Funciones y Cardinalidad

Funciones

Definición Llamamos **función** f entre dos conjuntos A y B a una relación $f \subseteq A \times B$ que verifica las siguientes propiedades:

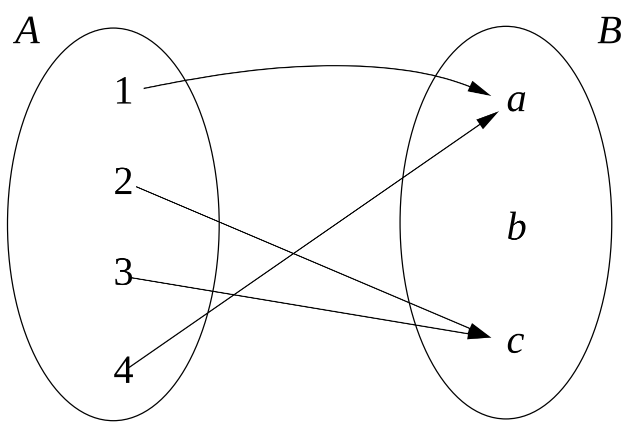
1. $Dom(f) = A$
2. Si $(a, b), (a, c) \in f$ entonces $b = c$

Dicho de otra manera: todo elemento de A está relacionado con un único elemento de B.

Ejemplo: La relación definida entre $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{a, b, c\}$

$$f = \{(1, a), (2, c), (3, c), (4, a)\}$$

es una función.



Si f es una función de A en B lo expresaremos por

$$f\colon A \to B$$

A los elementos del conjunto A le llamaremos argumentos o variables.

Por otro lado, si $(a, b) \in f$ lo denotaremos $f(a) = b$ y diremos que b es la *imagen* de a. Por tanto:

$$f = \{(a, f(a)) \mid a \in A\}$$

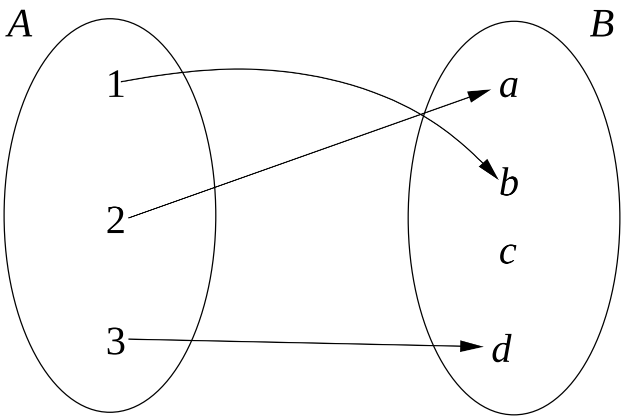
Ejemplo: Si consideramos $A = B = \mathbb{R}$, podemos definir la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mediante la regla $f(x) = x^2 - 1$, quedando perfectamente definida la función.

Ejemplo: La relación identidad Id en A, definida $Id = \{(x, x) \mid x \in A\}$ es una función de A en A, que llamaremos *función identidad*.

Tipos especiales de funciones

Definición Una función $f\colon A \to B$ se dice que es **inyectiva** si elementos distintos de A tienen imágenes distintas, es decir

$$a, a' \in A \text{ y } a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$$



Una definición de inyectividad equivalente a la anterior es:

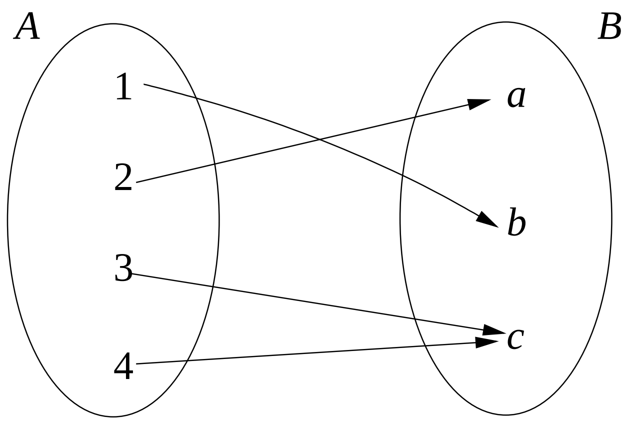
$$f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$$

Ejemplo: La función $f\colon \mathbb{Z} - \{1\} \to \mathbb{Q}$ definida $f(n) = \frac{n}{n-1}$ es inyectiva.

Demostración: Si $f(n) = f(m)$ llegamos a $n = m$.

