Curiosidades sobre el número π

Alba Crespo Pérez
alu 0100846461

9 de abril de 2014

Resumen

A través del presente artículo se exponen diversas curiosidades matemáticas sobre el número π y la evolución histórica de su descubrimiento.

1. Características del número π

1.1. Definiciones matemáticas

La definición más común de π establece que su valor correponde a la relación existente entre la longitud de una circunferencia y su diámetro. En consecuencia, π es también el área de un círculo unitario en el plano euclídeo, así como el menor número real positivo que verifica la ecuación $sen(x) = 0$. De igual forma, es posible proporcionar dos definiciones analíticas de esta ubicua constante matemática:

- Equivale a la menor solución de la siguiente ecuación compleja:

$$e^{ix} + 1 = 0$$

- La ecuación diferencial $S''(x) + S(x) = 0$, para la que existe solución única bajo las condiciones de contorno $S(0) = 0$ y $S'(0) = 1$, tiene como raíz positiva más pequeña al número π.

1.2. Evolución histórica

A continuación se presenta una tabla resumen de las distintas aproximaciones del número π logradas por diversos matemáticos desde la Antigüedad hasta mediados del siglo XV, reseñando los márgenes de error de cada aproximación expresados en partes por millón.

AÑO	MATEMÁTICO O DOCUMENTO	CULTURA	APROXIMACIÓN	ERROR
1900 a.C.	Papiro de Ahmes	Egipcia	$2^8/3^4 = 3{,}1605$	6016 ppm
1600 a.C.	Tablilla de Susa	Babilónica	$25/8 = 3{,}125$	5282 ppm
500 a.C.	Bandhayana	India	3.09	16422 ppm
250 a.C.	Arquímedes de Siracusa	Griega	$211875/67441 = 3{,}14163$	13.15 ppm
150 d.C	Claudio Ptolomeo	Greco-egipcia	$377/120 = 3{,}14166...$	23.56 ppm
263 d.C	Wang Fan	China	$157/50 = 3{,}14$	507 ppm
300 d.C	Chang Hong	China	$10^{1/2} = 3{,}1623$	6584 ppm
500 d.C	Aryabhata	India	3.1416	2.34 ppm
600 d.C	Brahmagupta	India	$10^{1/2} = 3{,}1623$	6584 ppm
800 d.C	Al-Jwarizmi	Persa	3.1416	2.34 ppm
1220 d.C	Fibonacci	Italiana	3.141818	72.73 ppm
1400 d.C	Madhava	India	3.14159265359	0.085 ppm
1424 d.C	Al-Kashi	Persa	$2\pi = 6{,}283185307179...$	0.1 ppm

Cuadro 1: El número π hasta finales de la Edad Media.

Vemos así que los errores cometidos con las distintas aproximaciones de π muestran una tendencia irregular a la disminución a lo largo del tiempo, si bien en ocasiones se produce una regresión al pasado al recurrir a valores considerablemente inexactos obtenidos en siglos anteriores, como es el caso del matemático Brahmagupta en el año 600 d.C, o del italiano Fibonnaci, cuyo margen de error asciende a las 72.73 ppm (ver cuadro 1).

Si el lector desea profundizar sobre la historia del descubrimiento de π, le remitimos a la obra de consulta [2], donde podrá encontrar información más detallada sobre este tema.

2. El número π como irracional y trascendente

El hecho de que π sea un número irracional implica que no puede ser expresado a modo de cociente entre dos números enteros, tal y como fue demostrado por Johann Heinrich Lambert en 1761.

Además, se trata asimismo de un número trascendente, es decir, que no corresponde a la raíz de ningún polinomio de coeficientes enteros, hecho que fue probado por el matemático alemán Ferdinand Lindemann durante el siglo XIX cerrando con ello una dilatada investigación acerca del histórico problema de la cuadratura del círculo, carente de solución.[1] Uno de los métodos empleados para la aproximación de π se encuentra, como no podía ser de otro modo, en estrecha relación con las características de la circunferencia, pues su valor corresponde puede obtenerse a partir de la siguiente integral:

$$\pi = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\, dx$$

El procedimiento iterativo de cálculo requerido para la evaluación numérica de dicha integral viene representado gráficamente en la figura que se muestra a continuación:

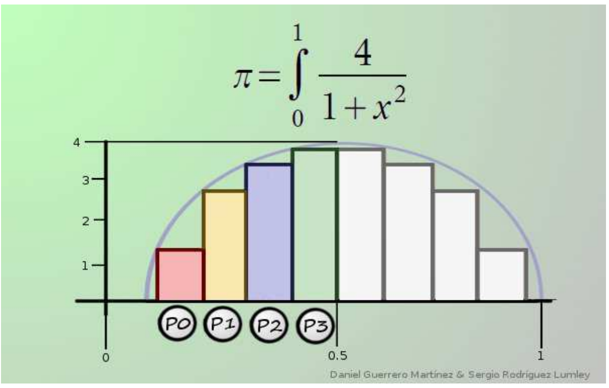

Figura 1: Integración para el cálculo de π.

