
PÊNDULO OSCILANDO COM PONTO DE SUSPENSÃO EM MOVIMENTO

INSTITUTO DE FÍSICA E QUÍMICA
UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
FIS521 - MECÂNICA CLÁSSICA 2

André Luiz Guimarães de Castilho
2016018402

Gabriel Ribeiro Ferreira Lopes
33830

29 de Junho de 2019

RESUMO

Este trabalho tem como proposta analisar e descrever um sistema mecânico composto por um pêndulo simples acoplado a uma espira de raio fixo que gira com uma frequência ω também fixa. Para a resolução do sistema foi utilizada a dinâmica Lagrangiana, obtendo a equação de movimento e as transformações para a dinâmica Hamiltoniana. Como uma solução analítica para a equação de movimento não se mostrou viável, foi realizada a solução numérica e uma simulação da evolução temporal do sistema utilizando-se exclusivamente da linguagem de programação Python.

Palavras-chave Pêndulo · Dinâmica Lagrangiana · Dinâmica Hamiltoniana · Simulação · Python

Introdução

Na mecânica newtoniana, as equações de movimento são dadas pelas leis de Newton. Da segunda lei:

$$\sum \mathbf{F} = m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \quad (1)$$

Para um sistema de N partículas em 3 dimensões, haverá $3N$ equações diferenciais de segunda ordem para serem resolvidas para as posições das partículas.

Ao invés das forças, a mecânica lagrangiana usa as energias do sistema. A lagrangiana é uma função que resume a dinâmica de todo o sistema. Em geral, qualquer função que gera de maneira correta as equações de movimento, de acordo com as leis da física, pode ser considerada uma lagrangiana. É possível construir uma expressão geral para uma vasta classe de aplicações. A lagrangiana não relativística para um sistema de partículas é dada por:

$$\mathcal{L} = T - V$$

onde

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i^2$$

é a energia cinética total do sistema e V é a energia potencial do sistema.

A lagrangiana de um sistema não é única. Uma lagrangiana \mathcal{L} pode ser multiplicada por uma constante não nula a , somada a ela uma constante arbitrária b , e a nova lagrangiana $a\mathcal{L} + b$ descreverá o mesmo movimento de \mathcal{L} . Um resultado menos óbvio é que duas lagrangianas descrevendo o mesmo sistema podem diferir por uma derivada temporal total de uma função $f(q, t)$.

Definição 1. Duas lagrangianas $\bar{\mathcal{L}}(q, \dot{q}, t)$ e $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ são ditas *equivalentes* se elas diferem pela derivada total em relação ao tempo de uma função arbitrária das coordenadas generalizadas e do tempo $f(q, t)$:

$$\bar{\mathcal{L}}(q, \dot{q}, t) = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt}f(q, t)$$

Desenvolvimento

Apresentação do problema

Na Figura 1 temos um pêndulo simples de massa m que tem seu ponto de suporte acoplado em uma espira de raio R que gira em torno de seu eixo de simetria com uma frequência ω fixa.

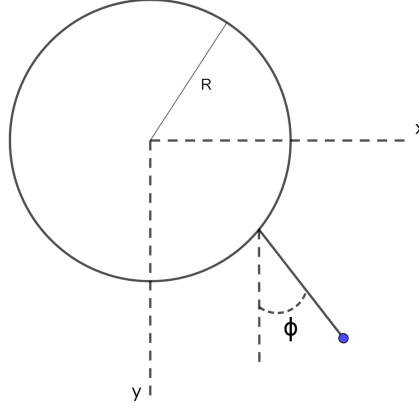


Figura 1: Esquemática do problema descrito.

Lagrangiana

Para a posição do ponto de suspensão do pêndulo:

$$\begin{aligned} x_1 &= R \cos \theta & x_1^2 &= R^2 \cos^2 \theta \\ y_1 &= R \sin \theta & y_1^2 &= R^2 \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (2)$$

Para a massa m a parametrização fica

$$\begin{aligned} x_2 &= R \cos \theta + L \sin \phi \\ y_2 &= R \sin \theta - L \cos \phi \end{aligned} \quad (3)$$

com as respectivas derivadas temporais sendo

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= -R \sin \theta \dot{\theta} + L \cos \phi \dot{\phi} \\ \dot{y}_2 &= R \cos \theta \dot{\theta} + L \sin \phi \dot{\phi} \end{aligned} \quad (4)$$

