Sciences pour l'Ingénieur
Université Paris Nanterre

Mathématiques Générales 1

Analyse réelle, Licence 1

A. Lucquiaud

2023-2024

Version : 10/05/2024

UFR Systèmes Industriels et Techniques de Communication (SITEC)
Université Paris Nanterre, 50 rue de Sèvres, 92410 Ville-d'Avray

Sommaire

1 | Fonctions d'une variable réelle

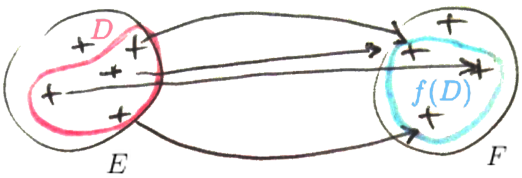
1 | Fonction, image, antécédent

A. Ensemble de définition

Soit E et F deux sous-ensembles quelconques de $\mathbb{R}$.

Définition Une fonction f est une relation de E vers F dans laquelle chaque élément, appelé antécédent, de l'ensemble de départ E possède au plus un élément, appelé image, dans l'ensemble d'arrivée F.

Remarque. Un élément de l'ensemble d'arrivée peut avoir plusieurs antécédents dans l'ensemble de départ.



Exemple Le nombre de frères et sœurs est une fonction de l'ensemble des étudiant·e·s vers les entiers naturels (ou les rationnels si on compte les demi-frères et sœurs...).

Définition L'ensemble de définition D d'une fonction $f : E \to F$ est l'ensemble des éléments de E qui ont exactement une image dans F par la fonction f.

Ne pas confondre ! f désigne une fonction, $f(x)$ désigne un nombre réel.

En pratique L'ensemble de définition des fonctions étudiées ce semestre sera $\mathbb{R}$ privé de toutes les valeurs "interdites" par l'expression de la fonction.

Exemple L'ensemble de définition de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est $\mathbb{R}^*$. Celui de $x \mapsto \sqrt{x}$ est $\mathbb{R}^+$.

Par la suite on assimilera f et sa restriction à D.

B. Composée, bijection

Définition Soit $f : D \to E$ et $g : E \to F$ deux fonctions. On appelle composée de g et f la fonction $g \circ f : D \to F$ définie par

$$\forall\, x \in D, \quad g \circ f(x) = g(f(x))$$

Remarque. Attention, en général $f \circ g \neq g \circ f$.

Exemple Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{x} \end{cases}$ et $g : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x - 1 \end{cases}$.

Pour tout $x \neq 1$, $f(g(x)) = \dfrac{1}{x-1}$ mais pour tout $x \neq 0$, $g(f(x)) = \dfrac{1}{x} - 1 = \dfrac{1-x}{x}$.

Définition On dit qu'une fonction $f : E \to F$ est bijective ssi tout élément $y \in F$ admet exactement un antécédent $x \in E$: $\forall\, y \in F,\ \exists!\, x \in E,\ f(x) = y$.

Il est alors possible de passer de y à x par ce qu'on appelle la fonction réciproque, que l'on note f^{-1}, telle que $f^{-1}: \begin{cases} F \to E \\ y \mapsto x = f^{-1}(y) \end{cases}$

Proposition 1 La fonction $f : E \to F$ est une bijection ssi il existe une fonction $g : F \to E$ telle que pour tout $x \in E$ et $y \in F$,

$$(g \circ f)(x) = x \quad \text{et} \quad (f \circ g)(y) = y$$

g est alors unique.

Proposition 2 Si $f : E \to F$ est une bijection alors $f^{-1} : F \to E$ est également une bijection et

$$\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$$

Exemple La fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^x$ de $\mathbb{R}$ dans $]0, +\infty[$ est bijective : $\forall\, x > 0$, $\mathrm{e}^{\ln(x)} = x$.
La réciproque de la fonction $\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est donc $x \mapsto \mathrm{e}^x$.
Trouver la réciproque de la fonction $g : x \mapsto 10^x$

2 | Propriétés usuelles

Définition On dit qu'une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est

- (a) paire ssi $\forall\, x \in D,\ -x \in D$ et $f(-x) = f(x)$
- (b) impaire ssi $\forall\, x \in D,\ -x \in D$ et $f(-x) = -f(x)$

Définition On dit qu'une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est

- (a) majorée ssi $\exists\, M \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in D,\ f(x) \leq M$
  ex : $x \mapsto -|x|$ sur $\mathbb{R}$
- (b) minorée ssi $\exists\, m \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in D,\ f(x) \geq m$
  ex : $t \mapsto \mathrm{e}^{-t/\tau}$ sur $\mathbb{R}$, avec $\tau \in \mathbb{R}$
- (c) bornée ssi elle est majorée et minorée.
  ex : $x \mapsto \sin(1/x^2)/4$ sur $]0, +\infty[$

Définition On dit qu'une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est périodique de période $T \in \mathbb{R}^*$ ssi

$$\forall\, x \in D, \quad x + T \in D \text{ et } f(x + T) = f(x)$$

Définition Soit I un intervalle (contre exemple : $x \mapsto 1/x$ sur $]\text{-}1, 0[\, \cup\,]0, 1[$). On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est

- (a) croissante ssi $\forall\, x, y \in I : x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$
  ex : $x \mapsto 5x + 11$ sur $\mathbb{R}$
- (b) décroissante ssi $\forall\, x, y \in I : x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$
  ex : $x \mapsto \ln(\cos(x))$ sur $[0, \pi/2[$
- (c) monotone ssi elle est croissante ou décroissante
- (d) strictement croissante ssi $\forall\, x, y \in I : x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$
- (e) strictement décroissante ssi $\forall\, x, y \in I : x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$
- (f) strictement monotone ssi elle est strictement (dé)croissante

Définition Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $x \in D$.
On dit que f possède une des propriétés P précédentes (D doit alors éventuellement être un intervalle) :

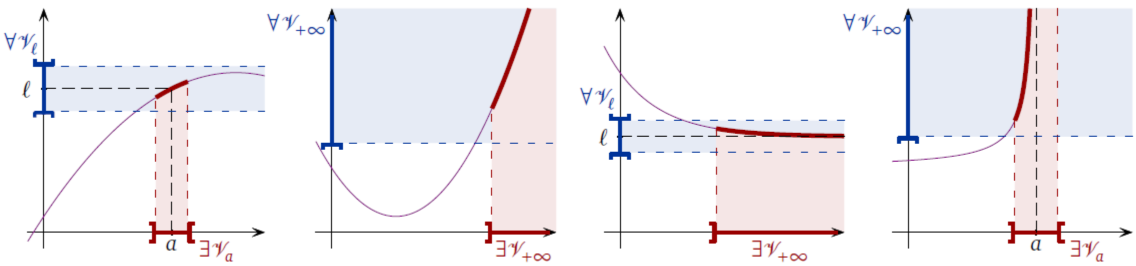
- au voisinage de x s'il existe deux réels $a < x < b$ tels que P soit vraie sur $]a, b[$.
- au voisinage de $+\infty$ s'il existe un réel A tel que P soit vraie sur $]A, +\infty[$.
- au voisinage de $-\infty$ s'il existe un réel A tel que P soit vraie sur $]-\infty, A[$.