Definición Una función $f\colon A \to B$ es **sobreyectiva** si todo elemento de B es imagen de algún elemento de A:

Dado $b \in B$, existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$

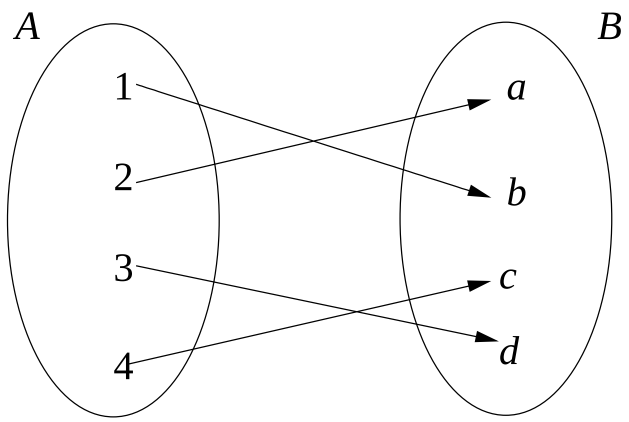


Ejemplos:

• La función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida $f(x) = 1 + 2x$ es sobreyectiva: si $y \in \mathbb{R}$, existe x tal que $f(x) = y$, en concreto $x = \frac{y-1}{2}$.

• Determina si la función $f\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ definida $f(A) = A \cup \{0\}$ es una función sobreyectiva.

Definición Diremos que una función f es **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva.



No todas las funciones han de ser necesariamente de alguno de estos tipos. Existen funciones que no son ni inyectivas ni sobreyectivas y por lo tanto tampoco biyectivas.

Ejercicio: Encuentra funciones que no sean inyectivas ni sobreyectivas.

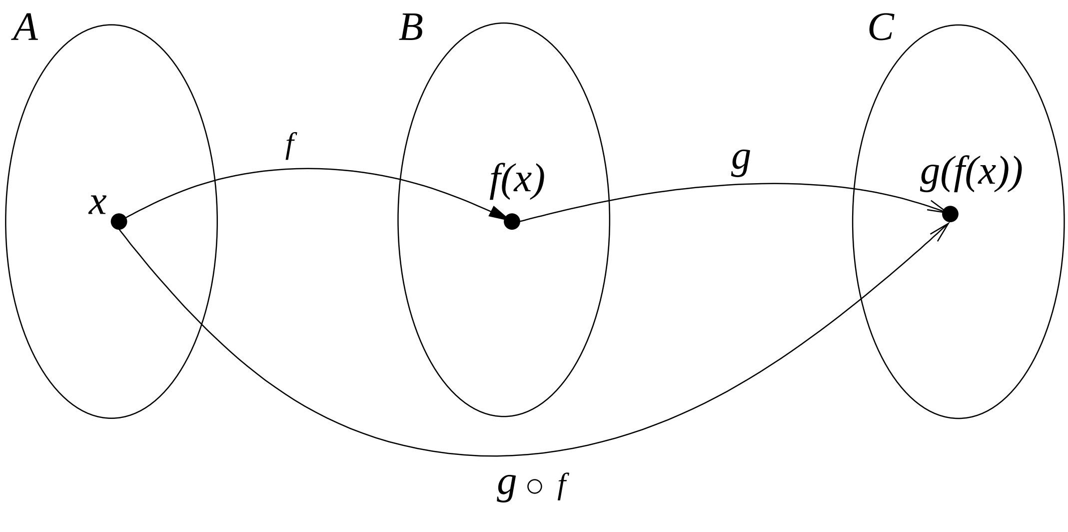
Composición de funciones

Si $f\colon A \to B$ y $g\colon B \to C$ son funciones, entonces la relación compuesta de ambas es una nueva función.

La composición de funciones se representa como $g \circ f$ indicando que primero se aplica f y luego g (al contrario que la composición de relaciones)

Observemos que si $f\colon A \to B$ y $g\colon B \to C$, la función compuesta $g \circ f\colon A \to C$ toma la expresión:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$



Teorema Si $f\colon A \to B$ y $g\colon B \to C$ son inyectivas (resp. sobreyectivas), entonces $g \circ f$ es inyectiva (resp. sobreyectiva)

Funciones inversibles

Diremos que una función $f\colon A \to B$ es inversible si la relación inversa $f^{-1}\colon B \to A$ es función.

Teorema Una función $f\colon A \to B$ es inversible si y sólo si es biyectiva.

Ejemplo: La función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ definida $f(x) = x^2$ no es inversible, ya que no es inyectiva. Esto no impide que no exista una relación inversa $f^{-1} \subseteq \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ definida

$$f^{-1} = \{(x, +\sqrt{x}) \mid x \in \mathbb{R}^+\} \cup \{(x, -\sqrt{x}) \mid x \in \mathbb{R}^+\}$$

Si f es inversible, entonces f^{-1} también lo es, puesto que $(f^{-1})^{-1} = f$.

