Sciences pour l'Ingénieur
Université Paris Nanterre

Méthodologie en SPI

Complexes & géométrie, Licence 1

A. Lucquiaud

2023-2024

Version : 10/05/24

UFR Systèmes Industriels et Techniques de Communication (SITEC)
Université Paris Nanterre, 50 rue de Sèvres, 92410 Ville-d'Avray

i | Nombres complexes

1 | Similitudes élémentaires du plan

Définition Une translation de vecteur $\vec{\tau}$ est une similitude directe élémentaire du plan qui transforme un point A en un point A' par **addition** de vecteurs :

$$\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OA} + \vec{\tau}$$

Définition Une homothétie de rapport λ et de centre O est une similitude directe élémentaire du plan qui transforme un point A en un point A' par **multiplication** d'un vecteur et du scalaire λ :

$$\overrightarrow{OA'} = \lambda\overrightarrow{OA}$$

Il existe plusieurs façons de faire des “produits” de vecteur (produit scalaire, produit vectoriel...) mais aucune qui correspond à une rotation ou à une symétrie axiale.

Observations :

— *une symétrie axiale par rapport à un des axes du repère consiste à transformer l'une des coordonnées du vecteur en son opposé, la première pour une symétrie d'axe (Oy), la seconde pour une symétrie d'axe (Ox) ;*

— *une symétrie centrale (ou rotation d'angle 180°) consiste à prendre l'opposé des deux coordonnées du vecteur, c'est équivalent à une homothétie de rapport -1 ou à la combinaison des deux symétries axiales ;*

— *une rotation d'angle 90° consiste à inverser les coordonnées du vecteur puis à prendre l'opposé de l'une des deux, la première pour le sens direct, la seconde pour le sens indirect.*

Idée : *on remplace le vecteur (x, y) par le nombre $x+iy$, où i indique simplement qu'on se déplace dans la direction verticale, perpendiculaire à l'axe des réels. On appelle ce nouvel axe l'axe “imaginaire”. Faire une rotation de 90° revient alors à multiplier par i. Que vaut i^2 ?*

2 | Forme algébrique, complexe conjugué

Définition Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
Un nombre complexe est un nombre z qui s'écrit $z = a + ib$, avec $i^2 = -1$. Cette décomposition unique s'appelle la **forme algébrique** de z.

— a est la partie réelle de z, on la note $\mathrm{Re}(z)$.
Si $\mathrm{Re}(z) = 0$, alors $z \in i\mathbb{R}$: on l'appelle un imaginaire pur.

— b est la partie imaginaire de z, on la note $\mathrm{Im}(z)$.
Si $\mathrm{Im}(z) = 0$, alors $z \in \mathbb{R}$.

— Le conjugué de z est le complexe noté $\bar{z}$ tel que $\mathrm{Re}(\bar{z}) = \mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(\bar{z}) = -\mathrm{Im}(z)$.

Théorème 1 [Propriétés du conjugué]

Pour tous $(z,z') \in \mathbb{C}^2$ *:*

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2} \qquad \mathrm{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i} \qquad \overline{\overline{z}} = z \qquad \overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'} \qquad \overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$$

Définition On munit le plan d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

— Le point M du plan de coordonnées (a,b) est appelé l'image de $z = a + ib$. Inversement, z est appelé l'affixe du point M.

— z est aussi l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$, et de tout autre vecteur de coordonnées (a,b).

Proposition 1

Soit M et M' deux points du plan d'affixes z et z'. Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour affixe $z'-z$.

3 | Forme trigonométrique, module

Soit z un nombre complexe *non nul* d'image M.

Définition On appelle module de z le réel positif $|z|$ égal à la norme du vecteur $\overrightarrow{OM}$. On appelle argument principal de z le réel $\arg(z) \in]-\pi,\pi]$ égal à l'angle orienté $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$.

Remarque(s).

— Le couple $(|z|, \arg(z))$ est un couple de **coordonnées polaires** de z.

— Le module est unique, mais $\arg(z)$ n'est qu'un argument particulier de z : tous les réels $\arg(z) + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ sont également des mesures de l'angle orienté $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$.

— Lorsque $z \in \mathbb{R}$, le module se confond avec la valeur absolue.