3 | Limites et continuité

A. Limites en un point

Définition Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un point ou une borne de D et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que f admet ℓ pour limite en a si pour tout voisinage $\mathcal{V}_\ell$ de ℓ, il existe un voisinage de a sur lequel $f(x) \in \mathcal{V}_\ell$:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ 0 < |x - a| < \delta \ \Rightarrow\ 0 < |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$



Théorème 1

Si f possède une limite en a, alors cette limite est unique et notée $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Définition Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un point ou une borne de I et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.
On dit que f admet ℓ pour limite à gauche en a si pour tout voisinage $\mathcal{V}_\ell$ de ℓ, il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que $\forall\ x \in]a - \varepsilon, a[,\ f(x) \in \mathcal{V}_\ell$.
On dit que f admet ℓ pour limite à droite en a si pour tout voisinage $\mathcal{V}_\ell$ de ℓ, il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que $\forall\ x \in]a, a + \varepsilon[,\ f(x) \in \mathcal{V}_\ell$.

Théorème 2

Si f est définie en a et admet une limite à droite et à gauche de a alors

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \to a^-} f(x) = \ell = \lim_{x \to a^+} f(x) \ \textbf{\textit{et}}\ f(a) = \ell$$

Exemple Étudier la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} e^x & x \geq 0 \\ 1 - x & x < 0 \end{cases}$

B. Opérations sur les limites

Les opérations sur les fonctions se transposent sans problème aux limites finies.
Dans le cas de limites infinies, il existe des formes indéterminées pour lesquelles il sera nécessaire d'avoir des outils de comparaison des fonctions.

		$\lim g(x)$		
		ℓ'	$+\infty$	$-\infty$
$\lim f(x)$	ℓ	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$
	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?
	$-\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$

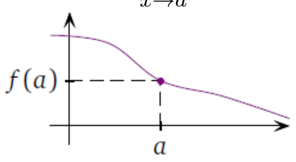
		$\lim g(x)$		
		ℓ'	$+\infty$	$-\infty$
$\lim f(x)$	$\ell>0$	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$
	$\ell<0$	$\ell\ell'$	$-\infty$	$+\infty$
	$\ell=0$	0	?	?
	$+\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$

Théorème 3 *Soit $f : D \to E$ et $g : E \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un point ou une borne de D, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ un point ou une borne de E et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.*
Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{x\to b} g(x) = \ell$ alors $\lim\limits_{x\to a}(g\circ f)(x) = \ell$.

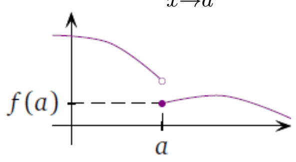
Exemple $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^{-2x}+1}{(\mathrm{e}^{-x}+1)^2}\right) = 0$

c. Continuité

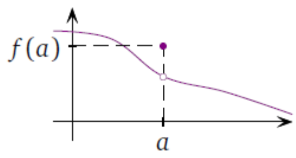
Définition Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $a \in D$. On dit que f est continue en a si f est définie en a et si $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe et est finie. Alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$



f est continue en a.



f n'est pas continue en a.



f n'est pas continue en a.

On dit que f est continue sur D si elle l'est en tout point de D.
On parle de continuité à droite (resp. à gauche) si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ (resp. $= \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$).

Théorème 4 *f est continue en a ssi f est continue à gauche et à droite en a.*

Théorème 5 [Prolongement par continuité]
Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et a un point du bord de D n'appartenant pas à D.
On dit que f est prolongeable par continuité en a si $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe et est finie. On définit alors $\tilde{f}$ égale à f sur D et telle que $\tilde{f}(a) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Remarque. On finit généralement par confondre les deux fonctions mais rigoureusement, n'ayant pas le même ensemble de définition, elles sont distinctes.

Exemple $x \mapsto x\ln x$ est prolongeable par continuité en 0.

À partir des opérations sur les limites que l'on a définies précédemment, on peut en déduire que les sommes et produits de fonctions continues sont continus, ainsi que les inverses de fonctions continues ne s'annulant pas, et les composées de fonctions continues sur les bons ensembles.

Théorème 6 [Théorème des valeurs intermédiaires]
Soit $a \le b$ deux réels et f une fonction continue sur $[a,b]$. Tout réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ possède au moins un antécédent par f dans $[a,b]$:

$$\forall\, y \in [f(b), f(a)] \text{ ou } [f(a), f(b)], \quad \exists\, x \in [a,b], \quad f(x) = y$$

4 | Comparaison de fonctions

Théorème 1

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I, soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un point ou une borne de I. On suppose que la fonction g ne s'annule pas sur $I \backslash \{a\}$. On dit que

(a) *f est **équivalente** à g au voisinage de a ($f \sim_a g$) ssi* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

(b) *f est **négligeable** devant g au voisinage de a ($f = o_a(g)$) ssi* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Exemple

Au voisinage de 0, $\sqrt{4x^2+9x} = o(x^{1/4})$, $\sqrt{4x^2+9x} \sim 3\sqrt{x}$.
Au voisinage de $+\infty$, $\sqrt{4x^2+9x} = o(x^2)$, $\sqrt{4x^2+9x} \sim 2x$.

Il est important de préciser la limite considérée. Le plus souvent, il s'agit de $+\infty$ ou en 0. On passe de l'une à l'autre en posant le changement de variable $y = 1/x$. Pour étudier une limite en $a \neq 0$, on pose le changement de variable $y = x - a$. Enfin, le changement de variable $y = -x$ permet de passer des limites à gauche aux limites à droite, des limites en $+\infty$ à celles en $-\infty$.

Proposition 1

— Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}^*$ alors $f \sim_a \ell$.

— **Être équivalent à 0 n'a aucun sens !**

— La produit de deux équivalents est un équivalent :

$$f_1 \sim_a g_1 \text{ et } f_2 \sim_a g_2 \quad \Rightarrow \quad f_1 f_2 \sim_a g_1 g_2$$

— Plus généralement, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$f \sim_a g \quad \Rightarrow \quad f^\alpha \sim_a g^\alpha$$

En revanche : $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$ n'implique pas $f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$.

Exemple Au voisinage de $+\infty$: $f(x) = x + \sin(x) \sim x$ et $g(x) = -x + \sin(x) \sim -x$ pourtant $f(x) + g(x) = 2\sin(x) \nsim x - x = 0$.

Pour les additions, on doit utiliser les petits o et le théorème suivant.

Théorème 2 $\quad f \sim_a g \quad \Leftrightarrow \quad f = g + o_a(h)$

Proposition 2

— Les petits o absorbent les constantes **multiplicatives** : soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^*$,

$$\lambda f = o_a(\mu g) \quad \Leftrightarrow \quad f = o_a(g)$$

— Pour toute fonction h définie au voisinage de a, si $f = o_a(g)$ alors $hf = o_a(hg)$. C'est vrai en particulier pour les polynômes, ainsi $x o_a(x) = o_a(x^2)$.