Teorema Sean Id_A e Id_B las funciones identidad en los conjuntos A y B, respectivamente. Entonces $f\colon A \to B$ es inversible si y solo si se verifica que f^{-1} es la única función que verifica:

i) $f \circ f^{-1} = Id_B$
ii) $f^{-1} \circ f = Id_A$

Ejemplo: Encontrar la inversa de la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida $f(x) = 2x - 1$.

CARDINALIDAD

Definición: Diremos que dos conjuntos A y B son **equipotentes** si existe una función biyectiva entre ellos. Escribiremos $A \approx B$.

La equipotencia entre conjuntos es un relación de equivalencia.

Dado un conjunto A, identificaremos el *cardinal* de A, que representaremos como $|A|$, a la clase de equivalencia $[A]$ definida por la relación de equipotencia.

Así, por ejemplo, como el único conjunto equipotente con $\emptyset$ es el propio conjunto vacío, tenemos que $[\emptyset] = \{\emptyset\}$. Si $\mathbb{N}_n = \{1, 2, 3 \ldots, n\}$, entonces $[\mathbb{N}_n]$ estaría formado por los conjuntos que tienen exactamente n elementos. Para un cierto tipo de conjuntos, podemos identificar el cardinal con el número de elementos que posee.

Definición: Diremos que un conjunto A es **finito** si es vacío, en cuyo caso representamos $|\emptyset| = 0$, o es equipotente a un cierto $\mathbb{N}_n$. En este caso representamos $|A| = n$.

Conjuntos infinitos

Obviamente, diremos que un conjunto es infinito si no es finito. Esto nos lleva a que, si A es infinito, tiene que existir una función inyectiva

$$f\colon \mathbb{N} \to A$$

Por tanto, si un conjunto A es infinito, será equipotente al conjunto resultante de quitar un número finito de elementos de A. Es más, podemos enunciar el siguiente

Teorema Un conjunto A es infinito si y solo si existe un subconjunto $B \subseteq A$, $B \neq A$, tal que A y B son equipotentes.

Evidentemente, no podemos asignar un número natural al cardinal de un conjunto infinito. Y por otro lado surge la siguiente pregunta: ¿Todos los conjuntos infinitos tienen el mismo cardinal?

Visto lo anterior, es obvio que el conjunto $\mathbb{N}$ es un conjunto infinito. Llamamos $\aleph_0$ al cardinal de este conjunto.

Defninción: Diremos que un conjunto es **infinito numerable** si es equipotente a $\mathbb{N}$, es decir,

$$|A| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$$

Llamaremos conjunto **numerable** a un conjunto finito o infinito numerable.

Ejercicios:
- Prueba que el conjunto de los números naturales pares es numerable.
- Prueba que $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$

Teorema La unión numerable de conjuntos numerables es numerable.

Consecuencia: $\mathbb{Q}$ es numerable.

Si todos los conjuntos infinitos fuesen numerables ya habríamos terminado el problema de la cardinalidad. Pero esto no es así. Existen conjuntos que no son numerables

Teorema El intervalo de números reales $(0,1)$ no es numerable.

Es más, cualquier intervalo real es equipotente a $(0,1)$. Incluso $\mathbb{R}$ es equipotente a $(0,1)$. Y por supuesto, todos son conjuntos infinitos NO numerables. Esto nos lleva a definir un orden dentro de los cardinales.

Definición: Dados dos conjuntos A y B diremos que $|A| \leq |B|$ si y solo si existe una función inyectiva de A en B.

No es trivial demostrar que esta relación entre cardinales de conjuntos es un orden. Esto se fundamenta en el siguiente

Teorema (Schröder-Bernstein) Si existe una función inyectiva de A en B y otra función inyectiva de B en A, entonces existe una función biyectiva entre ambos conjuntos.

Si llamamos $\aleph_1 = |\mathbb{R}|$, está claro que $\aleph_0 \leq \aleph_1$. La cuestión es saber si existen conjuntos con cardinal intermedio entre ambos cardinales transfinitos. No es un hecho probado, pero se suele admitir como cierto que ésto no ocurre, es la conocida

Hipótesis del continuo (Cantor) No existen conjuntos con cardinal entre $\aleph_0$ y $\aleph_1$.

Por último, nos queda ver si existen otros cardinales transfinitos. Esto lo resuelve el siguiente

Teorema (Cantor) Si A es cualquier conjunto, entonces el cardinal de $\mathcal{P}(A)$, es estrictamente mayor que el cardinal de A.

Si A es finito, $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$. Esta propiedad, generalmente, se extiende, y como $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = \aleph_1$, se suele representar

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1 < 2^{\aleph_1} = \aleph_2 < \ldots < 2^{\aleph_k} = \aleph_{k+1} < \ldots$$