Eksamensoppgaver til repetisjon

MAT106, V2018

Høgskulen på Vestlandet

Alexander Lundervold

Versjon 3.0

25. april, 2018

Innhold

Komplekse tall

Eksamen MAT106 januar 2018, oppgave 4

Oppgave 4

Gitt $z_1 = 5i$, $z_2 = -1 - i$.

Regn ut $z_1 z_2$, $z_1 \cdot \overline{z}_1$, $\dfrac{z_1}{z_2}$ og $(z_2)^8$.

NB: Legg merke til at $\overline{z}_1 = z_1^*$ er det konjugerte komplekse tallet til z_1.

Eksamen MAT106 V2017, oppgave 5

Oppgave 5

a) Gitt $z_1 = -3j$, $z_2 = 1 + j$.

Regn ut $z_1 \cdot \overline{z}_1 (= z_1^*)$, $z_1 z_2$ og $\dfrac{z_1}{z_2}$.

b) Skriv $\sqrt{j}$ på eksponentialform.

Eksamen MAT106 V2016, oppgave 3 b)

Oppgave 3

a) Gitt dobbeltintegralet

$$\iint_D y\cos x \,\mathrm{dxdy}$$

over integrasjonsområdet D definert ved $0 \leq x \leq \pi$ og $0 \leq y \leq 2$.

Tegn integrasjonsområdet og regn ut dobbelintegralet.

b) Gitt komplekse tall $z = 1 - i$ og $w = 2 + 2i$.
Skriv z og w på eksponentiell form (polarform).
Regn ut og skriv følgende på viserform: $\frac{w}{z}$, $\overline{w} \cdot i$ og z^8. Husk: $\overline{w}$ er den komplekskonjugerte til w.

Eksamen MAT100 V2015, oppgave 7 – Elektro, a)

(NB: Fra MAT100)

Oppgave 7 - Elektro

a) Skriv tallet $e^{i\pi} + 2 + i$ på både standardform og eksponentiell form.

Eksamen MAT100 H2014, oppgave 7 – Elektro, a) (i)

Oppgave 7 - Elektro

a) (i) Skriv tallet $3 - \sqrt{3}i$ på både eksponentiell og trigonometrisk form.

Eksamen MAT100 V2014, oppgave 5 – Elektro, b) og c)

b) Gitt de komplekse tallene $z_1 = 1 - i$, $z_2 = \sqrt{3} + i$

i.) Regn ut $2z_1 + z_2$ og $\frac{z_1}{z_2}$

ii.) Uttrykk både z_1 og z_2 på eksponensiell form ($re^{i\theta}$).

c) Skriv iz_1 og $z_2{}^6$ på generell form $a + ib$

Eksamen MAT100 H2013, oppgave 5 – Elektro, a) og b)

Oppgave 5 – Elektro

NB! Du skal bare svare på en av oppgavene merket «Oppgave 5». Denne oppgaven tar utgangspunkt i pensum undervist ved Institutt for elektrofag.

a) Merk av disse i det komplekse planet, og skriv på eksponentiell form: $2+3i$ og $3-4i$.

b) To visere er gitt som $I_1 = 15\underline{/30^\circ}$ og $I_2 = \dfrac{15\underline{/30^\circ}}{3+4i}$.

Finn en funksjon $a(t)$ som korresponderer til $I = I_1 + I_2$.

Eksamen MAT100 V2013, oppgave 4 – Elektro, d) og e)

Gitt de komplekse tallene $z_1 = 1+i$, $z_2 = 2-2i$ og $z_3 = \sqrt{3}+i$

d) Beregn z_1+z_2, z_2-z_1, $z_1 \cdot z_2$ og $\dfrac{z_1}{z_3}$.

Tegn inn i diagrammet .

e) Skriv tallene z_1 og z_3 på polar form og (nøtt ☺) bruk siste resultat i spørsmål d) til å finne eksakte uttrykk for $\cos(15^\circ)$ og $\sin(15^\circ)$.

Eksamen MAT106 H2015, oppgave 3, c)

c) Gitt komplekse tall $z = 1+i$ og $w = 3-3i$.

i) Skriv z og w på eksponentiell form (polarform).

ii) Regn ut og skriv svaret på standardform $a+bi$: $\dfrac{w}{z}$, $\bar{z} \cdot i$ og z^6.

Rekker

Eksamen MAT106 januar 2018, oppgave 1

Oppgave 1

a) Gitt en rekke $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ med positive ledd. Hvis $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, hva kan vi si om rekken?

Undersøk om rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2}{n^2+1}\right)$ konvergerer eller divergerer.

b) Undersøk om rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+2}$ konvergerer eller divergerer.

c) Bestem konvergensintervallet til potensrekken: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot 3^n} x^n$

d) Finn taylorrekken i $x = 0$ (maclaurinrekken) til $f(x) = xe^{7x}$.
Ta med det allmenne leddet.