— La somme de deux petits o est un petit o :

$$f = o_a(h) \text{ et } g = o_a(h) \quad \Rightarrow \quad f + g = o_a(h)$$

— Le petit o d'un petit o est un petit o :

$$f = o_a(g) \text{ et } g = o_a(h) \quad \Rightarrow \quad f = o_a(h)$$

— Le produit de deux petits o est un petit o :

$$f_1 = o_a(g_1) \text{ et } f_2 = o_a(g_2) \quad \Rightarrow \quad f_1 f_2 = o_a(g_1 g_2)$$

Exemple Au voisinage de 0, $\mathrm{e}^x = 1 + x + o(x)$ et $\sin x = x + o(x)$. Alors :
$\mathrm{e}^x + \sin x = 1 + 2x + o(x) + o(x) = 1 + 2x + o(x)$
$\mathrm{e}^x \sin x = x + o(x) + x^2 + xo(x) + xo(x) + o(x) \cdot o(x) = x + o(x) + x^2 + 3o(x^2) = x + o(x)$

Exemple

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+x+1}}{2x+\sqrt{x}}$
Limite en 0 : $\sqrt{x^2+x+1} \to 1$ et $2x = o(\sqrt{x})$ donc $f(x) \sim x^{-1/2}$
Limite en $+\infty$: $x^2 + x + 1 \to \infty$
On factorise par le terme de plus haut degré : $x^2 + x + 1 = x^2\big(1 + 1/x + 1/x^2\big)$.
On démontre alors par calcul de la limite du quotient en $+\infty$ que $\sqrt{x^2+x+1} \sim x$.
De plus, $\sqrt{x} = o(x)$ donc $2x + \sqrt{x} \sim 2x$. Alors $f(x) \sim 1/2$.

Proposition 3 Soit a et b deux réels strictement positifs.

(a) $x^a = o(x^b)$ si $a > b$ au voisinage de 0

(b) $x^a = o(x^b)$ si $a < b$ au voisinage de $+\infty$

(c) $x^a = o(\mathrm{e}^{bx})$ au voisinage de $+\infty$

(d) $x^a = o(\mathrm{e}^{-bx})$ au voisinage de $-\infty$

(e) $\ln(x)^a = o(x^b)$ au voisinage de $+\infty$

(f) $|\ln(x)|^a = o(x^{-b})$ au voisinage de 0^+

2 | Dérivation

1 | Taux d'accroissement

Définition Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $x \in D$. Le taux de variation de f en x est la fonction définie au voisinage de 0 par

$$\tau_x : y \mapsto \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

f est dérivable en x de dérivée $f'(x) = \ell$ ssi $\lim_{y \to x} \tau_x(y) = \ell$ existe et est finie.
On exprime souvent le taux d'accroissement comme une fonction de l'écart $\varepsilon = y - x$. On a alors de façon équivalente

$$f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x + \varepsilon) - f(x)}{\varepsilon}$$

On dit enfin qu'une fonction est dérivable sur un intervalle I si elle l'est en tout point de l'intervalle.

Exemple (à démontrer par petit o) $f_3 : x \mapsto x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $x \mapsto 3x^2$, et plus généralement $f_n'(x) = nx^{n-1}$.

Exemple Calculer la dérivée de $x \mapsto \mathrm{e}^x$ à partir du taux d'accroissement (factoriser par e^x).

Théorème 1 *f est dérivable en a ssi f est dérivable à gauche et à droite en a.*

Exemple Étudier la dérivabilité en 0 et 1 de la fonction f définie sur $]-\infty, 1[\to \mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2 - x^3}$.

Proposition 1 [Opérations]

Soit u et v deux fonctions définies sur un intervalle I et dérivables en $x \in I$. Alors

(a) $u + v$ est dérivable en x de dérivée $u'(x) + v'(x)$

(b) $u \times v$ est dérivable en x de dérivée $u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

(c) Si u est définie sur un intervalle ouvert contenant $v(x)$ alors $u \circ v$ est dérivable en x de dérivée $v'(x) \times u'(v(x))$

(d) $\frac{u}{v}$ est dérivable en x de dérivée $\frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$

Exemple La fonction $x \mapsto 1 + x$ est définie et dérivable de $]-1, +\infty[$ à valeurs dans $]0, +\infty[$, ln est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$.
Par composée, $f : x \mapsto \ln(1+x)$ est dérivable sur $]-1, +\infty[$ de dérivée $f'(x) = 1 \times \frac{1}{1+x}$

Proposition 2 [Monotonie] Si la dérivée d'une fonction f dérivable sur un intervalle I possède un signe constant, alors f est monotone. Spécifiquement, si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$, f est croissante, sinon elle est décroissante. Si l'inégalité est stricte, alors la monotonie est également stricte.

Proposition 3 [Réciproque] Soit f une fonction bijective d'un intervalle ouvert I dans un intervalle ouvert J. Soit $x \in I$ et $y = f(x) \in J$. Si f est dérivable en x de dérivée *non nulle* alors la fonction réciproque f^{-1} est dérivable en y de dérivée

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Exemple $g : x \mapsto \sqrt{x}$ est la réciproque de $f : x \mapsto x^2$, bijective de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$. On sait que $f'(x) = 2x$ s'annule en 0, on a donc $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ pour tout $x > 0$.

Définition Si une fonction f est dérivable sur I, sa dérivée f' peut elle-même être dérivable. On appelle alors la dérivée de f' la *dérivée seconde*, notée f'' ou $f^{(2)}$, de f. On peut répéter le processus pour calculer la dérivée k-ième, notée $f^{(k)}$, de toute fonction k fois dérivable. La dérivée d'ordre 0 est alors la fonction elle-même.

Définition Une fonction définie sur un intervalle I est dite de classe $\mathcal{C}^k$ si elle est k fois dérivable et que sa dérivée k-ième est continue sur I. Une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ admet des dérivées successives de tout ordre, c'est le cas de la majorité des fonctions en physique.

Exemple $f_n : x \mapsto x^n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$
En effet, $\forall\ k \in [\![1, n]\!]$, $f^{(k)}(x) = \dfrac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}$ et $\forall\ k > n$, $f^{(k)}(x) = 0$.

Théorème 2 [Formule de Leibniz] *Soit f, g deux fonctions n fois dérivables sur I. Le produit fg est n fois dérivable sur I et*

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

2 | Optimisation

Définition Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $a \in D$. Si $f(x) - f(a)$ garde un signe constant :

(a) sur D alors f présente un extremum global en a.

(b) sur un intervalle $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ alors f présente un extremum local en a.

Si ce signe est négatif, il s'agit d'un maximum, sinon c'est un minimum.

Définition On appelle point critique, ou point stationnaire, de $f : D \to \mathbb{R}$ tout point $a \in D$ tel que $f'(a) = 0$. Ces points sont des candidats pour la recherche d'extremums.

Attention Sur un segment $[a, b]$ (ou une demi-droite), un extremum peut être atteint au bord sans qu'il s'agisse d'un point critique.

Théorème 1 [Caractérisation des points critiques]
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. On définit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^{(p)}(a)$ soit la première dérivée de f non-nulle en a. Alors

(a) si p est impair alors f n'admet pas d'extremum en a,

(b) si p est pair et $f^{(p)}(a) < 0$ alors f admet un maximum local en a,

(c) si p est pair et $f^{(p)}(a) > 0$ alors f admet un minimum local en a.