A pesar del carácter irracional del número π, continúa siendo averiguada la mayor cantidad posible de cifras decimales, si bien recurriendo sólo a cincuenta de ellos es posible describir con precisión la curvatura del Universo con un margen de error inferior a las dimensiones de un protón. Véase el sitio web [3] para consultar los primeros 100000 dígitos de π.

En este sentido, los algoritmos de carácter numérico-iterativo son ideales para su ejecución en potentes computadoras con elevada potencia de cálculo, permitiendo la obtención de un considerable número de cifras en reducidos marcos temporales. Tal es el caso del método de integración reflejado en la figura 1.

[1] El problema de la cuadratura del círculo consiste en hallar, utilizando tan sólo la regla y el compás, un cuadrado que posea un área igual a la de un círculo dado. Se trata de un reto matemático sin solución que fue abordado repetidas veces a lo largo de la historia, desde la antigüedad clásica hasta el siglo XIX, cuando fue demostrada su irresolubilidad.

3. Presencia de π en las ciencias físicas

Pese a no constituir una constante física por sí misma, este número aparece repetidamente en ecuaciones físicas que describen los principios fundamentales del Universo, debido en gran parte a su relación con la naturaleza del círculo y, por ende, con el sistema de coordenadas esféricas (a este respecto, consúltese el tratado divulgativo [1]). Así, cabe destacar la presencia de π en los siguientes ámbitos:

- La expresión de la constante cosmológica:

$$\Lambda = \frac{8\pi G}{3c^2}$$

- El principio de incertidumbre de Heisenberg:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{h}{4\pi}$$

- La ecuación del campo de Einstein para la relatividad general:

$$R_{ik} - \frac{g_{ik}R}{2} + \Lambda g_{ik} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ik}$$

- La Ley de Coulomb para la fuerza eléctrica:

$$F = \frac{|q_1 q_2|}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$

- La tercera Ley de Kepler[2]:

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{(2\pi)^2}{g(M+m)}$$

- La permeabilidad magnética del vacío:

$$\mu_0 = 4\pi 10^{-7} N/A^2$$

3.1. Representación de π

A propósito de la presencia de π en las ecuaciones físicas, cabe preguntarse:

¿de dónde procede el símbolo utilizado para la representación de esta constante?

Pues bien, el símbolo actual y tan comúnmente empleado fue adoptado por primera vez en 1706 por el matemático William Jones, siguiendo los pasos de su predecesor William Oughtred. Unos años después, la gran popularidad de esta convención vendría de la mano del destacado matemático y físico suizo Leonhard Euler (ver figura 2), quien consagró la utilización para la posteridad la utilización de la decimosexta letra del alfabeto griego para la representación de esta constante matemática.

Euler residió en Rusia y Alemania durante la mayor parte de su vida y realizó importantes descubrimientos en áreas tan diversas como el cálculo o la teoría de grafos. También introdujo gran parte de la moderna terminología y notación matemática, particularmente para el área del análisis matemático, como por ejemplo la noción de función matemática. Asimismo se le conoce por sus trabajos en los campos de la mecánica, óptica y astronomía. Se trata del principal matemático del siglo XVIII y uno de los más grandes y prolíficos de todos los tiempos. Una afirmación atribuida a Pierre Simon Laplace expresa la influencia de Euler en los matemáticos posteriores: «Lean a Euler, lean a Euler, él es el maestro de todos nosotros.»

[2] La tercera Ley de Kepler ley establece que para cualquier planeta, el cuadrado de su período orbital es directamente proporcional al cubo de la longitud del semieje mayor de su órbita elíptica.

Figura 2: Leonhard Euler

Referencias

[1] Joaquín Navarro Quijada, *Los secretos del número pi*, Madrid, España, RBA Publicaciones, 2011.

[2] Petr Beckmann, *Historia de pi*, Madrid, Madrid, España, Instituto Nacional de Antropología e Historia, 2007.

[3] Los 100 000 primeros dígitos de pi:

http://www.geom.uiuc.edu/ huberty/math5337/groupe/digits.html