Eksamen MAT106 V2017, oppgave 1

Oppgave 1

a) Gitt en rekke $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ med postive ledd. Hvis $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, hva kan vi si om rekken?

Undersøk om rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{2n}{1+n}\right)$ konvergerer eller divergerer.

b) Undersøk om følgende rekker konvergerer eller divergerer: **i)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{n^4+3n^2+n+3}$

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{7^n}$ **iii)** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{7^n}$

c) Er $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{7^n}$ betinget eller absolutt konvergent. Begrunn svaret.

d) Bestem konvergensintervallet til potensrekken: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{7^n} x^n$

e) Finn taylorrekken i $x = 0$ (maclaurinrekken) til $f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x}$.
Ta med det allmenne leddet.

Eksamen MAT106 januar 2017, oppgave 1

Oppgave 1

a) En student prøvde å svare på oppgaven:

Oppgave: Undersøk om rekken konvergerer eller divergerer: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$.

og studenten skrev i sin besvarelse:

"p-rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ *divergerer* ($p = \frac{1}{3} < 1$) *og dermed vil rekken* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$ *divergere"*

Hva er feilen? Skriv rett begrunnelse for denne oppgaven.

b) Gitt rekken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ med positive ledd. Hvis $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, hva kan vi si om rekken?

Undersøk om rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(e + \frac{1}{n}\right)$ konvergerer eller divergerer.

c) Bestem konvergensintervallet til potensrekken: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt[3]{n}} x^n$

d) Finn taylorrekken i $x = 0$ (maclaurinrekken) til $f(x) = \frac{1 - e^{-2x}}{x}$.

Eksamen MAT105 H2016, oppgave 1

Oppgave 1

a) Avgjør om rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{e^n}$ konvergerer eller divergerer.

b) Avgjør om rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \cos n}{n^2}$ konvergerer eller divergerer.

c) Bestem konvergensområdet til potensrekken: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n2^n}$.

d) Finn maclaurinrekken til følgende funksjoner:

i) $f(x) = \frac{\sin(x^4)}{x}$

ii) $g(x) = \int_0^x \frac{\sin(t^4)}{t}\, dt$

Eksamen MAT106 V2016, oppgave 1

Oppgave 1

a) i) Undersøk om rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ konvergerer eller divergerer.

ii) Rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right)$ er divergent. Bruk en av konvergenstestene til å vise det.

iii) Undersøk om rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ konvergerer eller divergerer.

b) Bestem konvergensintervallet til potensrekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{\sqrt{n}} x^n$.

c) Finn potensrekken om $x = 0$ (maclaurinrekken) til

$$f(x) = \frac{\ln(1+2x)}{x}.$$

Hint: Ta utgangspunkt i den kjente rekken til $\ln(1+x)$.

Eksamen MAT105 V2016, oppgave 4

Oppgave 4

a) La

$$a_n = \frac{2n^4}{n^4 + \sqrt[3]{n^2} - 5} \tag{1}$$

i) Finn $\lim_{n\to\infty} a_n$.

ii) Kan man ut fra svaret over si noe om konvergensen av rekken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$?

b) Bestem konvergensintervallet til potensrekken: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{5^n \sqrt{n}}$.

c) Gitt den geometriske rekken

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad , \quad -1 < x < 1 \,. \tag{2}$$

Bruk rekken over til å skrive $\frac{1}{1+x^2}$ som en potensrekke. Oppgi konvergensområdet til denne rekken.

d) Bruk resultatet fra c) til å finne potensrekken for $\tan^{-1} x$. Her behøver du ikke oppgi konvergensområdet. (Hint: $\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \tan^{-1} x + C$)

Eksamen MAT106 H2015, oppgave 1

Oppgave 1

a) i) Rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ er konvergent. Bruk en av konvergenstestene til å vise det.

ii) Er summen av en konvergent og en divergent rekke konvergent eller divergent?

Undersøk om rekken konvergerer eller divergerer: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

b) Bestem konvergensintervallet til potensrekken: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt[3]{n}} x^n$.

c) Finn taylorrekken om $x = 0$ (maclaurinrekken) til $f(x) = \frac{e^{2x} - 1 - 2x}{x^2}$.
(Hint: Ta utgangspunkt i den kjente rekken til e^{2x})

Eksamen MAT106 V2015, oppgave 2

Oppgave 2

a) Avgjør om rekken konvergerer eller divergerer:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{n^3-2n+3}$$

b) i) Finn $\cos(n\pi)$ for $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

ii) Avgjør om rekken konvergerer eller divergerer:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n+3}$$

c) Finn konvergensområdet til potensrekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4 4^n} x^n$$

d) Bruk taylorrekken til $\cos(x)$ rundt $x = 0$ til å finne taylorrekken til

$$\frac{1-\cos(x^2)}{x}$$

Eksamen MAT107 H2014, oppgave 1

Oppgave 1

a) Vis at rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$ konvergent og forklar hvorfor rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$ er divergent.

