Método Newton

Alba Crespo Perez, Raquel Espino Mantas y Robbert Jozef Michiels

12 de mayo de 2014

Facultad de Matemáticas
Universidad de La Laguna

Índice

Índice

Índice

Índice

Índice

Índice

Motivación y objetivos

El objetivo principal del presente trabajo reside en la implementación, mediante el uso del lenguaje de programación Python, de un algoritmo basado en el método de Newton - Raphson que nos permita llevar a cabo el cálculo de las raíces de la función $f(x) = cos(\pi x)$.
Además, se pretende lograr la consecución de los siguientes objetivos específicos:

- Efectuar un análisis numérico y gráfico de la evolución en el número de iteraciones requeridas por este método para la obtención de una raíz, en función del error absoluto de la estimación inicial tomada como punto de partida del método respecto a la solución real determinada tras su aplicación.

Motivación y objetivos

El objetivo principal del presente trabajo reside en la implementación, mediante el uso del lenguaje de programación Python, de un algoritmo basado en el método de Newton - Raphson que nos permita llevar a cabo el cálculo de las raíces de la función $f(x) = cos(\pi x)$.
Además, se pretende lograr la consecución de los siguientes objetivos específicos:

- Efectuar un análisis numérico y gráfico de la evolución en el número de iteraciones requeridas por este método para la obtención de una raíz, en función del error absoluto de la estimación inicial tomada como punto de partida del método respecto a la solución real determinada tras su aplicación.
- Analizar el costo computacional, en términos de tiempo de uso de CPU, asociado a la ejecución del algoritmo implementado, así como su variabilidad y sensibilidad ante modificaciones en los parámetros iniciales.

Breve introducción historica

Este método constituye una vía algorítmica de análisis numérico destinada a la determinación de los ceros o raíces de una función matemática dada. Su primera descripción relevante fue desarrollada por el multidisciplinar científico inglés Isaac Newton en su obra *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*, escrita en 1669 y publicada en 1711 por William Jones, así como en su tratado *De metodis fluxionum et serierum infinitarum*, editado en 1736 por John Colson bajo el título de *Método de las fluxiones*.

Sin embargo, si bien su reconocimiento no alcanzó en su momento la repercusión otorgada a los trabajos de Newton, dicho método encuentra mención previa en el libro *Aequationum Universalis* (1690), cuya publicación conllevó para su autor, el matemático inglés Joseph Raphson, la consecución del ingreso en la *Royal Society* de Londres.

Descripción teórica del método

Para utilizar el método de Newton-Raphson es necesario comenzar con un valor inicial suficientemente cercano a la raíz buscada, que a medida que avance la ejecución del algoritmo progresará acercándose al valor real de esta raíz
Una vez fijada una estimación inicial x_0 calcularemos la expresión de la recta tangente a la gráfica de la función dada en el punto $x = x_0$. La coordenada de corte de dicha recta con el eje horizontal será considerada de modo genérico como un valor más cercano a la raíz buscada que la hipótesis original, por lo que este paso podrá aplicarse de forma recursiva tomando como suposición al nuevo valor obtenido, hasta lograr una aproximación aceptable de la raíz dentro de un margen de tolerancia fijado de antemano de acuerdo con la precisión exigida por el contexto.

Profundizaremos ahora en los cálculos matemáticos necesarios para la obtención de una expresión recursiva del algoritmo. Sabemos que la expresión de una recta de pendiente m y que pasa por el punto (a, b) viene dada de la forma:

$$y - b = m(x - a)$$

En consecuencia, y considerando que la pendiente de la recta tangente a una función $f(x)$ en un punto $x = x_0$ corresponde al valor en dicho punto de su primera derivada, obtenemos la siguiente expresión para dicha recta en la denominada *forma punto-pendiente*:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Tomando $y = 0$, procedemos a determinar el punto de corte de la recta anterior con el eje de abscisas. La notación x_{n+1} indica que el valor resultante de x corresponderá a la estimación tomada como partida para la siguiente ejecución del algoritmo:

$$y = 0 \ \rightarrow \ -f(x_0) = f'(x_0)(x_{n+1} - x_0) \ \rightarrow \ x_0 f'(x_0) - f(x_0) = x_{n+1} f'(x_0) \ \rightarrow$$

$$\rightarrow \ x_{n+1} = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

De acuerdo con lo comentado al inicio de la sección, observamos que las funciones con acentuadas variaciones de pendiente en el entorno de la raíz buscada dificultarán la convergencia del algoritmo, por lo que al llevar a cabo su implementación computacional será preciso establecer una cota máxima de iteraciones con el fin de evitar que la ejecución recursiva permanezca atrapada en un patrón de divergencia.

