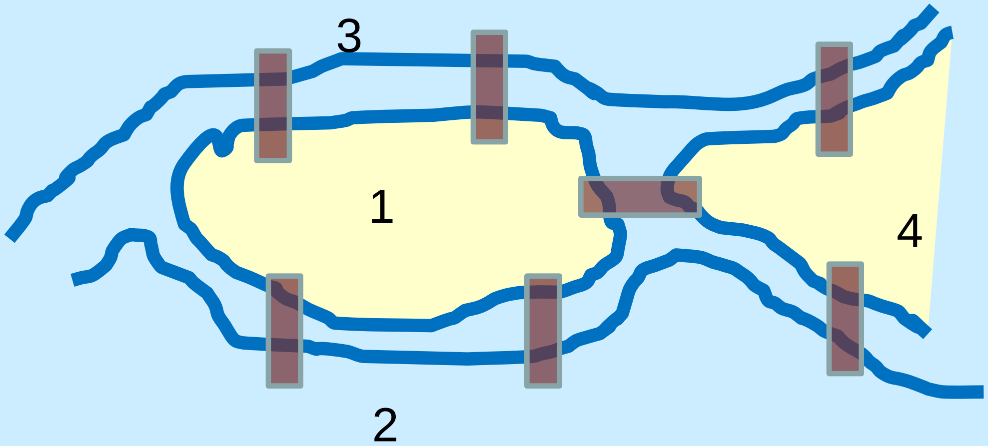
Tema 5. GRAFOS y REDES

- Formalización de Modelos.
- Definiciones y Terminología Básica.
- Tipos de Grafos.
- Representación de los Grafos
- Problemas de coloración.

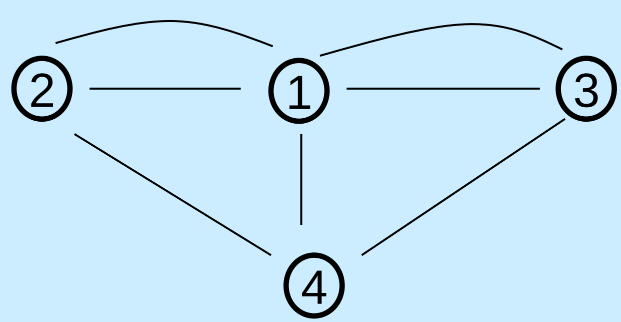
Formalización de Modelos



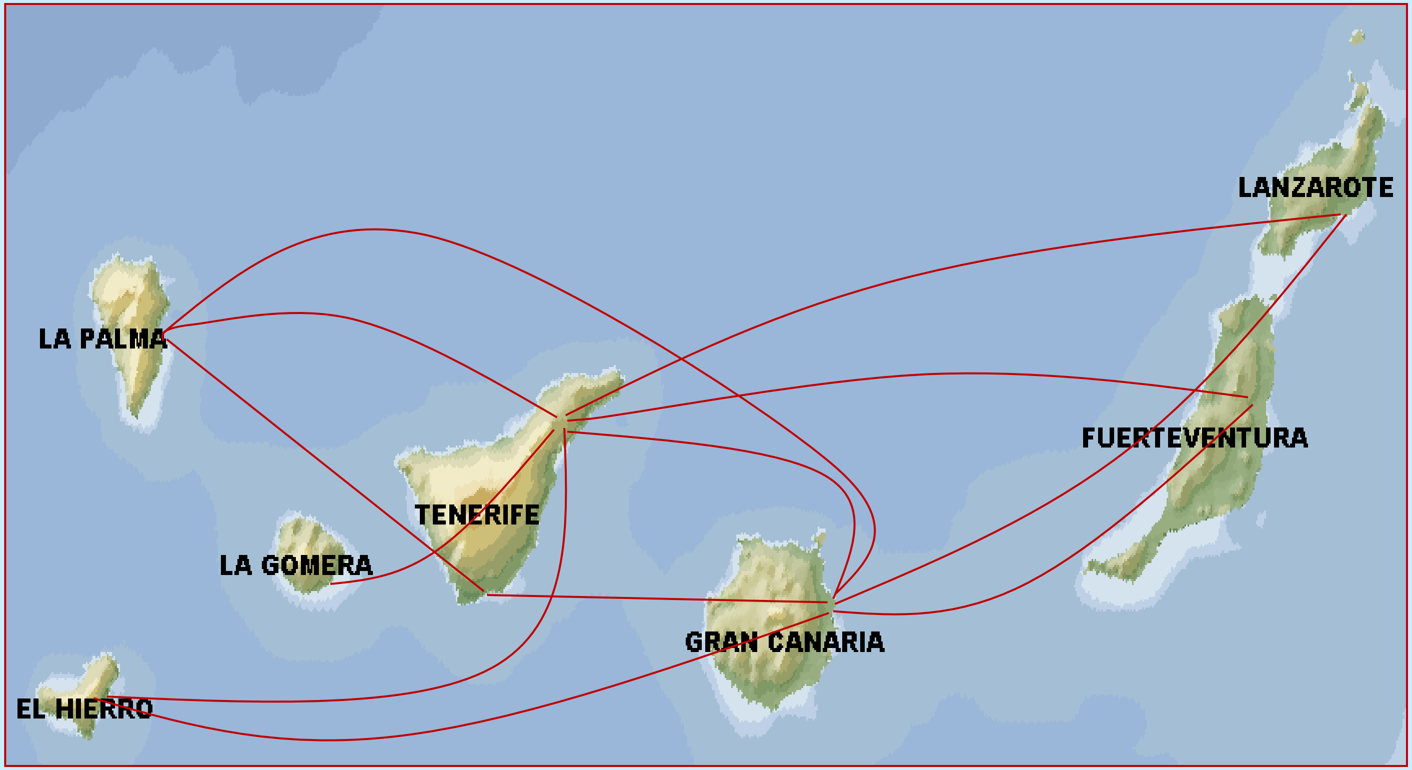
El **problema** de los siete puentes de Köenisgberg:

¿Es posible salir y llegar a un determinado punto pasando sólo una vez por cada uno de los puentes?

