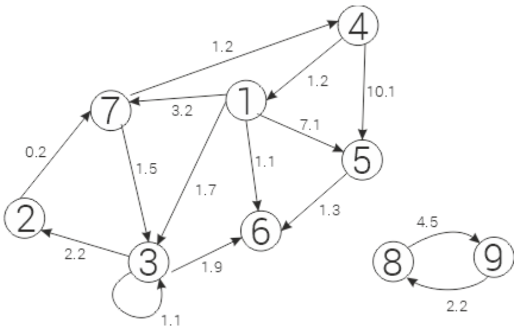
En este documento, explicaremos de forma sencilla las claves de cómo codificar un grafo dirigido. Resolveremos: conjunto de sucesores, conjunto de predecesores, grados de entrada y salida, matriz de incidencia vértice-arco, matriz de adyacencia y la matriz de costes.

Usaremos un ejemplo para ilustrar cada tipo, partiendo de su expresión gráfica:



Se trata de un grafo dirigido de de orden 9, con 15 arcos, es un 1-grafo, esto es, no hay más de un arco con el mismo origen y destino, y tiene un bucle en el nodo 3.

Sucesores del nodo *i*, son aquellos nodos *j* para los que existe el arco, (*i*, *j*), es decir, los nodos *j* a los que me puedo desplazar desde *i*. Así,

$\Gamma_1^+ = \{7,\ 6,\ 3,\ 5\}$
$\Gamma_2^+ = \{7\}$
$\Gamma_3^+ = \{3, 2, 6\}$
$\Gamma_4^+ = \{1,\ 5\}$
$\Gamma_5^+ = \{6\}$
$\Gamma_6^+ = \varnothing$
$\Gamma_7^+ = \{3,\ 4\}$
$\Gamma_8^+ = \{9\}$
$\Gamma_9^+ = \{8\}$

Una vez construidos los conjuntos de sucesores, el cómputo del grado de salida, es sencillo: $\delta^+(1) = 4$, $\delta^+(2) = 1$, $\delta^+(3) = 3$, $\delta^+(4) = 2$, $\delta^+(5) = 1$, $\delta^+(6) = 0$, $\delta^+(7) = 2$, $\delta^+(8) = 1$ y $\delta^+(9) = 1$, que suman 15, el número de arcos, puesto que cada arco se codifica como sucesor de un nodo: el arco (*i*, *j*) aparece como $j \in \Gamma_i^+$.

Predecesores del nodo *j*, son aquellos nodos *i* para los que existe el arco, (*i*, *j*), es decir, los nodos *i* de donde pude haber venido desde *i*. Así,

$\Gamma_1^- = \{4\}$
$\Gamma_2^- = \{3\}$
$\Gamma_3^- = \{1,\ 7,\ 3\}$
$\Gamma_4^- = \{7\}$
$\Gamma_5^- = \{1, 4\}$
$\Gamma_6^- = \{3,\ 7,\ 1\}$
$\Gamma_7^- = \{2,\ 1\}$
$\Gamma_8^- = \{9\}$
$\Gamma_9^- = \{8\}$

Una vez construidos los conjuntos de predecesores, el cómputo del **grado de llegada**, es sencillo: $\delta^-(1) = 1$, $\delta^-(2) = 1$, $\delta^-(3) = 3$, $\delta^-(4) = 1$, $\delta^-(5) = 2$, $\delta^-(6) = 3$, $\delta^-(7) = 2$, $\delta^-(8) = 1$ y $\delta^-(9) = 1$, que suman 15, el número de arcos, puesto que cada arco se codifica como predecesor de un nodo: el arco (*i*, *j*) aparece como $i \in \Gamma_j^-$.

Puedes comprobar que es una codificación completa, es decir, a partir de los sucesores puedes dibujar el grafo, y también, a través de los predecesores. Sucesores y predecesores son la estructura común para trabajar con grafos en algoritmos de optimización combinatoria.

Para construir la **matriz de incidencia vértice-arco** hay que listar los arcos, puesto que cada columna de la matriz va a representar uno. Una forma de hacerlo sería por orden lexicográfico, y así, las columnas representarían los arcos en este orden único:
(1, 3); (1, 5); (1, 6); (1, 7); (2, 7); (3, 2); (3, 3); (3, 6); (4, 1); (4, 5); (5, 6); (7, 3); (7, 4); (8, 9); (9, 8)

Las filas serían los nodos, con lo que tenemos **la matriz de incidencia vértice-arco A** siguiente:

	(1, 3)	(1, 5)	(1, 6)	(1, 7)	(2, 7)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 6)	(4, 1)	(4, 5)	(5, 6)	(7, 3)	(7, 4)	(8, 9)	(9, 8)
1	1	1	1	1	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	-1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	-1	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	-1	0	0
5	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0
6	0	0	-1	0	0	0	0	-1	0	0	-1	0	0	0	0
7	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1

Para construir la matriz, hemos tenido en cuenta:

- en cada columna, de cabecera (i, j), situamos un +1 en la fila i, y un -1 en la fila j. Si es un bucle (i, i), sólo un 1 en la fila i.
- el resto son 0.
- la suma por columnas es 0, excepto en los bucles, que suma 1.
- por filas, el número de 1 es el grado exterior; el número de 1 es el grado interior.

La **matriz de adyacencia** es, sin embargo, una matriz cuadrada de orden n, el orden del grafo. En este caso, referenciamos cada posición de la matriz según su fila y columna, y por tanto, el coeficiente de la posición i,j-ésima es la casilla de la fila i y columna j. La codificación es sencilla: recorremos los arcos y situamos un 1 para el arco (i, j) en la posición i,j-ésima; cero en el resto. Así, construimos **la matriz de adyacencia A** siguiente:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	0	1	0	1	1	1	0	0
2	0	0	0	0	0	0	1	0	0
3	0	1	1	0	0	1	0	0	0
4	1	0	0	0	1	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	1	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	1	1	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	1
9	0	0	0	0	0	0	0	1	0

Revisando la matriz de adyacencia, tenemos cosas curiosas:
- los sucesores están por filas (en la fila 1, están marcadas las columnas 3, 5, 6, y 7), con lo que el grado de salida es la suma por filas.
- los predecesores están por columnas (en la columna 3, están marcadas las filas 1, 3 y 7), con lo que el grado de entrada es la suma por columna.
- los bucles se sitúan en la diagonal principal (la posición 3, 3, es la del bucle en 3).

Finalmente, la **matriz de costes** sería una matriz cuadrada de orden n, y de forma similar a la matriz de adyacencia, identificamos la posición i,j-ésima con el arco (i, j), pero en esta ocasión, situamos el peso o coste del arco.

Así, construimos la **matriz de costes** W siguiente:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	∞	∞	1,7	∞	7,1	1,1	3,2	∞	∞
2	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0,2	∞	∞
3	∞	2,2	1,1	∞	∞	1,9	∞	∞	∞
4	1,2	∞	∞	∞	10,1	∞	∞	∞	∞
5	∞	∞	∞	∞	∞	1	∞	∞	∞
6	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
7	∞	∞	1,5	1,2	∞	∞	∞	∞	∞
8	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	4,5
9	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	2,2	∞