Proposition 2 On note H le projeté orthogonal de M sur l'axe $(O, \vec{i})$. On a alors $OH^2 = a^2$, $HM^2 = b^2$ et $OM = |z|$. Dans le triangle OMH rectangle en H (par construction) :

— d'après le théorème de Pythagore, $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

— $a = |z|\cos(\arg(z))$

— $b = |z|\sin(\arg(z))$

Définition Tout nombre complexe non nul peut être écrit sous la forme $z = r\Big(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\Big)$, dite **forme trigonométrique**, avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, où $r = |z|$ et $\theta = \arg(z) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Théorème 2 [Propriétés du module]

Pour tous $(z,z') \in \mathbb{C}^2$ *:*

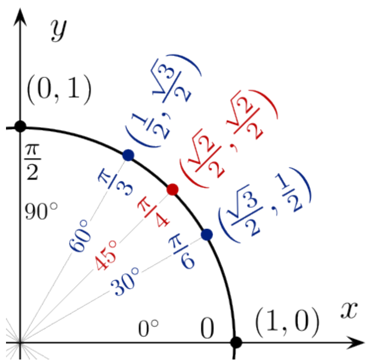
— $|z|^2 = z\overline{z}$

— $|zz'| = |z| \times |z'|$ *et si* $z' \neq 0$, $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$

— $|z| = 0$ *ssi* $z = 0$

4 | Forme exponentielle, argument

Définition On définit $\mathbb{U}$ l'ensemble des complexes de module 1. Géométriquement, il s'agit du cercle unité de centre O et de rayon 1.



Définition Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on appelle *exponentielle (de) $i\theta$* le complexe $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

Théorème 3 [Propriétés de l'exponentielle $i\theta$]

Pour tous $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} \qquad e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$$

Proposition 3 Pour tout $z \in \mathbb{U}$, il existe θ tel que $z = e^{i\theta}$.

Théorème 4 *Tout nombre complexe non nul peut donc s'écrire sous la forme $z = |z|e^{i\theta}$, dite **forme exponentielle** avec $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta = \arg(z) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.*

Théorème 5 [Propriétés de l'argument]

Pour tous $(z, z') \in \mathbb{C}^2$:

- $\arg(\overline{z}) = -\arg(z) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
- $\arg(1/z) = -\arg(z) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
- $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Proposition 4 Les fonctions cosinus et sinus sont définissables à partir de la fonction $\theta \mapsto e^{i\theta}$ comme

$$\cos\theta = \mathrm{Re}(e^{i\theta}) \qquad \sin\theta = \mathrm{Im}(e^{i\theta})$$

Il s'agit respectivement de l'abscisse et de l'ordonnée du point d'affixe $e^{i\theta}$.

Théorème 6 [Formules d'Euler]

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Proposition 5 [Angle moitié : forme exponentielle d'une somme]

Pour tout $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$,

$$e^{i\theta} + e^{i\theta'} = e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}\left(e^{i\frac{\theta-\theta'}{2}} + e^{-i\frac{\theta-\theta'}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}$$

Remarque(s). Attention, cette dernière forme n'est la forme exponentielle de la somme initiale qu'à condition que le cosinus soit positif. On peut montrer une expression équivalente pour évaluer une différence de deux complexes, qui fera intervenir la fonction sinus.

5 | Retour aux similitudes

Proposition 6 [Interprétations géométriques]

— Les fonctions $\left\{\begin{array}{l}\mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \bar{z}\end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{l}\mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto -\bar{z}\end{array}\right.$ correspondent respectivement aux **symétries axiales** d'axe $(O, \overrightarrow{i})$ et $(O, \overrightarrow{j})$.

— Soit $\tau \in \mathbb{C}$. La fonction $\left\{\begin{array}{l}\mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto z + \tau\end{array}\right.$ correspond à la **translation** de vecteur τ.

— Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. La fonction $\left\{\begin{array}{l}\mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \lambda z\end{array}\right.$ est l'**homothétie** de rapport λ et de centre O.

— Soit $\mathrm{e}^{i\alpha} \in \mathbb{U}$. La fonction $\left\{\begin{array}{l}\mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \mathrm{e}^{i\alpha} z\end{array}\right.$ est la **rotation** d'angle α et de centre O.

— La fonction $\left\{\begin{array}{l}\mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto -z\end{array}\right.$ correspond à la symétrie centrale de centre O.
La symétrie centrale est un cas particulier d'homothétie (de rapport -1) ou de rotation (d'angle $\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$).