Hva menes med at rekken er divergent?

b) Bestem konvergensintervallet til potensrekken: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n \sqrt{n}} x^n$

c) Finn Maclaurinrekken til $f(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+x)}{x} dx$.

Eksamen MAT106 V2014, oppgave 1

Oppgave 1

a) Rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ er konvergent. Bruk et av konvergenskriteriene til å vise det.

b) Undersøk om rekken konvergerer eller divergerer: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+(-1)^n}{n^2}$.

c) Bestem konvergensintervallet til potensrekken: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n} x^n$

d) Finn taylorrekken i $x = 0$ (maclaurinrekken) til $f(x) = \frac{x - \ln(x+1)}{x^2}$.

Eksamen MAT106 V2013, oppgave 1

Oppgave 1.

a) Rekka $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 - \sin n}{n^2}$ er konvergent. Hva vil det si, og hvordan kan man vise det?

Undersøk om rekka $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-n}{n^2}$ konvergerer eller divergerer.

b) Bestem konvergensintervallet til potensrekka $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{\sqrt{n}} x^n$

c) Bestem Taylorrekka i $x = 0$ (Maclaurinrekka) til $f(x) = xe^{-3x}$

Eksamen MAT106 august 2013, oppgave 1

Oppgave 1.

a) Undersøk om rekkene $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n\sqrt{n}+1}$ og $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n}$ konvergerer eller divergerer.

b) Bestem konvergensintervallet til potensrekka $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} x^n$

c) Bestem Taylorrekka i $x = 0$ (Maclaurinrekka) til $f(x) = \frac{e^{-x^2} - 1}{x}$

d) Bruk resultatet fra c) til å finne en uendelig rekke for $\int_0^x f(t)\,dt$

Eksamen MAT106 H2013, oppgave 3

Oppgåve 3

a) Ka meiner vi med at ei rekke er konvergent?
b) Finn maclaurinrekkane til

1) $\ln(2+x)$

2) $$\int_0^x \frac{\sin(t^2)}{t}\,\mathrm{dt}$$

c) Finn ut om rekka er konvergent

1) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

2) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$$

d) Finn rekkas sum

1) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

2) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}\frac{1}{n!}$$

Eksamen FOA162 V2010, oppgave 1

Oppgave 1

a) Gitt en rekke

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \text{der} \quad a_n = \frac{n^2}{n^2-2}$$

Regn ut $\lim_{n\to\infty} a_n$. Hva forteller denne grenseverdien om konvergensen av rekken?

b) Finn konvergensområdet for potensrekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 5^n} x^n$$

c) Bestem Taylor-rekken om punktet $x = 0$ (Maclaurin-rekken) til funksjonene

$$f(x) = \ln(1+2x)$$

og

$$g(x) = \frac{\ln(1+2x)}{x}$$

Eksamen FOA162 H2010, oppgave 6

Oppgave 6

a) Avgjør om rekkene konvergerer eller divergerer:

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{2n+4}{n^2+4n-1} \qquad\qquad \sum_{1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$$

b) For hvilke verdier av x konvergerer potensrekken

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n^2}$$

Fourierrekker

Eksamen MAT106 januar 2018, oppgave 3

Oppgave 3

En periodisk funksjon er gitt ved:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & -\pi \leq x < 0 \\ -2x & 0 \leq x < \pi \end{cases} \quad ; \qquad f(x+2\pi) = f(x) \text{ for alle } x$$

a) i) Skisser grafen til f i intervallet $[-3\pi, 3\pi]$.

ii) Hva er perioden til funksjonen? Oppgi eventuelle symmetriegenskaper til f. Regn ut $f(-15\pi)$.

b) Regn ut fourierkoeffisientene og sett opp fourierrekken til f. Hva konvergerer fourierrekken mot i $x = 1$?

Eksamen MAT106 V2017, oppgave 3

Oppgave 3

En 2-periodisk funksjon er gitt ved:

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & -1 \leq x < 0 \\ -x+2 & 0 \leq x < 1 \end{cases} \quad ; \qquad f(x+2) = f(x) \text{ for alle } x$$

a) i) Skisser grafen til f i intervallet $[-3, 3]$.

ii) Hva er perioden til funksjonen? Oppgi eventuelle symmetriegenskaper til f. Regn ut $f(-23)$.

b) Regn ut fourierkoeffisientene og sett opp fourierrekken til f. Hva konvergerer fourierrekken mot i $x = 0$?

Eksamen MAT106 januar 2017, oppgave 5

Oppgave 5

En periodisk funksjon er gitt ved:

$$f(x) = 3x \quad \text{for } -1 \leq x < 1$$
$$f(x+2) = f(x) \text{ for alle } x$$

a) i) Skisser grafen til f i intervallet $[-3, 3]$.

ii) Hva er perioden til funksjonen?

iii) Oppgi eventuelle symmetriegenskaper til f.

vi) Regn ut $f(-21)$.

b) Regn ut fourierkoeffisientene og sett opp fourierrekken til f.
Hva konvergerer fourierrekken mot i $x = 1$?