En pratique, le signe de $f''(a)$ permet souvent de conclure. Contre-exemple : $x \mapsto x^4$.

3 | Analyse asymptotique

A. Tangente, asymptote verticale

Proposition 1 Si f est dérivable en a alors $f(x+a) = f(a) + xf'(a) + o_a(x)$, on parle de *développement limité d'ordre 1 en 0*. Ceci implique la continuité de f en a.
La courbe de la fonction f admet alors une tangente en a d'équation $T_a : x \mapsto f(a) + (x-a)f'(a)$.
Si le taux de variation d'une fonction tend vers $\pm\infty$ au voisinage d'un point a de son ensemble de définition, on dit que la courbe de la fonction admet une tangente verticale d'équation $x = a$. Si a est une borne non atteinte de l'ensemble de définition, on parle d'asymptote verticale.

Théorème 1 *Au voisinage de* 0, $\sin(x) \sim \mathrm{e}^x - 1 \sim \ln(1+x) \sim x$

B. Développements limités

Proposition 2 Au voisinage de 0, $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n + o(x^n)$

Démonstration : montrer que $(1-x)G_n(x) = 1 - x^{n+1}$ puis que $\dfrac{x^{n+1}}{1-x} = o(x^n)$

Proposition 3 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} ... + \dfrac{x^n}{n!} + o(x^n)$

Théorème 2 [Théorème de Taylor-Young]
Soit $n \in \mathbb{N}$, $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction* $n-1$ *fois dérivable sur* I *et dont la dérivée* n*-ième en* $0 \in I$ *existe. Alors au voisinage de* 0, f *admet un développement limité d'ordre* n *de la forme :*

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + ... + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + o_0(x^n)$$

Remarque. Au voisinage de a, $f^{(k)}(0)$ et x^k deviennent $f^{(k)}(a)$ et $(x-a)^k$.

Proposition 4 Soit $f(x) = t_n(x) + o_a(x^n)$ et $g(x) = p_n(x) + o_a(x^n)$.
Au voisinage de a,

(a) $f + g$ admet un DL_n constitué des termes de $t_n + p_n$.

(b) $f \times g$ admet un DL_n constitué de termes de $t_n \times p_n$ d'ordre $\leq n$.

(c) $f \circ g$ admet un DL_n constitué de termes de $t_n \circ p_n$ d'ordre $\leq n$.

Exemple Au voisinage de 0, $f(x) = 1 - x - x^2 + o(x^2)$ et $g(x) = 2x + x^2 + o(x^2)$. Alors $f(x) + g(x) = 1 + x + o(x^2)$, $f(x) \times g(x) = 2x - x^2 + o(x^2)$, $f \circ g(x) = 1 - 2x - 5x^2 + o(x^2)$

Proposition 5 Soit $f(x) = t_n(x) + o_a(x^n)$. Au voisinage de 0, on peut calculer le DL de la dérivée de f et de ses primitives en dérivant ou intégrant son DL.

(a) $f'(x) = t_n'(x) + o(x^{n-1})$

(b) $F(x) = F(a) + T_n(x) + o(x^{n+1})$

Exemple $f'(x) = -1 - 2x + o(x)$ et $F(x) = F(0) + x - x^2/2 - x^3/3 + o(x^3)$.

À partir de la série géométrique,on peut alors construire les développements suivants :

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - ... - \frac{x^n}{n} + o(x^n) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{(-x)^k}{k} + o(x^n)$$

Tandis qu'à partir de l'exponentielle et des formules d'Euler :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

En utilisant le théorème de Taylor-Young, on a enfin :

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2!} + ... + \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)\frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

à connaître pour $\alpha = 1/2$ (racine carrée) en particulier.

C. Développements asymptotiques

On dispose à présent d'un outil d'approximation de fonctions par des polynômes au voisinage d'un point de leur intervalle de définition.
Il existe cependant d'autres échelles de comparaison, par exemple, au voisinage de 0^+ :

Exemple $\sqrt{x+x^2} = \sqrt{x}\sqrt{1+x} = \sqrt{x}\left(1 + \frac{x}{2} + o(x)\right) = x^{1/2} + \frac{x^{3/2}}{2} + o(x^{3/2})$

ou au voisinage de $\pi/2^-$ pour x, 0^+ pour y,

$$\begin{aligned}\tan(x) = \tan(\pi/2 - y) &= \frac{\sin(\pi/2-y)}{\cos(\pi/2-y)} = \frac{\cos(y)}{\sin(y)} \\ &= \frac{1 + \frac{y^2}{2} + o(y^2)}{y + \frac{y^3}{6} + o(y^3)} = \frac{1}{y}\left(1 + \frac{y^2}{2} + o(y^2)\right)\left(1 - \frac{y^2}{6} + o(y^2)\right) = \frac{1}{y} - \frac{y}{3} + o(y)\end{aligned}$$

On peut également approximer une fonction au voisinage d'une borne infinie, en posant le changement de variable $t = 1/x$.

Exemple Au voisinage de $+\infty$, $\frac{1+4x^2}{(1+2x)(2-x)} = -2 - \frac{3}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$

Proposition 6 Si une fonction définie sur un intervalle de forme $]A, +\infty[$ ou $]-\infty, B[$ admet au voisinage de $\pm\infty$ un développement asymptotique de la forme

$$f(x) = \ell + \frac{\delta}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Si $\delta = 0$, on dit que la fonction admet une asympote horizontale d'équation $y = \ell$, sinon on parle d'asymptote oblique d'équation $t \mapsto \ell + \delta t$.

4 | Équations différentielles

Une équation différentielle linéaire est une équation dont l'inconnue y est une fonction, de la forme

$$a_n(t)y^{(n)}(t) + ... + a_2(t)y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = f(t)$$

On y trouve cette fonction et ses dérivées. Le degré de la plus haute dérivée présente est le degré de l'équation différentielle.

Chute libre

La vitesse v et la position z d'un corps en chute libre (soumis uniquement à son poids) sont solutions des équations différentielles linéaires

$$\dot{v}(t) = -g \qquad \ddot{z}(t) = -g$$

On peut montrer que toutes les fonctions de la forme $v(t) = -gt + v_0$ sont solutions de la première équation, ce sont les seules. Pour trouver $v_0 \in \mathbb{R}$, il faut connaître la vitesse à un instant donné (ordre 1 : une seule condition initiale).
On peut montrer que toutes les fonctions de la forme $z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + z_0$ sont solutions de la seconde équation, ce sont les seules. Pour trouver $z_0, v_0 \in \mathbb{R}$, il faut connaître la position et la vitesse à un instant donné (ordre 2 : deux conditions initiales).

Radioactivité

Un ensemble de particules A subit la désintégration radioactive $A \xrightarrow{\alpha} B$. Leur nombre à l'instant t est donné par l'équation différentielle

$$A'(t) = -\alpha A(t)$$

On peut montrer que toutes les fonctions de la forme $A(t) = A_0 \mathrm{e}^{-\alpha t}$ sont solutions de cette équation, ce sont les seules. Pour trouver A_0, il suffit de connaître le nombre de particules à un instant donné.

