L1

Travaux dirigés

Méthodologie en Sciences pour l'Ingénieur

Licence SPI, UFR SITEC, 2023-2024

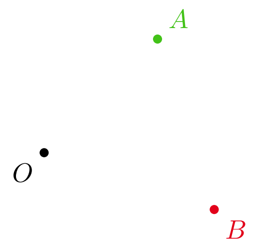
Exercice 0

Construire les figures demandées à l'aide d'un compas et d'une règle non-graduée. Justifier les résultats des deux dernières opérations proposées.

Médiatrice (et milieu)

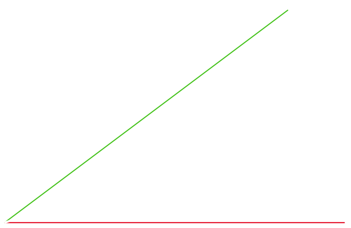
ABC est un triangle équilatéral.

Addition (et parallélisme)

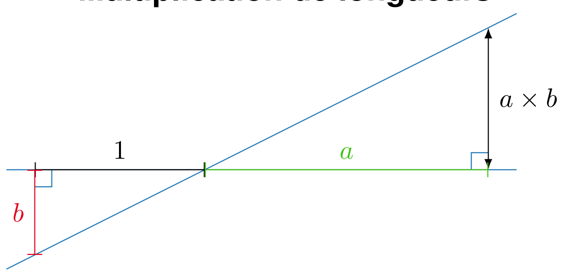


$OASB$ est un parallélogramme.

Bissectrice

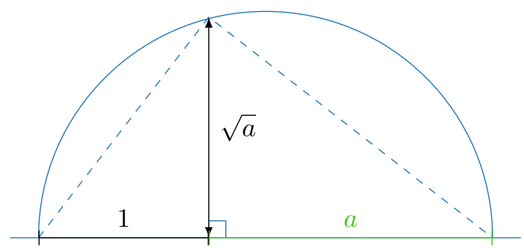


Multiplication de longueurs



Orthogonalité

Racine carrée



Révisions :

— **Théorème de Thalès**
Soit (AB) et (CD) deux droites sécantes en E.
(AC) et (BD) sont parallèles si et seulement si

$$\frac{BD}{AC} = \frac{BE}{AE} = \frac{DE}{CE}$$

— **Théorème de Pythagore**
Un triangle ABC est rectangle en B si et seulement si

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

— **Identités remarquables**
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $\qquad$ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $\qquad$ $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Exercice 1 Mettre les nombres suivants sous forme algébrique.

a) $(1+2i)^2$

b) $\dfrac{1}{1+3i}$

c) $\dfrac{1+i}{2+i}$

d) i^{-11}

e) $4\mathrm{e}^{2i\pi/3}$

Exercice 2 Mettre les nombres suivants sous forme exponentielle.

a) $1-i$

b) $\sqrt{3}+3i$

c) $(1+i)^{-14}$

Exercice 3 Soit $z \in \mathbb{C}$.

a) Vérifier que $z+\overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$.

b) À quelle condition a-t-on $|z| = z$?

c) À quelle condition a-t-on $|z| = -z$?

On pose $z = 2+i$.

d) Représenter graphiquement les points d'affixe z, $-z$, $\overline{z}$, $z-\overline{z}$, $|z|$, $z+1$ et $z+i$.

Exercice 4 Soit A, B et C trois points du plan d'affixes respectives $a = 2+3i$, $b = 4-i$ et $c = 10+2i$.

a) Représenter le triangle ABC.

b) Calculer $b-a$, $c-b$ et $a-c$ puis leur module.

c) En déduire que le triangle ABC est rectangle en B.

On appelle f et g les deux transformations du plan qui à tout point M d'affixe z associent les points d'affixes respectives $f(z) = iz$ et $g(z) = (1+i)z$.

d) Construire l'image $A'B'C'$ du triangle ABC par la transformation f.

e) Déterminer le module et l'argument de $f(z)$ en fonction de ceux de z.
De quelle similitude s'agit-il ?

f) Construire l'image $A''B''C''$ du triangle ABC par la transformation g.

g) Déterminer le module et l'argument de $g(z)$ en fonction de ceux de z.
Décrire géométriquement cette similitude.