Conclusion

— les complexes sont un outil qui permet d'écrire plus simplement les similitudes du plan, en particulier les **rotations** ;

— ils permettent de remplacer les fonctions circulaires / trigonométriques par des fonctions exponentielles aux propriétés beaucoup plus simples à exploiter, et sont utiles pour décrire les **mouvements oscillants** (propagation d'onde par exemple) ;

— ils sont toutefois limités aux transformations du plan, il en existe des généralisations à 3 dimensions ou plus, mais le plus simple sera d'utiliser les **matrices**, ce sera l'objet du cours de structures fondamentales au S2 ;

— enfin, ils vont permettre de simplifier l'étude de la dynamique de systèmes physiques, mais pour cela il faut avoir vu les **équations différentielles** et l'**intégration** (mathématiques générales 1, puis L2, L3)

ii | Repères et référentiels

1 | Colinéarité et orthogonalité dans le plan

A. Le produit scalaire

Définition Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits colinéaires ssi $\exists\ \lambda \in \mathbb{R}$, $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ (il existe une homothétie entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$).

Définition On appelle **produit scalaire** de deux vecteurs non-nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le **nombre réel** $\vec{u} \cdot \vec{v}$, qui vaut

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\theta)$$

où θ est l'angle orienté de $\vec{u}$ à $\vec{v}$.

Théorème 1 *Deux vecteurs non nuls du plan sont orthogonaux ssi* $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Définition La norme $\|\vec{u}\|$ d'un vecteur $\vec{u}$ est définie par $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$.

B. Le déterminant

Définition On appelle **déterminant** de deux vecteurs non-nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le **nombre réel** $\det(\vec{u}, \vec{v})$, qui vaut

$$\det(u, v) = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin(\theta)$$

où θ est l'angle orienté de $\vec{u}$ à $\vec{v}$.

Théorème 2 *Deux vecteurs non nuls du plan sont colinéaires ssi* $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

C. Bases, repère cartésien

Définition Un couple $(\vec{i}, \vec{j})$ de vecteurs non-colinéaires forme une base du plan. Un triplet $(O, \vec{i}, \vec{j})$ consitué d'un point du plan et de deux vecteurs non-colinéaires forme un repère cartésien du plan.

Définition Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère cartésien du plan.

— Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan. Il existe un unique couple (x, y) tel que $\vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$. On l'appelle le couple de coordonnées cartésiennes de $\vec{u}$.

— Soit M un point du plan. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ sont appelées coordonnées cartésiennes de M.

Proposition 1 Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère cartésien du plan.

— Soit $\vec{u} = (x, y)$ et $\vec{v} = (x', y')$ deux vecteurs du plan et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
Les coordonnées de $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ sont $(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y')$.

— Soit $A = (x_a, y_a)$ et $B = (x_b, y_b)$ deux points du plan.
$\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_b - x_a, y_b - y_a)$.

Définition

- Une base $(\vec{i}, \vec{j})$ est orthonormée ssi $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$ et $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$.
- Une base $(\vec{i}, \vec{j})$ est directe ssi $\det\left(\vec{i}, \vec{j}\right) > 0$.
- Un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est orthonormé direct ssi $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base orthonormée directe.

Théorème 3 [Produit scalaire et déterminant]
Soit $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonomé direct, $\vec{u} = (x, y)$ et $\vec{v} = (x', y')$ deux vecteurs. Alors

(a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$

(b) $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

(c) $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$ *(règle du gamma)*

2 | De deux à trois dimensions

Définition Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont dits coplanaires ssi $\exists\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\vec{u} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{w}$.

Définition Un triplet $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de vecteurs non-coplanaires forme une base de l'espace. Un quadruplet $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ consitué d'un point du plan et de trois vecteurs non-coplanaires forme un repère cartésien de l'espace.

Théorème 4 [Produit scalaire] *Les définitions du produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u} = (x, y, z)$ et $\vec{v} = (x', y', z')$ et, par extension, de la norme d'un vecteur ne sont pas modifiées. Dans un repère cartésien orthonormé direct $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, ils s'écrivent*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz' \quad \text{et} \quad \|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Définition On appelle **produit vectoriel** de deux vecteurs non colinéaires non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ l'unique vecteur noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$

- orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$
- tel que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ soit une base directe
- de norme $\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times |\sin(\theta)|$ où θ est l'angle orienté de $\vec{u}$ à $\vec{v}$.

