L1 | Techniques de Calcul – TD IEP
Devoir à rendre le 16/10/19

Correction

La suite de Fibonacci est la suite de nombres réels $(F_n)_n$ définie par

$$\begin{cases} F_0 = F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

* 1. Montrer que $(F_n)_{n\geq 1}$ est strictement croissante. Est-elle convergente ?

Par récurrence immédiate, les termes de la suite $(F_n)_n$ sont strictement positifs. D'où $\forall\, n \geq 0$, $F_{n+2} > F_{n+1}$ ou, par changement d'indice, $\forall\, n \geq 1$, $F_{n+1} > F_n$. $(F_n)_{n\geq 1}$ est strictement croissante.

Supposons que la suite converge. Alors il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{n\to\infty} F_n = \ell$. Par passage à la limite dans la définition de $(F_n)_n$, $\ell = 2\ell$. D'où $\ell = 0$. Or la suite est strictement croissante à partir du rang 1 donc strictement supérieure à son premier terme $F_1 = 1$, ce qui est contradictoire. $(F_n)_n$ ne converge donc pas.

* 2. Déterminer $a > 0$, $\varphi > 1$ et $\psi \in]-1, 0[$ tels que $F_n = a(\varphi^{n+1} - \psi^{n+1})$

En appliquant la méthode de résolution des suites récurrentes linéaires d'ordre 2, on trouve par identification

$$a = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad ; \quad \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad ; \quad \psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

On note $(f_n)_n$ et $(z_n)_n$ les suites définies sur $\mathbb{N}$ de termes généraux $f_n = a\varphi^n$ et $z_n = a\psi^n$.

* 3. Étudier la convergence de $(z_n)_n$. En déduire que $F_n \sim f_{n+1}$.

$(z_n)_n$ est la suite géométrique de premier terme a et de raison ψ telle que $|\psi| < 1$. Elle tend vers 0.
$(f_n)_n$ est la suite géométrique de premier terme $a > 0$ et de raison $\varphi > 1$ et ne s'annule donc pas sur $\mathbb{N}$.
$\lim\limits_{n\to\infty}(F_n/f_{n+1}) = \lim\limits_{n\to\infty}(1 - (\psi/\varphi)^{n+1}) = 1$ car $|\psi/\varphi| < 1$. Donc $F_n \sim f_{n+1}$.

** 4. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty}(F_{n+1}/F_n) = \varphi$.

$F_n \sim f_{n+1}$ donc $F_{n+1} \sim f_{n+2}$.
En revenant à la définition, on a donc $\lim\limits_{n\to\infty}(F_n/f_{n+1}) = \lim\limits_{n\to\infty}(F_{n+1}/f_{n+2}) = 1$.
$(F_n)_n$ étant croissante donc supérieure à $F_0 = 1$, aucune des suites ne s'annule sur $\mathbb{N}$.
Par quotient de limites réelles, $\lim\limits_{n\to\infty}(F_{n+1}/f_{n+2} \times f_{n+1}/F_n) = 1$.
Autrement dit, $F_{n+1}/F_n \sim f_{n+2}/f_{n+1} = \varphi$. D'où $\lim\limits_{n\to\infty}(F_{n+1}/F_n) = \varphi$.

On définit la suite réelle $(u_n)_n$ par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

* 5. Calculer $\{u_k\}_{1\leq k\leq 5}$. Émettre une conjecture sur la monotonie et la convergence éventuelles de $(u_n)_n$. Donner un exemple de suite convergente non-monotone.

$u_1 = 1$, $u_2 = 3/2$, $u_3 = 5/3$, $u_4 = 8/5$, $u_5 = 13/8$
Conjecture : $(u_n)_n$ n'est pas monotone mais semble converger vers une valeur réelle $\ell \in [1.6, 1.625]$.
Toute suite géométrique de raison $q \in]-1, 0[$ est convergente sans être monotone.

* 6. Établir par récurrence qu'il existe des réels $(a_k)_{k\leq n}$ tels que :

$$u_n = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\cdots}}} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Conjecture : $(u_n)_n$ semble pouvoir s'exprimer ainsi avec $a_k = 1 \; \forall \; k \leq n$. Montrons-le par récurrence.
Initialisation : $u_0 = a_0 = 1$.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n} \overset{\text{hyp}}{=} 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\dots}}}}$: $\forall \; k \leq n+1, \; a_k = 1$.

*** 7. En utilisant les questions précédentes, montrer que $\lim_{n\to\infty} u_n = \varphi$.

La suite réduite de $(u_n)_n$ est définie par le quotient p_n/q_n où $\forall \; n \in \mathbb{N}$, $q_n = F_n$ et $p_n = F_{n+1}$.
D'après la question 4, cette suite converge. $(u_n)_n$ converge donc, d'après la définition.
Sa limite est celle de la suite réduite : $\lim_{n\to\infty} u_n = \varphi$.

On considère la suite $(v_n)_n$ définie sur $\mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} v_0 = \sqrt{1} \\ v_{n+1} = \sqrt{1+v_n} \quad \forall \; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

* 8. Montrer que $\varphi = \sqrt{1+\varphi}$.

φ est la solution positive de l'équation caractéristique déterminée à la question 2 : $x^2 = x + 1$.
Elle vérifie donc aussi $x = \sqrt{x+1}$.

* 9. Établir par récurrence que, $\forall \; n \in \mathbb{N}$, $1 \leq v_n \leq \varphi$.

Initialisation : $1 \geq v_0 = 1 \geq \varphi$
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. $1 \leq v_n \leq \varphi \Leftrightarrow 2 \leq 1 + v_n \leq 1 + \varphi \Leftrightarrow \sqrt{2} \leq v_{n+1} \leq \varphi$ ($\sqrt{}$ est croissante).
Or $1 \leq \sqrt{2}$, d'où $1 \leq v_{n+1} \leq \varphi$.

* 10. Montrer que $(v_n)_n$ est croissante, puis que $\lim_{n\to\infty} v_n = \varphi$.

$x \mapsto \sqrt{1+x}$ étant croissante, $v_0 \leq v_1$, on montre ensuite par récurrence que $(v_n)_n$ est croissante.
$(v_n)_n$ est donc croissante et majorée par φ : elle converge. Il existe alors $\ell \in [1, \varphi]$ telle que $\ell = \sqrt{1+\ell}$.
Or φ est l'unique solution à cette équation dans cet intervalle. D'où $\lim_{n\to\infty} v_n = \varphi$.