Eksamen MAT105 H2016, oppgave 6

Oppgave 6

La $f(x)$ være en periodisk funksjon med periode $T = 2\pi$ slik at

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } \quad -\pi \leq x < 0 \\ x, & \text{if } \quad 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

a) Skisser grafen til f i intervallet $[-3\pi, 3\pi]$,

b) Vis at fourierrekken til $f(x)$ kan skrives som

$$\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left[\cos(x) + \frac{1}{3^2}\cos(3x) + \frac{1}{5^2}\cos(5x) + \dots\right] + \left[\sin(x) - \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{1}{3}\sin(3x) - \dots\right],$$

c) Finn en passende verdi for x, slik at du kan vise at

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots.$$

Eksamen MAT106 V2016, oppgave 5

Oppgave 5

En periodisk funksjon er gitt ved:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2}, & -2 < x < 0 \\ -\dfrac{x}{2}, & 0 \leq x \leq 2 \end{cases} \quad , \qquad f(x) = f(x+4)$$

a) i) Skisser grafen til f i intervallet $[-6, 6]$.

ii) Oppgi eventuelle symmetriegenskaper til f.

iii) Regn ut $f(-13)$.

b) Finn fourierrekken til f.
Hva konvergerer fourierrekken mot i $x = -2$ og $x = 2$? Begrunn svaret.

Eksamen MAT105 V2016, oppgave 5

Oppgave 5

En periodisk funksjon er gitt ved

$$f(x) = x^2, \qquad -2 \leq x < 2; \qquad f(x+4) = f(x)$$

a) 1) Skisser grafen til f i intervallet $[-6, 6\rangle$.

2) Hva er perioden til funksjonen.

3) Regn ut $f(5,5)$ og $f(18)$.

b) 1) Forklar, uten å regne, at $b_n = 0$.

2) Regn ut a_0.

3) Vis ved regning at $a_n = (-1)^n \dfrac{16}{n^2\pi^2}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots.$

c) 1) Skriv opp fourierrekken til f.

2) Hva konvergerer fourierrekken mot i $x = 0$?
Bruk dette til å vise at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

Eksamen MAT106 H2015, oppgave 5

Oppgave 5

En periodisk funksjon er gitt ved:

$$f(x) = \frac{1}{2}x \quad \text{for } -2 \le x < 2$$
$$f(x+4) = f(x) \quad \text{for alle } x$$

a) i) Hva er perioden til funksjonen?

ii) Skisser grafen til f i intervallet $[-4, 4]$.

iii) Oppgi eventuelle symmetriegenskaper til f.

iv) Regn ut $f(-26)$.

b) Finn fourierrekken til f.
Hva konvergerer fourierrekken mot i $x = 2$? Begrunn svaret.

Eksamen MAT106 V2015, oppgave 3

Oppgave 3

En funksjon er gitt ved

$$f(x) = x^2, \quad -1 \le x < 1, \quad f(x+2) = f(x)$$

a) i) Hva betyr det at en funksjon er periodisk? Er $f(x)$ en periodisk funksjon? Hvis den er det, hva er perioden?

ii) Hva betyr det at en funksjon er odde eller jevn? Avgjør om $f(x)$ er en odde eller jevn funksjon.

iii) Skisser grafen til $f(x)$ på intervallet $-4 \le x < 4$.

b) Bestem fourierkoeffisientene til $f(x)$ og vis at fourierrekken er

$$\frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(n\pi x)$$

c) Hva konvergerer fourierrekken mot for $x = 0$? Hva konvergerer den mot for $x = 1$? Bruk resultatet til å finne summen av følgende rekke:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

Eksamen MAT107 H2014, oppgave 4

Oppgave 4

En periodisk funksjon er gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } -2 \leq x < 0 \\ 1 & \text{for } 0 \leq x < 2 \end{cases} \tag{1}$$

og $f(x+4) = f(x)$ for alle x.

a) Tegn grafen til f i intervallet $[-4, 4]$.

b) Regn ut Fourierrekka til $f(x)$.

Eksamen MAT106 V2014, oppgave 4

Oppgave 4

En periodisk funksjon er gitt ved:

$$f(x) = \frac{1}{2}x \quad \text{for } -2 \leq x < 2$$
$$f(x+4) = f(x) \text{ for alle } x$$

a) i) Skisser grafen til f i intervallet $[-6, 6]$.
   ii) Hva er perioden til funksjonen?
   iii) Oppgi eventuelle symmetriegenskaper til f.
   vi) Regn ut $f(-31)$.

b) Finn fourierrekken til f.
Hva konvergerer fourierrekken mot i $x = 2$?

Eksamen MAT106 V2013, oppgave 5

Oppgave 5.

