Demostración de $\mathcal{NP}$-completitud LaTeX 3 DIMENSIONAL MATCHING

Universidad de La Laguna

Curso 2017/2018

NP-completos

¿Son tratables los NP-completos?
Los NP-completos parecen intratables, aunque nadie ha sabido demostrar que los NP-completos son intratables. Son todos equivalentes, es decir:

Si se encuentra un algoritmo efi
ciente para un NP-completo entonces tenemos un algoritmo efi
ciente para cualquiera de ellos.
Si probamos que un NP-completo no tiene algoritmos efi
cientes entonces ninguno los tiene.

Transformaciones polinomiales I

U

na transformación o reducción polinomial de un problema de decisión $\Pi 1$ a uno $\Pi 2$ es una función que se computa en tiempo polinomial y transforma una instancia I1 de $\Pi 1$ en una instancia I2 de $\Pi 2$ tal que I1 tiene respuesta "sí" para $\Pi 1$ si y solo si I2 tiene respuesta "sí" para $\Pi 2$.

Transformaciones polinomiales II

E

l problema de decisión $\Pi 1$ se reduce polinomialmente a otro problema de decisión $\Pi 2$, $\Pi 1$ $\leq$p $\Pi 2$, si existe una transformación polinomial de $\Pi 1$ a $\Pi 2$.

S

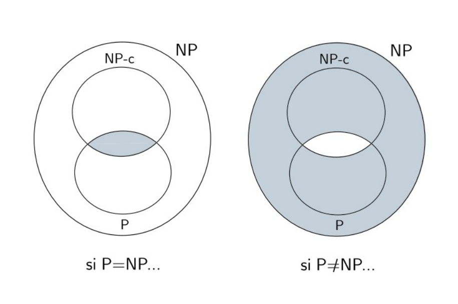
i Π" $\leq$p Π' y Π' $\leq$p Π entonces Π" $\leq$p Π, ya que la composición de dos reducciones polinomiales es una reducción polinomial.

Problemas $\mathcal{NP}$ Completos

U

n problema Π es $\mathcal{NP}$-completo si:

1. $\Pi \in \mathcal{NP}$.
2. Para todo $\Pi' \in \mathcal{NP}$, $\Pi' \leq_p \Pi$.



Descripción del problema 3DM I

I

nstancia

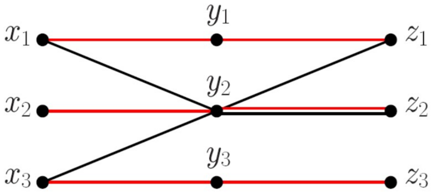
- Un conjunto M c W x X x Y
  - $W \cap Y \cap X = \phi$ (disjuntos)
  - $|W| = |X| = |Y| = q$

Descripción del problema 3DM II

P

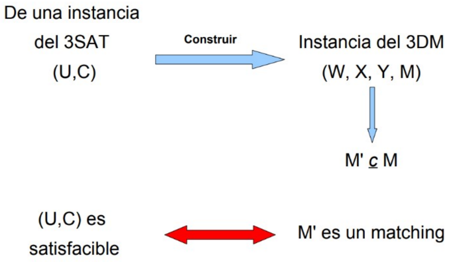
regunta: L1 $\leq$n L

- |M'| = q
- Todos los elementos W u X u Y están en alguna terceta de M' sin repetir ninguno.



$$M = \{(x_1, y_1, z_1), (x_1, y_2, z_2), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), (x_3, y_2, z_1)\}$$

3SAT α 3DM I

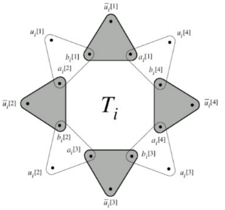


3SAT α 3DM II

3SAT		**3DM**
Variables: $u_1, \ldots, u_n$	$\longrightarrow$	**Variables:** $u_i(j)$, $a_i(j)$, $b_i(j)$, $s_x(j)$, $g_y(j)$
Literales: $u_1, \neg u_1$	$\longrightarrow$	**Variables:** $u_1(j)$, $\neg u_1(j)$
Cláusulas: $c_j = (u_1, \neg u_2, u_3)$	$\longrightarrow$	**Tercetas:** $C_j = \{(u_1(j), s_x(j), s_y(j)), (\neg u_2(j), s_x(j), s_y(j)), (u_3(j), s_x(j), s_y(j))\}$

Notación

3SAT α 3DM III



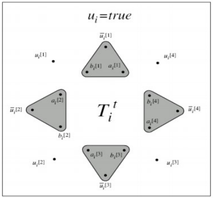
Tercetas de asignación

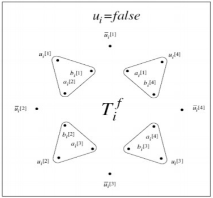
$$T_i^t = \{(\overline{u}_i[j], a_i[j], b_i[j]) : 1 \leq j \leq m\}$$

$$T_i^f = \{\,(u_i[j], a_i[j+1], b_i[j]) : 1 \leq j \leq m\} \cup \{(u_i[m], a_i[1], b_i[m]) : 1 \leq j \leq m\}$$

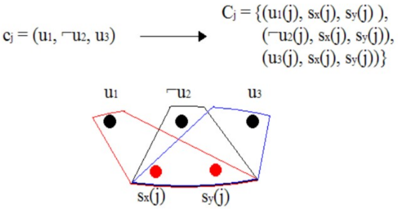
3SAT α 3DM IV

M’ será un matching con m elementos de Ti



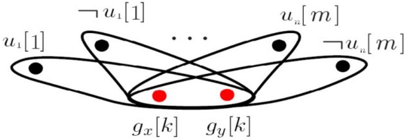


3SAT α 3DM V



Tercetas de satisfacción

3SAT α 3DM V



$$G = \{(u_i[j], g_x[k], g_y[k]), (\overline{u}_i[j], g_x[k], g_y[k])$$

Tercetas de relleno

$$: 1 \leq k \leq m(n-1), 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$$

3SAT α 3DM VI

$$W = \{(u_i[j], \overline{u}_i[j] : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\} \quad (2mn)$$

$$X = A \cup S_X \cup G_X \quad (2mn)$$

$$A = \{a_i[j] : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$$
$$S_X = \{s_x[j] : 1 \leq j \leq m\}$$
$$G_X = \{g_x[j] : 1 \leq j \leq m(n-1)\}$$

$$Y = B \cup S_Y \cup G_Y \quad (2mn)$$

$$B = \{b_i[j] : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$$
$$S_Y = \{s_y[j] : 1 \leq j \leq m\}$$
$$G_Y = \{g_y[j] : 1 \leq j \leq m(n-1)\}.$$

$$M = \left(\bigcup_{i=1}^{n} T_i\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{m} C_j\right) \cup G. \quad (2mn+3m+2m^2n(n-1))$$

3SAT α 3DM VI

M contiene un matching M' $\Longleftrightarrow$ (U,C) es satisfacible

(U,C) es satisfacible $\longrightarrow$ **M' $\subseteq$ M es un matching**

3-Dimensional Matching es $\mathcal{NP}$-COMPLETO