

Demostración de la \mathcal{NP} -Compleitud del problema del Circuito Hamiltoniano

Lucas Alonso Ortega
Cristian Rodríguez Navarro
Daniel Domínguez Gutiérrez

Noviembre de 2019

Índice

1. Introducción	3
1.1. Origen	3
1.2. Descripción informal	3
1.3. Descripción formal	3
1.4. Condiciones necesarias	4
1.5. Motivación	4
2. Demostración de \mathcal{NP}-Compleitud	4
2.1. Introducción	4
2.2. Primera condición de \mathcal{NP} -Compleitud	5
2.3. Segunda condición de \mathcal{NP} -Compleitud	5
2.4. Definición de Vertex Cover	6
2.5. Transformación polinómica	6
2.5.1. Componente selector	6
2.5.2. Componente gadget	7
2.5.3. Conexiones	8
2.5.4. Generación del grafo	8
2.5.5. Demostración de la segunda condición	9

1. Introducción

1.1. Origen

El nombre proviene del matemático irlandés **William Rowan Hamilton**(1805-1865), que propuso viajar a veinte ciudades del mundo, representadas como los vértices de un dodecaedro regular, siguiendo las aristas del dodecaedro.

Sin embargo, William no fue el primero en formular un problema con estas características, y es que ya en el siglo **IX** el poeta indio Rudrata nombra el llamado camino del caballo cuya solución se corresponde con un camino hamiltoniano.



Figura 1: William Rowan Hamilton

1.2. Descripción informal

El problema *Hamiltonian Circuit* consiste en determinar si dado un grafo arbitrario, existe en él un *Circuito Hamiltoniano*.

En la teoría de grafos, un Circuito Hamiltoniano es un camino que visita todos los vértices del grafo una sola vez y el primer y último vértice son adyacentes.

1.3. Descripción formal

Dado un grafo $G = (V, E)$ definido por una tupla de vértices y aristas:

$$V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \quad |V| = n$$

$$E = \{\{u, v\} : u, v \in V\}$$

¿Contiene G un Circuito Hamiltoniano? Es decir, contiene G una secuencia ordenada $\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$ de tamaño n , tal que:

$$\{v_n, v_1\} \in E \wedge \{v_i, v_{i+1}\} \in E \quad | \quad \forall i \in \mathbb{Z}^+ : i < n$$

1.4. Condiciones necesarias

Para que un grafo $G = (V, E)$ contenga un circuito hamiltoniano se ha de cumplir:

1. G ha de ser conexo, es decir, cada par de vértices está conectado por al menos un camino.
2. El grado de cualquier vértice perteneciente a G debe ser mayor que 1; para que el problema contenga una solución todos los nodos deben tener un mínimo de 2 arista: una de entrada y otra de salida.
3. Dado un subconjunto $S \subseteq V \wedge S \neq \emptyset$, el número de componentes conexas del subgrafo $G - S$ será menor o igual que $|S|$.

1.5. Motivación

El estudio de este problema tiene diversas aplicaciones, en parte debido a su estrecha relación con el *Traveling Salesman Problem*:

- Problemas de rutas.
- Problemas de logística.
- Problemas de asignación de trabajos.
- Problemas de secuenciación de ADN.
- Problemas de diseño de circuitos.
- Gráficos de computador.

2. Demostración de \mathcal{NP} -Compleitud

2.1. Introducción

Decimos que un problema p es NP-completo si se cumple:

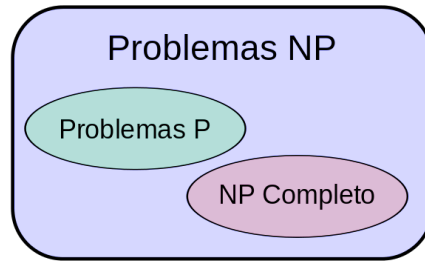


Figura 2: Diagrama problemas \mathcal{NP}

1. p pertenece al conjunto de problemas NP.

$$p \in \mathcal{NP}$$

2. Para cualquier problema p' perteneciente a NP existe una reducción polinomial a p .

$$\forall p' \in \mathcal{NP}, \quad p' \leq p$$

2.2. Primera condición de \mathcal{NP} -Compleitud

$$¿HC \in \mathcal{NP} ?$$

Un problema pertenece al conjunto NP si existe una **máquina de turing no determinista** que lo resuelva en tiempo polinomial.

Si quisieramos encontrar un circuito Hamiltoniano en un grafo $G = (V, E)$ con $|V| = n$ podríamos emplear un **algoritmo de fuerza bruta** que compruebe todas las posibles permutaciones de vértices hasta encontrar una combinación válida.