Électrocinétique

La tension aux bornes d'un condensateur dans un circuit RLC en série avec un générateur délivrant une tension E vérifie l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u(t)}{LC} = \frac{E}{LC}$$

Selon les valeurs de R, L et C, il existe 3 régimes de solutions à cette équation différentielle. On va supposer ici que la résistance est très faible ($R \to 0$). On peut alors montrer que toutes les fonctions de la forme $u(t) = U_0 \cos\left(t/\sqrt{LC} + \varphi\right)$ sont solutions de cette équation. Pour trouver U_0 et φ, il suffit de connaître la tension à un instant donné.

3 | Intégration

1 | Intégration sur un intervalle

A. Primitives

Définition Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que $F : I \to \mathbb{R}$ est une primitive de f sur I ssi F est dérivable sur I de dérivée f.

Proposition 1

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction possédant une primitive F sur I. Alors l'ensemble des primitives de f sur I sont les fonctions de la forme $F + \lambda$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$. On définira donc toujours une primitive à une constante près, et on ne parlera pas de “la” primitive d'une fonction.

Remarque : la recherche de primitives est en quelque sorte l'opération inverse du calcul de la dérivée. En revanche, là où on sait calculer la dérivée d'un produit, d'un quotient ou d'une composée de fonctions usuelles, il n'est à priori pas évident de trouver une primitive de ce genre de fonctions. Il faut malgré tout savoir repérer certains exemples récurrents, de la forme $t \mapsto v'(t).u'(v(t))$, dont on connaît une primitive $t \mapsto u(v(t))$, en particulier :

Fonction	$u'u^\alpha$, $\alpha \neq -1$	$u'\mathrm{e}^u$	$\dfrac{u'}{u}$	$u'\cos(u)$	$u'\sin(u)$	$\dfrac{u'}{1+u^2}$
Primitive	$\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$\mathrm{e}^u + C$	$\ln(\lvert u\rvert) + C$	$\sin(u) + C$	$-\cos(u) + C$	$\arctan(u) + C$

Méthode (*Fractions rationnelles*) Certaines colonnes du tableau permettent de calculer des primitives de fractions rationnelles de la forme $f : x \mapsto \dfrac{\alpha x + \beta}{ax^2 + bx + c}$.

(a) si $\alpha x + \beta = 2ax + b$ alors on a directement $F : x \mapsto \ln(|ax^2 + bx + c|)$.

(b) sinon, on étudie le dénominateur en calculant son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$

- si $\Delta > 0$, alors il possède deux racines réelles x_1 et x_2 : il existe A, B tels que
$$f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{a(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2}$$
on se ramène alors à l'avant-dernière colonne.
- si $\Delta = 0$ alors il possède une racine double x_0 : il existe C tel que
$$f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{a(x - x_0)^2} = \frac{\alpha(x - 2x_0)}{a(x - x_0)^2} + \frac{C}{(x - x_0)^2}$$
que l'on traite à partir des primitives de u'/u et u'/u^2.
- si $\Delta < 0$ alors il ne possède pas de racines réelles. On doit alors faire apparaître une dérivée de arctan à l'aide du changement de variable $u = x + b/2a$.

B. Intégration sur un segment

Définition Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. On dit que f est continue par morceaux sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision adaptée de $[a,b]$ de la forme $]a,x_1[$, $]x_1,x_2[$, ..., $]x_{n-1},b[$, avec $n \in \mathbb{N}$ telle que f soit continue sur tout intervalle $]x_k,x_{k+1}[$ et prolongeable par continuité en x_k et x_{k+1} (avec $x_0 = a$ et $x_n = b$).

Théorème 1 [Intégration au sens de Riemann]

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$. Si pour $n \in \mathbb{N}$, on choisit $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$, alors on définit l'intégrale de f entre a et b par la limite :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\Big(a + k\frac{b-a}{n}\Big) = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\Big(a + k\frac{b-a}{n}\Big)$$

Proposition 2 [Propriétés des bornes]

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$. Alors

(a) $\displaystyle\int_a^a f(t)\mathrm{d}t = 0$

(b) $\displaystyle\int_b^a f(t)\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$

(c) **Relation de Chasles :** $\forall\, c \in [a,b]$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t$

Proposition 3 [Linéarité]

Soit f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$. $\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$$

Proposition 4 Soit f une fonction continue par morceaux sur $[-a,a]$. Alors

(a) si f est paire alors $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)\mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\mathrm{d}t$

(b) si f est impaire alors $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)\mathrm{d}t = 0$

C. Lien avec les primitives

Théorème 2 [Théorème fondamental de l'analyse]

Soit f une fonction continue sur I et $a,b \in I$.

(a) La fonction $F_a : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ est une primitive de f sur I.
C'est précisément la primitive qui s'annule en a.

(b) Soit F une primitive de f. Alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \Big[F(t)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$.

Théorème 3 [Intégration par parties]

Soit u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$. Alors

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,dt = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,dt$$

Exemple $x \mapsto x\ln(x) - x$ est une primitive de ln.

Théorème 4 [Changement de variable]

Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ à valeurs dans I et f une fonction continue par morceaux sur I. Alors

$$\int_a^b \varphi'(t) f(\varphi(t))\, dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(s)\, ds$$

Exemple Trouver une primitive de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\cosh(t)}$ en posant le changement de variable $u = \mathrm{e}^t$.

Exemple

Intégrer $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ sur $[-1,1]$ (demi disque positif) en posant le changement de variable $x = \cos(t)$ et en déduire l'aire d'un disque de rayon 1.

D. Intégrales impropres

Définition Soit $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ et f une fonction continue par morceaux sur $[a,b[$. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est convergente si $\lim\limits_{x\to b} \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ existe et est finie. On l'appelle intégrale impropre de f sur $[a,b[$.

Exemple

(a) (Intégrales de Riemann) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge ssi $\alpha < 1$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t = -1$

(c) $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{d}t$ converge ssi $\alpha > 0$

Proposition 5 Toutes les propriétés listées dans la partie B sont vérifiées sous réserve d'existence de la limite de l'intégrale lorsque $x \to b$.

Théorème 5 [Comparaison des intégrandes]

*Soit f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b[$ et **de même signe** au voisinage de b.*

(a) Si $f \leq g$, $f = o_b(g)$, $f = O_b(g)$ alors la convergence de $\int_a^b g$ implique la convergence de $\int_a^b f$ tandis que la divergence de $\int_a^b f$ implique celle de $\int_a^b g$.

(b) Si $f \sim_b g$ alors $\int_a^b f$ converge ssi $\int_a^b g$ converge.

Exemple

Montrer que $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ converge en utilisant le fait que $\mathrm{e}^{-t^2} = o_\infty(x^{-2})$. On calculera sa valeur dans la partie suivante.

