Oppgavesamling for MAT100

Satt sammen av

Kristine Selvikvåg, Alexander Lundervold

Eksamenskurs i Kristiansund
november 2015

Versjon 3
11. september, 2016

Innhold

1 Bakgrunnsmateriale

1.1 Grenser

$\boxed{1}$ Finn grenseverdien

a) $\lim_{x \to 5} (2x + 1)$

b) $\lim_{x \to 1} (2x^2 + 5x)$

c) $\displaystyle\lim_{x \to -1} \frac{2x + 3}{x}$

d) $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - 12}{x - 2}$

e) $\displaystyle\lim_{x \to -1} \frac{2x^2 - 2}{x + 1}$

f) $\displaystyle\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$

g) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{2x^2 - 10x + 8}{2x - 2}$

$\boxed{2}$ Finn grenseverdien

a) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{5x - 2}{7x + 3}$

b) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{5x^2 - 2}{2x^2 + 4x + 3}$

c) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{x^5 + x^4 + x^3 + x^2}{2x^5 + x^4 + x^3}$

d) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{2x^4 - 2}{6x^4 + 3x}$

$\boxed{3}$ Finn grenseverdien

a) $\displaystyle\lim_{x \to -2} \frac{x + 2}{\ln(x + 3)}$

b) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

c) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{(1-2x)^2}{x^2 e^{-x}}$

d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x\ln(1-x)}{\sin(2x)}$

e) $\lim_{x\to 1} \dfrac{1-e^{1-x}}{\ln x}$

f) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2+\sin x}{e^x}$

g) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x\sin x}{1-\cos(7x)}$

$\boxed{4}$ **Fra eksamen V2015.**

a) Finn grenseverdien dersom den eksisterer, eller forklar hvorfor den ikke eksisterer:

$$\text{(i)}\quad \lim_{x\to 1}\frac{x^2-5x+4}{x-1},\qquad \text{(ii)}\quad \lim_{x\to 1}\frac{x^2-4x+4}{x-1},\qquad \text{(iii)}\quad \lim_{x\to 0} x\sin(x)$$

$\boxed{5}$ **Fra eksamen H2014.**

Finn grenseverdiene

$$\text{(i)}\ \lim_{x\to +\infty}\frac{x^2(8x^3+4)}{x^5+1},\qquad \text{(ii)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}$$

$\boxed{6}$ Gitt at

$$8-x^2 \le f(x) \le 8+x^2$$

for alle $x \neq 0$, finn grensen $\lim_{x\to 0} f(x)$.

$\boxed{7}$ **Fra eksamen H2015.** Finn grenseverdiene dersom de eksisterer

a)

$$\text{i)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{x\cos(3x)}{\ln(1+2x)},\qquad \text{ii)}\quad \lim_{x\to\infty}\frac{x^2(3x^2-x)}{2x(3x^3-3x^2+2)}$$

b) Gitt funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x-1}, & x < 1 \\ 3x + 3, & x \geq 1 \end{cases}$$

i) Finn de ensidige grensene $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ og $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ dersom de eksisterer.

ii) Finn grenseverdien $\lim_{x \to 1} f(x)$ dersom den eksisterer.

1.2 Kontinuitet

$\boxed{8}$ **Fra prøveeksamen H2014.** Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0. \end{cases}$$

Finn a slik at funksjonen blir kontinuerlig i $x = 0$.

$\boxed{9}$ **Fra eksamen H2014.** Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} a \cos x + \sin x, & x < 0, \\ x^2 - x + 1, & x \geq 0, \end{cases}$$

der a er et reellt tall. Bestem a slik at f blir kontinuerlig i $x = 0$.

$\boxed{10}$ **Fra eksamen V2015.** Finn verdien av a som sørger for at funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} 5, & x \leq 0 \\ a - 2e^{-x}, & x > 0 \end{cases}$$

blir kontinuerlig. Finn deretter grensen $\lim_{x \to \infty} f(x)$.

$\boxed{11}$ **Fra prøveeksamen V2015.** Forklar hvordan du med sikkerhet kan vite at ligningen $\ln(x) = 2 - x$ har en løsning på intervallet $(1, 2)$.

$\boxed{12}$ Vis at ligningen $x^3 + x = 1$ har en løsning mellom $x = 0$ og $x = 1$.