Desenvolvendo os termos quadráticos:

$$\begin{aligned} \dot{x}_2^2 &= R^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta + L^2 \dot{\phi}^2 \cos^2 \phi - 2RL \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \phi \sin \theta \\ \dot{y}_2^2 &= R^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + L^2 \dot{\phi}^2 \sin^2 \phi + 2RL \dot{\phi} \dot{\theta} \sin \phi \cos \theta \\ \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 &= R^2 \dot{\theta}^2 + L^2 \dot{\phi}^2 + 2RL \dot{\phi} \dot{\theta} (\cos \theta \sin \phi - \cos \phi \sin \theta) \end{aligned}$$

Lembrando que

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha$$

então

$$\cos\theta \sin\phi - \cos\phi \sin\theta = \sin(\phi - \theta)$$

As expressões para a energia cinética e potencial do sistema serão

$$T = \frac{m}{2} \left[R^2 \dot{\theta}^2 + L^2 \dot{\phi}^2 + 2RL\dot{\phi}\dot{\theta} \sin(\phi - \theta) \right]$$

$$V = mgy = mg(R \sin\theta - L \cos\phi)$$

Substituindo $\theta = \omega t$ e $\dot{\theta} = \omega$, a lagrangiana do sistema fica

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} \left[R^2 \omega^2 + L^2 \dot{\phi}^2 + 2\omega\dot{\phi}RL \sin(\phi - \omega t) \right] - mg[R \sin(\omega t) - L \cos\phi] \quad (5)$$

Usando a **Definição 1** em (5), temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[m\omega RL \cos(\phi - \omega t) + \frac{1}{\omega} mgR \cos\omega t \right] &= \frac{d}{dt} f(\phi, t) \\ &= -mLR\dot{\phi} \sin(\phi - \omega t) + mLR\omega^2 \sin(\phi - \omega t) - mgR \sin(\omega t) = \frac{d}{dt} f(\phi, t) \\ &= mLR\dot{\phi} \sin(\phi - \omega t) - mgR \sin(\omega t) = mLR\omega^2 \sin(\phi - \omega t) + \frac{d}{dt} f(\phi, t) \end{aligned}$$

Portanto, podemos reescrever (5) como:

$$\mathcal{L}(\phi, \dot{\phi}, t) = \frac{m}{2} L^2 \dot{\phi}^2 + mR\omega^2 L \sin(\phi - \omega t) + mgL \cos(\phi) \quad (6)$$

Equações de Lagrange

Utilizando a definição das equações de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0 \quad k = 1, \dots, n \quad (7)$$

obtemos a equação de movimento para o sistema.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) &= mL^2 \ddot{\phi} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} &= mR\omega^2 L \cos(\phi - \omega t) - mgL \sin(\phi) \\ \ddot{\phi} &= \frac{R\omega^2}{L} \cos(\phi - \omega t) - \frac{g}{L} \sin(\phi) \end{aligned} \quad (8)$$

Hamiltoniana e Equações de Hamilton

Mostremos primeiro que o determinante a matriz hessiana do sistema é não nula.

Da definição da matriz hessiana temos

$$\mathbf{W} = W_{ij} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \quad (9)$$

Em (6) temos que $q_i = q_j = \phi$, assim

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^2} = mL^2 \neq 0$$

Assim, a descrição hamiltoniana envolve a substituição das variáveis $(\phi, \dot{\phi})$ por (q, p) em todas as grandezas mecânicas, e a introdução de uma função $H(q, p, t)$ em lugar da lagrangiana $\mathcal{L}(\phi, \dot{\phi}, t)$ para gerar a dinâmica. Tal mudança de descrição realiza-se mediante uma *transformação de Legendre*, que no presente contexto consiste na substituição das velocidades generalizadas pelos momentos canônicos como variáveis básicas e na introdução de uma *função de Hamilton* ou, simplesmente, *hamiltoniana* $H(q, p, t)$ definida por

$$H(q, p, t) = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i p_i - \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) \quad (10)$$

Desta, obtemos as equações de Hamilton

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad , \quad i = 1, \dots, n \quad (11)$$

