Eksamensoppgaver til repetisjon

MAT106, V2016

Alexander Lundervold

Versjon 1.0

3. mai, 2016

Innhold

1 Komplekse tall

1.1 Eksamen MAT100 V2015, oppgave 7 – Elektro, a)

(NB: Fra MAT100)

Oppgave 7 - Elektro

a) Skriv tallet $e^{i\pi} + 2 + i$ på både standardform og eksponentiell form.

1.2 Eksamen MAT100 H2014, oppgave 7 – Elektro, a) (i)

Oppgave 7 - Elektro

a) (i) Skriv tallet $3-\sqrt{3}i$ på både eksponentiell og trigonometrisk form.

1.3 Eksamen MAT100 V2014, oppgave 5 – Elektro, b) og c)

b) Gitt de komplekse tallene $z_1 = 1-i$, $z_2 = \sqrt{3}+i$

i.) Regn ut $2z_1 + z_2$ og $\frac{z_1}{z_2}$

ii.) Uttrykk både z_1 og z_2 på eksponensiell form ($re^{i\theta}$).

c) Skriv iz_1 og z_2^6 på generell form $a+ib$

1.4 Eksamen MAT100 H2013, oppgave 5 – Elektro, a) og b)

Oppgave 5 – Elektro

NB! Du skal bare svare på en av oppgavene merket «Oppgave 5». Denne oppgaven tar utgangspunkt i pensum undervist ved Institutt for elektrofag.

a) Merk av disse i det komplekse planet, og skriv på eksponentiell form: $2+3i$ og $3-4i$.

b) To visere er gitt som $I_1 = 15\underline{/30^\circ}$ og $I_2 = \frac{15\underline{/30^\circ}}{3+4i}$.

Finn en funksjon $a(t)$ som korresponderer til $I = I_1 + I_2$.

1.5 Eksamen MAT100 V2013, oppgave 4 – Elektro, d) og e)

Gitt de komplekse tallene $z_1 = 1+i$, $z_2 = 2-2i$ og $z_3 = \sqrt{3}+i$

d) Beregn $z_1 + z_2$, $z_2 - z_1$, $z_1 \cdot z_2$ og $\frac{z_1}{z_3}$.

Tegn inn i diagrammet .

e) Skriv tallene z_1 og z_3 på polar form og (nøtt ☺) bruk siste resultat i spørsmål d) til å finne eksakte uttrykk for $\cos(15^\circ)$ og $\sin(15^\circ)$.

1.6 Eksamen MAT106 H2015, oppgave 3, c)

c) Gitt komplekse tall $z = 1 + i$ og $w = 3 - 3i$.

i) Skriv z og w på eksponentiell form (polarform).

ii) Regn ut og skriv svaret på standardform $a + bi$: $\frac{w}{z}$, $\bar{z} \cdot i$ og z^6.

2 Rekker

2.1 Eksamen MAT106 H2015, oppgave 1

Oppgave 1

a) i) Rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ er konvergent. Bruk en av konvergenstestene til å vise det.

ii) Er summen av en konvergent og en divergent rekke konvergent eller divergent?

Undersøk om rekken konvergerer eller divergerer: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n}{\sqrt{n}}$.

b) Bestem konvergensintervallet til potensrekken: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt[3]{n}} x^n$.

c) Finn taylorrekken om $x = 0$ (maclaurinrekken) til $f(x) = \frac{e^{2x} - 1 - 2x}{x^2}$.

(Hint: Ta utgangspunkt i den kjente rekken til e^{2x})

2.2 Eksamen MAT106 V2015, oppgave 2

Oppgave 2

a) Avgjør om rekken konvergerer eller divergerer:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{n^3 - 2n + 3}$$

b) i) Finn $\cos(n\pi)$ for $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

ii) Avgjør om rekken konvergerer eller divergerer:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n+3}$$

c) Finn konvergensområdet til potensrekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4 4^n} x^n$$

d) Bruk taylorrekken til $\cos(x)$ rundt $x = 0$ til å finne taylorrekken til

$$\frac{1 - \cos(x^2)}{x}$$

2.3 Eksamen MAT106 V2014, oppgave 1

Oppgave 1

a) Rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ er konvergent. Bruk et av konvergenskriteriene til å vise det.

b) Undersøk om rekken konvergerer eller divergerer: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+(-1)^n}{n^2}$.

c) Bestem konvergensintervallet til potensrekken: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n} x^n$

d) Finn taylorrekken i $x = 0$ (maclaurinrekken) til $f(x) = \frac{x - \ln(x+1)}{x^2}$.