Ánalisis de la función de estudio

Con el objetivo de lograr una mejor comprensión de los resultados obtenidos en la aproximación de las raíces de la función $f(x) = cos(\pi x)$ mediante el algoritmo de Newton-Raphson, procedemos a calcular dichas raíces de modo teórico, mediante la resolución de una sencilla ecuación trigonométrica:

$$cos(\pi x) = 0 \quad \to \quad \pi x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad \to x = \frac{1}{2} + k, \;\; k \in \mathbb{Z}$$

Vemos así que se verifica lo siguiente:

$$cos(\pi x) = 0 \iff x = ..., -2.5, -1, 5, -0.5, 0.5, 1.5, 2.5, ...$$

Concluimos con ello que se trata de una función periódica con periodo P = 2. Este hecho, así como los puntos de corte con el eje de abscisas, quedan reflejados de modo ilustrativo a través de la siguiente gráfica:

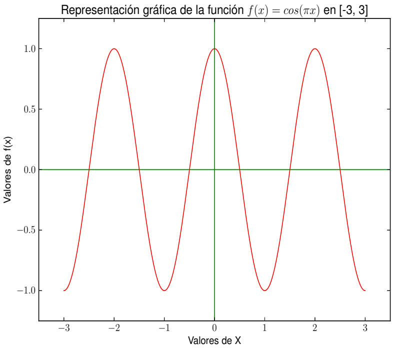

Figure: $f(x) = cos(\pi x)$

Debido a la naturaleza del método de Newton-Raphson, es preciso señalar que su aplicación no podrá llevarse a cabo en caso de alcanzarse una anulación de la derivada para el punto de partida del algoritmo. Analizaremos por tanto los puntos críticos de la función de estudio, para así conocer qué valores deben ser evitados como suposiciones iniciales en la invocación del método:

$$(cos(\pi x))' = 0 \quad \rightarrow \quad -\pi sen(\pi x) = 0$$

$$\rightarrow \quad sen(\pi x) = 0 \quad \rightarrow \quad \pi x = k\pi, \;\; k \in \mathbb{Z} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad x = k, \;\; k \in \mathbb{Z} \quad \rightarrow x = ..., -2, -1, 1, 2, ...$$

Descripción de los experimentos

Conclusión y trabajos futuros

En esta sección se facilita un resumen de las principales conclusiones alcanzadas tras la finalización y análisis de los experimentos llevados a cabo durante la realización del presente trabajo:

- Las raíces de la función $f(x) = cos(\pi x)$ vienen dadas de la siguiente forma:

$$x = \frac{1}{2} + k, \;\; k \in \mathbb{Z} \iff x = ..., -2.5, -1, 5, -0.5, 0.5, 1.5, 2.5, ...$$

Conclusión y trabajos futuros

En esta sección se facilita un resumen de las principales conclusiones alcanzadas tras la finalización y análisis de los experimentos llevados a cabo durante la realización del presente trabajo:

- Las raíces de la función $f(x) = cos(\pi x)$ vienen dadas de la siguiente forma:

$$x = \frac{1}{2} + k, \ \ k \in \mathbb{Z} \iff x = ..., -2.5, -1, 5, -0.5, 0.5, 1.5, 2.5, ...$$

- Para el caso de la función de estudio, la convergencia del algoritmo de Newton-Raphson se encuentra prácticamente garantizada debido a la reducida separación entre raíces y a su carácter de periodicidad, salvo en el caso de seleccionar un valor inicial coincidente con un extremo relativo de la función.

- La eficiencia del algoritmo implementado resulta ser considerablemente elevada, al requerir ínfimos tiempos de CPU para la determinación de una raíz y no superar en ningún caso el margen de cuatro iteraciones hasta obtener la solución exacta.

- La eficiencia del algoritmo implementado resulta ser considerablemente elevada, al requerir ínfimos tiempos de CPU para la determinación de una raíz y no superar en ningún caso el margen de cuatro iteraciones hasta obtener la solución exacta.
- El método de Newton-Raphson demuestra caracterizarse por una notable velocidad de convergencia para la función considerada, llegando a proporcionar hasta cinco cifras decimales correctas a lo largo de una única iteración.

- La eficiencia del algoritmo implementado resulta ser considerablemente elevada, al requerir ínfimos tiempos de CPU para la determinación de una raíz y no superar en ningún caso el margen de cuatro iteraciones hasta obtener la solución exacta.
- El método de Newton-Raphson demuestra caracterizarse por una notable velocidad de convergencia para la función considerada, llegando a proporcionar hasta cinco cifras decimales correctas a lo largo de una única iteración.
- Las alteraciones en los parámetros iniciales tan sólo afectan al tiempo de uso de CPU a través de la modificación de la cantidad total de invocaciones recursivas requeridas para alcanzar una raíz válida, si bien el reducido valor de dicho tiempo origina que las diferencias globales resulten despreciables tanto desde el punto de vista del usuario como en un sentido computacional.

Bibliografía

- Documento de verificación del grado. (2011)
- Guía docente. (2013)
  $http://eguia.ull.es/matematicas/query.php?codigo = 299341201$
- CTAN. $http://www.ctan.org/$