2 Derivasjon

2.1 Derivasjonsregler

$\boxed{13}$ Deriver følgende funksjoner

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + x^{1/3} - \sqrt[3]{x^2}$

b) $f(x) = x^3 \sin(x)$

c) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{2x}$

d) $f(x) = e^{\sin(x)}$

e) $f(x) = \cos(e^x)$

f) $f(x) = \cos(e^{2x})$

g) $f(x) = \dfrac{3x}{\ln(4x^2)}$

h) $f(x) = \sin(x)e^{x^2}$

i) $f(x) = e^{\sin(4x^2)}$

j) $f(x) = \cos^3(3x + 7)$

k) $f(x) = \cos^4(e^{2x} - 5)$

l) $f(x) = \ln(\sin(e^{2x}))$

$\boxed{14}$ **Fra eksamen V2013.**

Deriver funksjonene

a) $f(x) = 2x^3e^{-x} - 2$

b) $f(x) = \cos^2(x^2 + 2x) + x^2$

$\boxed{15}$ **Fra prøveeksamen H2014.**

Finn de deriverte til

a) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+x}$

b) $g(x) = \int_0^x \sin(t^2)\mathrm{dt}$

$\boxed{16}$ **Fra eksamen H2015.**

Deriver følgende funksjoner

$$\text{i)} \quad f(x) = -4\ln(\sin x), \qquad \text{ii)} \quad g(x) = 6e^{-2x}\ln x$$

2.2 Tangenter, skjæringssetningen og Newtons metode

$\boxed{17}$ **Fra eksamen MAT100, V2013.** La $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$. Finn ligningen til den rette linjen som tangerer $f(x)$ i punktet $(2, 3)$.

$\boxed{18}$ **a)** Vis at det finnes nøyaktig ett nullpunkt til funksjonen

$$f(x) = 2e^{-x^2} - x$$

på intervallet $(0, 1)$.

b) Bruk Newtons metode to ganger (to iterasjoner) til å estimere dette nullpunktet.

$\boxed{19}$ **a)** Vis at ligningen $x^2 - 2\cos x = 0$ har nøyaktig en løsning på intervallet $[0, 2]$.

b) Bruk to iterasjoner av Newtons metode til å estimere løsningen.

$\boxed{20}$ **Fra eksamen H2014.** Vi ønsker å løse ligningen $2x - \sin(x) = 2$ på intervallet $[0, \pi]$.

a) Vis at ligningen har nøyaktig én løsning på intervallet $[0, \pi]$.

b) Bruk to iterasjoner av Newtons metode, med startverdi $x_0 = 1$, til å estimere denne løsningen.

$\boxed{21}$ Begrunn at ligningen $\sin x = 1 - x$ har nøyaktig én løsning i intervallet $(0, 1)$. Bruk to iterasjoner av Newtons metode med startverdi $x_0 = 0.5$ til å estimere løsningen.

2.3 Implisitt derivasjon

$\boxed{22}$ Gitt ligningen $x\cos(y) = e^{2x}$. Finn $y'(x)$ uttrykt ved x og y. Hint: Implisitt derivasjon.

$\boxed{23}$ Finn ligningen til tangenten til kurven

$$x(y+1) + 2e^y = 3$$

i punktet $(1, 0)$

$\boxed{24}$ Ligningen

$$y(1-y^2) + \sin\left(\frac{2\pi x}{1+y^2}\right) = 0$$

beskriver en kurve i planet. Vis at kurven går gjennom punktet $(1, 1)$ og finn ligningen for tangentlinjen til kurven i dette punktet.

$\boxed{25}$ **Fra eksamen H2015.** En kurve er gitt ved $x^4 - y^4 = 2x^2y + 23$.

a) Vis at punktet $(2, -1)$ ligger på kurven.

b) Finn ligningen til tangenten i punktet $(2, -1)$.

2.4 Koblede hastigheter

$\boxed{26}$ En 10 meter lang stige lenes mot en vegg. Dersom toppen av stigen sklir nedover veggen med en fart på 1 m/s, hvor fort beveger foten av stigen seg i det øyeblikket toppen er 9 meter over bakken?

$\boxed{27}$ En sfærisk snøball smelter slik at diameteren minker med en rate på 0.1 cm/min. Med hvilken rate minker volumet av snøballen når diameteren er 14 cm?

$\boxed{28}$ **Fra eksamen V2015.** Arealet til en sirkel minker med hastigheten $5\,\text{cm}^2/\text{min}$. Hvor fort endrer radiusen til sirkelen seg når arealet er $100\,\text{cm}^2$?

$\boxed{29}$ **Fra eksamen FOA111 august 2003.** Volumet til en kule synker med en hastighet på 5π cm^3/min. Bestem forandringen i radien per

minutt når arealet av kulens overflate er $25\pi\,\text{cm}^3$.
Hint: Volumet og overflaten til en kule med radius r er henholdsvis $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ og $S = 4\pi r^2$.

$\boxed{30}$ **Fra eksamen H2015.** En oljeflekk har form som en sirkel. Radiusen til oljeflekken øker med 6 m/min. Hvor raskt øker arealet av oljeflekken når $r = 22$ m?