Com isso, calculamos o momento canônico conjugado

$$p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = mL^2 \dot{\phi}$$

isolando $\dot{\phi}$

$$\dot{\phi} \equiv \dot{\phi}(\phi, p_\phi, t) = \frac{p_\phi}{mL^2}$$

A hamiltoniana

$$\begin{aligned} H &= p_\phi \dot{\phi} - \mathcal{L}(\phi, \dot{\phi}, t) \\ H &= p_\phi \dot{\phi} - \frac{m}{2} L^2 \dot{\phi}^2 + mR\omega^2 L \sin(\phi - \omega t) + mgL \cos(\phi) \\ H &= \frac{p_\phi^2}{mL^2} - \frac{p_\phi^2}{2mL^2} + mR\omega^2 L \sin(\phi - \omega t) + mgL \cos(\phi) \\ H(\phi, p_\phi, t) &= \frac{p_\phi^2}{2mL^2} + mR\omega^2 L \sin(\phi - \omega t) + mgL \cos(\phi) \end{aligned} \quad (12)$$

Nota-se que a Hamiltoniana não representa a energia total do sistema $E = T + V$, uma vez que T não é uma função puramente quadrática das velocidades generalizadas. Por fim, as equações de Hamilton resultam:

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \frac{\partial H}{\partial p_\phi} \quad \text{e} \quad \dot{p}_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi} \\ \dot{\phi} &= \frac{p_\phi}{mL^2} \quad \text{e} \quad \dot{p}_\phi = mgL \sin(\phi) - mR\omega^2 L \cos(\phi - \omega t) \end{aligned} \quad (13)$$

Simulação

Explicação do algoritmo

Todo o algoritmo foi desenvolvido em Python 3.7.3 com o intuito de obter um resultado mais visual para as equações obtidas. Inicialmente o programa verifica se todas as variáveis estão definidas. No caso, as variáveis são

- g : gravidade, com valor padrão de 9.81;
- l : comprimento da haste, com valor padrão de 5;
- r : raio da espira, com valor padrão de 15;
- w : frequência ω com a qual a espira gira, com valor padrão de 0.7;
- $t0$: tempo inicial, com valor padrão de 0;

- tf : tempo final, com valor padrão de 1000;
- tp : passo com o qual o tempo será incrementado, com valor padrão de 0.1;
- $U0$: condições iniciais para a solução da equação diferencial, com valores iniciais de $U0(0) = \phi(0) = \frac{\pi}{4}$ e $U0(1) = \dot{\phi}(0) = 0$.

Para que resultados variados sejam observados, essas variáveis podem e devem ser alteradas antes da execução do código.

Em seguida, a equação diferencial de segunda ordem encontrada em (8) é resolvida de forma numérica utilizando os valores iniciais de $U0$ dentro do intervalo de tempo determinado pelas variáveis $t0$, tf e tp . Então, com os valores calculados, são criadas 500 imagens¹ onde, em cada uma delas, são plotados os pares (x_1, y_1) , referente à posição do ponto de suspensão, e (x_2, y_2) , referente à posição da massa, num plano xy bem como a trajetória de (x_2, y_2) .

Por fim, todas essas imagens são compiladas em um único arquivo de vídeo com extensão *.avi* e é plotado uma curva paramétrica mostrando o movimento da massa.

A versão completa e comentada do código pode ser encontrada no seguinte repositório:

<https://github.com/aluizgc/proj-classica2>

Resultados

Abaixo encontram-se alguns exemplos de trajetórias geradas para diferentes parâmetros.

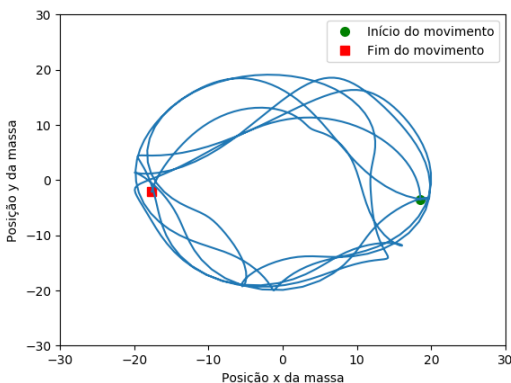


Figura 2: Curva paramétrica da posição da massa para $l = 5$, $r = 15$ e $w = 0.7$.

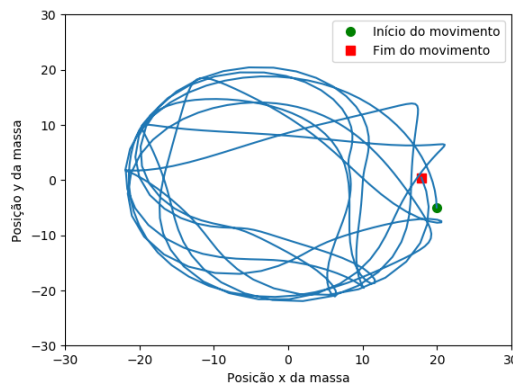


Figura 3: Curva paramétrica da posição da massa para $l = 7$, $r = 15$ e $w = 1$.