Leonhard Euler publicó en 1736 la solución a este problema apoyándose el modelo de un grafo:



Formalización de Modelos



Red de comunicaciones aéreas y marítimas en las Islas Canarias

Su **abstracción** es un **grafo (Multigrafo)**

Definiciones y terminología básica

Grafos Dirigidos

Un *grafo dirigido* $G=(V,A)$ está definido por un conjunto V de ***nodos*** o ***vertices*** y un conjunto de A cuyos elementos denominados ***arcos*** son pares ordenados de nodos.

Denotamos por $|V| = n$ al número de nodos de un Grafo, que es su **orden**.

Denotamos por $|A| = m$ al número de arcos de un Grafo dirigido.

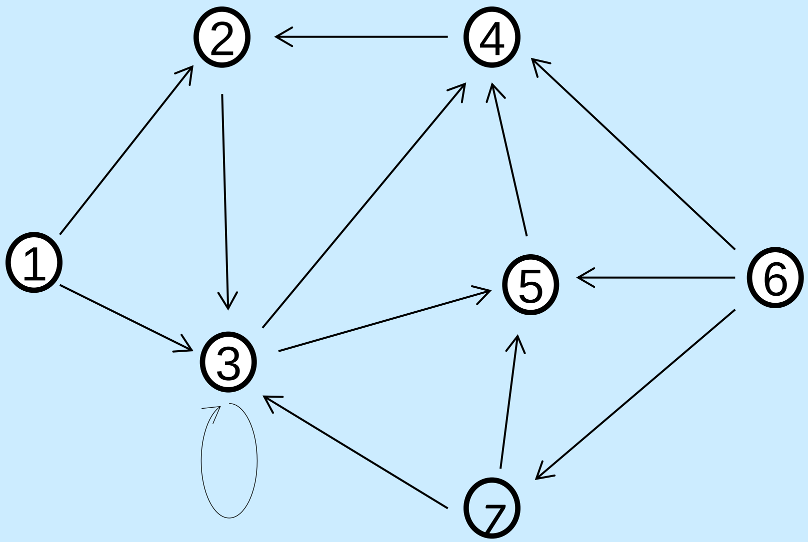
Si $a = (i, j) \in A$ es un arco de G, entonces i es el nodo incial y j el nodo final de a. Un arco cuyo nodo inicial y final coinciden se denomina **Bucle o Lazo**.

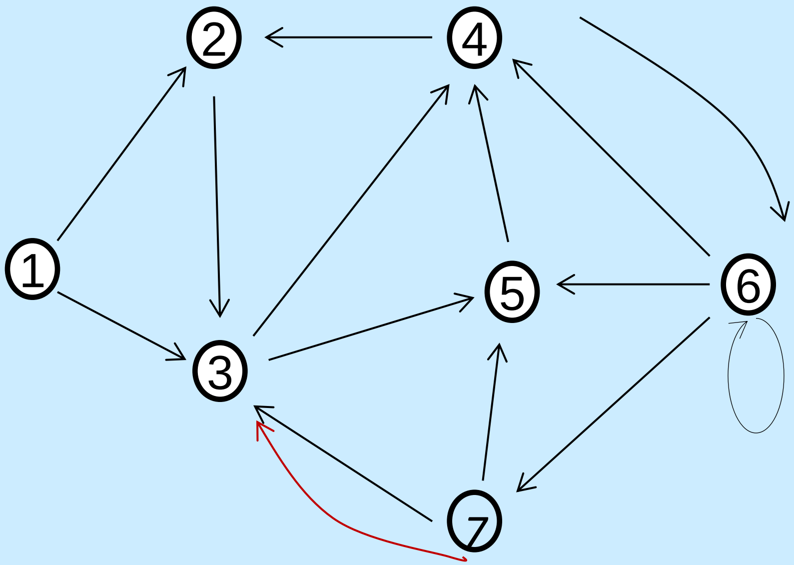
Un ***p-grafo*** es un grafo que contiene no más de p arcos (i, j) entre cualquier par de nodos i y j en este orden. Un ***1-grafo*** contiene a lo sumo un arco (i, j) para todo par de nodos i y j.

Un **multigrafo** es un grafo que posee más de un arco entre algún par de nodos. Un grafo es ***simple*** si es un 1-grafo y no contiene bucles.

