Tema 1: Teoría de conjunto

Ing. Margot Edith Cuarán Jaramillo

Escuela de Ingeniería de Sistemas y Computación
Universidad del Valle - Santiago de Cali, Colombia
e–mail: mecuaran@eisc.univalle.edu.co
Agosto 2.006

Conjunto

Un conjunto es una colección de objetos no repetidos y no ordenados. La forma más sencilla de específicar un conjunto es hacer una lista de sus elementos, encerrada por llaves.

Ejemplo $\{2,3,\frac{1}{2}\}$ ó $\{3,2,\frac{1}{2}\}$ ó $\{2,\frac{1}{2},3,\}$; indicarán el mismo conjunto.

Sin embargo, se usa con más frecuencia la notación constructiva de conjuntos. La forma de la notación es {variable indicadora:condiciones} ó {variable $\in$ conjunto : condiciones}

Ejemplo $\{x : x \in Z, 2|x\}$ ó $\{x \in Z : 2|x\}$, es el conjunto de todos los enteros que son divisibles entre 2, es decir, conjunto de números pares.

Tres conjuntos especiales de números son: $\aleph$, los naturales, Z, los enteros y $\Re$, los reales.

Área de Aplicación El conjunto es esencialmente útil en ciencias de la computación y encuentra aplicaciones en áreas tales como: inteligencia artificial, bases de datos y lenguajes de programación.

Elementos Los objetos en un conjunto se llaman elementos, o miembros, del conjunto

Ejemplo El conjunto V de todas las vocales del alfabeto español se puede escribir como $V = \{a, e, i, o, u\}$

Ejemplo Para una expresión e y una expresión de valor de conjunto S, $e \in S$ es una expresión; cuyo valor del enunciado *e es miembro de S*, si *e está en S*. La expresión $\neg(e \in S)$ se puede abreviar por $e \notin S$. Por ejemplo, $2 \in \{1, 2, 4\}$ es verdad y, $3 \notin \{1, 2, 4\}$ es verdad.

Cardinalidad La cardinalidad o tamaño de un conjunto finito S, se denota por $\mid S \mid$, es el número de elementos en S. Es decir,
$\mid S \mid = (\sum x \mid x \in S : 1)$.

- Finito: Un conjunto se llama finito si su cardinalidad es un entero. Si no es así, se llama infinito. La cardinalidad de los Z es infinita.

- Vacío: Es el conjunto que no tiene elementos. Se puede representar por {} ó $\oslash$

Relaciones entre conjuntos

Equivalencia de conjuntos Dos conjuntos son iguales si ellos contienen los mismos elementos. Así, el conjunto S y T cumplirán que: $S = T \equiv (\forall x \,|: x\ in\ S \equiv x\ in\ T)$

Ejemplo Sea $T = \{8, 6, 2, 4\}$ y $S = \{x|x$ es un entero positivo par menor que $10\}$. Muestre que $T \equiv S$

Subconjunto Suponga que S y T son conjuntos. Se dice que S es un subconjunto de T si cada elemento de S también es un elemento de T. La notación $S \subseteq T$ quiere decir que A es un subconjunto de B. Es decir, $S \subseteq T \equiv (\forall x \mid x \in S : x \in T)$

Ejemplo $\{8, 6, 2\}$ es subconjunto de $\{8, 6, 2, 4\}$.

Subconjunto propio Suponga que S y T son conjuntos.
Entonces, $S \subset T \equiv (S \subseteq T \wedge S \neq T)$

Universo Una teoría de conjuntos concierne a conjuntos construidos de cualquier colección de elementos. Hay una teoría do conjuntos de enteros, una teoría do conjuntos de caracteres, y así sucesivamente. Estas colecciones de elementos se conoce como el *dominio del discurso ó el universos de valores*, denotado por $\bigcup$

Partes del conjunto Las partes de un conjunto de un conjunto S, denotado por **P**(S), es el conjunto de subconjuntos de S: $x \in \mathbf{P}(S) \equiv x \subseteq S$

Ejemplo $\mathbf{P}\{3, 5\} = \{\emptyset, \{3\}, \{5\}, \{3, 5\}\}$

Producto cartesiano Sean los conuuntos A y B. El producto cartesiano de A y B, que se representa por AxB, es el conjunto de todos los pares ordenados (listas de dos elementos) formados tomando un elemento de A y uno de B, en todas las formas posibles. Es decir, $AxB = \{(a,b) : \ a \in A \wedge b \in B\}$.

Ejemplo Supongamos que $A = \{1,2,3\}$ y que $B = \{3,4,5\}$. Entonces,

$$AxB = \{ \ (1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5),(3,3),(3,4),(3,5)\}$$

$$BxA = \{ \ (3,1),(3,2),(3,3),(4,1),(4,2),(4,3),(5,1),(5,2),(5,3)\}$$

Operaciones sobre conjuntos

Intersección Sea A y B dos conjuntos. La intersección de A y B es el conjunto de todos los elementos que están en A o en B. La intersección de A y B se indica con $A \cap B$. Es decir, $A \cap B \ = \ \{x : x \in A \ \wedge \ x \in B\}$.