2.4 Eksamen MAT106 V2013, oppgave 1

Oppgave 1.

a) Rekka $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-\sin n}{n^2}$ er konvergent. Hva vil det si, og hvordan kan man vise det?

Undersøk om rekka $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-n}{n^2}$ konvergerer eller divergerer.

b) Bestem konvergensintervallet til potensrekka $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{\sqrt{n}} x^n$

c) Bestem Taylorrekka i $x=0$ (Maclaurinrekka) til $f(x) = xe^{-3x}$

2.5 Eksamen MAT106 august 2013, oppgave 1

Oppgave 1.

a) Undersøk om rekkene $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n\sqrt{n}+1}$ og $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n}$ konvergerer eller divergerer.

b) Bestem konvergensintervallet til potensrekka $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} x^n$

c) Bestem Taylorrekka i $x=0$ (Maclaurinrekka) til $f(x) = \frac{e^{-x^2}-1}{x}$

d) Bruk resultatet fra c) til å finne en uendelig rekke for $\int_0^x f(t)dt$

2.6 Eksamen MAT106 H2013, oppgave 3

Oppgåve 3

a) Ka meiner vi med at ei rekke er konvergent?
b) Finn maclaurinrekkane til

1) $\ln(2+x)$

2) $\displaystyle\int_0^x \frac{\sin(t^2)}{t}\,\mathrm{dt}$

c) Finn ut om rekka er konvergent

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$

d) Finn rekkas sum

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$

2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}\frac{1}{n!}$

2.7 Eksamen FOA162 V2010, Oppgave 1

Oppgave 1

a) Gitt en rekke

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \text{der} \quad a_n = \frac{n^2}{n^2 - 2}$$

Regn ut $\lim_{n\to\infty} a_n$. Hva forteller denne grenseverdien om konvergensen av rekken?

b) Finn konvergensområdet for potensrekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 5^n} x^n$$

c) Bestem Taylor-rekken om punktet $x = 0$ (Maclaurin-rekken) til funksjonene

$$f(x) = \ln(1 + 2x)$$

og

$$g(x) = \frac{\ln(1 + 2x)}{x}$$

2.8 Eksamen FOA162 H2010, Oppgave 6

Oppgave 6

a) Avgjør om rekkene konvergerer eller divergerer:

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{2n + 4}{n^2 + 4n - 1} \qquad\qquad \sum_{1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$$

b) For hvilke verdier av x konvergerer potensrekken

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n^2}$$

3 Fourierrekker

3.1 Eksamen MAT106 H2015, oppgave 5

Oppgave 5

En periodisk funksjon er gitt ved:

$$f(x) = \frac{1}{2}x \quad \text{for } -2 \le x < 2$$
$$f(x+4) = f(x) \quad \text{for alle } x$$

a) i) Hva er perioden til funksjonen?
ii) Skisser grafen til f i intervallet $[-4, 4]$.
iii) Oppgi eventuelle symmetriegenskaper til f.
iv) Regn ut $f(-26)$.

b) Finn fourierrekken til f.
Hva konvergerer fourierrekken mot i $x = 2$? Begrunn svaret.

3.2 Eksamen MAT106 V2015, oppgave 3

Oppgave 3

En funksjon er gitt ved

$$f(x) = x^2, \quad -1 \le x < 1, \quad f(x+2) = f(x)$$

a) i) Hva betyr det at en funksjon er periodisk? Er $f(x)$ en periodisk funksjon? Hvis den er det, hva er perioden?
ii) Hva betyr det at en funksjon er odde eller jevn? Avgjør om $f(x)$ er en odde eller jevn funksjon.
iii) Skisser grafen til $f(x)$ på intervallet $-4 \le x < 4$.

b) Bestem fourierkoeffisientene til $f(x)$ og vis at fourierrekken er

$$\frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(n\pi x)$$

c) Hva konvergerer fourierrekken mot for $x = 0$? Hva konvergerer den mot for $x = 1$? Bruk resultatet til å finne summen av følgende rekke:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$$

3.3 Eksamen MAT106 V2014, oppgave 4

Oppgave 4

En periodisk funksjon er gitt ved:

$$f(x) = \frac{1}{2}x \quad \text{for } -2 \leq x < 2$$
$$f(x+4) = f(x) \text{ for alle } x$$

a) i) Skisser grafen til f i intervallet $[-6, 6]$.

ii) Hva er perioden til funksjonen?

iii) Oppgi eventuelle symmetriegenskaper til f.

vi) Regn ut $f(-31)$.

b) Finn fourierrekken til f.
Hva konvergerer fourierrekken mot i $x = 2$?