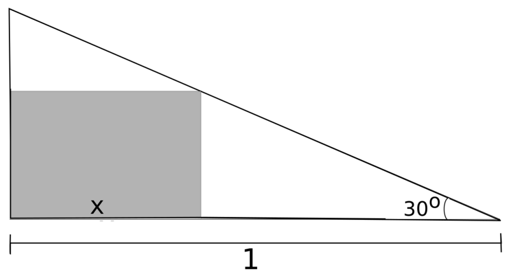
2.5 Optimering

$\boxed{31}$ Finn maksimum og minimum av

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

på intervallet $0 \leq x \leq 2$.

$\boxed{32}$ **Fra eksamen V2015.** Figuren viser et rektangel innskrevet i en rettvinklet trekant:



Finn lengden x av rektangelet slik at arealet av rektangelet blir størst mulig.

$\boxed{33}$ **Fra prøveeksamen H2014.** Du ønsker å produsere sylinderformede beholdere, der materialet i toppflaten koster tre ganger så mye som materialet som brukes i resten. De skal ha et volum på $1\,\text{dm}^3$. Hva må høyden og radiusen være for å minimere produksjonskostnadene?
Hint: Volumet av en sylinder er $V = \pi r^2 h$, der r er radiusen til bunnflaten og h er høyden av sylinderen.

34 **Fra prøveeksamen V2015.** En 1 meter lang streng kuttes i to deler. Den ene delen bøyes til en sirkel, den andre til et kvadrat. Finn lengden brukt på kvadratet dersom summen av arealene til sirkelen og kvadratet er minimum. Hva er det største samlede arealet du kan få?

35 Blant alle rektangler med en gitt omkrets, vis at kvadratet har størst areal.

3 Integrasjon

$\boxed{36}$ Løs integralene

a) $\displaystyle\int 8x^4 + 2\cos(2x) + \frac{1}{x}\ \mathrm{dx}$

b) $\displaystyle\int xe^{-x^2}\ \mathrm{dx}$

c) $\displaystyle\int (2x+5)(x^2+5x)^7\ \mathrm{dx}$

d) $\displaystyle\int (3-x)^{10}\ \mathrm{dx}$

e) $\displaystyle\int \sqrt{7x+9}\ \mathrm{dx}$

f) $\displaystyle\int \frac{x^3}{(1+x^4)^{1/3}}\ \mathrm{dx}$

g) $\displaystyle\int e^{5x+2}\ \mathrm{dx}$

h) $\displaystyle\int 4\cos(3x)\ \mathrm{dx}$

i) $\displaystyle\int \frac{\sin(\ln x)}{x}\ \mathrm{dx}$

j) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2+4x-3}\ \mathrm{dx}$

k) $\displaystyle\int x3^{x^2+1}\ \mathrm{dx}$

l) $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}\ \mathrm{dx}$

m) $\displaystyle\int \frac{\cos(5x)}{e^{\sin(5x)}}\ \mathrm{dx}$

n) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin x^2\ \mathrm{dx}$

$\boxed{37}$ Løs integralene

a) $\int x \sin x \; \mathrm{dx}$

b) $\int x e^x \; \mathrm{dx}$

c) $\int x \ln x \; \mathrm{dx}$

d) $\int \frac{\ln x}{x^5} \; \mathrm{dx}$

e) $\int x^2 e^{3x} \; \mathrm{dx}$

f) $\int x^3 \ln(5x) \; \mathrm{dx}$

g) $\int x\sqrt{x+3} \; \mathrm{dx}$

h) $\int \frac{1}{x^2-4} \; \mathrm{dx}$

i) $\int \frac{x}{x^2-4} \; \mathrm{dx}$

j) $\int \frac{1}{x(x+1)} \; \mathrm{dx}$

k) $\int \frac{1}{x^2(x+1)} \; \mathrm{dx}$

l) $\int \frac{x+7}{x^2(x+2)} \; \mathrm{dx}$

m) $\int \frac{x-1}{x^2-16} \; \mathrm{dx}$

n) $\int \frac{1}{1+x^2} \; \mathrm{dx}$

o) $\int \frac{1}{x^2+4} \; \mathrm{dx}$

p) $\int \frac{1}{x^2+4x+5} \; \mathrm{dx}$

q) $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{dx}$

$\boxed{38}$ Løs integralene

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{dx}$

b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{dx}$

c) $\displaystyle\int_e^\infty \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{dx}$

d) $\displaystyle\int_e^\infty \frac{1}{x(\ln x)^2}\,\mathrm{dx}$

e) $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x^2}\,\mathrm{dx}$

f) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\arctan x}{x^2+1}\,\mathrm{dx}$

$\boxed{39}$ **Fra prøveeksamen H2014.** Finn de ubestemte integralene

$$\text{(i)} \int x^4(1+x^5)^5\,\mathrm{dx}, \quad \text{(ii)} \int \sin x \cos x\,\mathrm{dx}, \quad \text{(iii)} \int \frac{x^3+x^2-2}{x^2-4}\,\mathrm{dx}$$