Ejemplo $\{3,5,6\} \ \cap \ \{3,2,1\} \ = \ \{3\}$

Unión

Sea A y B dos conjuntos. La unión de A y B es el conjunto de todos los elementos que están en A o en B. La unión de A y B se indica con $A \cup B$. Es decir, $A \cup B \ = \ \{x : x \in A \ \vee \ x \in B\}$.

Ejemplo $\{3,5,6\} \ \cup \ \{3,2,1\} \ = \ \{3,5,6,2,1\}$

Tamaño de una unión

Sean A y B conjuntos finitos, entonces:
$| A \cup B | = | A | + | B | - | A \cap B |$

Ejemplo ¿Cuántos enteros hay entre 1 y 1000 (inclusive) son divisible entre 2 o entre 5?. Sean

$$A = \{x \in Z : \ 1 \leq x \leq 1000 \ \wedge \ 2 \ | x\}$$
$$B = \{x \in Z : \ 1 \leq x \leq 1000 \ \wedge \ 5 \mid x\}$$

La pregunta del problema es $A \cup B$. No es difícil ver que $| A |= 500$ y que $| B |= 200$. Ahora bien, $A \cap B$ son aquellos números, entre 1 y 1000, que son divisibles al mismo tiempo entre 2 y entre 5. Un número es divisible a la vez entre 2 y 5 **sii** es divisible entre 10, así que:
$A \cap B = \{x \in Z : \ 1 \leq x \leq 1000 \ \wedge \ 10 \mid x\}$ y en consecuencia, $| A \cap B | = 100$.
Por último, se tiene:
$| A \cup B |=| A | + | B | - | A \cap B |= 500 + 200 - 100 = 600$. Hay 600 enteros, entre 1 y 1000, que son divisibles entre 2 o entre 5.

Diferencia Sean A y B conjuntos. La diferencia de conjuntos, A-B, es el conjunto de todos los elementos de A que no están en B: $A - B = \{x : x \in A \ \wedge \ x \notin B\}$.

La diferencia simétrica de A y B, representada por $A\Delta B$, es el conjunto de todos los elementosa de A que no están en B ó en B que no están en A. Esto es, $A\Delta B = (A - B) \cup (B - A)$.

Ejemplo Supongamos que $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y que $B = \{3, 4, 5, 6\}$.

Entonces,

$A - B = \{1, 2\}$

$B - A = \{5, 6\}$

$A\Delta B = \{1, 2, 5, 6\}$.

Complemento El complemento de S, escrito S^c, es el conjunto de elemetos que no están en S (pero si en el universo). Así, $x \in S^c \equiv x \in \bigcup \wedge x \notin S$.

Ejemplo Sea $\bigcup$ el conjunto de todas las letras del alfabeto español. Y, sea A el conjunto de todas las vocales del alfabeto español. Entonces A^c es el conjunto de todas las consonantes del alfabeto español.

Identidades de conjuntos

Identidad	Nombre
$A \cup \emptyset = A$ $A \cap \emptyset = A$	Ley de identidad
$A \cup \bigcup = \bigcup$ $A \cap \emptyset = \emptyset$	Ley de dominación
$A \cup A = A$ $A \cap A = A$	Ley de idempotencia
$\overline{\overline{(A)}} = A$	Ley de complementación
$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$	Ley conmutativa
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (B \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (B \cap C)$	Ley asociativa
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	Leyes de De Morgan
$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$	Ley de absorción
$A \cup \overline{A} = \bigcup$ $A \cap \overline{A} = \emptyset$	Ley de complemento

Depósito

Sucursal	Cuenta	Cliente	Saldo
D	1	J	500
M	2	S	700
P	3	H	400
RH	4	T	350
P	5	W	900
RD	6	L	700
B	7	G	750
D	8	G	850

Cliente

Cliente	Calle	Ciudad
Jo	M	Ha
S	N	Ry
H	M	Ha
C	N	Ry
L	P	Pi
T	Q	St
W	U	Pr
A	G	Pi
J	A	Pa
Gl	H	Wo
B	S	Br
G	W	St

Préstamo

Sucursal	Préstamo	Cliente	Valor
D	17	Jo	1000
RD	23	S	2000
P	15	H	1500
D	14	Ja	1500
M	93	C	500
RH	11	T	900
Po	29	W	1200
N	16	A	1300
D	18	J	2000
P	25	Gl	2500
B	10	B	2200

Sucursal

Sucursal	Activo	CiuSuc
D	90000	B
RD	21000	P
P	17000	H
M	4000	H
RH	80000	H
Po	3000	Be
N	37000	R
B	71000	B

Taller Conjuntos

Bibliografía

1. David Gries and Fred Schneir. A logical aproach to discrete math. Springer, 1.994.

2. Rosen Kenneth. Matemática Discreta y sus aplicaciones. 5ta. Edición. McGrawHill, 2.004.

3. Edward Scheinerman. Matemáticas Discretas. Math, 2.001.

4. Korth Henry and Silberschaatz Abraham. Fundamentos de bases de datos. ”‘a. Edición. McGrawHill. 1.993.