2 | Intégrales multiples

Théorème 1 [Intégration sur un rectangle – variables séparables]

Soit φ et ψ des fonctions continues sur $[x_1, x_2]$ et $[y_1, y_2]$, respectivement. On pose, *pour tout* (x, y) *appartenant au rectangle* $\mathcal{D} = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$, $f(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$. *Alors*

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x)\,dx \int_{y_1}^{y_2} \psi(y)\,dy$$

Théorème 2 [Intégration sur un domaine simple]

Soit y_1 *et* y_2 *des fonctions continues sur* $[x_1, x_2]$ *telles que* $y_2 - y_1$ *une fonction positive sur ce segment. On définit* $\mathcal{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1 \leq x \leq x_2,\ y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\right\}$. *Soit* f *une fonction définie sur* $\mathcal{D}$. *Si pour tout* $x \in [x_1, x_2]$, $y \mapsto f(x, y)$ *est une fonction continue par morceaux sur* $[y_1(x), y_2(x)]$ *alors*

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{x_1}^{x_2} \Big(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy\Big)\,dx$$

On peut donner le même théorème dans l'autre sens, à condition que $x \mapsto f(x, y)$ soit continue par morceaux sur le bon intervalle.

Proposition 1 [Calcul d'aire]

L'aire $\mathcal{A}$ d'un domaine $\mathcal{D}$ du plan est donnée par $\mathcal{A} = \iint_{\mathcal{D}} 1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Exemple

$\mathcal{D} = \left\{(x, y) \,\middle|\, x \in [-1, 1],\ -\sqrt{1 - x^2} \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\right\}$: $\iint_{\mathcal{D}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\mathrm{d}x = \pi$

Proposition 2 [Coordonnées polaires]

On se place dans les conditions d'un des théorèmes précédents.

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Delta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

où $\Delta = \left\{(r, \theta) \;\middle|\; (r\cos\theta, r\sin\theta) \in \mathcal{D}\right\}$.

Exemple

$\mathcal{D} = \left\{(x, y) \,\middle|\, x \in [-1, 1],\ -\sqrt{1 - x^2} \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\right\} = \left\{(r, \theta) \,\middle|\, r \in [0, 1],\ \theta \in [0, 2\pi]\right\}$
donc $\iint_{\mathcal{D}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta r\mathrm{d}r = 2\pi\Big[\frac{r^2}{2}\Big]_0^1 = \pi$.

Proposition 3 [Intégrales triples]

Les théorèmes précédents s'adaptent naturellement pour des domaines de l'espace, on a notamment que le volume d'un tel domaine D' est $\mathcal{V} = \iiint_{D'} 1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ et, dans d'autres systèmes de coordonnées :

$$\begin{aligned}\iiint_{\mathcal{D}'} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \iiint_{\Delta_{\text{cyl}}} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z \\ &= \iiint_{\Delta_{\text{sph}}} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta) r^2 \sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\end{aligned}$$

où $\Delta_{\text{cyl}} = \left\{(r, \theta, z) \;\middle|\; (r\cos\theta, r\sin\theta, z) \in \mathcal{D}'\right\}$
et $\Delta_{\text{sph}} = \left\{(r, \theta, \varphi) \;\middle|\; (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta) \in \mathcal{D}'\right\}$.

4 | Introduction à l'analyse vectorielle

Ce TD-cours est consacré à l'étude des fonctions de m variables réelles dont l'image est un objet à n dimensions. Plus précisément ici on traitera les cas des champs de l'espace, lorsque $m = 2$ ou 3. Lorsque $m = 1$ on appelle ces fonctions des courbes paramétrées, et elles seront étudiées en MG2.

Exemple La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(t) = \big(r\cos(t), r\sin(t)\big)$ est un paramétrage du cercle de centre O et de rayon r.

Lorsque $n = 1$, on parle de *champ scalaire*, de la forme $(x, y) \mapsto f(x, y)$ ou $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$, où $f(\cdot)$ est un scalaire. Ce champ représente une propriété de l'espace, un nombre que l'on peut définir en chaque point (température, pression, concentration et densité, fonction d'onde en mécanique quantique...).
Lorsque $n = 2$ ou 3, on parle de *champ vectoriel*, de la forme $(x, y) \mapsto \vec{f}(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y))$ ou $(x, y, z) \mapsto \vec{f}(x, y, z) = (f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z))$ où $f_\cdot(\cdot)$ est un scalaire. Ce champ représente également une propriété de l'espace, mais directionnelle et orientée (vitesse et accélération d'un fluide, intensité d'une force : gravitation et électromagnétisme...).

On peut enfin noter qu'un champ, scalaire ou vectoriel, peut varier au cours du temps, il serait alors de la forme $(x, t) \mapsto T(x, t)$ ou $(r, \theta, t) \mapsto \vec{v}(r, \theta, t)$. On peut ainsi penser à la température d'une barre métallique dont on observerait l'évolution au cours du temps, ou à la vitesse d'une satellite atteignant l'orbite terrestre.

1 | Champs scalaires

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ un champ scalaire (on peut faire la même analyse à trois dimensions).

Définition Par analogie avec la dérivée d'une fonction en un point $a \in \mathbb{R}$, on définit les dérivées partielles d'un champ en $\boldsymbol{a} = (x_a, y_a)$ par

$$\partial_x f(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{a}) = \lim_{\mathrm{d}x \to 0} \frac{f(x_a + \mathrm{d}x, y_a) - f(x_a, y_a)}{\mathrm{d}x}$$
$$\partial_y f(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{a}) = \lim_{\mathrm{d}y \to 0} \frac{f(x_a, y_a + \mathrm{d}y) - f(x_a, y_a)}{\mathrm{d}y}$$

Définition On appelle gradient d'un champ scalaire le vecteur dont les coordonnées sont ces dérivées partielles, que l'on note

$$\vec{\nabla} f(\boldsymbol{a}) = \big(\partial_x f(\boldsymbol{a}), \partial_y f(\boldsymbol{a})\big)$$

Il s'agit de la généralisation de la dérivée.

Définition La différentielle de f en $\boldsymbol{a}$ est en quelque sorte la généralisation du développement limité à l'ordre 1 :

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{a}) = \partial_x f(\boldsymbol{a})\mathrm{d}x + \partial_y f(\boldsymbol{a})\mathrm{d}y$$

On peut le voir comme le produit scalaire du gradient par le vecteur déplacement élémentaire $\mathrm{d}\vec{\ell} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$.

Cela ressemble (aux valeurs absolues près) à la formule de propagation des incertitudes. Par exemple, si on connaît la valeur d'une résistance R avec une précision ΔR et que l'on mesure la tension U à ses bornes avec un voltmètre d'erreur ΔU, on a pour l'intensité $I = f(U, R)$

$$\Delta I = R\Delta U + \Big| -\frac{U}{R^2}\Big|\Delta R = I\frac{\Delta U}{U} + I\frac{\Delta R}{R}$$

Proposition 1 En coordonnées polaires, le déplacement élémentaire est $\mathrm{d}\vec{\ell} = (\mathrm{d}r, r\mathrm{d}\theta)$ mais la différentielle s'écrit toujours $\mathrm{d}f(\boldsymbol{a}) = \partial_r f(\boldsymbol{a})\mathrm{d}r + \partial_\theta f(\boldsymbol{a})\mathrm{d}\theta$. Le gradient devient donc

$$\vec{\nabla} f(r_a, \theta_a) = \Big(\partial_r f(r_a, \theta_a), \frac{1}{r}\partial_\theta f(r_a, \theta_a)\Big)$$

Ce résultat est généralisable à trois dimensions pour les coordonnées cylindriques et sphériques.