Definiciones y terminología básica

Grafo dirigido o
1-grafo





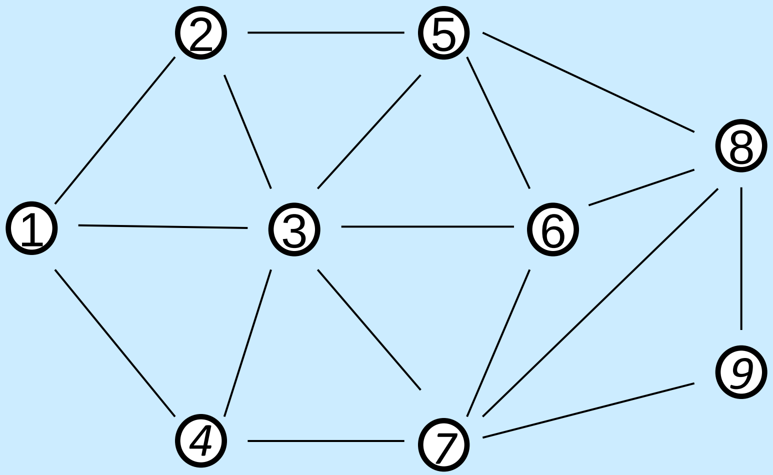
2-grafo dirigido o
multigrafo

Definiciones y terminología básica

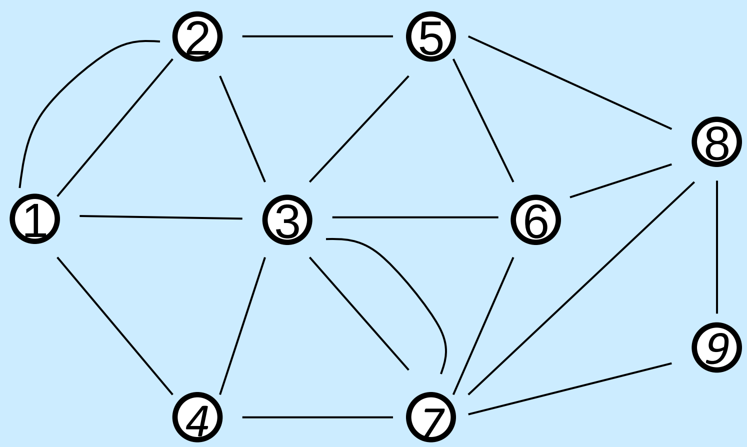
Grafos No Dirigidos

Un *grafo no dirigido* $G=(V,E)$ está definido por un conjunto V de ***nodos*** o ***vertices*** y un conjunto E cuyos elementos denominados ***aristas*** son pares no ordenados de nodos.

Denotamos por $|E| = m$ al número de aristas de un Grafo no dirigido.



Grafo no dirigido simple



Multigrafo no dirigido

Definiciones y terminología básica

Decimos que j es un ***sucesor*** de i si existe (i,j) en A (o $\{i, j\}$ en E).

Decimos que i es un ***predecesor*** de j si existe (i,j) en A (o $\{i, j\}$ en E).

Dado un grafo dirigido:

$\Gamma_i^+ = \left\{ j \mid (i, j) \in A \right\}$ es el ***conjunto de los sucesores*** del nodo i *o la Lista de adyacencia de los sucesores de i.*

$\Gamma_i^- = \left\{ j \mid (j, i) \in A \right\}$ es el ***conjunto de los predecesores*** del nodo i *o la lista de adyacencia de los predecesores de i.*

Dado un grafo no dirigido:

Se definen los nodos adyacentes del nodo i por $\Gamma_i = \left\{ j \mid \{i, j\} \in E \right\}$.

La versión dirigida de un grafo no dirigido se obtiene considerando el mismo conjunto de nodos y por cada arista $\{i, j\}$ en E se añaden los arcos (i, j) y (j, i) en A. Por tanto, $\Gamma_i^+ = \Gamma_i^-$ para la versión dirigida de un grafo no dirigido.

Definiciones y terminología básica

El ***grado de salida*** de un nodo *i* es $\delta^{+}(i) = \left|\Gamma_i^{+}\right|$.

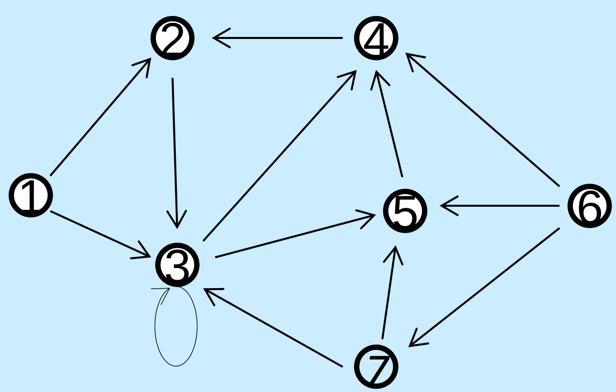
El ***grado de entrada*** de un nodo *i* es $\delta^{-}(i) = \left|\Gamma_i^{-}\right|$.

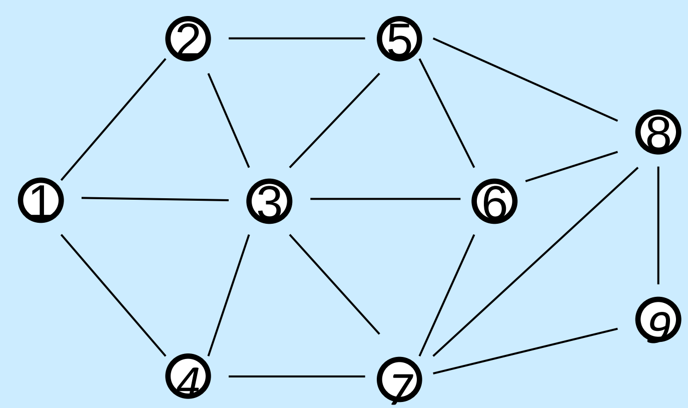
El ***grado*** de un nodo *i* es $\delta(i) = \delta^{+}(i) + \delta^{-}(i)$.

Dado un grafo no dirigido $\sum_{i \in V} \delta(i) = 2m$

Dado un grafo dirigido $\sum_{i \in V} \delta^{+}(i) = \sum_{i \in V} \delta^{-}(i) = m$

Ejercicio: Calcular el conjunto de los adyacentes, las listas de adyacencia de los sucesores y de los predecesores, los grados, grados de salida y de entrada de los nodos de los siguientes grafos según corresponda.