$\boxed{40}$ **Fra eksamen H2014.**

a) Finn det ubestemte integralet

$$\int x^2\cos(x^3)\,\mathrm{dx}$$

b) Finn det ubestemte integralet

$$\int \frac{2x+6}{x^2-4}\,\mathrm{dx}$$

c) Finn verdien av integralet, eller vis at det divergerer

$$\int_{-2}^{2} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{dx}\,.$$

$\boxed{41}$ **Fra eksamen V2015.** Finn de ubestemte integralene

$$\text{(i)} \quad \int \cos(2x) + e^{3x}\,\mathrm{dx}, \qquad \text{(ii)} \quad \int x^2 e^{x^3}\,\mathrm{dx}\,.$$

$\boxed{42}$ **Fra prøveeksamen V2015.**

a) Dersom $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{dx} = 3$ og $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{dx} = 7$, finn verdien av

$$\int_0^1 \big(2f(x) + 10g(x)\big)\,\mathrm{dx}$$

b) Finn de ubestemte integralene av funksjonene

(i) $f_1(x) = x^{2.5} + \cos(x) + 2e^{3x}$

(ii) $f_2(x) = x\sin(x^2)$

(iii) $f_3(x) = x\ln x$

$\boxed{43}$ **Fra eksamen H2015.**

Løs følgende integraler

$$\text{i)} \quad \int x^6 e^{x^7}\,\mathrm{d}x, \qquad \text{ii)} \quad \int \frac{x+4}{x^2+8x}\,\mathrm{d}x$$

$\boxed{44}$ **Fra eksamen H2015.**

a) Finn integralet

$$\int_1^3 \frac{1}{(x-2)^2}\,\mathrm{dx}\,.$$

b) Bestem grenseverdien

$$\lim_{t\to 1^+} \frac{\int_1^t \ln x\ \mathrm{dx}}{t(t-1)}$$

4 Andre tema

4.1 Vektorer

$\boxed{45}$ **Fra eksamen H2014.** La $\vec{u}$ og $\vec{v}$ være vektorene

$$\vec{u} = [1, 2, 1], \quad \vec{v} = [2, 4, 4]$$

a) Finn summen $\vec{u} + \vec{v}$ og skalarproduktet (dot-produktet) $\vec{u} \cdot \vec{v}$

b) Dekomponer $\vec{v}$ i en vektor $\vec{v}_{||\vec{u}}$ parallell med $\vec{u}$ og en vektor $\vec{v}_{\perp\vec{u}}$ som står loddrett på $\vec{u}$

c) Beregn kryssproduktet $\vec{u} \times \vec{v}$

$\boxed{46}$ **Fra eksamen H2015.**

a) Vis at skalarproduktet mellom vektorene

$$\vec{u} = [1, 3, -1], \quad \vec{v} = [-2, 4, -1]$$

er $\vec{u} \cdot \vec{v} = 11$.

b) Finn vinkelen mellom vektorene $\vec{u}$ og $\vec{v}$.

c) Finn vektorprojeksjonen av $\vec{u}$ på $\vec{v}$.

$\boxed{47}$ La $\vec{u} = [1, 2, -2]$, $\vec{v} = [1, -2, 2]$.

a) Regn ut skalarproduktet $\vec{u} \cdot \vec{v}$

b) Finn lengdene $|\vec{u}|$ og $|\vec{v}|$

c) Finn vinkelen mellom $|\vec{u}|$ og $|\vec{v}|$

d) Regn ut kryssproduktet $\vec{u} \times \vec{v}$. Finn en vektor som er normal på både $\vec{u}$ og $\vec{v}$

e) Bestem lengden til $\vec{u}$ langs $\vec{v}$

$\boxed{48}$ **Fra eksamen V2015.** Finn en enhetsvektor som står loddrett på de to vektorene

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

4.2 Funksjoner

$\boxed{49}$ **a)** La f være funksjonen $f(x) = 8x - 2$. Finn verdien av f i 0, 3, $x+1$ og i $f(3)$.

b) La $f(x) = \sqrt{x}$ og $g(x) = x + 1$. Beregn de fire sammensettingene $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ og $g \circ g$, og skriv ned definisjonsmengden i hvert tilfelle.

c) La

$$F(x) = \frac{1-x}{1+x}.$$

Regn ut $F \circ F(x)$ og oppgi dens definisjonsmengde.

$\boxed{50}$ Skisser grafen til funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} -(x+2), & x < -1 \\ x, & -1 \leq x \leq 2 \\ 2, & x > 2. \end{cases} \quad .$$

$\boxed{51}$ **Fra eksamen V2015.** Hva er definisjonsmengden D_f og verdimengden V_f til $f(x) = 2\sin x$? Forklar hvorfor det finnes en invers funksjon (omvendt funksjon) til f på intervallet $-\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2}$.