En periodisk funksjon f er gitt ved:

$$f(x) = 2x \text{ for } -\pi \le x < \pi \text{ og } f(x+2\pi) = f(x) \text{ for alle } x$$

a) Skisser grafen til f i intervallet $[-3\pi, 3\pi]$. Angi perioden og eventuelle symmetriegenskaper til f. Regn ut $f(-19\pi)$, $f(19\pi)$.

b) Regn ut fourierkoeffisientene og sett opp fourierrekka til f. Hva konvergerer fourierrekka mot i $x = 0{,}5\pi$ og $x = \pi$?

Eksamen MAT106 august 2013, oppgave 5

Oppgave 5.

En periodisk funksjon f er gitt ved:

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{2}x & ; \; -2 \le x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2}x & ; \; 0 \le x < 2 \end{cases} \quad \text{og} \quad f(x+4) = f(x) \text{ for alle } x$$

a) Skisser grafen til f i intervallet $[-6, 6]$. Angi perioden og eventuelle symmetriegenskaper til f. Regn ut $f(11)$ og $f(-28)$.

b) Fourierrekka til f er $\frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{(2n-1)\pi x}{2}}{(2n-1)^2}$. Hva konvergerer denne rekka mot for $x = 0$? Og hva konvergerer den mot for $x = 2$?

c) Bruk fourierrekka i b) til å regne ut summen av rekka $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

Eksamen FOA162 V2010, oppgave 3

Oppgave 3

Gitt funksjonen f:

$$f(x) = \frac{x}{2}; \quad -2 \leq x < 2; \qquad f(x+4) = f(x) \quad \text{for alle } x$$

a) Forklar hvordan vi kan vite at funksjonen er periodisk. Angi perioden og eventuelle symmetriegenskaper. Skisser grafen i intervallet $-6 \leq x < 6$. Regn ut $f(3)$og $f(-6)$.

b) Bestem Fourier-koeffisientene og sett opp Fourier-rekken til f. Hva konvergerer Fourier-rekken mot når $x = 1$? Og hva konvergerer den mot når $x = 2$?

c) Bruk resultatet i b) til å vise at

$$\pi = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)}$$

Lineær algebra 1: Matriser, determinanter, lineære system

Eksamen MAT105 H2016, oppgave 5, a)

Oppgave 5

Gitt en matrise:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & t^2 \end{bmatrix},$$

der $t \in \mathbf{R}$.

a) Finn de verdier av t som gir at determinanten til A er lik null.

b) Finn egenverdiene og egenvektorene til A når $t = 1$.

c) Finn matrisene P, P^{-1} og diagonalmatrisen D slik at $PDP^{-1} = A$ når $t = 1$.

Eksamen MAT105 V2016, oppgave 6, a), b)

Oppgave 6

Gitt en matrisene: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$.

a) Er matrisen A inverterbar? Begrunn svaret.

b) Er kolonnene i B lineært avhengige eller lineært uavhengige? Begrunn svaret.

c) Regn ut egenverdiene og egenvektorene til C.

Eksamen MAT106 V2014, oppgave 7, b) og c)

Oppgave 7

Vi har matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

a) Finn alle egenverdier og egenvektorer til A.

b) Finn A^{-1}.

c) Løs systemet $Ax = b$, der

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Eksamen MAT106 V2013, oppgave 3, a), b), d) og f)

Oppgave 3.

Vi har gitt matrisa

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Beregn matrisas determinant

b) Løs likningssystemet $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, der $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

c) Finn alle egenverdier og egenvektorer til $\mathbf{A}$

d) Bestem konstanten z slik at $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 6 & z & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ blir en singulær matrise.

e) Finn en basis for nullrommet til $\mathbf{B}$, med den z du fant i spørsmål d).

f) Vi bruker fortsatt den z du fant i spørsmål d). Forklar hvorfor systemet $\mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{c}$ kan løses for $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, og finn en løsning.

Eksamen MAT106 august 2013, oppgave 3, a), b) og c)

Oppgave 3.

Vi har gitt matrisa

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Eksisterer den inverse matrisa til **A**, $\mathbf{A}^{-1}$? Begrunn svaret uten å regne ut $\mathbf{A}^{-1}$.

b) Hvis $\mathbf{A}^{-1}$ eksisterer, regn den ut.

c) Løs likningssystemet $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, der $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Eksamen MAT106 H2013, oppgave 1, a), b), d) og e)

Oppgåve 1

Vi har matrisa

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Beregn matrisas determinant.

b) Løs systemet

$$Ax = b$$

der

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

c) Finn alle egenverdiar og egenvektorar til A.

d) Bestem konstanten z slik at

$$B = \begin{bmatrix} z & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

blir en singulær matrise.

e) Løs systemet

$$Bx = 0.$$

Eksamen FOA162 V2010, oppgave 4, a) og b)

Oppgave 4

Gitt $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & t \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

a) Finn determinanten til **A**. For hvilke verdier av konstanten t har matrisen en invers?

b) Anta nå at $t = 0$, og la $\mathbf{B} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 8 & 6 & -5 \\ 4 & 6 & -5 \\ -4 & -4 & 4 \end{bmatrix}$

i) Regn ut **AB**. Hva kaller vi matrisen **B** i denne situasjonen?

ii) Løs likningssystemet $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, der $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ $\quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$

Laplacetransformasjonen

Eksamen MAT106 januar 2018, oppgave 6

Oppgave 6

Løs følgende initialverdiproblemer ved å bruke Laplacetransformasjon:

a) $y' - 3y = e^{-2x}$, $y(0) = 2$.

b) $y'' + 8y' + 16y = 2$, $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

Sett opp den generelle løsningen til differensialligningen.