Definiciones y terminología básica

Subgrafo: Un grafo $G' = (V', A')$ es un **subgrafo** de $G=(V,A)$ si $V' \subseteq V$ y $A' \subseteq A$. Diremos que $G' = (V', A')$ es el **subgrafo** de G **inducido** por V' si A' contiene cada arco de A con ambos extremos en V'. Un grafo $G' = (V', A')$ es un **subgrafo generador** de $G=(V,A)$ si $V' = V$ y $A' \subseteq A$.

Una ***cadena*** de longitud q es una secuencia de q arcos (aristas) $C=\{e_1,\ldots,e_q\}$, tal que un arco (arista) e_r de la secuencia ($2 \leq r \leq q-1$) tienen un extremo común con el arco (arista) e_{r-1} ($e_{r-1} \neq e_r$) y otro extremo común con el arco (arista) e_{r+1} ($e_{r+1} \neq e_r$). El primer vértice del primer arco (arista) y el último vértice del último arco (arista) se denominan los ***extremos*** de la cadena.

Una ***cadena simple*** es una cadena que no atraviesa una arista cualquiera más de una vez. Una ***cadena elemental*** es una cadena que no atraviesa ningún vértice más de una vez. O, de otro modo, una cadena en la que sus vértices no tienen grado mayor que 2. Toda cadena elemental es simple.

Un ***ciclo*** es una cadena en la que en la que sus extremos coinciden.

Un grafo se dice ***acíclico*** si no contiene ciclos.

Definiciones y terminología básica

Un ***camino*** de longitud q es una secuencia de q arcos orientados $P=\{e_1,\ldots,e_q\}$ con:

$$e_1=(i_1, i_2) \quad e_2=(i_2, i_3) \quad \ldots \quad e_q=(i_q, i_{q+1})$$

El vértice i_1 se denomina ***vértice inicial*** y el vértice i_{q+1} ***vértice final***.

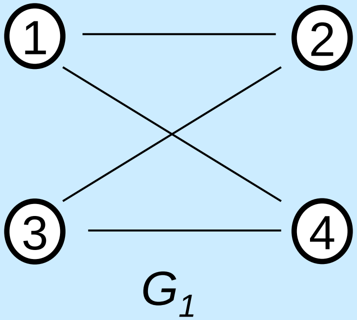
Un ***camino simple*** es el que no atraviesa ningún arco del grafo más de una vez. Un ***camino elemental*** es un camino en el que no se repite ningún vértice. También se puede definir como un camino en el que sus vértices no tienen grado mayor que 2. Es evidente que cada camino elemental también es simple.

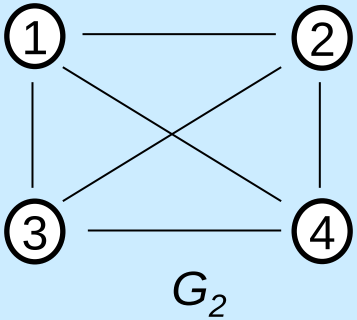
Un ***circuito o ciclo dirigido*** es un camino que contiene al menos un arco y en el que los vértices inicial y final coinciden. Un circuito es ***elemental*** si todos sus vértices tienen grado 2.

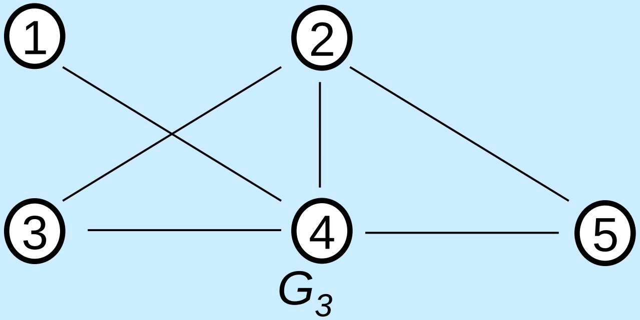
Un grafo se dice ***sin circuitos o acíclico dirigido*** si no contiene circuitos.

Definiciones y terminología básica

Un ***circuito euleriano*** de un grafo no dirigido G en un circuito simple que contiene todas las aristas de G.
Un ***camino euleriano*** de un grafo no dirigido G es un camino simple que contienen todas las aristas de G.







G_1 tiene un circuito euleriano, G_2 no tiene un circuito euleriano ni camino euleriano. G_3 tiene un camino euleriano.

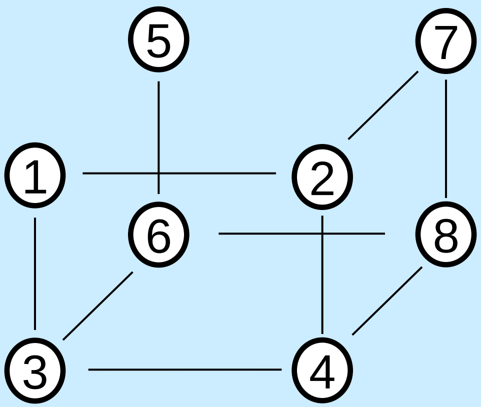
Propiedad 1. Un multigrafo conexo no dirigido tiene un circuito euleriano sí, y sólo si, cada uno de sus vértices tiene grado par.

Propiedad 2. Un multigrafo conexo no dirigido tiene un camino euleriano pero no un circuito euleriano sí, y sólo si, tiene, exactamente, dos vértices de grado impar.