$\boxed{52}$ **Fra eksamen H2014.** La

$$f(x) = \begin{cases} \cos x + \sin x, & x < 0, \\ x^2 - x + 1, & x \geq 0, \end{cases}$$

der a er et reellt tall. Finn inversen til $f(x)$ for $x > 1/2$.

$\boxed{53}$ Hva er definisjonsmengden til

$$\ln\left(\frac{x}{2-x}\right)?$$

$\boxed{54}$ Bruk polynomdivisjon på funksjonen

$$\frac{2x^3 - 4x^2 + 3x + 4}{x^2 + 1}$$

$\boxed{55}$ Tegn en enhetssirkel og bruk denne til å forklare at

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x, \quad \cos(\pi - t) = -\cos t.$$

4.3 Differensialligninger

$\boxed{56}$ **Fra eksamen V2015**. Finn den generelle løsningen av differensialligningen

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{3y}{t}.$$

Finn deretter løsningen som i tillegg tilfredstiller startbetingelsen $y(1) = 1$.

$\boxed{57}$ Løs startverdiproblemet

$$\frac{dy}{dx} + x^2 y = x^2, \quad y(0) = 2.$$

$\boxed{58}$ Løs startverdiproblemet

$$\frac{dy}{dx} = 2xy(1-y), \quad y(0) = \frac{1}{2}.$$

$\boxed{59}$ **Fra eksamen H2015** Finn løsningen av differensialligningen

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = y \cos x$$

som tilfredstiller $y(0) = 2$.

$\boxed{60}$ **Fra eksamen H2015** (Spesialpensum for elektro)

a) Finn den generelle løsningen av differensialligningen

$$y'' - 8y' + 16y = 0$$

b) Finn løsningen av

$$y'' - 8y' + 16y = 8e^{6t}$$

med $y(0) = 3$ og $y'(0) = 8$.

c) Løs startverdiproblemet

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t^2 - 16}, \quad y(0) = 0.$$

4.4 Anvendelse av integrasjon: Areal

$\boxed{61}$ Finn arealet til området avgrenset av kurvene $y = x^2 - 2x$ og $y = 4 - x^2$.
Hint: Tegn en figur.

$\boxed{62}$ Finn arealet avgrenset av $y = \cos x$, $y = 0$, $x = 0$ og $x = 3\pi/2$.
Hint: Tegn en figur.

4.5 Anvendelse av integrasjon: Buelengde

$\boxed{63}$ Finn buelengden til grafen til funksjonen

$$f(x) = x^{3/2}$$

fra $x = 1$ til $x = 8$.

4.6 Anvendelse av integrasjon: Volum

$\boxed{64}$ **Fra eksamen V2015.** Funksjonen $f(x) = x^2 + 1$ er definert på intervallet $[2, 4]$. Arealet avgrenset av grafen til $f(x)$, x-aksen og de vertikale linjene $x = 2$ og $x = 4$ dreies om x-aksen. Finn volumet til dette omdreiningslegemet.

$\boxed{65}$ **Fra prøveeksamen V2015.** Et areal er avgrenset av funksjonene $f(x) = \sin(x)$ og $g(x) = -\sin(x)$ fra $a = \pi$ til $b = 2\pi$. Dette arealet roteres rundt x-aksen. Finn volumet av omdreiningslegemet.

4.7 Anvendelse av integrasjon: Arbeid

$\boxed{66}$ Kraften $F(x)$ som behøves for å strekke en elastisk fjær til x enheter ut fra hviletilstand er proposjonal med x:

$$F(x) = kx,$$

der k er den såkalte *fjærkonstanten* for fjæren. Dersom man trenger en kraft på 2000 N for å strekke en fjær til 4 m lenger enn hviletilstanden, hvor mye arbeid må utføres for å strekke den så langt?

4.8 Anvendelse av integrasjon: Gjennomsnitt

$\boxed{67}$ Finn gjennomsnittet til funksjonen $f(x) = 6x^2$ på intervallet $[4, 7]$.

4.9 Ikke-separable differensialligninger (spesialpensum)

$\boxed{68}$ Finn den generelle løsningen til differensialligningen

$$y'' + 13y' + 42y = 0$$

$\boxed{69}$ Finn løsningen av

$$y'' - 4y' + 4y = 144e^{6t}$$

som tilfredstiller $y(0) = 6$ og $y'(0) = 2$.