Proposition 2 On peut, comme pour les fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définir des dérivées partielles seconde (et d'ordre plus élevé) en posant simplement

$$\partial_x^2 f(\boldsymbol{a}) = \partial_x(\partial_x f(\boldsymbol{a})) \quad \text{et} \quad \partial_y^2 f(\boldsymbol{a}) = \partial_y(\partial_y f(\boldsymbol{a}))$$

On peut aussi calculer les dérivées croisées

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\boldsymbol{a}) = \partial_x(\partial_y f(\boldsymbol{a})) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\boldsymbol{a}) = \partial_y(\partial_x f(\boldsymbol{a}))$$

qui, si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur son ensemble de définition, sont égales (c'est le théorème de Schwarz).

Définition Le laplacien scalaire de f est le scalaire défini par

$$\Delta f(\boldsymbol{a}) = \partial_x^2 f(\boldsymbol{a}) + \partial_y^2 f(\boldsymbol{a})$$

Exercice 1 Déterminer les coordonnées du gradient des champs scalaires :

(a) $f(x, y, z) = xy^2 - yz^2$

(b) $f(x, y, z) = xyz \sin(xy)$

Remarque : En coordonnées cylindriques,

- Gradient : $\vec{\nabla}\varphi = \Big(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}\Big) = \Big(\frac{\partial \varphi}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}\Big)$
- Laplacien : $\Delta\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$

2 | Champs vectoriels

A. Divergence et rotationnel

Soit $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un champ vectoriel (on peut faire la même analyse à deux dimensions). Ce champ peut être étudié comme un ensemble de trois champs scalaires f_x, f_y et f_z pour lesquels les définitions et propriétés énoncées dans la partie précédentes s'appliquent.

Définition La divergence caractérise le flux du champ $\vec{f}$ à travers une surface fermée par unité de volume contenu dans cette surface. En coordonnées cartésiennes, on a

$$\operatorname{div}(\vec{f}) = \partial_x f_x + \partial_y f_y + \partial_z f_z$$

Définition Le rotationnel caractérise la circulation du champ $\vec{f}$ le long d'un contour fermé par unité de surface encadrée par ce contour. En coordonnées cartésiennes, on a

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{f}) = \left(\partial_y f_z - \partial_z f_y \ , \ \partial_z f_x - \partial_x f_z \ , \ \partial_x f_y - \partial_y f_x\right)$$

En deux dimensions, le rotationnel n'est techniquement pas défini. Cependant, on peut calculer sa troisième coordonnée sans problème, c'est elle qui servira d'équivalent.

Proposition 1 Pour se souvenir de ces deux définitions *en coordonnées cartésiennes uniquement*, il peut être utile (mais périlleux) d'utiliser l'opérateur $\vec{\nabla}$, défini comme $\left(\partial_x, \partial_y, \partial_z\right)$. On a ainsi

$$\operatorname{div}(\vec{f}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{f} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{f}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{f}$$

Exercice 2 Déterminer la divergence des champs vectoriels :

(a) $\vec{f}(x, y, z) = (2x^2y, 2xy^2, xy)$

(b) $\vec{f}(x, y, z) = (\sin(xy), 0, \cos(xz))$

(c) $\vec{f}(x, y, z) = (x(2y + z), y(x + z), z(x - 2y))$

Exercice 3 Soit $\vec{S} = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$ et $\vec{\Omega}(x, y, z) = (-\alpha y, \alpha x, 0)$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Représenter ces deux champs vectoriels pour $\alpha > 0$ puis $\alpha < 0$.

(b) Calculer la divergence et le rotationnel.

(c) En déduire une interprétation géométrique de ces deux objets.

B. Potentiels

Proposition 2 Un champ vectoriel $\vec{f}$ de divergence nul est dit à flux conservatif (pas de perte, pas de création). Dans ce cas, il existe un autre champ vectoriel $\vec{\Omega}$, que l'on appelle son potentiel vecteur, tel que

$$\vec{f} = \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{\Omega})$$

Inversement, pour tout champ vectoriel $\vec{\Omega}$, $\operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{\Omega})) = 0$.

Proposition 3 Un champ vectoriel $\vec{f}$ de rotationnel nul est dit irrotationnel, ou à circulation conservative. Dans ce cas, il existe un champ scalaire φ, que l'on appelle son potentiel scalaire, tel que

$$\vec{f} = \vec{\nabla}\varphi$$

Inversement, pour tout champ scalaire φ, $\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{\nabla}\varphi) = 0$.

5 | Équations différentielles ordinaires

1 | Généralités

Définition Une équation différentielle **ordinaire** est une équation de la forme

$$F\Big(t, y(t), y'(t), ..., y^{(n)}(t)\Big) = 0 \qquad (*)$$

où F est une fonction de $n+2$ variables. L'ordre de cette équation différentielle est celui de la plus haute dérivée y apparaissant, ici n. La recherche des solutions s'effectue sur un intervalle I (si.

Exemple $y'(t) = y(t) + \mathrm{e}^{y(t)}$ est une équation différentielle ordinaire d'inconnue y.

Exemple

Les forces s'appliquant sur un pendule M de masse m dans le référentiel terrestre supposé galiléen sont son poids $\vec{P} = mg\vec{u_z}$ et la tension du fil $\vec{T} = T\vec{u_r}$. La projection du poids selon $\vec{u_\theta}$ est $\vec{P} \cdot \vec{u_\theta} = -mg\sin\theta$ (attention ici $\vec{u}_z$ n'est pas le troisième vecteur de la base cylindrique !). La composante orthoradiale de l'accéleration est $\vec{a} \cdot \vec{u_\theta} = L\ddot{\theta}\vec{u_\theta}$, où L est la longueur du fil. On a alors l'équation différentielle

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{g}{L}\sin\theta(t) = 0$$

Définition Une équation différentielle **linéaire** (EDL) est de la forme

$$a_n(t)y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + ... + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = f(t) \qquad (E)$$

La fonction F est ici linéaire en y et en ses dérivées : $a_0, ..., a_n$ et f sont des fonctions de t.

On lui associe une autre équation (E_0), appelée EDL **homogène** : son second membre est nul.

$$a_n(t)y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + ... + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = 0 \qquad (E_0)$$

Théorème 1 *Toute solution de (E) peut être décomposée en une somme d'une solution homogène et d'une solution particulière.*

Proposition 1 [Linéarité] Si y_1 et y_2 sont des solutions de (E) alors $y_1 + y_2$ est une solution de (E).

Proposition 2 [Principe de superposition] Soit (E_0) une EDL homogène. Si y_1 est une solution de l'EDL associée (E_1) de second membre f_1 et y_2 est une solution de l'EDL associée (E_2) de second membre f_2, alors $y_1 + y_2$ est solution de l'EDL associée (E) de second membre $f_1 + f_2$.