3.4 Eksamen MAT106 V2013, oppgave 5

Oppgave 5.

En periodisk funksjon f er gitt ved:

$$f(x) = 2x \text{ for } -\pi \leq x < \pi \quad \text{og} \quad f(x+2\pi) = f(x) \text{ for alle } x$$

a) Skisser grafen til f i intervallet $[-3\pi, 3\pi]$. Angi perioden og eventuelle symmetriegenskaper til f. Regn ut $f(-19\pi)$, $f(19\pi)$.

b) Regn ut fourierkoeffisientene og sett opp fourierrekka til f. Hva konvergerer fourierrekka mot i $x = 0{,}5\pi$ og $x = \pi$?

3.5 Eksamen MAT106 august 2013, oppgave 5

Oppgave 5.

En periodisk funksjon f er gitt ved:

$$f(x) = \begin{cases} 1+\frac{1}{2}x & ; \ -2 \le x < 0 \\ 1-\frac{1}{2}x & ; \quad 0 \le x < 2 \end{cases} \quad \text{og} \quad f(x+4) = f(x) \quad \text{for alle } x$$

a) Skisser grafen til f i intervallet $[-6, 6]$. Angi perioden og eventuelle symmetriegenskaper til f. Regn ut $f(11)$ og $f(-28)$.

b) Fourierrekka til f er $\dfrac{1}{2}+\dfrac{4}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2}}{(2n-1)^2}$. Hva konvergerer denne rekka mot for $x=0$? Og hva konvergerer den mot for $x=2$?

c) Bruk fourierrekka i b) til å regne ut summen av rekka $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$.

3.6 Eksamen FOA162 V2010, Oppgave 3

Oppgave 3

Gitt funksjonen f:

$$f(x) = \frac{x}{2}; \quad -2 \le x < 2; \qquad f(x+4) = f(x) \quad \text{for alle } x$$

a) Forklar hvordan vi kan vite at funksjonen er periodisk. Angi perioden og eventuelle symmetriegenskaper. Skisser grafen i intervallet $-6 \le x < 6$. Regn ut $f(3)$og $f(-6)$.

b) Bestem Fourier-koeffisientene og sett opp Fourier-rekken til f. Hva konvergerer Fourier-rekken mot når $x = 1$? Og hva konvergerer den mot når $x = 2$?

c) Bruk resultatet i b) til å vise at

$$\pi = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)}$$

4 Lineær algebra 1: Matriser, determinanter, lineære system

4.1 Eksamen MAT106 V2014, oppgave 7, b) og c)

Oppgave 7

Vi har matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

a) Finn alle egenverdier og egenvektorer til A.

b) Finn A^{-1}.

c) Løs systemet $Ax = b$, der

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

4.2 Eksamen MAT106 V2013, oppgave 3, a), b), d) og f)

Oppgave 3.

Vi har gitt matrisa

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Beregn matrisas determinant

b) Løs likningssystemet $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, der $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

c) Finn alle egenverdier og egenvektorer til **A**

d) Bestem konstanten z slik at $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 6 & z & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ blir en singulær matrise.

e) Finn en basis for nullrommet til **B**, med den z du fant i spørsmål d).

f) Vi bruker fortsatt den z du fant i spørsmål d). Forklar hvorfor systemet $\mathbf{Bx} = \mathbf{c}$ kan løses for $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, og finn en løsning.

4.3 Eksamen MAT106 august 2013, oppgave 3, a), b) og c)

Oppgave 3.