4.10 Matriser (spesialpensum)

$\boxed{70}$ **Fra eksamen V2015.** Vi har

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \\ -4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Regn ut determinantene til matrisene A og B.

b) Begge disse matrisene har en invers. Hvordan kan du vite dette? Finn inversmatrisen A^{-1} til A.

c) Finn vinkelen mellom vektorene

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

d) Løs ligningssystemet:

$$\begin{aligned} 3x - y &= 1 \\ 4x + 3y &= -3 \end{aligned}$$

$\boxed{71}$ **Fra eksamen H2014.** La A være matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

a) (i) Regn ut determinanten til matrisen A.
(ii) Har matrisen A en invers?

b) Løs ligningssystemet:

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 5 \\ 4x + 5y &= 2 \end{aligned}$$

$\boxed{72}$ **Fra eksamen H2015.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Regn ut BA, AB^T og BC hvis det er mulig.
Er det mulig å regne ut CBA? Forklar svaret uten å multiplisere matrisene.

b) Bestem C^{-1} (inversmatrisen til C) ved Gauss-eliminasjon.

c) La D være matrisen

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Finn alle egenverdiene og egenvektorene til D.

$\boxed{73}$ **Fra eksamen H2015.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Regn ut BA, AB^T og BC hvis det er mulig.
Er det mulig å regne ut CBA? Forklar svaret uten å multiplisere matrisene.

b) Bestem C^{-1} (inversmatrisen til C) ved Gauss-eliminasjon eller ved kofaktormetoden.

c) Betrakt ligningsystemet:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 3x + 7y + 3z = 11 \\ 2x + 4y + 3z = 4 \end{cases} \tag{4.1}$$

Skriv (4.1) på matriseform og løs systemet ved hjelp av C^{-1} fra oppgave b) eller ved hjelp av Gauss-eliminasjon.

5 Fasit

$\boxed{1}$

a) 11

b) 7

c) -1

d) 12

e) -4

f) 1

g) -3

$\boxed{2}$

a) $\frac{5}{7}$

b) $\frac{5}{2}$

c) $\frac{1}{2}$

d) $\frac{1}{3}$

$\boxed{3}$

a) 1

b) 0

c) ∞

d) 0

e) 1

f) 0

g) $\frac{2}{49}$

$\boxed{4}$ **Fra eksamen MAT100, Vår 2015.**

Løsningsforslag ligger på itslearning.

$\boxed{5}$ **Fra eksamen MAT100, Høst 2014.**
Løsningsforslag ligger på itslearning.

$\boxed{6}$ 8

$\boxed{7}$ **Fra eksamen H2015.** Løsningsforslag ligger på itslearning.

$\boxed{8}$ **Fra prøveeksamen H2014.**
Løsningsforslag ligger på itslearning.

$\boxed{9}$ **Fra eksamen H2014.**
Løsningsforslag ligger på itslearning.

$\boxed{10}$ **Fra eksamen V2015.**
Løsningsforslag ligger på itslearning.

$\boxed{11}$ **Fra prøveeksamen V2015.**
Løsningsforslag ligger på itslearning.

$\boxed{12}$ Bruk skjæringssetningen.

$\boxed{13}$

a) $2x^3 - \dfrac{2}{3}x^{-1/3} + \dfrac{1}{3}x^{-2/3}$

b) $3x^2 \sin x + x^3 \cos x$

c) $\dfrac{\cos(x)}{2x} - \dfrac{\sin(x)}{2x^2}$

d) $e^{\sin(x)} \cos x$

e) $-e^x \sin(e^x)$

f) $-2e^{2x} \sin(e^{2x})$

g) $\dfrac{3\ln(4x^2) - 6}{(\ln(4x^2))^2}$

h) $e^{x^2}(2x \sin x + \cos x)$

i) $8xe^{\sin(4x^2)} \cos(4x^2)$

j) $-9\cos^2(3x+7)\sin(3x+7)$

k) $-8e^{2x}\cos^3(e^{2x}-5)\sin(e^{2x}-5)$

l) $\dfrac{2e^{2x}\cos(e^{2x})}{\sin(e^{2x})}$

$\boxed{14}$ **Fra eksamen MAT100, Vår 2013.**

Løsningsforslag ligger på itslearning.

$\boxed{15}$ **Fra prøveeksamen MAT100, Høst 2014.**

Løsningsforslag ligger på itslearning.

$\boxed{16}$ **Fra eksamen H2015.** Løsningsforslag ligger på itslearning.

$\boxed{17}$ **Fra eksamen MAT100, V2013.**

Løsningsforslag ligger på itslearning.

$\boxed{18}$

a) Bruk skjæringssetningen og den deriverte

b) 0.9

$\boxed{19}$

a) Bruk skjæringssetningen og den deriverte

b) 1.03

$\boxed{20}$ **Fra eksamen H2014.**

Løsningsforslag ligger på itslearning.

$\boxed{21}$ Bruk skjæringssetningen og den deriverte. Løsningen er tilnærmet lik 0.511.