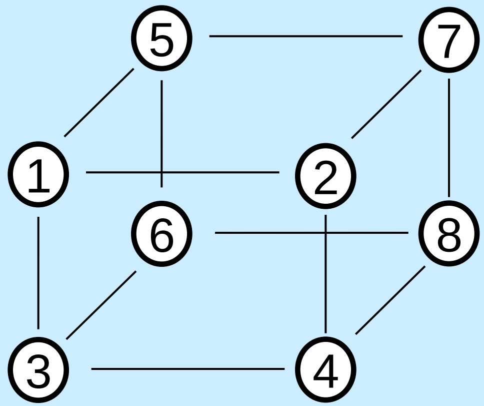
Problema del cartero chino

Definiciones y terminología básica

Un ***camino hamiltoniano*** de un grafo no dirigido *G* es aquel que pasa exactamente una vez por cada uno de los vértices de *G*.
Un ***circuito hamiltoniano*** de un grafo no dirigido *G* es aquel que pasa exactamente una vez por cada uno de los vértices de *G*



G_1



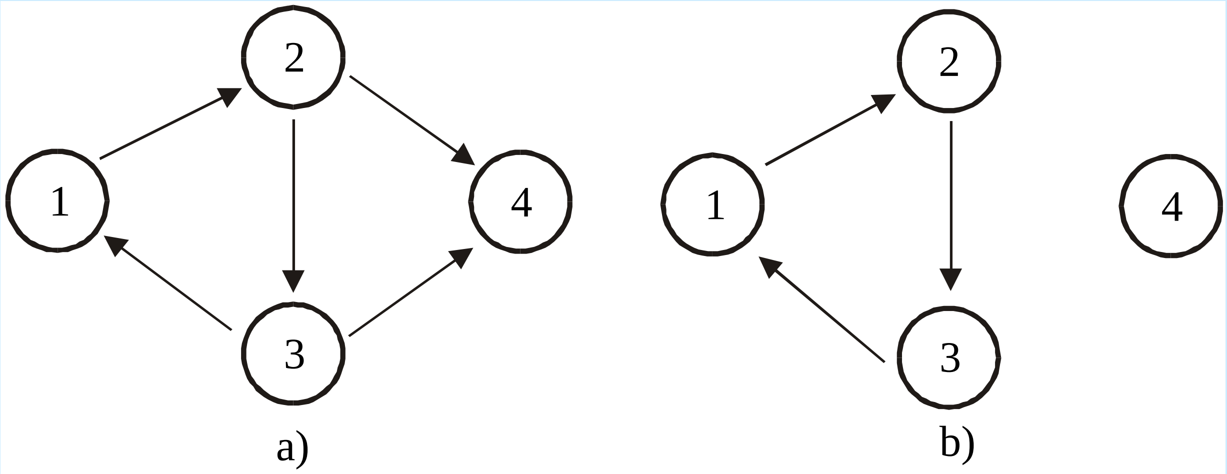
G_2

G_1 tiene un camino hamiltoniano pero no un circuito hamiltoniano,
G_2 tiene un circuito hamiltoniano.

La determinación de circuitos hamiltonianos motiva uno de los problemas más importantes en optimización: EL PROBLEMA DEL VIAJANTE (TSP)

Definiciones y terminología básica

Conectividad: Decimos que dos nodos *i* y *j* están conectados si el grafo contiene al menos una cadena desde el nodo *i* al nodo *j*. Un grafo es conexo si todo par de nodos están conectados; en otro caso el grafo es no conexo. Llamaremos componentes conexas de un grafo no conexo a los subgrafos de máxima conexiones de dicho grafo. Por ejemplo, el grafo mostrado en la Figura a) es conexo y el de la Figura b) es no conexo. Este último tiene 2 componentes conexas que consisten de los conjuntos de nodos {1,2,3} y{4}.



Definiciones y terminología básica

Conectividad fuerte: Un grafo conexo es fuertemente conexo si existe al menos un camino entre cualquier par de nodos del grafo. En la Figura a) anterior la componente definida por el conjunto de nodos {1,2,3} es fuertemente conexa, sin embargo el grafo no es fuertemente conexo debido a que no contiene caminos desde el nodo 4 al resto de los nodos.

Arbol: un árbol es un grafo conexo que no contiene ciclos. El concepto de árbol es muy importante en teoría de grafos. Asumiremos, las siguientes propiedades elementales de los árboles:

a) Un árbol de n nodos contiene exactamente n-1 arcos.

b) Un árbol tiene al menos dos nodos hoja (nodos con grado 1)

c) Cada dos nodos de un árbol están conectados por una única cadena o camino.

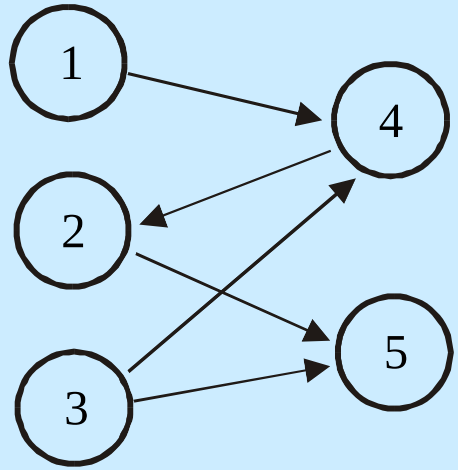
Definiciones y terminología básica

Bosque: Un grafo que no contiene ciclos es un bosque. Dicho de otra manera, un bosque es una colección de árboles.
Subárbol: Un subgrafo conexo de un árbol es un subárbol.

Arbol generador: un árbol T es un árbol generador del grafo G si T es un subgrafo generador de T. Todo árbol generador de un grafo conexo G de n nodos tiene (n-1) arcos.