Théorème 5 *Deux vecteurs non nuls sont coplanaires ssi $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.*

Théorème 6 *Soit $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé direct et $\vec{u} = (x, y, z)$ et $\vec{v} = (x', y', z')$ deux vecteurs. Alors*

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \right) = (yz' - y'z, zx' - z'x, xy' - x'y)$$

3 | Systèmes de coordonnées

A. Coordonnées polaires (2D)

Définition Soit M un point du plan de coordonnées cartésiennes (x, y). On appelle couple de coordonnées polaires de M relativement au repère cartésien orthonormé direct $\mathcal{R}(O, \vec{i}\,\vec{j})$ tout couple $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ tel que

$$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r$$

où $\vec{u}_r$ est le vecteur de coordonnées cartésiennes $(\cos\theta, \sin\theta)$. On a alors $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et il existe diverses façon d'exprimer θ (voir TD).

Remarque(s). Attention, malgré le nom qu'on lui donne par convention, $\vec{u}_r$ dépend de θ et pas de r ! On note généralement $\vec{u}_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta)$ l'unique vecteur tel que $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ soit une base orthonormée directe.

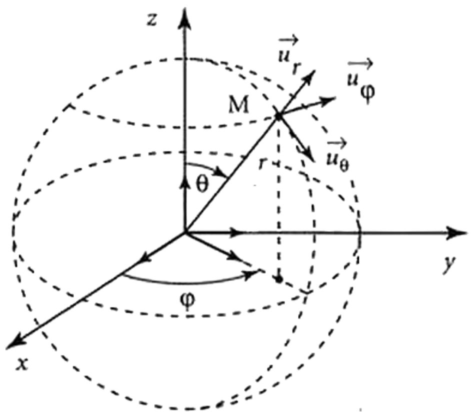
B. Coordonnées cylindriques (3D)

Définition Soit M un point de coordonnées cartésiennes (x, y, z). On appelle coordonnées cylindriques de M tout triplet $(r, \theta, z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2$ tel que

$$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r + z\,\vec{u}_z$$

où $\vec{u}_r$ est le vecteur de coordonnées cartésiennes $(\cos\theta, \sin\theta, 0)$. On définit $\vec{u}_\theta$ de coordonnées cartésiennes $(-\sin\theta, \cos\theta, 0)$ tel que $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ soit une base orthonormée directe.

C. Coordonnées sphériques (3D)



Définition Soit M un point de coordonnées cartésiennes (x, y, z). On appelle coordonnées sphériques de M tout triplet $(r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2$ tel que

$$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r$$

où $\vec{u}_r$ est le vecteur de coordonnées cartésiennes $(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$. On définit $\vec{u}_\theta$ et $\vec{u}_\varphi$ tels que $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ soit une base orthonormée directe.

D. Cinématique

Les vecteurs de base cartésienne $\vec{i}$, $\vec{j}$ (et $\vec{k}$ en 3D) sont fixes dans le temps.

Définition La vitesse est la dérivée du vecteur position $\overrightarrow{OM} = \big(x(t), y(t)\big)$:

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x\,\vec{i} + y\,\vec{j}) = \dot{x}\,\vec{i} + \dot{y}\,\vec{j}$$

L'accélération est la dérivée du vecteur vitesse $\vec{v}$:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{x}\,\vec{i} + \ddot{y}\,\vec{j}$$

Dans les autres systèmes de coordonnées, il faut aussi dériver les vecteurs de base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ (et $\vec{u}_\varphi$ en coordonnées sphériques). On a alors, d'après les formules ci-dessus,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{u}_r = \dot{\theta}\vec{u}_\theta \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{u}_\theta = -\dot{\theta}\vec{u}_r$$

Définition La vitesse est la dérivée du vecteur position $\overrightarrow{OM} = r(t)\Big(\cos\theta(t), \sin\theta(t)\Big)$:

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\,\vec{u}_r) = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\,\dot{\vec{u}}_r = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

L'accélération est la dérivée du vecteur vitesse $\vec{v}$:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{r}\vec{u}_r + \dot{r}\,\dot{\vec{u}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{u}\theta + r\dot{\theta}\dot{\vec{u}}_\theta = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{u}_\theta$$