$\boxed{22}$

$$y'(x) = \frac{\cos y - 2e^{2x}}{x\sin y}$$

$\boxed{23}$

$$y = \frac{1}{3} - \frac{x}{3}$$

$\boxed{24}$

$$y = 1 + \frac{\pi}{\pi - 2}(x - 1)$$

$\boxed{25}$ **Fra eksamen H2015.**

Løsningsforslag ligger på itslearning.

$\boxed{26}$ $-2.06\ m/s$

$\boxed{27}$ $-30.79\ cm^3/min$

$\boxed{28}$ **Fra eksamen V2015.**

Løsningsforslag ligger på itslearning.

$\boxed{29}$ **Fra eksamen FOA111 Aug 2003.** Løsningsforslag ligger på itslearning.

$\boxed{30}$ **Fra eksamen H2015.**

Løsningsforslag ligger på itslearning.

$\boxed{31}$ Maks: 1 i $x = 1$. Min: 0 i $x = 0$.

$\boxed{32}$ **Fra eksamen V2015.**

Løsningsforslag ligger på itslearning.

$\boxed{33}$ **Fra prøveeksamen H2014.**

Løsningsforslag ligger på itslearning.

$\boxed{34}$ **Fra prøveeksamen V2015.**

Løsningsforslag ligger på itslearning.

$\boxed{35}$ Maksimer arealet $A = b \cdot h$ gitt at $2b + 2h = K$, der K (omkretsen) er en konstant.

$\boxed{36}$ **a)** $\frac{8}{5}x^5 + \sin(2x) + \ln|x| + C$

b) $-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$

c) $\frac{1}{8}(x^2+5x)^8+C$

d) $-\frac{1}{11}(3-x)^{11}+C$

e) $\frac{2}{21}(7x+9)^{3/2}+C$

f) $\frac{3}{8}(1+x^4)^{2/3}+C$

g) $\frac{1}{5}e^{5x+2}+C$

h) $\frac{4}{3}\sin(3x)+C$

i) $-\cos(\ln x)+C$

j) $\frac{1}{2}\ln|x^2+4x-3|+C$

k) $\frac{1}{2}\frac{1}{\ln 3}3^{x^2+1}+C$

l) $\ln|\ln x|+C$

m) $-\frac{1}{5}e^{-\sin(5x)}+C$

n) 1

$\boxed{37}$ **a)** $-x\cos x+\sin x+C$

b) xe^x-e^x+C

c) $\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C$

d) $-\frac{\ln x}{4x^4}-\frac{1}{16x^4}+C$

e) $\frac{x^2}{3}e^{3x}-\frac{2x}{9}e^{3x}+\frac{2}{27}e^{3x}+C$

f) $\frac{x^4}{4}\ln(5x)-\frac{x^4}{16}+C$

g) $\frac{2}{5}(x+3)^{5/2}-2(x+3)^{3/2}+C$

h) $-\frac{1}{4}\ln|x+2|+\frac{1}{4}\ln|x-2|+C$

i) $\frac{1}{2}\ln|x+2|+\frac{1}{2}\ln|x-2|+C$

j) $\ln|x|-\ln|x+1|+C$

k) $-\ln|x|-\frac{1}{x}+\ln|x+1|+C$

l) $-\frac{5}{4}\ln|x|-\frac{7}{2x}+\frac{5}{4}\ln|x+1|+C$

m) $\frac{5}{8}\ln|x+4|+\frac{3}{8}\ln|x-4|+C$

n) $\arctan(x) + C$

o) $\frac{1}{2}\arctan(x/2) + C$

p) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+4x+5}\,\mathrm{dx} = \int \frac{1}{(x+2)^2+1}\,\mathrm{dx} = \arctan(x+2) + C$

q)

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{dx} = \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\,\mathrm{dx} = \int \left(\frac{1+x^2}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right)\,\mathrm{dx}$$
$$= \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)\,\mathrm{dx} = x - \arctan x + C$$

38

a) ∞

b) 1

c) ∞

d) 1

e) $0,5$

f) $\frac{3}{32}\pi^2$

39 **Fra prøveeksamen H2014.**

Løsningsforslag ligger på itslearning.

40 **Fra eksamen H2014.**

Løsningsforslag ligger på itslearning.

41 **Fra eksamen V2015.**

Løsningsforslag ligger på itslearning.

42 **Fra prøveeksamen MAT100, Vår 2015.**

Løsningsforslag ligger på itslearning.

43 **Fra eksamen H2015.** Løsningsforslag ligger på itslearning.

44 **Fra eksamen H2015.** Løsningsforslag ligger på itslearning.

$\boxed{45}$ **Fra eksamen H2014.** Løsningsforslag ligger på itslearning.

$\boxed{46}$ **Fra eksamen H2015.** Løsningsforslag ligger på itslearning.