Eksamen MAT106 V2017, oppgave 6

Oppgave 6

Løs følgende initialverdiproblemer ved å bruke Laplacetransformasjon;

a) $y' + 4y = 3e^{2t}, \quad y(0) = 1$

b) $4y'' - 12y' + 9y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

Eksamen MAT106 januar 2017, oppgave 7

Oppgave 7

Løs initialverdiproblemet

$$y'' + y' - 6y = 0, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$$

ved å bruke laplacetransformasjonen.

Eksamen MAT106 V2016, oppgave 7

Oppgave 7

Bruk Laplacetransformasjonen til å løse følgende startverdiproblemer

a) $y' - 5y = e^{5t}, \qquad y(0) = 2$

b) $y'' + 4y = \sin t, \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 2$

Eksamen MAT106 H2015, oppgave 7

Oppgave 7

a) Finn den inverse laplacetransformerte til $F(s) = \dfrac{s+3}{s^2 + 6s + 13}$.

b) Løs startverdiproblemet $y'' - y = -t, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0$ ved hjelp av laplacetransformasjon.

Eksamen MAT106 V2015, oppgave 4

Oppgave 4

a) La

$$F(s) = \frac{5s+1}{s^2 - 25}$$

Finn den inverse laplacetransformerte til $F(s)$.

b) Løs startverdiproblemet

$$y' + y = 3, \quad y(0) = 1$$

ved hjelp av den laplacetransformerte.

Eksamen MAT106 V2013, oppgave 2 b)

b) Løs differensialligningen $\frac{d^2y}{dt^2} + 5\frac{dy}{dt} + 6y = 2e^{-t}$
ved å bruke Laplace-transformasjon. Med initialbet. $y(0) = y'(0) = 0$

Eksamen MAT106 H2013, oppgave 2 a)

Oppgåve 2

a) Bruk Laplace-transform til å løse ligninga

$$y'' + 2y' + y = x$$

med initialkrava

$$y(0) = 1 \quad y'(0) = 1.$$

Lineær algebra 2: Egenverdier, egenvektorer, differenslikninger og dynamiske systemer

MERK: differenslikninger og dynamiske systemer er ikke pensum våren 2018.

Eksamen MAT106 januar 2018, oppgave 7

Oppgave 7

a) Gitt en matrise: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{bmatrix}.$

a) Regn ut egenverdiene og egenvektorene til A.

b) Sett opp en matrise P og en diagonalmatrise D slik at: $PDP^{-1} = A$. (Du trenger ikke å regne ut produktet.)

c) Løs differensligningen $y_{k+2} = -6y_k + 5y_{k+1}$, $y_0 = 1, y_1 = 0$.

Eksamen MAT106 V2017, oppgave 7

Oppgave 7

Gitt en matrise: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$.

a) Regn ut egenverdiene og egenvektorene til A.

b) Vis at egenvektorene er lineært uavhengige.
Sett opp en matrise P og en diagonalmatrise D slik at: $PDP^{-1} = A$.
(Du trenger ikke å regne ut produktet.)

c) Løs differensligningen $y_{k+2} = 3y_k - 2y_{k+1}$, $y_0 = 1, y_1 = 2$.

Eksamen MAT106 januar 2017, oppgave 6

Oppgave 6

La A være matrisen

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

Regn ut egenverdiene og egenvektorene til A. Sett opp en matrise P og en diagonalmatrise D slik at $PDP^{-1} = A$. (du trenger ikke å regne ut produktet)

Eksamen MAT105 H2016, oppgave 5, b), c)

Oppgave 5

Gitt en matrise:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & t^2 \end{bmatrix},$$

der $t \in \mathbf{R}$.

a) Finn de verdier av t som gir at determinanten til A er lik null.

b) Finn egenverdiene og egenvektorene til A når $t = 1$.

c) Finn matrisene P, P^{-1} og diagonalmatrisen D slik at $PDP^{-1} = A$ når $t = 1$.

Eksamen MAT106 V2016, oppgave 6

Oppgave 6

La A være matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Regn ut egenverdiene og egenvektorene til A.

b) Sett opp en matrise P og en diagonalmatrise D slik at $PDP^{-1} = A$ (du trenger ikke å regne ut produktet).

