L1 | Probabilités 1
Devoir Maison
à rendre pour le 20/04/20

Combien y a-t-il d'entiers naturels contenant le chiffre 3 ?

1. Calculer le terme général de la suite $(S_n)_n$ définie par $\begin{cases} S_{n+1} = 9S_n + 10^n \\ S_1 = 1 \end{cases}$

On résout dans un premier temps l'équation homogène $\forall\ n \geq 1 :\ w_{n+1} = 9w_n$.
Il s'agit d'une suite géométrique de raison $a = 9$, donc $\forall\ n \geq 1 :\ w_n = 9^{n-1}w_1$, avec $w_1 \in \mathbb{R}$.

Le second membre de l'équation est de la forme $t^n P(n)$ avec $t = 10 \neq a$ et $P(n) = 1$ de degré 0. On donc cherche une solution particulière sous la forme $\forall\ n \geq 1 :\ v_n = c \times 10^n$ avec $Q(n) = c \in \mathbb{R}$ un polynôme de degré 0. On a alors $v_{n+1} = c \times 10^{n+1}$ et $9v_n + 10^n = 9c \times 10^n + 10^n$, d'où $10c \times 10^n = (9c+1) \times 10^n$, soit $c = 1$.

Finalement,

$$\exists\ w_1 \in \mathbb{R},\ \forall\ n \geq 1, \quad S_n = 9^{n-1}w_1 + 10^n$$

Or $S_1 = 9^0 w_1 + 10^1 = 1$, donc $w_1 = -9$ et

$$\forall\ n \geq 1, \quad S_n = 10^n - 9^n$$

2. Donner la fréquence des entiers contenant le chiffre 3 dans les intervalles $[\![0,9]\!]$, $[\![0,99]\!]$ et $[\![0,999]\!]$.

Dans l'intervalle $[\![0,9]\!]$ de cardinal 10, il y a $\mathrm{card}(\Omega_1) = 1$ entier (3) contenant le chiffre 3, d'où

$$f_{[\![0,9]\!]}(3) = 1/10 = 0.1$$

Dans l'intervalle $[\![0,99]\!]$ de cardinal 100, il y a $\mathrm{card}(\Omega_2) = 19$ entiers [a] contenant le chiffre 3, d'où

$$f_{[\![0,99]\!]}(3) = 19/100 = 0.19$$

Dans l'intervalle $[\![0,999]\!]$ de cardinal 1000, il y a 271 entiers [b] contenant le chiffre 3, d'où

$$f_{[\![0,999]\!]}(3) = 271/1000 = 0.271$$

a. de la forme $10x + 3$ pour $x \in \{0,1,2,4,5,6,7,8,9\}$ ou $30 + y$ pour $y \in [\![0,9]\!]$
b. de la forme $100x + n$ pour $x \in \{0,1,2,4,5,6,7,8,9\}$ et $n \in \Omega_2$ ou $300 + x$ avec $x \in [\![0,9]\!]$

3. Émettre une conjecture pour l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels.

Conjecture : La probabilité que tous les entiers d'un intervalle de taille $\ell \to \infty$ contiennent le chiffre 3 semble tendre vers 1.

Soit Ω_n l'ensemble des nombres à n chiffres.

4. Calculer le nombre d'éléments de Ω_n.

On peut écrire cet ensemble sous la forme d'un tirage successif avec remise

$$\Omega_n = \left\{(a_1, ..., a_n)\ \middle|\ \forall\ i \in [\![1,n]\!],\ a_i \in [\![0,9]\!]\right\} = [\![0,9]\!]^n$$

donc $\mathrm{card}(\Omega_n) = 10^n$

5. Calculer T_n le nombre de ses éléments contenant au moins une fois le chiffre 3.

On va plutôt chercher l'ensemble des éléments ne contenant pas le chiffre 3. Il s'écrit

$$\omega_n = \Big\{(a_1, ..., a_n) \;\Big|\; \forall\, i \in [\![1, n]\!],\ a_i \in \{0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}\Big\}$$

et a pour cardinal $\mathrm{card}(\omega_n) = 9^n$.

Le nombre d'éléments de Ω_n contenant au moins une fois le chiffre 3 est donc

$$T_n = 10^n - 9^n$$

6. Conclure quant à la probabilité qu'un entier naturel contienne le chiffre 3. Commenter.

La probabilité qu'un entier de Ω_n contienne le chiffre 3 s'écrit

$$\mathbb{P}_{\Omega_n}(3) = \frac{T_n}{\mathrm{card}(\Omega_n)} = \frac{10^n - 9^n}{10^n} = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

La probabilité de choisir un entier quelconque contenant le chiffre 3 est donc 1, et on aurait pu mener le même raisonnement avec n'importe quel chiffre...

Ne répondez pas au hasard.

Un·e étudiant·e répond au hasard aux 4 questions d'un QCM avec toujours 3 choix possibles dont un seul est juste. Une réponse juste rapporte 1 point, une réponse fausse n'en enlève pas.

1. Décrire l'ensemble Ω des réponses possibles à ce QCM puis calculer $\mathrm{card}(\Omega)$.

$\Omega = \Big\{(r_1, r_2, r_3, r_4) \;\Big|\; \forall\, i \in [\![1, 4]\!],\ r_i \in \{V, F_1, F_2\}\Big\}$ et $\mathrm{card}(\Omega) = 3^4 = 81$.

2. Calculer les probabilités des événements suivants (il sera utile de décrire leur ensemble associé) :

— le QCM est entièrement juste ;

$A_4 = \Big\{(r_1, r_2, r_3, r_4) \;\Big|\; \forall\, i \in [\![1, 4]\!],\ r_i \in \{V\}\Big\} = \Big\{(V, V, V, V)\Big\}$
$\mathrm{card}(A_4) = 1^4 = 1$, d'où $\mathbb{P}(A_4) = 1/81$.

— le QCM est entièrement faux ;

$A_0 = \Big\{(r_1, r_2, r_3, r_4) \;\Big|\; \forall\, i \in [\![1, 4]\!],\ r_i \in \{F_1, F_2\}\Big\} = \{F_1, F_2\}^4$
$\mathrm{card}(A_0) = 2^4 = 16$, d'où $\mathbb{P}(A_0) = 16/81$.

— l'étudiant·e a plus que la moyenne.

Pour avoir plus de la moyenne il faut avoir 3 ou 4 réponses justes.
$A_3 = \Big\{(r_1, V, V, V) \;\Big|\; r_1 \in \{F_1, F_2\}\Big\} \cup \Big\{(V, r_2, V, V) \;\Big|\; r_2 \in \{F_1, F_2\}\Big\} \cup \Big\{(V, V, r_3, V) \;\Big|\; r_3 \in \{F_1, F_2\}\Big\} \cup \Big\{(V, V, V, r_4) \;\Big|\; r_4 \in \{F_1, F_2\}\Big\}$ et $\mathrm{card}(A_3) = 4 \times 2^1 = 8$.
L'événement dont on cherche la probabilité est alors $A_3 \cup A_4$ et $\mathbb{P}(A_3 \cup A_4) = 9/81 = 1/9$.