Vi har gitt matrisa

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Eksisterer den inverse matrisa til $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^{-1}$? Begrunn svaret uten å regne ut $\mathbf{A}^{-1}$.

b) Hvis $\mathbf{A}^{-1}$ eksisterer, regn den ut.

c) Løs likningssystemet $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, der $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

4.4 Eksamen MAT106 H2013, oppgave 1, a), b), d) og e)

Oppgåve 1

Vi har matrisa

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Beregn matrisas determinant.

b) Løs systemet

$$Ax = b$$

der

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

c) Finn alle egenverdiar og egenvektorar til A.
d) Bestem konstanten z slik at

$$B = \begin{bmatrix} z & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

blir en singulær matrise.
e) Løs systemet

$$Bx = 0.$$

4.5 Eksamen FOA162 V2010, Oppgave 4, a) og b)

Oppgave 4

Gitt $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & t \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

a) Finn determinanten til **A**. For hvilke verdier av konstanten t har matrisen en invers?

b) Anta nå at $t = 0$, og la $\mathbf{B} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 8 & 6 & -5 \\ 4 & 6 & -5 \\ -4 & -4 & 4 \end{bmatrix}$

i) Regn ut **AB**. Hva kaller vi matrisen **B** i denne situasjonen?

ii) Løs likningssystemet $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, der $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ $\quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$

5 Laplacetransformasjonen

5.1 Eksamen MAT106 H2015, oppgave 7

Oppgave 7

a) Finn den inverse laplacetransformerte til $\quad F(s) = \dfrac{s+3}{s^2+6s+13}$.

b) Løs startverdiproblemet $\quad y'' - y = -t, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0$ ved hjelp av laplacetransformasjon.

5.2 Eksamen MAT106 V2015, oppgave 4

Oppgave 4

a) La

$$F(s) = \frac{5s+1}{s^2-25}$$

Finn den inverse laplacetransformerte til $F(s)$.

b) Løs startverdiproblemet

$$y' + y = 3, \quad y(0) = 1$$

ved hjelp av den laplacetransformerte.

5.3 Eksamen MAT106 V2013, oppgave 2 b)

b) Løs differensiallikningen $\frac{d^2y}{dt^2}+5\frac{dy}{dt}+6y=2e^{-t}$
ved å bruke Laplace-transformasjon. Med initialbet. $y(0)=y'(0)=0$

5.4 Eksamen MAT106 H2013, oppgave 2 a)

Oppgåve 2

a) Bruk Laplace-transform til å løse ligninga

$$y'' + 2y' + y = x$$

med initialkrava

$$y(0) = 1 \quad y'(0) = 1.$$

6 Differensligninger

6.1 Eksamen MAT106 H2015, oppgave 4

Oppgave 4

a) Løs differensligningen $a_{n+2} = 4a_n$.

b) La nå differensligningen være $a_{n+2} - 4a_n = 10 \cdot 3^n$ (1).

i) Gitt $a_0 = 1$, regn ut a_2 og a_4.

ii) Bestem A slik at $a_n = A \cdot 3^n$ er en løsning til (1).

iii) Finn den generelle løsningen til (1). (Altså: uten å bruke initialbetingelser.)

6.2 Eksamen MAT106 V2015, oppgave 1, a) og b)

Oppgave 1

a) Løs differensligningen

$$y_{n+2} + 3y_{n+1} + 2y_n = 0,$$

med startbetingelsene $y_0 = 1$, $y_1 = 2$.

b) Løs differensligningen

$$y_{n+2} + 3y_{n+1} + 2y_n = (-1)^n,$$

med startbetingelsene $y_0 = 1$, $y_1 = 2$. Hint: Bruk oppgave **a)**.

6.3 Eksamen MAT106 V2014, oppgave 3

Oppgave 3

a) Løs differensligningen $a_{n+2} = 9a_n$.

b) La nå ligningen være $a_{n+2} - 9a_n = 5 \cdot 2^n$.
Gitt $a_0 = 1$, regn ut a_2 og a_4.

c) Finn den generelle løsningen til differensligningen $a_{n+2} - 9a_n = 5 \cdot 2^n$.