Esto en una máquina de turing determinista equivaldría a comprobar todas las secuencias de vértices una a una lo que conllevaría un tiempo de computo de $O(n!)$.

Por otro lado, en una máquina de turing no determinista podríamos comprobar la aceptación (o no) de todas las posibles secuencias de manera paralela, lo que nos llevaría un tiempo de $O(n)$, equivalente a comprobar una posible secuencia de vértices, por lo que podemos afirmar que $HC \in NP$.

2.3. Segunda condición de \mathcal{NP} -Compleitud

$$¿\forall p' \in \mathcal{NP}, \quad p' \leq HC ?$$

Para probar esta segunda condición lo que haremos será encontrar una transformación polinómica del problema **Vertex Cover** al Hamiltonian Circuit, como el Vertex Cover se considera como perteneciente al conjunto NP-completo se cumplirá que:

$$\forall p' \in \mathcal{NP}, \quad p' \alpha VC \alpha HC$$

Por lo tanto p' se puede transformar en el problema Hamiltonian Circuit en tiempo polinomial.

Explicaremos en detalle esta transformación en la sección **2.5**.

2.4. Definición de Vertex Cover

Dado un grafo $G = (V, E)$ y un número entero $1 \leq K \leq |V|$:

$$\exists V' \subseteq V ? : |V'| \leq K \wedge (u \in V' \vee v \in V' \mid \forall \{u, v\} \in E)$$

Es decir, el problema consiste en encontrar un Vertex Cover de tamaño menor o igual K ; un subconjunto de vértices V' de G tal que todas las aristas pertenecientes a E son incidentes en al menos un vértice de V' .

2.5. Transformación polinómica

Partiendo de una instancia de un problema de Vertex Cover que consta de un grafo $G = (V, E)$ y un entero K , nuestro objetivo será construir en tiempo polinomial un grafo G' que contendrá un circuito Hamiltoniano si, y sólo si, existe un Vertex Cover en G de tamaño menor o igual a K .

Esta transformación se basa en la construcción de componentes, los cuales formaran parte del grafo resultante.

2.5.1. Componente selector

Necesitaremos un conjunto de vértices que formarán parte del grafo resultante y representará los vértices que forman parte del Vertex Cover, por lo que tendremos K selectores.

$$\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$$

2.5.2. Componente gadget

Crearemos un subgrafo para cada arista de G a los que denominaremos *gadgets*.

Para especificar sus propiedades designaremos cada vértice del gadget con una 3-tupla (w, e, i) siendo e la arista ligada al gadget, w uno de los vértices de la arista e i la posición del nodo en el gadget. Dada una arista $e = \{u, v\}$ el gadget resultante sería el de la *Figura 3*.

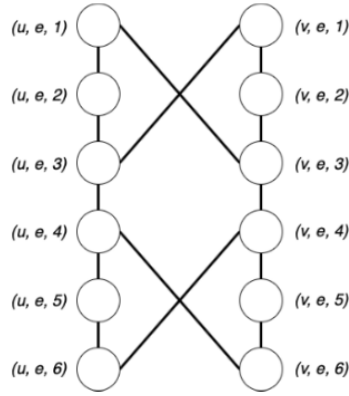


Figura 3: Gadget general

Todos los gadgets tendrán 12 vértices los cuales estarán conectados entre sí por 14 aristas. Las aristas extras que salgan del gadget solo existirán en los vértices con posiciones 1 y 6.

Esta definición concreta de los gadgets nos permite saber a priori que, en el caso de que se forme un circuito hamiltoniano, la trayectoria a través de los gadgets solo será posible de tres formas las cuales dependerán de la disposición del Vertex Cover.

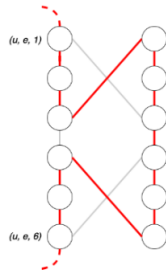


Figura 4: u está en el cubrimiento

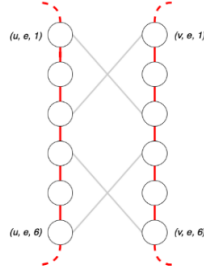


Figura 5: u y v están en el cubrimiento

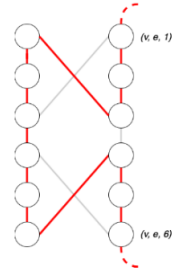


Figura 6: v está en el cubrimiento

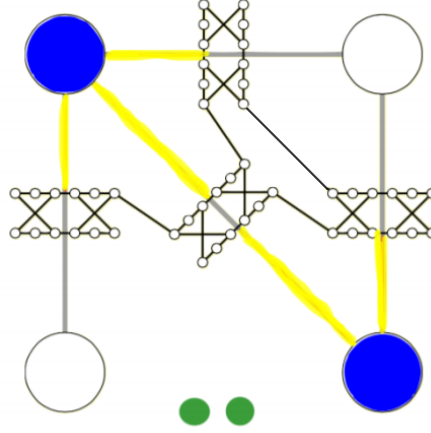


Figura 7: Grafo en el que podemos visualizar G y G' : el Vertex Cover son los vértices azules; los selectores los vértices verdes; también se observan los gadgets.

