Tillegg til eksamen i MAT106

NB: Ikke endelig versjon

Februar, 2016

1. Rekker

Taylorrekker/maclaurinrekker. La f være en funksjon i en variabel som kan deriveres n ganger i punktet $x = a$. Da er *taylorrekken* P om $x = a$ for f gitt ved $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$. I tilfellet $a = 0$ kalles dette ofte en *maclaurinrekke*.

Kjente maclaurinrekker.

i) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ for alle x.

ii) $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ for alle x.

iii) $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ for alle x.

iv) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ for $-1 < x \leq 1$.

2. Fourierrekker

La f være en periodisk funksjon med periode T, og la $L = \frac{T}{2}$. Da er fourierrekken til f

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right).$$

Her er

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x)\, dx,$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\, dx,$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\, dx.$$

3. Kjente integraler

i) $\int x\cos(ax)\,dx = \dfrac{\cos(ax)}{a^2} + \dfrac{x\sin(ax)}{a} + C.$

ii) $\int x^2\cos(ax)\,dx = -2\dfrac{\sin(ax)}{a^3} + 2\dfrac{x\cos(ax)}{a^2} + \dfrac{x^2\sin(ax)}{a} + C.$

iii) $\int x\sin(ax)\,dx = \dfrac{\sin(ax)}{a^2} - \dfrac{x\cos(ax)}{a} + C.$

iv) $\int x^2\sin(ax)\,dx = 2\dfrac{\cos(ax)}{a^3} + 2\dfrac{x\sin(ax)}{a^2} - \dfrac{x^2\cos(ax)}{a} + C.$

4. Differensligninger

En homogen 2. ordens differensligning $a_n y_n + a_{n-1}y_{n-1} + a_{n-2}y_{n-2} = 0$ har generell løsning som avhenger av røttene til den karakteristiske likningen. Dersom vi har

i) to ulike reelle røtter λ_1, λ_2 er den generelle løsningen $y_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n$,
ii) to like røtter λ_1 er den generelle løsningen $y_n = (An + B)\lambda_1^n$,
iii) to komplekskonjugerte røtter $\lambda = re^{\pm i\theta}$ er den generelle løsningen $y_n = r^n\big(A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta)\big)$.

5. Kjente resultater om laplacetransformer

i) $\mathcal{L}(1) = \dfrac{1}{s},\ s > 0.$

ii) $\mathcal{L}(t^n) = \dfrac{n!}{s^{n+1}},\ s > 0.$

iii) $\mathcal{L}(e^{at}) = \dfrac{1}{s-a},\ s > a.$

iv) $\mathcal{L}(t^n e^{at}) = \dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}},\ s > a.$

v) $\mathcal{L}(\sin(\alpha t)) = \dfrac{\alpha}{s^2+\alpha^2},\ s > 0.$

vi) $\mathcal{L}(\cos(\alpha t)) = \dfrac{s}{s^2+\alpha^2},\ s > 0.$

vii $\mathcal{L}(e^{\beta t}\sin(\alpha t)) = \dfrac{\alpha}{(s-\beta)^2+\alpha^2}$, $s > \beta$.

viii) $\mathcal{L}(e^{\beta t}\cos(\alpha t)) = \dfrac{s-\beta}{(s-\beta)^2+\alpha^2}$, $s > \beta$.

ix) $\mathcal{L}(\delta(t)) = 1$, $\mathcal{L}(\delta(t-c)) = e^{-cs}$.

x) $\mathcal{L}(f') = s\mathcal{L}(f) - f(0)$.

xi) $\mathcal{L}(f'') = s^2\mathcal{L}(f) - sf(0) - f'(0)$.

xii) $\mathcal{L}(f(t-a)u(t-a)) = e^{-as}F(s) = e^{-as}\mathcal{L}(f(t))$, der $u(t-a) = \begin{cases} 0, & t < a \\ 1, & t \geq a \end{cases}$ er Heaviside-funksjonen.

xiv) $\mathcal{L}(af+bg) = a\mathcal{L}(f) + b\mathcal{L}(g)$.

6. Funksjoner av flere variable

i) f er en funksjon definert på $\mathbb{R}^2$. Dersom f er deriverbar i (a, b), så har grafen til f et tangentplan i (a, b, c) med $c = f(a, b)$. Likningen for tangentplanet kan skrives slik:

$$z = c + L(x-a) + M(y-b) \ ,$$

der $L = f_x(a, b)$ og $M = f_y(a, b)$.

ii) Hessematrisen til f i et punkt (a, b) er gitt ved

$$H(a,b) = \begin{pmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{yx}(a,b) \\ f_{xy}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{pmatrix}$$

Dersom $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ og

$\det H(a, b) < 0$ så er (a, b) et sadelpunkt.

$\det H(a, b) > 0$ og $f_{xx}(a, b) > 0$ så er (a, b) et lokalt minimum.

$\det H(a, b) > 0$ og $f_{xx}(a, b) < 0$ så er (a, b) et lokalt maksimum.

$\det H(a, b) = 0$ så har vi ingen informasjon.