$\boxed{47}$

a) -7

b) Begge er 3

c) 2.46 radianer, eller 141.1 grader

d) $(0, -4, -4)$. Denne står normalt på både $\vec{u}$ og $\vec{v}$.

e) $|(0, -4, -4)| = \sqrt{32} \approx 5.66$

f) $-7/3$

$\boxed{48}$ **Fra eksamen V2015.**

Løsningsforslag ligger på itslearning.

$\boxed{49}$

a) $f(0) = -2$, $f(3) = 22$, $f(x+1) = 8x + 6$, $f(f(3)) = f(22) = 174$.

b)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{x}, & D &= [0, \infty) \\
g(x) &= x + 1, & D &= (-\infty, \infty) \\
f \circ g &= \sqrt{x+1}, & D &= [-1, \infty) \\
g \circ f &= \sqrt{x} + 1, & D &= [0, \infty) \\
f \circ f &= x^{1/4}, & D &= [0, \infty) \\
g \circ g &= x + 2, & D &= (-\infty, \infty)
\end{aligned}
$$

c) $F \circ F(x) = x$, $D = (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$

$\boxed{50}$

$\boxed{51}$ **Fra eksamen V2015.**

Løsningsforslag ligger på itslearning.

$\boxed{52}$ **Fra eksamen H2014.**

Løsningsforslag ligger på itslearning.

$\boxed{53}$ $(0, 2)$

$\boxed{54}$

$$2x - 4 + \frac{x+8}{x^2+1}$$

$\boxed{55}$

$\boxed{56}$ **Fra eksamen V2015**.

Løsningsforslag ligger på itslearning.

$\boxed{57}$

$$y = e^{-x^3/3} + 1$$

$\boxed{58}$

$$y = \frac{e^{x^2}}{e^{x^2}+1}$$

$\boxed{59}$ **Fra eksamen H2015**.

Løsningsforslag ligger på itslearning.

$\boxed{60}$ **Fra eksamen H2015**.

Løsningsforslag ligger på itslearning.

$\boxed{61}$ 9

$\boxed{62}$ 3

$\boxed{63}$ 22.8

$\boxed{64}$ **Fra eksamen V2015.**

Løsningsforslag ligger på itslearning.

$\boxed{65}$ **Fra prøveeksamen V2015.**

Løsningsforslag ligger på itslearning.

$\boxed{66}$ 4000

$\boxed{67}$ 186

$\boxed{68}$

$$y(t) = C_1 e^{-7t} + C_2 e^{-6t}$$

$\boxed{69}$

$$y(t) = 9e^{6t} - 3e^{2t} - 46te^{2t}$$

$\boxed{70}$ **Fra eksamen V2015.** Løsningsforslag ligger på itslearning.

$\boxed{71}$ **Fra eksamen H2014.** Løsningsforslag ligger på itslearning.

$\boxed{72}$ **Fra eksamen H2015.** Løsningsforslag ligger på itslearning.

$\boxed{73}$ **Fra eksamen H2015.** Løsningsforslag ligger på itslearning.

Vedlegg

1. Strategi for koblede hastigheter-oppgaver

Strategi for problemløsing

Tilpasset relaterte rater (koblede hastigheter)*

Alexander

I kapittel 5.6 lærer vi om *koblede hastigheter* og praktiske problemstillinger som kan angripes med kjerneregelen/implisitt derivasjon. Det finnes ingen *oppskrift* som løser alle slike problemer, men man kan formulere en generell løsningsstrategi. Denne kan utvides til mer generelle problemløsingsstrategier, se f.eks. boken *How To Solve It* av George Polya, 1945 (`http://en.wikipedia.org/wiki/How_to_Solve_It`).

Forstå problemet

- Les oppgaveteksten nøye. Hva vet du? Hva vil du finne?
- Tegn en figur.
- Gi navn til de interessante størrelsene. Bruk disse til å uttrykke både størrelsene du har fått oppgitt og de du vil finne.

Finn en sammenheng mellom kjente og søkte størrelser

- Basert på oppgaveteksten og figuren, finn en eller flere ligninger som relaterer det du ønsker å finne til det du har fått oppgitt.

Deriver

- Deriver ligningen(e) implisitt
- Sett inn størrelsene du har fått oppgitt, og løs ligningen(e) for størrelsene du ønsker å finne. Det kan hende du mangler et ledd. Isåfall, gå tilbake til forrige steg og forsøk å finne en sammenheng eller ligning som relaterer det du mangler til det du vet.

Vurder løsningen

- Er svaret *rimelig*? Kan du sjekke svaret? Kanskje du kan sjekke deler av svaret?
- Putt løsningsmetoden i verktøykassen. Kanskje får du bruk for den senere.

*Basert på Polya, *How to Solve It*, 1945