Exercice 5 Soit A, B et C trois points du plan d'affixes respectives $a = 0$, $b = \dfrac{7}{2}+\dfrac{1}{2}i$ et $c = 3+4i$.

a) Représenter le triangle ABC.

b) Déterminer les différences $b-a$, $c-b$, $a-c$ puis leur module.

c) En déduire que le triangle ABC est isocèle et rectangle en B.

d) Placer le point I d'affixe $z = \dfrac{1}{2}(1+i)\times b$.

e) Déterminer le réel λ tel que $c = \lambda z$ et nommer *précisément* cette transformation.

f) Déterminer l'affixe d de l'image D du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

g) Déterminer l'affixe e de l'image E du point B par la rotation de centre A et d'angle $\pi/2$. Commenter.

Exercice 6 Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$ le nombre $(1+i)^n$ est-il un réel positif ? Négatif ? Un imaginaire pur ?

Exercice 7 Résoudre l'équation $z^3 = 1$. On notera j la seule racine cubique de 1 dont la partie imaginaire est strictement positive. Montrer que $\overline{j} = j^2$ et $|1+j| = 1$.

Exercice 8 L'impédance complexe d'un circuit RLC (résistance, condensateur, bobine) est, pour un circuit

a) *en série* : $\underline{Z} = R + i\omega L + \dfrac{1}{i\omega C}$

b) *en parallèle* : $\underline{Z} = \left(\dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{i\omega L} + i\omega C\right)^{-1}$

Calculer l'impédance équivalente $|\underline{Z}|$ (en ohms) et le déphasage entre la tension et l'intensité $\arg(\underline{Z})$ dans les deux cas.

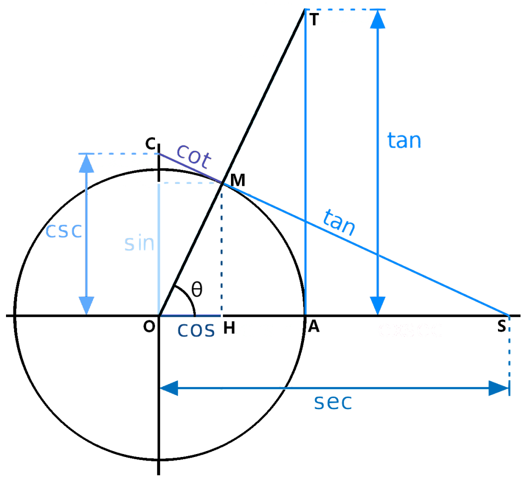
Exercice 9 À partir de la fonction $t \mapsto e^{it}$, justifier que $\cos^2(x)+\sin^2(x) = 1$ puis montrer les identités suivantes :

a) $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$

b) $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$

c) $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

En déduire $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/8)$.



Exercice 10 À l'aide du cercle trigonométrique, exprimer en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$

a) $\cos(x-\pi)$ et $\sin(\pi+x)$

b) $\cos(x+\pi/2)$ et $\sin(x-\pi/2)$

Calculer $\sin(-7\pi/3)$, $\cos(5\pi)$.

Exercice 11 Linéariser $\cos^2(x)\sin^3(2x)$. On commencera par exprimer $\sin(3x)$ en fonction de $\sin(x)$ et $\cos(2x)$.

Définition Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On note M le point d'affixe $e^{i\theta}$ et A le point d'affixe 1. Le nombre $\tan\theta$ (tangente de θ) est défini par l'ordonnée du point d'intersection T de la droite (OM) et de la tangente verticale à $\mathbb{U}$ en A.

Exercice 12 Soit H le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses. À l'aide du théorème de Thalès, démontrer la relation

$$\tan\theta = \sin\theta / \cos\theta$$

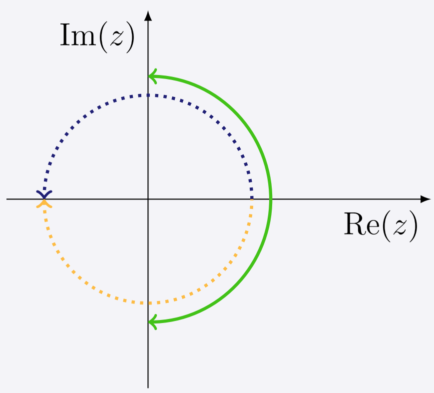
Définition Soit $x \in [-1, 1]$.

— L'équation $\cos\theta = x$ admet une solution unique sur $[0, \pi]$ que l'on nomme $\theta = \arccos(x)$.

— L'équation $\sin\theta = x$ admet une solution unique sur $[-\pi/2, \pi/2]$ que l'on nomme $\theta = \arcsin(x)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. L'équation $\tan\theta = x$ admet une solution unique sur $]-\pi/2, \pi/2[$ que l'on nomme $\theta = \arctan(x)$.