Eksamen MAT105 V2016, oppgave 6, c)

Oppgave 6

Gitt en matrisene: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$.

a) Er matrisen A inverterbar? Begrunn svaret.

b) Er kolonnene i B lineært avhengige eller lineært uavhengige? Begrunn svaret.

c) Regn ut egenverdiene og egenvektorene til C.

Eksamen MAT106 H2015, oppgave 6

Oppgave 6

a) Gitt en matrise: $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$.

Regn ut egenverdiene og egenvektorene til A.
Sett opp en matrise P og en diagonalmatrise D slik at: $PDP^{-1} = A$.
(du trenger ikke å regne ut produktet)

b) Finn A^5.

Eksamen MAT106 V2015, oppgave 5

Oppgave 5

La A være matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

a) Finn alle egenverdiene og egenvektorene til A.

b) Finn en matrise P og en diagonalmatrise D slik at $A = PDP^{-1}$.

c) Finn A^6.

Eksamen MAT106 V2014, oppgave 7

Oppgave 7

Vi har matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

a) Finn alle egenverdier og egenvektorer til A.

b) Finn A^{-1}.

c) Løs systemet $Ax = b$, der

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Eksamen MAT106 august 2013, oppgave 3, d)

Vi har gitt matrisa

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

d) Finn egenverdier og egenvektorer til $\mathbf{A}$. Hvor mange lineært uavhengige egenvektorer er det?

Eksamen MAT106 H2013, oppgave 1, c)

Oppgåve 1

Vi har matrisa

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Beregn matrisas determinant.

b) Løs systemet

$$Ax = b$$

der

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

c) Finn alle egenverdiar og egenvektorar til A.
d) Bestem konstanten z slik at

$$B = \begin{bmatrix} z & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

blir en singulær matrise.
e) Løs systemet

$$Bx = 0.$$

Eksamen FOA162 V2010, oppgave 4, c)

c)

i) Hva menes med egenverdi og egenvektor for en kvadratisk matrise?

ii) Gitt $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$. Vis at $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ er en egenvektor til **C**, med egenverdi 4. Er det flere egenvektorer med denne egenverdien?

iii) Finn alle egenverdier og egenvektorer til **C**.

iv) Kan vi finne en basis for R^2 bestående av egenvektorer til C? Begrunn svaret.

For oppgaver om differenslikninger og diskrete dynamiske systemer, se ukeoppgavene.

Funksjoner av flere variable

Eksamen MAT106 januar 2018, oppgave 5

Oppgave 5

La Ω være området avgrenset av $x = 0$, $y = 0$, $x = 2$, $y = 7x$.

i) Tegn Ω.

ii) Beregn

$$\iint_{\Omega} (2x + 3y)\,dx\,dy$$

Eksamen MAT106 januar 2018, oppgave 2

Oppgave 2

En funksjon er definert på $\mathbb{R}^2$ ved at $f(x, y) = x^2 - 3xy - 7x + 6y + 1$.

a) Bestem gradientvektoren til f i punktet $P(1, -1)$.

Bestem hvor raskt f endrer seg i punktet $P(1, -1)$ i retningen $\mathbf{v} = 6\mathbf{i} - 8\mathbf{j}$.

b) Finn og klassifiser eventuelle stasjonære(kritiske) punkt.

Eksamen MAT106 V2017, oppgave 2

Oppgave 2

En funksjon er definert på $\mathbb{R}^2$ ved at $f(x,y) = 2xy + x^2y$.

a) Bestem gradientvektoren til f i punktet $P(2,-1)$.

Bestem hvor raskt f endrer seg i retningen $\mathbf{v} = -4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$.

b) Finn og klassifiser eventuelle stasjonære(kritiske) punkt.

Eksamen MAT106 V2017, oppgave 4

Oppgave 4

Gitt dobbeltintegralet

$$\int_0^2 \int_0^y \frac{\cos y}{y} \, dx \, dy$$

Tegn opp integrasjonsområdet og regn ut dobbeltintegralet.

Eksamen MAT106 januar 2017, oppgave 4

Oppgave 4

Gitt dobbeltintegralet over integrasjonsområdet R:

$$\int\int_R \sin(x)\cos(2y) \, dx \, dy$$

der R er rektangelet med et hjørne i origo og i punktene med koordinater $(\pi, 0)$, $(\pi, \frac{\pi}{4})$ og $(0, \frac{\pi}{4})$.

Tegn opp dette området og regn ut dobbeltintegralet.

Eksamen MAT106 V2016, oppgave 2

Oppgave 2

En funksjon er definert på $\mathbb{R}^2$ ved at $f(x, y) = x^2 - xy - x + y + 2$.

a) i) Bestem gradientvektoren til f i punktet P$(-1, 2)$.

ii) Bestem hvor raskt f endrer seg i punktet P i retningen $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$.

b) Finn og klassifiser eventuelle stasjonære punkt (altså, avgjør om de er lokale maksimum/minimum eller sadelpunkt).