¹Este valor também pode ser alterado antes da execução do código, podendo aumentar ou diminuir o tempo da simulação final. Tenha em mente que este valor também interfere na qualidade dos resultados e no tempo de execução do código.

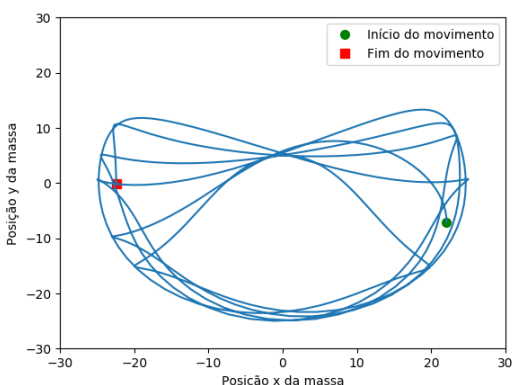


Figura 4: Curva paramétrica da posição da massa para $l = 10$, $r = 15$ e $w = .7$.

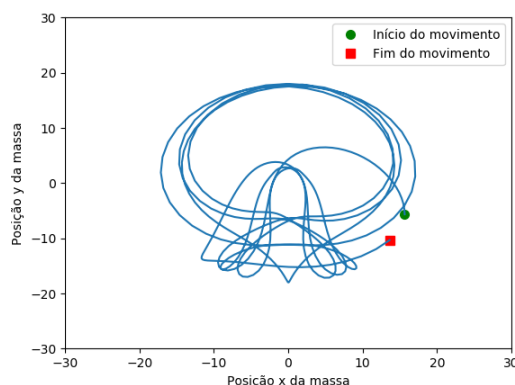


Figura 5: Curva paramétrica da posição da massa para $l = 8$, $r = 10$ e $w = 1$.

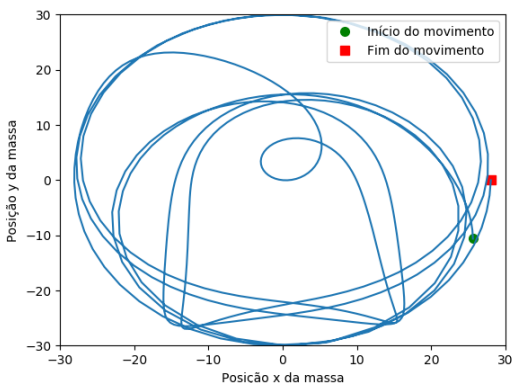


Figura 6: Curva paramétrica da posição da massa para $l = 14$, $r = 7$ e $w = 1.4$.

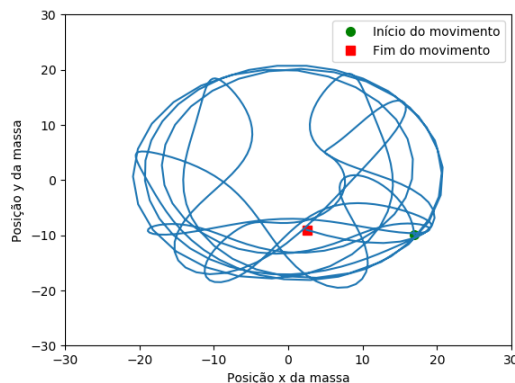


Figura 7: Curva paramétrica da posição da massa para $l = 7$, $r = 15$ e $w = 1$.

Conclusão

Das propostas de estudo, não foi possível realizar o cálculo das constantes de movimento uma vez que o sistema não possui coordenadas cíclicas.

Outro tópico digno de nota é que, na simulação, o movimento do ponto de suspensão não é completamente circular mas sim, elíptico. Os fatores considerados para o surgimento deste erro foram prováveis aproximações, tanto nos resultados numéricos das soluções da equação diferencial de segunda ordem bem como na forma como as funções trigonométricas são definidas dentro do pacote *numpy*.

Apesar das observações, como foi visto, as equações obtidas descreveram a evolução temporal do sistema de maneira satisfatória.

Referências

- [1] LANDAU, Lev D.; LIFSHITZ, Evgeny Mikhailovich. **Mechanics**. 1976.
- [2] LEMOS, Nivaldo A. **Mecânica analítica**. editora livraria da física, 2007.