Théorème 2 [Théorème de Cauchy]

Soit $a_0, ..., a_{n-1}$ et f des fonctions continues sur un intervalle I. Soit $t_0 \in I$. Le problème de Cauchy associé à l'ensemble de conditions initiales $\{t_0, y_0, y_1, ...y_{n-1}\}$, avec

$y_0, ..., y_{n-1} \in \mathbb{R}$ est la recherche des solutions de

$$\begin{cases} y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + ... + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = f(t) \\ \forall\, i \in [\![0, n-1]\!], \quad y^{(i)}(t_0) = y_i \end{cases} \tag{E}$$

Ce problème admet une unique solution sur I.

2 | Équations différentielles linéaires d'ordre 1

Méthode (*Solutions de l'équation homogène*)

Soit a une fonction continue sur un intervalle I. Les solutions de

$$y'(t) + a(t)y(t) = 0 \tag{E_0^1}$$

sur l'intervalle I sont les fonctions de la forme $\boxed{y_0(t) = \lambda \mathrm{e}^{-A(t)}}$ avec A une primitive de a sur I, c'est à dire une fonction dérivable sur I de dérivée a, et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Remarque. En physique, on le "démontre" parfois par séparation des variables :

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + a(t)y(t) = 0 \Leftrightarrow \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int a(t)\mathrm{d}t \Leftrightarrow \ln(y(t)) = -A(t) + C \Leftrightarrow y(t) = \lambda \mathrm{e}^{-A(t)}$$

avec $\lambda = \mathrm{e}^C$.

Méthode (*Solutions particulières lorsque $a = cste$*)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, $a \in \mathbb{R}$.
Une solution particulière de (E^1) : $y'(t) + ay(t) = f(t)$ est à chercher sous la forme :

Second membre $f(t)$	Solution particulière $\tilde{y}(t)$
$P_n(t)$	$Q_n(t)$
$P_n(t)\mathrm{e}^{\omega t}$	$Q_n(t)\mathrm{e}^{\omega t}$ si $\omega \neq -a$ $tQ_n(t)\mathrm{e}^{-at}$ si $\omega = -a$
$P_n(t)\cos(\omega t)$ $P_n(t)\sin(\omega t)$	$Q_n(t)\cos(\omega t) + R_n(t)\sin(\omega t)$

où P_n, Q_n et R_n sont des polynômes de degré n.

Méthode (*Variation de la constante*)

Lorsque a n'est pas une fonction constante, ou que le second membre ne peut s'exprimer comme une des fonctions listées précédemment, on peut chercher une solution particulière sous la forme $\tilde{y}(t) = \lambda(t)\mathrm{e}^{-A(t)}$, avec λ une fonction dérivable sur I.

3 | Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

Définition Soit $a, b \in \mathbb{R}$. À l'EDL d'ordre 2 (E_0^2) : $y''(t) + by'(t) + ay(t) = 0$ on associe l'équation caractéristique $\omega^2 + b\omega + a = 0$ dont les solutions vont déterminer celles de (E_0^2).

Méthode *(Solutions de l'équation homogène)*

Les solutions de (E_0^2) sur l'intervalle I dépendent du signe de $\Delta = b^2 - 4a$.

(a) si $\Delta > 0$, l'équation $\omega^2 + b\omega + a = 0$ admet deux solutions réelles distinctes ω_1 et ω_2 : $\boxed{y_0(t) = \lambda e^{\omega_1 t} + \mu e^{\omega_2 t}}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(b) si $\Delta = 0$, l'équation $\omega^2 + b\omega + a = 0$ admet une unique solution réelle $\omega = r$: $\boxed{y_0(t) = (\lambda + \mu t)e^{rt}}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(c) si $\Delta < 0$, l'équation $\omega^2+b\omega+a = 0$ admet deux solutions complexes $\omega_\pm = r \pm i\omega_0$: $\boxed{y_0(t) = e^{rt}\Big(\lambda\cos(\omega_0 t) + \mu\sin(\omega_0 t)\Big)}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,
que l'on retrouve aussi sous d'autres formes :

$$y_0(t) = e^{rt}\Big(\gamma e^{i\omega_0 t} + \eta e^{-i\omega_0 t}\Big) \text{ avec } \gamma, \eta \in \mathbb{R} \quad \text{ou} \quad y_0(t) = \alpha e^{rt}\cos(\omega_0 t + \varphi) \text{ avec } \alpha, \varphi \in \mathbb{R}$$

Exemple L'oscillateur harmonique $\ddot{\theta}(t) + \omega_0^2\theta(t) = 0$ a pour équation caractéristique $\omega^2 + \omega_0^2 = 0$, d'où $\omega = + \pm i\omega_0$.
On a donc $\theta_0(t) = \lambda\cos(\omega_0 t) + \mu\sin(\omega_0 t)$.
Si on fixe les conditions initiales $\theta(0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$, alors $\theta_0(t) = \theta_0\cos(\omega_0 t)$

Méthode *(Solutions particulières)*

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
Une solution particulière de (E^2) : $y''(t) + by'(t) + ay(t) = f(t)$ est à chercher sous la forme :

second membre $f(t)$	solution particulière $\tilde{y}(t)$
$P_n(t)$	$Q_n(t)$ si $a \neq 0$ $tQ_n(t)$ si $a = 0$ et $b \neq 0$ $t^2Q_n(t)$ si $a = b = 0$
$P_n(t)e^{\omega t}$	$Q_n(t)e^{\omega t}$ si $\omega^2 + b\omega + a \neq 0$ $tQ_n(t)e^{\omega t}$ si $\omega = -b/2$ $t^2Q_n(t)e^{\omega t}$ si $\omega = \omega_1$ ou ω_2

où P_n et Q_n sont des polynômes de degré n.

4 | Équations aux dérivées partielles

Une équation aux dérivées partielles (EDP) a pour inconnue une fonction de plusieurs variables. On la résout parfois comme une EDO par rapport à une de ces variables mais toute "constante" introduite dépendra alors des autres variables du problème.

Ex : $\dfrac{df}{dx}(x) = 0 \Rightarrow f(x) = C$ mais $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \Rightarrow f(x, y) = u(y)$

En physique on retrouve par exemple :

— l'équation de Fourier 1D sans pertes : $\dfrac{\partial T}{\partial t}(x,t) - D\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,t) = 0$
dont on étudie les solutions dites "stationnaires" $T(x, t) = f(x)g(t)$

— l'équation de d'Alembert 1D : $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0$
dont on peut montrer qu'il existe deux grandes familles de solutions :

  — ondes progressives : $u_\rightarrow(x, t) = f(t - x/c)$ $(v = x/t = c)$

— ondes régressives : $u_{\leftarrow}(x,t) = f(t + x/c)$ $(v = x/t = -c)$

Ex : corde vibrante, ondes lumineuses $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \omega x/t)$

— équation de Schrödinger : $i\hbar \dfrac{\partial \psi}{\partial t} = -\dfrac{\hbar^2}{2m} \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V\psi$

— équation de Maxwell stationnaires (lien avec les champs $\vec{S}$ et $\vec{\Omega}$) :

— Maxwell-Gauss : $\mathrm{div}\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$

— Maxwell-Flux : $\mathrm{div}\vec{B} = 0$

— Maxwell-Ampère : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

— Maxwell-Faraday : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E} = \vec{0}$