6.4 Eksamen MAT106 V2013, oppgave 2, a) og c)

Oppgave 2.

a) Løs differenslikningen $f(n) = 4(f(n-1) - f(n-2)) \quad n \geq 2$
med initialverdier $f(0) = f(1) = 1$.

b) Løs differensiallikningen $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 5\dfrac{dy}{dt} + 6y = 2e^{-t}$
ved å bruke Laplace-transformasjon. Med initialbet. $y(0)=y'(0)=0$

c) Lag en differenslikning (rekursjonslikning) som beskriver den følgende problemstilling, og svar deretter på spørsmålet ved å løse likningen:
«Befolkningen i Utopia øker med 5% hvert år. I år 2000 var det 10000 innbyggere. Hvor mange var det i 1970?»

6.5 Eksamen MAT106 august 2013, oppgave 2

Oppgave 2.

Gitt differenslikningen $f(n+2) - \frac{1}{4} f(n) = 3$
med initialverdier $f(0) = 0$ og $f(1) = 1$.

a) Finn $f(2)$, $f(3)$ og $f(4)$.

b) Løs differenslikningen med de gitt initialbetingelser.

c) Løsningen i b) er en tallfølge. Undersøk om denne konvergerer, og finn i så fall grenseverdien.

6.6 Eksamen MAT106 H2013, oppgave 2, b)

b) Løs differenslikninga

$$f(n) + 2f(n-1) + f(n-2) = 2$$

med initialkrava

$$f(0) = 1 \quad f(1) = -3$$

6.7 Eksamen FOA162 V2010, Oppgave 5, a)

Oppgave 5

a) Gitt differenslikningen $y_n = 3y_{n-1} + 4$, $\quad n = 2,3,\ldots$, med startverdi $\quad y_1 = 2$
   - i) Bruk likningen til å regne ut y_2, y_3 og y_4.
   - ii) Løs likningen med den gitte startverdien.

6.8 Eksamen FOA162 H2010, Oppgave 2

Oppgave 2

a) Løs differenslikningen $\quad y_n - 3y_{n-1} = 7 \cdot 2^n, \quad n \geq 1, \quad y_0 = 4$

b) Løs differenslikningen $\quad y_n + 4y_{n-1} + 4y_{n-2} = 0, \quad n \geq 2, \quad y_0 = 7, \; y_1 = -4$

7 Lineær algebra 2: Egenverdier, egenvektorer

7.1 Eksamen MAT106 H2015, oppgave 6

Oppgave 6

a) Gitt en matrise: $\quad A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$.

Regn ut egenverdiene og egenvektorene til A.
Sett opp en matrise P og en diagonalmatrise D slik at: $\quad PDP^{-1} = A$.
(du trenger ikke å regne ut produktet)

b) Finn A^5.

7.2 Eksamen MAT106 V2015, oppgave 5

Oppgave 5

La A være matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

a) Finn alle egenverdiene og egenvektorene til A.

b) Finn en matrise P og en diagonalmatrise D slik at $A = PDP^{-1}$.

c) Finn A^6.

7.3 Eksamen MAT106 V2014, oppgave 7

Oppgave 7

Vi har matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

a) Finn alle egenverdier og egenvektorer til A.

b) Finn A^{-1}.

c) Løs systemet $Ax = b$, der

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

7.4 Eksamen MAT106 august 2013, oppgave 3, d)

Vi har gitt matrisa

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

d) Finn egenverdier og egenvektorer til $\mathbf{A}$. Hvor mange lineært uavhengige egenvektorer er det?

7.5 Eksamen MAT106 H2013, oppgave 1, c)

Oppgåve 1

Vi har matrisa

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Beregn matrisas determinant.

b) Løs systemet

$$Ax = b$$

der

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

c) Finn alle egenverdiar og egenvektorar til A.
d) Bestem konstanten z slik at

$$B = \begin{bmatrix} z & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

blir en singulær matrise.
e) Løs systemet

$$Bx = 0.$$

7.6 Eksamen FOA162 V2010, Oppgave 4, c)

c)

i) Hva menes med egenverdi og egenvektor for en kvadratisk matrise?

ii) Gitt $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$. Vis at $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ er en egenvektor til $\mathbf{C}$, med egenverdi 4. Er det flere egenvektorer med denne egenverdien?

iii) Finn alle egenverdier og egenvektorer til $\mathbf{C}$.

iv) Kan vi finne en basis for R^2 bestående av egenvektorer til C? Begrunn svaret.