Tipos de Grafos

Grafo bipartito: un grafo $G=(V,A)$ es un grafo bipartito si podemos dividir su conjunto de nodos en dos subconjuntos V_1 y V_2 tal que cada arco $(i,j) \in A$ tiene un extremo en V_1 y el otro en V_2. La Figura muestra un grafo bipartito con $V_1=\{1,2,3\}$ y $V_2=\{4,5\}$. La siguiente propiedad caracteriza a los grafos bipartitos: Un grafo G es bipartito si y sólo si todo ciclo en G contiene un número par de arcos.



Grafo bipartito.

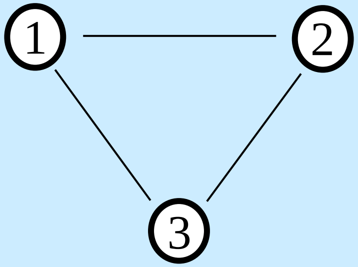
Tipos de Grafos

Un grafo G=(V, E) se dice ***completo*** si cada par de vértices es adyacente.

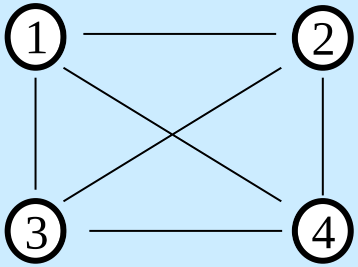
Un grafo simple y completo con N vértices se denota por K_N.

K_1

K_2

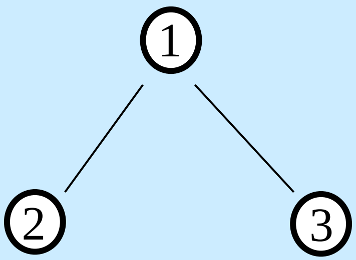


K_3

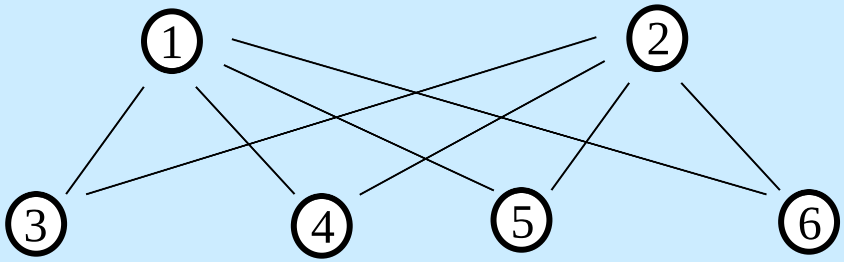


K_4

Un grafo bipartito G=(U∪V, E) se dice ***completo*** si cada par de vértices de los conjuntos U y V son adyacentes. Un grafo bipartito simple y completo con n,m vértices se denota por $K_{n,m}$.



$K_{1,2}$



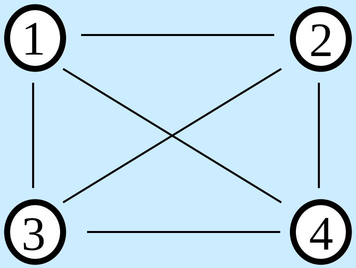
$K_{2,4}$

Tipos de Grafos

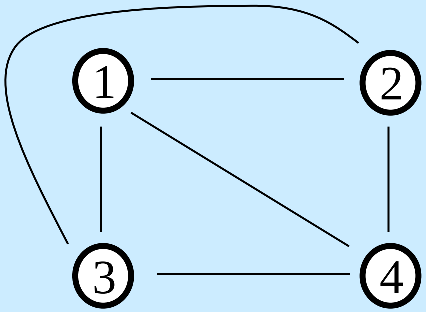
Grafos planares

Un grafo es planar si se puede representar en el plano de forma que sus aristas no se corten.

Por tanto, pueden existir formas alternativas de representación de un grafo que lo transformen en plano.



G_1



G_2

G_2 es la representación planar de G_1

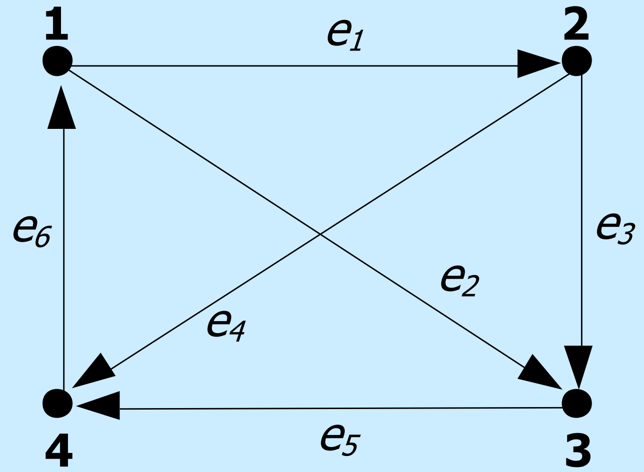
Para determinar si un grafo es **no** planar se utilizan las siguientes Propiedades:

Propiedad 1. Si G es conexo y planar con $n \geq 3$ entonces $m \leq 3n - 6$

Propiedad 2. Si G es conexo, bipartito y planar con $n \geq 3$, entonces $m < 2n - 4$

Matriz de incidencia vértice–arco

La matriz de incidencia vértice–arco de un grafo dirigido $G=(V, A)$ es una matriz $A=(a_{ve})$, con $v=1,\ldots,n$ y $e=1,\ldots,m$. El elemento a_{ve} es de la forma $a_{ve}=+1$ si v es vértice inicial del arco e, $a_{ve}=-1$ si v es vértice final de la arco e, y $a_{ve}=0$ en otro caso.



