

Toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation. Une réponse non justifiée ne rapportera aucun point, une justification très longue l'est probablement trop : « concision dans le style, précision dans la pensée » (V. Hugo).

On dépouille les résultats d'une élection opposant deux candidat-e-s A et B . On appellera scrutin la liste des votes pour l'un-e ou l'autre des candidat-e-s. On considère qu'aucun des N votes exprimés n'est blanc ou nul.

À un scrutin donné on associe la suite $(x_n)_{n \in [0, N]}$ définie par :

$$x_{n+1} = \begin{cases} x_n + 1 & \text{en cas de vote pour } A \\ x_n - 1 & \text{en cas de vote pour } B \end{cases} \quad \text{avec } x_0 = 0$$

1. Les valeurs x_1, \dots, x_{N-1} sont-elles indépendantes de l'ordre du scrutin (on se contentera d'un contre-exemple pour une petite valeur de N) ? Qu'en est-il de x_N ?
2. En déduire l'ensemble Ω_N des scrutins possibles, calculer son cardinal.

Soit $\rho > 1/2$. On appelle A_ρ l'événement : « A gagne l'élection avec ρN voix ».

3. Déterminer l'ensemble associé et son cardinal.
4. Quelle est la probabilité de cet événement ?
5. Déterminer en fonction de ρ la valeur finale x_N d'une suite associée à A_ρ . Que se passerait-il si $\rho = 1/2$?

On note cette valeur X_ρ . Soit \oplus l'événement « $\forall n \in [1, N-1], x_n > 0$ et $x_N = X_\rho$ ».

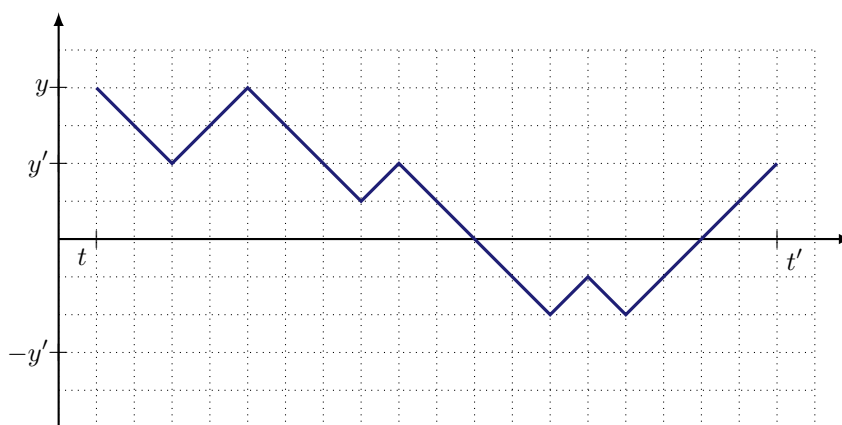
6. Que représente \oplus en terme de scrutin ?
7. A_ρ et \oplus sont-ils indépendants ? Montrer que

$$P(\oplus | A_\rho) = \frac{P(\oplus)}{P(A_\rho)}$$

Pour calculer $P(\oplus)$, on va utiliser le principe de réflexion suivant :

Soient $t < t'$, y et y' quatre entiers strictement positifs. Alors le nombre de chemins joignant (t, y) à (t', y') et touchant l'axe des abscisses est égal au nombre de chemins joignant (t, y) à $(t', -y')$.

8. Proposer sur l'énoncé (à rendre avec la copie) une démonstration graphique du principe de réflexion.
Indication : s'intéresser au premier instant où le chemin touche l'axe des abscisses.



9. En déduire $P(\bar{\oplus})$, puis $P(\oplus | A_\rho)$ en fonction de ρ .
10. Deux listes se présentent aux élections du BdE d'un établissement d'enseignement supérieur et de recherche. La Probabi[list] recueille 52% des suffrages. Lors du dépouillement, elle est majoritaire à chaque nouveau bulletin comptabilisé. Un membre de l'autre liste, présent dans le public, a des soupçons et demande un recomptage. De nouveau la Probabi[list] reste en tête tout du long et l'emporte avec la même majorité, au vote près. Calculez la probabilité de cette situation et prouvez à votre opposant politique que l'élection n'est pas frauduleuse.