8 Funksjoner av flere variable

8.1 Eksamen MAT106 H2015, oppgave 2

Oppgave 2

En funksjon er definert på $\mathbb{R}^2$ ved at $f(x,y) = 3x^2 + x^2y - xy^2 + 1$.

a) i) Bestem gradientvektoren til f i punktet $P(-1, 1)$.

ii) Bestem hvor raskt f endrer seg i retningen $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ i samme punkt.

b) Finn og klassifiser eventuelle stasjonære punkt utenom origo $(0,0)$ (altså avgjør om det er et lokalt maksimum/minimum eller et sadelpunkt).

8.2 Eksamen MAT106 H2015, oppgave 3 b)

b) Gitt dobbeltintegralet:

$$\int\int_D (\sin x \cos y)\, dx\, dy$$

over integrasjonsområdet D definert ved: $0 \leq x \leq \pi$ og $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.

Tegn integrasjonsområdet og regn ut dobbelintegralet.

8.3 Eksamen MAT106 V2015, oppgave 6

Oppgave 6

En funksjon av to variabler er definert i hele xy-planet, og er gitt ved $f(x, y) = 4xy - x^4 - y^4$.

a) Beregn alle partielt deriverte av første og andre orden for $f(x, y)$.

b) Finn de stasjonære punktene og avgjør om de er lokale minimum, maksimum eller sadelpunkt.

c) Beregn dobbeltintegralet

$$\iint_R f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

over rektangelet R avgrenset av $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 1$.

8.4 Eksamen MAT106 V2014, oppgave 2

Oppgave 2

En funksjon er definert på $\mathbb{R}^2$ ved at $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + x^2 y + y^2$.

a) Bestem gradientvektoren til f i punktet P$(-1, 1)$.

b) Bestem hvor raskt f endrer seg i retningen $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ i punktet P$(-1, 1)$.

c) Finn og klassifiser eventuelle stasjonære punkt.

8.5

Eksamen MAT106 V2014, oppgave 6

Oppgave 6

Gitt dobbeltintegralet over integrasjonsområdet D:

$$\int\int_D 6x^2 y\, dx dy$$

der D er trekanten med hjørner i (0,0), (0,1) og (1,0). Tegn opp dette området og regn ut dobbeltintegralet.

8.6 Eksamen MAT106 august 2013, oppgave 4

Oppgave 4.

En flate er definert ved funksjonen $f(x,y) = x^3 - 3x^2 - \frac{3}{2}xy^2 + y^3$

a) Finn og klassifiser eventuelle kritiske (stasjonære) punkt.

b) Bestem likningen for tangentplanet til grafen til f i punktet $P(2,1)$.

c) Bestem hvor fort f endrer seg i punktet $P(2,1)$ i en retning mot punktet $Q(3,4)$.

8.7 Eksamen MAT106 H2013, oppgave 4

Oppgåve 4

Me har funksjonen

$$f(x,y) = x^2 - xy + 2y^2 + 2x + y + 1$$

a) Berekn funksjonens gradient.

b) Finn og klassifiser funksjonens stasjonære punkt.

c) Bestem stigninga til funksjonen i punktet $(2,1)$ i retninga $(1,-1)$.

8.8 Eksamen FOA162 V2010, Oppgave 2

Oppgave 2

a) La f være en funksjon på R^2 slik:

$$f(x,y) = 2x^4 - 8xy + 4y^2 - 10$$

i) Bestem gradientvektor ∇f for funksjonen i punktet P = (1,-1).

ii) Bestem likningen for tangentplanet til grafen f i punktet P.

b) Gitt området Ω i R^2, der Ω er rektangelet med hjørner i punktene (0,0), (0,2), (1,0) og (1,2). Regn ut $\iint_\Omega (3 - 2x + 6y^2)dxdy$.

8.9 Eksamen FOA162 H2010, Oppgave 3

Oppgave 3

Et område Ω i xy-planet er begrenset av x-aksen, linjen $x = 3$ og kurven $y = x + 1$

Regn ut dobbelintegralet

$$\iint_{\Omega} y\,dy\,dx$$

8.10 Eksamen FOA162 H2010, Oppgave 4

Oppgave 4

La $f(x, y) = 6x^2 + y^3 + 3xy^2$ for alle reelle tall x og y.

a) Finn alle de partielle deriverte til f av første og andre orden.

b) Finn og klassifiser de stasjonære punktene til f, om mulig.