Tema 2: Funciones

Ing. Margot Edith Cuarán Jaramillo

Escuela de Ingeniería de Sistemas y Computación
Universidad del Valle - Santiago de Cali, Colombia
e–mail: mecuaran@eisc.univalle.edu.co

Agosto 2.006

Funciones

Una relación *f* se llama función siempre que $(a, b) \in f$ y $(a, c) \in f$ impliquen que $b = c$.

Ejemplo 1 Sean $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1), (4, 7)\}$ y $g = \{(1, 2), (2, 3), (4, 7)\}$

La relación *f* es una función, pero *g* no lo es, porque $(1, 2), (1, 3) \in g$ y $2 \neq 3$.

Sea *f* una función, y se a un objeto. Se define la notación *f*(a) siempre y cuando exista un objeto b tal que $(a, b) \in f$. En este caso, $f(a)$ es igual a b. En cualquier otro caso, la notación *f*(a) no está definida.

Dominio y codominio

Sea f una función. El conjunto de los primeros elementos posibles en los pares ordenados en f se llama dominio de f, y se representa por *dom* f. El conjunto de los segundos elementos posibles en los pares ordenados en f se llama imagen de f y se representa por *im* f.

Ejemplo 2 Sea $f = \{(1,2),(2,3),(3,1),(4,7)\}$.

Entonces, *dom* $f = \{1,2,3,4\}$ e *im* $f = \{1,2,3,7\}$

$(f : A \to B)$

Sea f una función, y sean A y B conjuntos. Se dice que f es una función de A a B siempre y cuando $dom\ f = A$ e $im\ f \subseteq B$. En este caso, se escribe $f : A \to B$. También, se dice que f es una aplicación de A a B.

Ejemplo 3. La función seno. Esta función está definida para todo número feal, y produce un valor real. El dominio de la función seno son los reales, y la imagen es el conjunto $[-1,1] = \{x \in \mathbf{R} : -1 \leq x \leq 1\}$. Se puede escribir $sen : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, porque *dom* sen $= \mathbf{R}$ e **im** sen $\subseteq \mathbf{R}$. También es correcto escribir $sen : \mathbf{R} \to [-1,1]$.

Suma y multiplicación de funciones

Sea f_1 y f_2 son funciones desde A hasta **R**. Entonces, $f_1 + f_2$ y $f_1.f_1$ son también funciones desde A hasta **R** definido por:

$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$
$(f_1.f_2)(x) = f_1(x).f_2(x)$

Note que la función $f_1 + f_2$ y f_1 . f_2 ha sido definido especificando sus valores de x en términos de los valores de f_1 y f_2 de x.

Ejemplo 4 Sean $\mathbf{f}_1$ y $\mathbf{f}_2$ funciones desde **R** hasta **R** tal que $\mathbf{f}_1(x) = x^2$ y $\mathbf{f}_2(x) = x - x^2$. ¿Cuáles son las funciones $(f_1 + f_2)$ y $(f_1.f_2)$?

$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) = x^2 + (x + x^2) = x$
$(f_1.f_2)(x) = x^2(x - x^2) = x^3 - x^4$

Donde f es una función desde un conjunto A hasta un conjunto B, la imagen de un subconjunto de A puede definirse.

Composición de funciones

Sean los conjuntos A, B y C, y sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$.

Entonces la función $gof(a) = g\,[f(a)]$ donde $a \in A$. La función g o f se llama composición de g y f.

Ejemplo 5 Sean $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ por $f(x) = x^2 + 1$, y $g(x) = 2x - 3$. ¿Qué es (g o f)(4)?

$$\begin{aligned}
(go\mathbf{f})(4) &= g\,[f(4)] \\
&= g(4^2 + 1) \\
&= g(17) \\
&= 2\ .\ 17 - 3 \\
&= 31
\end{aligned}$$

En general,

$$\begin{aligned}
(go\mathbf{f})(x) &= g\,[f(x)] \\
&= g\left[x^2 + 1\right] \\
&= 2(x^2 + 1) - 3 \\
&= 2x^2 - 1
\end{aligned}$$

Tipo de funciones

Funciones inversas ($\mathbf{f^{-1}}$) Sea *f* una función biyectiva del conjunto A en el conjunto B. La función inversa de *f* es la función que asigna a un elemento $b \in B$ el único elemento $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Así, $f^{-1}(b) = a$ cuando $f(a) = b$

Ejemplo 6. Sean $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ y
$B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$.
Sea $f : A \to B$ definida por
$f = \{(0, 5), (1, 7), (2, 8), (3, 9), (4, 7)\}$, así,
$f^{-1} = \{(5, 0), (7, 1), (8, 2), (9, 3), (7, 4)\}$

¿Es f^{-1} una función de B a A? La respuesta es **no**, por dos razones. La primera es que f^{-1} no es una función. Observe que tanto (7,1) como (7,4) están en $f^{-}1$. La segunda es que *dom* $f^{-1} = \{5, 7, 8, 9\} \neq B$.