$$A = \begin{pmatrix} +1 & +1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & +1 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & +1 \end{pmatrix}$$

Matriz de incidencia vértice–arista

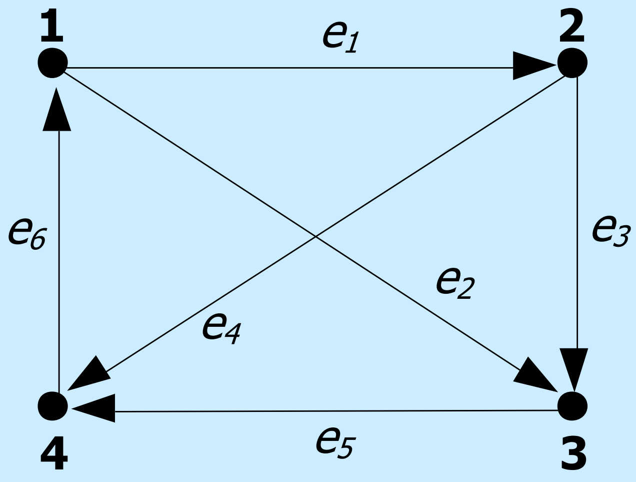
La matriz de incidencia vértice–arista de un grafo no dirigido $G=(V, E)$ una matriz $B=(b_{ve})$, con $v=1,\ldots,n$ y $e=1,\ldots,m$. El elemento b_{ve} es de la forma $b_{ve}=1$ si v es un vértice extremo de la arista e, y $b_{ve}=0$ en otro caso.

Si no consideramos las direcciones de los arcos del grafo dirigido anterior

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz de adyacencia o matriz de incidencia vértice–vértice

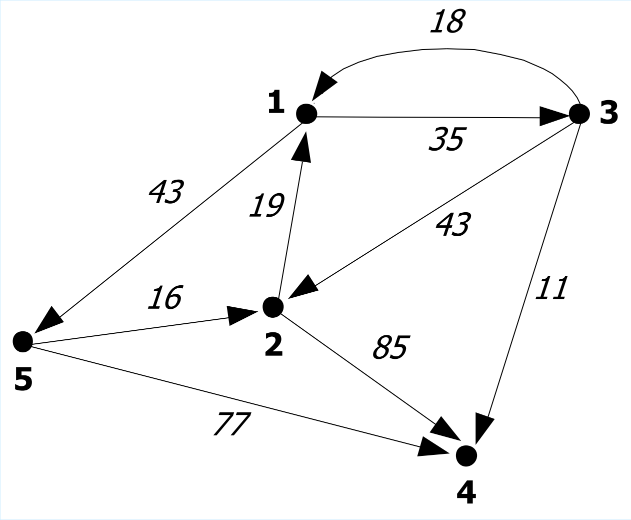
Sea $G=(V, A)$ un 1–grafo dirigido (no existe más de un arco entre dos vértices i y j). La matriz de adyacencia, o matriz de incidencia vértice–vértice, es una matriz $A=(a_{ij})$ cuyos elementos son de la forma $a_{ij}=1$ si existe el arco (i, j), y $a_{ij}=0$ en caso contrario. Si el grafo es no dirigido, la matriz de adyacencia asociada a su grafo dirigido es simétrica.



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Representación de Grafos

Matriz de costos: Los grafos suelen llevar asociado en cada arco un número que puede indicar, una longitud, un coste, un peso, un tiempo, etc. La forma más simple de representar un grafo con costos en los arcos *A* es la matriz de pesos o costos, la cual es una matriz $W=(w_{ij})$ en la que cada elemento w_{ij} es igual al costo de la arista (i, j). Si no existe la arista (i, j) en el grafo *G*, $w_{ij}=\infty$. Los elementos de la diagonal w_{ii} se suele establecer a cero (o a otro valor según el algoritmo).

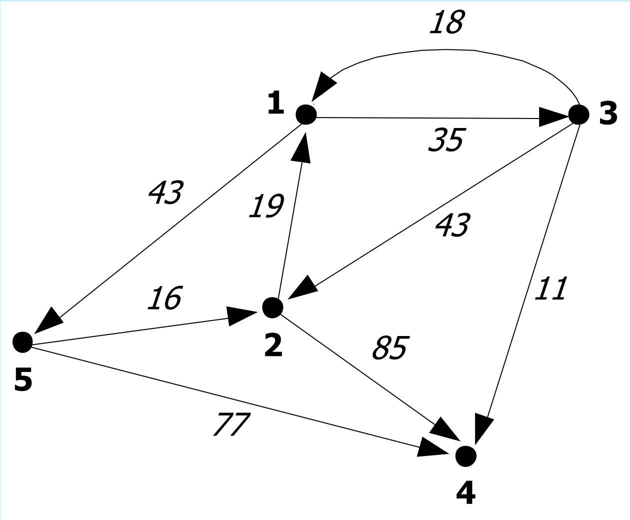


$$W = \begin{pmatrix} 0 & \infty & 35 & \infty & 43 \\ 19 & 0 & \infty & 85 & \infty \\ 18 & 43 & 0 & 11 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty \\ \infty & 16 & \infty & 77 & 0 \end{pmatrix}$$

Representación de Grafos en un ordenador

- Lista de arcos o aristas

La representación del grafo se puede almacenar en tres listas de forma que las dos primeras listas $T=(i_1, i_2,...,i_m)$ y $H=(f_1, f_2,...,f_m)$ contienen los vértices extremos de cada arco (arista) (i, j), y la tercera $C=(c_1, c_2,...,c_m)$ contiene los costos de cada una de ellas. Por ejemplo, para el grafo de la figura anterior tenemos la siguientes listas:



$T=(1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 5, 5)$

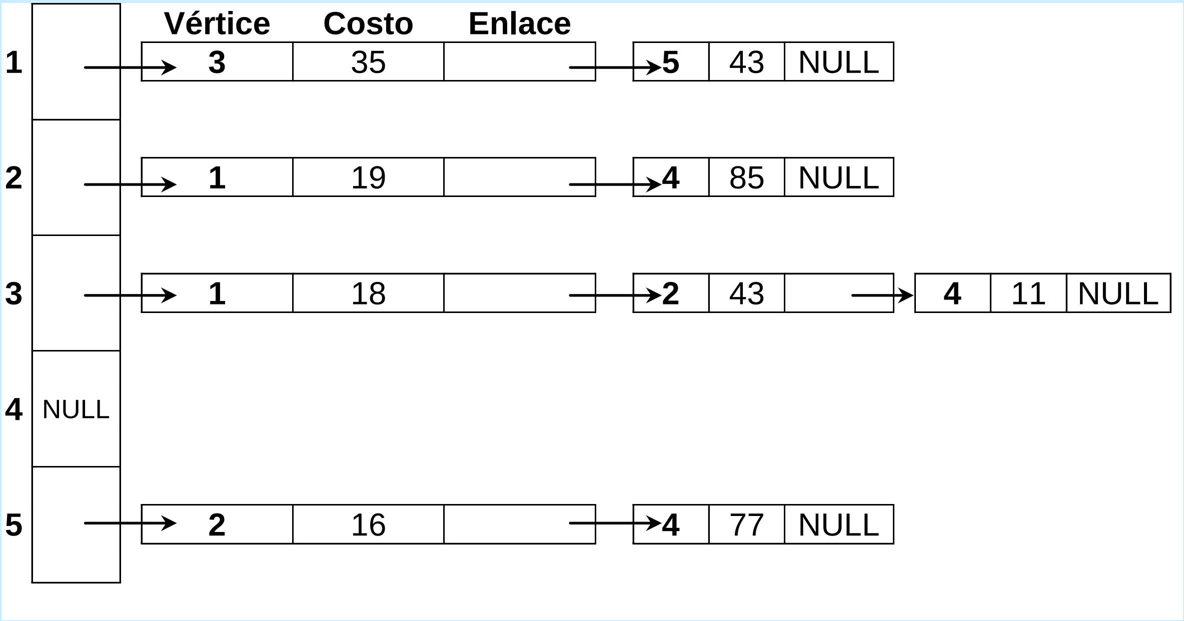
$H=(3, 5, 1, 4, 1, 2, 4, 2, 4)$

$C=(35, 43, 19, 85, 18, 43, 11, 16, 77)$

Representación de Grafos en un ordenador

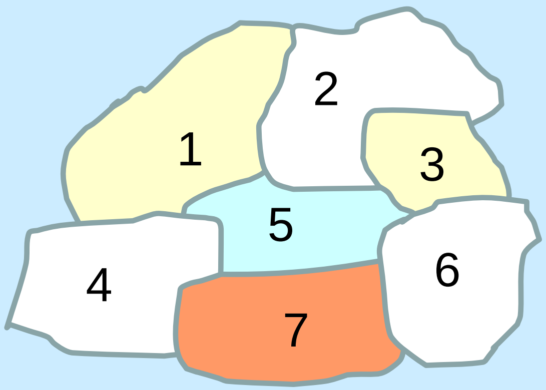
- Lista de adyacencia enlazada

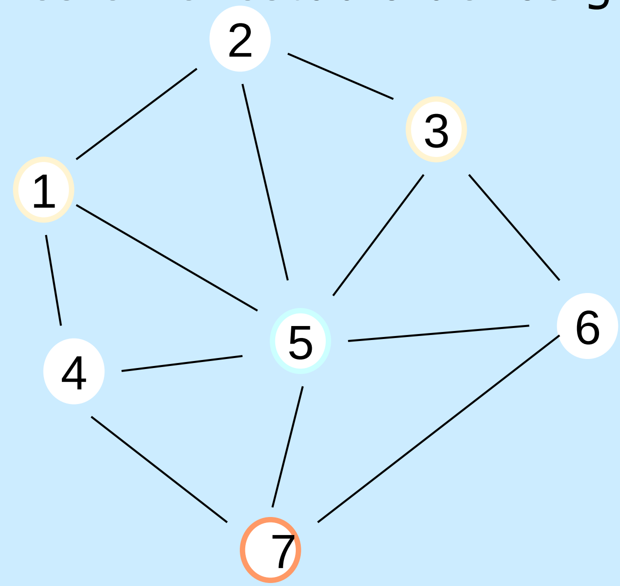
En muchas ocasiones, la representación de un grafo es más eficiente si todas los arcos que emanan de un vértice se agrupan juntas. En esta representación se guardan *n* listas enlazadas (una por cada vértice), con el origen de cada lista dentro de un array. Para cada sucesor de un vértice se guarda la información del vértice destino, del costo del arco (arista) y un puntero al siguiente adyacente dentro de la lista.



Problemas de Coloración de Grafos

La construcción de mapas, en los que regiones limítrofes deben tener colores distintos, es un problema de interés en el estudio de los grafos.





Una ***coloración de un grafo*** simple implica la asignación de colores a los vértices de forma que dos vértices adyacentes tengan colores distintos. El ***Número cromático*** *de un grafo* es el mínimo de colores necesarios para realizar una coloración.

Propiedad: El número cromático de un grafo planar es, como máximo, cuatro.