Eksamen MAT106 V2016, oppgave 3 a)

Oppgave 3

a) Gitt dobbeltintegralet

$$\iint_D y \cos x \, \mathrm{dxdy}$$

over integrasjonsområdet D definert ved $0 \le x \le \pi$ og $0 \le y \le 2$.

Tegn integrasjonsområdet og regn ut dobbelintegralet.

b) Gitt komplekse tall $z = 1 - i$ og $w = 2 + 2i$.
Skriv z og w på eksponentiell form (polarform).
Regn ut og skriv følgende på viserform: $\frac{w}{z}$, $\overline{w} \cdot i$ og z^8. Husk: $\overline{w}$ er den komplekskonjugerte til w.

Eksamen MAT106 H2015, oppgave 2

Oppgave 2

En funksjon er definert på $\mathbb{R}^2$ ved at $f(x,y) = 3x^2 + x^2y - xy^2 + 1$.

a) i) Bestem gradientvektoren til f i punktet $P(-1,1)$.

ii) Bestem hvor raskt f endrer seg i retningen $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ i samme punkt.

b) Finn og klassifiser eventuelle stasjonære punkt utenom origo $(0,0)$ (altså avgjør om det er et lokalt maksimum/minimum eller et sadelpunkt).

Eksamen MAT106 H2015, oppgave 3 b)

b) Gitt dobbeltintegralet:

$$\int\int_D (\sin x \cos y)\, dx\, dy$$

over integrasjonsområdet D definert ved: $0 \leq x \leq \pi$ og $0 \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}$.

Tegn integrasjonsområdet og regn ut dobbelintegralet.

Eksamen MAT106 V2015, oppgave 6

Oppgave 6

En funksjon av to variabler er definert i hele xy-planet, og er gitt ved $f(x,y) = 4xy - x^4 - y^4$.

a) Beregn alle partielt deriverte av første og andre orden for $f(x,y)$.

b) Finn de stasjonære punktene og avgjør om de er lokale minimum, maksimum eller sadelpunkt.

c) Beregn dobbeltintegralet

$$\iint_R f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

over rektangelet R avgrenset av $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 1$.

Eksamen MAT106 V2014, oppgave 2

Oppgave 2

En funksjon er definert på $\mathbb{R}^2$ ved at $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + x^2 y + y^2$.

a) Bestem gradientvektoren til f i punktet $P(-1, 1)$.

b) Bestem hvor raskt f endrer seg i retningen $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ i punktet $P(-1, 1)$.

c) Finn og klassifiser eventuelle stasjonære punkt.

Eksamen MAT106 V2014, oppgave 6

Oppgave 6

Gitt dobbeltintegralet over integrasjonsområdet D:

$$\int\int_D 6x^2 y \, dx dy$$

der D er trekanten med hjørner i (0,0), (0,1) og (1,0). Tegn opp dette området og regn ut dobbeltintegralet.

Eksamen MAT106 august 2013, oppgave 4

Oppgave 4.

En flate er definert ved funksjonen $f(x, y) = x^3 - 3x^2 - \frac{3}{2}xy^2 + y^3$

a) Finn og klassifiser eventuelle kritiske (stasjonære) punkt.

b) Bestem likningen for tangentplanet til grafen til f i punktet $P(2,1)$.

c) Bestem hvor fort f endrer seg i punktet $P(2,1)$ i en retning mot punktet $Q(3,4)$.

Eksamen MAT106 H2013, oppgave 4

Oppgåve 4

Me har funksjonen

$$f(x, y) = x^2 - xy + 2y^2 + 2x + y + 1$$

a) Berekn funksjonens gradient.

b) Finn og klassifiser funksjonens stasjonære punkt.

c) Bestem stigninga til funksjonen i punktet $(2, 1)$ i retninga $(1, -1)$.

Eksamen FOA162 V2010, oppgave 2

Oppgave 2

a) La f være en funksjon på R^2 slik:

$$f(x, y) = 2x^4 - 8xy + 4y^2 - 10$$

i) Bestem gradientvektor ∇f for funksjonen i punktet P = (1,-1).

ii) Bestem likningen for tangentplanet til grafen f i punktet P.

b) Gitt området Ω i R^2, der Ω er rektangelet med hjørner i punktene (0,0), (0,2), (1,0) og (1,2).
Regn ut $\iint_\Omega (3 - 2x + 6y^2)dxdy$.

Eksamen FOA162 H2010, oppgave 3

Oppgave 3

Et område Ω i xy-planet er begrenset av x-aksen, linjen $x = 3$ og kurven $y = x + 1$

Regn ut dobbelintegralet

$$\iint_\Omega ydydx$$

Eksamen FOA162 H2010, oppgave 4

Oppgave 4

La $f(x,y) = 6x^2 + y^3 + 3xy^2$ for alle reelle tall x og y.

a) Finn alle de partielle deriverte til f av første og andre orden.

b) Finn og klassifiser de stasjonære punktene til f, om mulig.