
Si el valor de $x = 5$	1,60943792540920
Si el valor de $x = 4$	1,38630243959407

Fijando $x=2$ y $c=1$

$$\ln(x) = 0.693147180559945$$

Si el valor de $n= 5$	0,7833333333333333
Si el valor de $n= 15$	0,725371850371850
Si el valor de $n= 25$	0,712747499542829
Si el valor de $n= 200$	0,690653430481824
Si el valor de $n= 800$	0,692522571184642

Tomamos los resultados de la tabla anterior y calculamos el tiempo que tarda el ordenador en obtener los resultados.

Si el valor de $n = 5$	9,53674316406e-07
Si el valor de $n = 15$	9,53674316406e-07
Si el valor de $n = 25$	9,53674316406e-07
Si el valor de $n = 200$	1,19209289551e-06
Si el valor de $n = 800$	1,90734863281e-06

- Variación del centro: podemos observar que cuanto más se aleja centro del punto menos acertado es el resultado.
- Variación del punto: observamos que si incrementamos la diferencia entre el punto y el centro, el resultado se aleja más del auténtico valor.
- Variación del grado: apreciamos que cuanto mayor es el grado más disminuye el error, por lo cual, si aumentamos el valor del grado más precisos son los resultados.

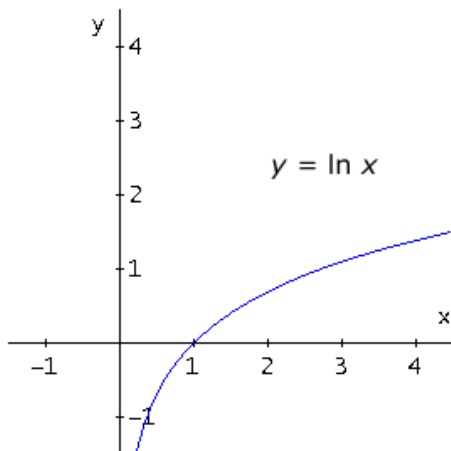


Figura: Función Logaritmo Neperiano

- 1 Conclusiones matemáticas: Hemos concluido que el Desarrollo de Taylor aplicado a la función logaritmo neperiano de "x", fijando dos variables y variando una, afecta, sobretodo, a la proximidad de la Serie de Taylor en $f(x)=\ln(x)$ y el valor del Logaritmo Neperiano en ese punto.

- 1 Conclusiones matemáticas: Hemos concluido que el Desarrollo de Taylor aplicado a la función logaritmo neperiano de "x", fijando dos variables y variando una, afecta, sobretodo, a la proximidad de la Serie de Taylor en $f(x)=\ln(x)$ y el valor del Logaritmo Neperiano en ese punto.
- 2 Conclusiones de programación: Mediante la realización del trabajo hemos contrastado la información con programas informáticos (Python), por lo cual, queda demostrado la eficacia frente a otros métodos.

Algoritmo

```
from sympy import *
import sys
import time
def fac(grado):
    if grado == 0:
        return 1
    else:
        return grado * fac(grado-1)

def taylor(grado, punto, centro):
    Ti=time.time()
    c = Symbol('c')
    funcion = ln(c)
    suma = funcion.evalf(subs={c:centro})
    for i in range(1,grado+1):
        deriv = diff(funcion, c)
        termino = (deriv.evalf(subs={c:centro}))/fac(i))*((punto-centro)**i)
        funcion = deriv
        suma += termino
    return suma
    error = funcion- suma
    Tf=time.time()
    tiempo= Tf-Ti
grado = int(raw_input('Introduzca el grado en el que desea que se aplique el desarrollo de Taylor: '))
punto = float(raw_input('Introduzca el punto en el que desea que se aplique el desarrollo de Taylor: '))
centro = float(raw_input('Introduzca el centro en el que desea que se aplique el desarrollo de Taylor: '))
suma = taylor(grado, punto, centro)
print 'El polinomio de Taylor es: ', suma
Ti=time.time()
Tf=time.time()
tiempo= Tf-Ti
print 'Tiempo: ', tiempo
```

 Cálculo infinitesimal de una variable (2004)

 Calculus. Cálculo Infinitesimal(2006)

 [http : //ordenador.wingwit.com/](http://ordenador.wingwit.com/)

 [http : //fr.wikiversity.org/](http://fr.wikiversity.org/)

 [http : //es.scribd.com/](http://es.scribd.com/)

 [http : //www.slideshare.net/](http://www.slideshare.net/)

 [http : //recursostic.educacion.es/](http://recursostic.educacion.es/)