Función identidad Sea el conjunto A. La función identidad en A es la función id_A cuyo dominio es A y para toda $a \in A$, $id_A(a) = a$. En otras palabras,

$$id_A = \{(a, a) \ : \ a \in A\}$$

Funciones biunívoca (inyectiva) Una función se llama biunívoca siempre que, cuando (x,b) y (y,b) $\in$ *f*, se debe cumplir que x=y.

Ejemplo 7 Determine si la función
$f(x) = x + 1$ es inyectiva.

Ejemplo 8 Sea $f : Z \to Z$ mediante $f(x) = x^2$. Determine si la función es inyectiva.

Funciones sobre Sea $f: A \to B$. Se dice que f es sobre B siempre y cuenado para toda $b \in B$ haya una $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Es decir, que $im\ f = B$

Ejemplo 8 Determine si la función $f(x) = x + 1$ es sobre.

Ejemplo 9 Sea $f: Z \to Z$ mediante $f(x) = x^2$. Determine si la función es sobre.

Funciones biyectiva Sea $f: A \to B$. Se llama f una biyección siempre y cuando sea biunívoca y sobre.

Ejemplo 10 Sea A el conjunto de los enteros pares, y seaB el conjunto de los enteros impares. La función $f : A \to B$ definida por $f(x) = x + 1$ es una biyección.

Notación diversa

Piso y techo Sea x un número real.

- El piso de x, representado por $\lfloor x \rfloor$, el el máximo entero n tal que $n \leq x$
- El techo de x, representado por $\lceil x \rceil$, es el mínimo entero n tal que $n \geq x$

Ejemplo 11
$\lfloor 3{,}2 \rfloor = 3$ $\lceil 3{,}2 \rceil = 4$
$\lfloor -3{,}2 \rfloor = -4$ $\lceil -3{,}2 \rceil = -3$
$\lfloor 5 \rfloor = 5$ $\lceil 5 \rceil = 5$

Ejemplo 12
Demuestre que $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor$

Ejemplo 13
Demuestre que $\lceil x + y \rceil = \lceil x \rceil + \lceil y \rceil$

O mayúscula Sean *f* y g dos funciones del conjunto de los enteros en el conjunto de los número reales. Se dice que $f(x)=O$(g(x)) si existen dos constantes C y k tales que
$| f(x) | \leq C \mid g(x) \mid$ siempre que $x > k$.

Ejemplo 14
Demuestre que $f(x) = x^2 + 2x + 1$ es $O(x^2)$.

Ejemplo 15
Demuestre que x^3 es $O(7x^2)$.

Función Ω Sean *f* y g dos funciones del conjunto de los enteros o reales al conjunto de los número reales. Se dice que $f(x) = \Omega(g(x))$ si existen dos constantes C y k tales que
$| f(x) | \geq C \mid g(x) \mid$ siempre que $x > k$.

Ejemplo 16
Demuestre que $f(x) = 8x^3 + 5x^2 + 7$ es $\Omega(x^3)$.

Función Θ Sean *f* y g dos funciones del conjunto de los enteros o de los reales en el conjunto de los número reales. Se dice que

$f(x) = \Theta(g(x))$ si $f(x) = O(g(x))$ y $f(x) = \Omega(g(x))$.

Ejemplo 17
Demuestre que $f(x) = 3x^2 + 8x.log(x)$ es $\Theta(x^2)$.

Clase práctica ... Hagamos ejercicios.

Taller Funciones

Bibliografía

1. David Gries and Fred Schneir. A logical aproach to discrete math. Springer, 1.994.

2. Rosen Kenneth. Matemática Discreta y sus aplicaciones. 5ta. Edición. McGrawHill, 2.004.

3. Edward Scheinerman. Matemáticas Discretas. Math, 2.001.