2.5.3. Conexiones

Ordenaremos las aristas incidentes en cada vértice de manera arbitraria y designaremos cada una de la manera: $e_{v[i]}$, la cual referencia a una arista del nodo v con posición i . Cabe destacar que la última arista en la secuencia ordenada la podremos designar como $e_{v[deg(v)]}$ ya que el grado del vértice se corresponde con el número de aristas.

Vamos realizar dos tipos de conexiones:

1. **Gadget - Gadget.** Formaremos un camino que atraviese los gadgets de un vértice, conectando el último vértice de un gadget ligado a una arista con el primero del gadget asociado a la siguiente arista.

$$\{(v, e_{v[i]}, 6), (v, e_{v[i+1]}, 1)\} \quad | \quad \forall v \in V, \forall i \in \mathbb{Z}^+ : i < deg(v)$$

2. **Gadget - Selector.** Si analizamos la expresión anterior, nos daremos cuenta de que los vértices $(v, e_{v[1]}, 1)$ y $(v, e_{v[deg(v)]}, 6)$ no serán usados para conectar gadgets. Conectaremos cada uno de estos nodos con todos los selectores.

$$\{a_i, (v, e_{v[1]}, 1)\} \cup \{a_i, (v, e_{v[deg(v)]}, 6)\} \quad | \quad \forall v \in V, \forall i \in \mathbb{Z}^+ : i \leq K$$

2.5.4. Generación del grafo

Teniendo el grafo de entrada $G = (V, E)$ y los enteros $n = |V|$ y $m = |E|$:

El grafo resultante de la transformación estará formado por n selectores y m gadgets además de las aristas definidas en el apartado anterior.

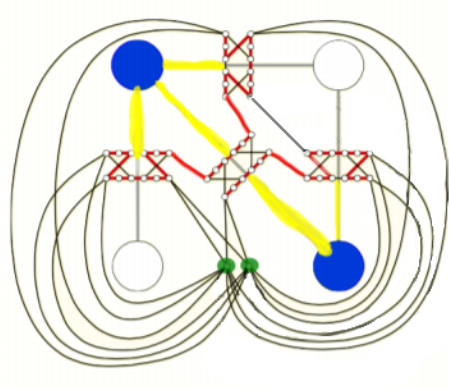


Figura 8: Grafo G' completo (sobre G).

2.5.5. Demostración de la segunda condición

La demostración de II consiste en que si existe un VC de tamaño K en G , entonces ha de existir un HC en G' . Por tanto, sea $V^* \subseteq V$ un Vertex Cover en G , de tamaño K : $V^* = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$

Para cada **gadgets** se elige el camino que lo recorre dependiendo de la pertenencia al conjunto V' (Figura 4-6). Y a continuación se eligen las siguientes aristas:

- $\{a_i, (v_i, e_{v_i[1]}, 1)\} \quad | \quad \forall i \in \mathbb{Z}^+ : i \leq K$
- $\{a_{i+1}, (v_i, e_{v_i[deg(v_i)]}, 6)\} \quad | \quad \forall i \in \mathbb{Z}^+ : i < K$
- $\{a_1, (v_K, e_{v_K[deg(v_K)]}, 6)\}$

Estas componentes formarán un **Circuito Hamiltoniano**.

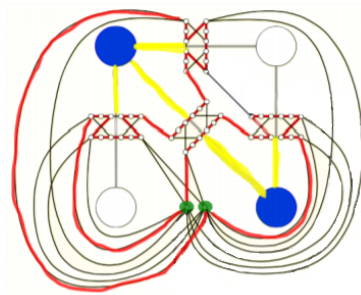


Figura 9: Circuito hamiltoniano en G' .

Referencias

- [1] Michael Garey, David S. Johnson. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman and Company, 1979.
- [2] Richard M. Karp. Reducibility Among Combinatorial Problems. *Complexity of Computer Computations*, pp:85-103, 1972.
- [3] Nikola Kapamadzín. NP Completeness of Hamiltonian Circuits and Paths