Théorème 1 *Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}^*$. $z = re^{i\theta}$ avec $r = \sqrt{x^2+y^2}$ et, dans $]-\pi, \pi]$:*



... $\theta = \arccos\dfrac{x}{r}$

— $\theta = \arctan\dfrac{y}{x} = \arcsin\dfrac{y}{r}$

... $\theta = -\arccos\dfrac{x}{r}$

Exercice 13 Soit $r, r' \in]0, +\infty[$ et $t, t' \in]-\pi, \pi]$. On définit $z = r\mathrm{e}^{it}$, $z' = r'\mathrm{e}^{it'}$.

a) Déterminer la forme exponentielle du produit $\bar{z}z'$.

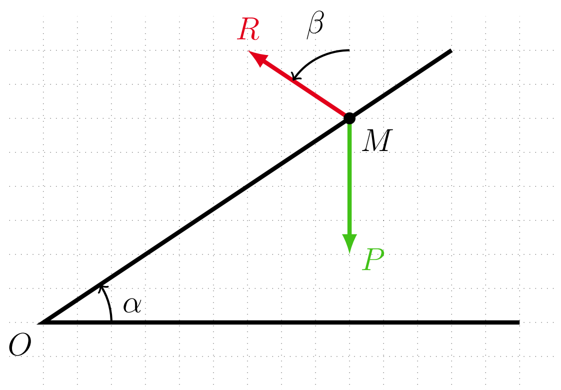
Soit $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormal direct. On définit les vecteurs $\vec{u} = \big(r\cos(t), r\sin(t)\big)$ et $\vec{v} = \big(r'\cos(t'), r'\sin(t')\big)$.

b) Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et $\det(\vec{u}, \vec{v})$.

c) Montrer que $\bar{z}z' = \vec{u} \cdot \vec{v} + i\det(\vec{u}, \vec{v})$.

d) Que dire de $\bar{z}z'$ lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ? Orthogonaux ?

Exercice 14



a) À l'aide de la grille, donner les coordonnées de vecteurs $\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{MR}$.

b) Construire la projection de $\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{MR}$ le long du pan incliné.

c) Déterminer leurs normes en fonction des angles α et β.

d) Construire le point M' tel que

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MR}$$

Que peut-on dire de l'accélération de la masse m se situant au point M et soumise à son poids et à cette force de réaction du support ?

Exercice 15 Le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ de coordonnées cartésiennes $(x, y) \neq (0, 0)$ a pour coordonnées polaires $(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

a) Montrer que le vecteur unitaire porté par $\overrightarrow{OM}$ est $\vec{u} = (\cos\theta, \sin\theta)$.

b) Soit $\alpha \in [-\pi, \pi]$. Montrer que le vecteur $\vec{v} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ est unitaire.

c) Déterminer les deux valeurs de α telles que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

d) En déduire les coordonnées de $\vec{v}$ pour que $(\vec{u}, \vec{v})$ soit une base orthonormale directe du plan.

Exercice 16 On considère deux vecteurs $\vec{A} = (3, 4, 0)$, $\vec{B} = (1, 2, 0)$. On cherche à construire une base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ de l'espace.

a) Calculer $\|\vec{A}\|$. Déterminer le vecteur unitaire $\vec{u}$ porté par $\vec{A}$.

b) Calculer $\vec{A} \wedge \vec{B}$. Déterminer le vecteur unitaire $\vec{w}$ normal au plan $(\vec{A}, \vec{B})$.

c) En déduire les coordonnées du vecteur $\vec{v}$ pour que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ soit une base orthonormée directe.

Exercice 17 Une particule de charge q se déplace à la vitesse $\vec{v}$. On la repère par le point M de coordonnées cylindriques $(r, \theta, 0)$. Son déplacement génère en O le champ magnétique suivant :

$$\vec{B}_M(O) = \frac{\mu_0 q}{4\pi r^2}\vec{v} \wedge \vec{u_r}$$

a) On suppose que la particule est en mouvement circulaire uniforme : $\vec{v} = r\omega\vec{u}_\theta$. Donner l'expression de $\vec{B}_M(O)$.

b) On suppose que la particule s'éloigne à vitesse constante : $\vec{v} = v\vec{u}_r$. Que dire de $\vec{B}_M(O)$?

Exercice 18 Définir dans les 3 systèmes de coordonnées 3D les objets suivants :

a) le plan P infini (xOy)

b) le disque D de centre O et de rayon R, inclus dans le plan (xOy)

c) le tube T d'axe (Oz), de rayon R, compris entre les plans $z = 0$ et $z = H$

d) la boule B de centre O et de rayon R.

Quel système est le plus adapté pour chacun de ces cas ?