W214 Lineêre Algebra

W214 Lineêre Algebra

Bruce Bartlett

0.1 Nota aan die student

Jou tweede ontmoeting met lineêre algebra lê tans voor jou. In die eerste jaar is daar gefokus op sisteme van lineêre vergelykings, matrikse en matriksdeterminane. Die kursus wat volg, keer terug na hierdie onderwerpe, maar met 'n meer abstrakte, wiskundige aanslag.

Moenie *abstraksie* vrees nie. Dit behels eenvoudig om ontslae te raak van oorbodige besonderhede en om jouself uitsluitlik met die mees belangrike kenmerke van 'n probleem te bemoei. Dit leen jou daartoe om die probleem beter te verstaan. Daar is minder dinge om jou oor te bekommer! Verder, as jy 'n ander probleem sou teëkom wat op eerste oogopslag anders lyk, maar dieselfde belangrike kenmerke met die oorskpronklike probleem deel, dan kan jy die probleem op dieselfde manier verstaan. Dít maak abstraksie baie kragtig.

In die studie van abstrakte wiskunde gebruik ons die taal van *definisies*, *stellings* en *bewyse*. Om aan hierdie denkwyse gewoond te raak (en abstrakte wiskundige denke te ontwikkel) kan aanvanklik oorweldigend voel. Maar volhard! Eendag sal jy dit 'snap' en jy sal besef dit is heelwat eenvoudiger as wat jy jou voorgestel het.

Wiskunde word nie gelees soos 'n roman nie. Jy benodig 'n *pen en notaboekie* byderhand en jy sal aktief by die materiaal *betrokke* moet raak. Byvoorbeeld, as jy 'n definisie teëkom, begin deur dit in jou notaboekie neer te skryf. Net die blote skryf daarvan kan terapeuties wees!

As jy 'n uitgewerkte voorbeeld behandel, skryf die voorbeeld self uit. Miskien probeer die voorbeeld vir jou wys dat A gelyk aan B is. Vra jouself af: Verstaan ek wat 'A' werklik beteken? En wat 'B' beteken? Slegs dan is jy gereed om te oorweeg of A gelyk aan B is!

Baie sterkte met hierdie nuwe fase van jou wiskundige opleiding. Geniet die reis!

Inhoudsopgawe

Hoofstuk 1

Abstrakte vektorruimtes

1.1 Inleiding

1.1.1 Drie verskillende versamelings

Ons begin met ’n speletjie. In wiskunde is ’n *versameling* X maar net ’n kolleksie van onderskeibare objekte. Hierdie objekte word *elemente* van X genoem.

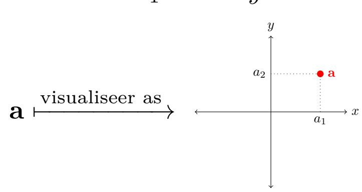
Ek gaan drie verskillende versamelings aan jou toon en jy moet sê watter eienskappe hulle in gemeen het.

Die eerste versameling, A, word gedefinieer as die versameling van alle geordende pare (x, y), waar x en y reële getalle is.

> Kom ons stop hier vir ’n oomblik en vertaal die definisie van Afrikaans na wiskundige simbole. Die vertaling is:
>
> $$A := \{(a_1,\, a_2) : a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}. \tag{1.1.1}$$
>
> Die := staan vir ‘is gedefinieer as’. Die { en } simbole staan vir ‘die versalmeling van alle’. Die enkele dubbelpunt : staan vir ‘waar’ of ‘sodat’. Die komma tussen a en b staan vir ‘en’. Die $\in$ staan vir `’n element van’. En $\mathbb{R}$ staan vir die versameling van alle reële getalle. Veels geluk! — jy gebruik die taal van wiskunde!

’n Element van A is ’n arbitrêre paar van reële getalle $\mathbf{a} = (a_1,\, a_2)$. Byvoorbeeld, $(1,\, 2) \in A$ en $(3.891,\, e^{\pi})$ is elemente van A. Let ook op dat ek ’n vetdruk $\mathbf{a}$ gebruik om na ’n element van A te verwys. Dit is sodat ons $\mathbf{a}$ kan onderskei van sy *komponente* a_1 en a_2, wat net gewone getalle is (nie elemente van A nie).

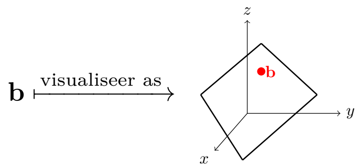
Ons kan ’n element $\mathbf{a}$ van A visualiseer as ’n punt in die Cartesiese vlak waarvan die x-koördinaat a_1 en die y-koördinaat a_2 is:



Die tweede versameling, B, word gedefinieer as die versameling van alle geordende reële drietalle $(u_1,\, u_2,\, u_3)$, wat $u_1 - u_2 + u_3 = 0$ bevredig. In wiskundige simbole is dit soos volg:

$$B := \{(b_1,\, b_2,\, b_3) : b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R} \text{ en } b_1 - b_2 + b_3 = 0\}. \tag{1.1.2}$$

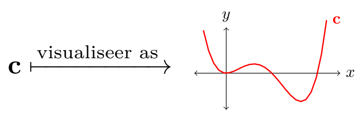
Byvoorbeeld, $(2,3,1) \in B$, maar $(1,1,1) \notin B$. Ons kan 'n element $\mathbf{b}$ van B visualiseer as 'n punt in die vlak in 3-dimensionele ruimte wat deur die vergelyking $x - y + z = 0$ daargestel word:



Die derde versameling, C, is die versameling van alle vierdegraadse polinome. Omgesit in wiskundige simbole, ,

$$C := \{\text{polinome met graad} \leq 4\}. \tag{1.1.3}$$

Onthou dat die *graad* van 'n polinoom is die grootse mag van x wat daarin verskyn. Byvoorbeeld, $\mathbf{c} = x^4 - 3x^3 + 2x^2$ is 'n vierdegraadse polinoom; so ook is $\mathbf{p} = 2x^3 + \pi x$. So $\mathbf{c}$ en $\mathbf{p}$ is elemente van C. Maar $\mathbf{r} = 8x^5 - 7$ en $\mathbf{s} = \sin(x)$ is nie elemente van C nie. Ons kan 'n element $\mathbf{c} \in C$ (i.e. 'n vierdegraadse polinoom) met sy *grafiek* visualiseer. Byvoorbeeld, die polinoom $\mathbf{c} = x^4 - 3x^3 + 2x^2 \in C$ word soos volg visualiseer:



Daar het jy dit. Ek het drie versamelings definieer: A, B en C, en ek het verduidelik hoe elkeen visualiseer kan word. Die drie versamelings lyk aanvanklik redelik verskillend. Elemente van A is arbitrêre punte in $\mathbb{R}^2$. Elemente van B is punte in $\mathbb{R}^3$ wat 'n sekere vergelyking bevredig. Elemente van C is almal polinome.

Watter kenmerke het hierdie versamelings in gemeen?

1.1.2 Gedeelde kenmerke van die versamelings

Ek wil fokus op twee kenmerke wat versamelings in A, B en C in gemeen het.

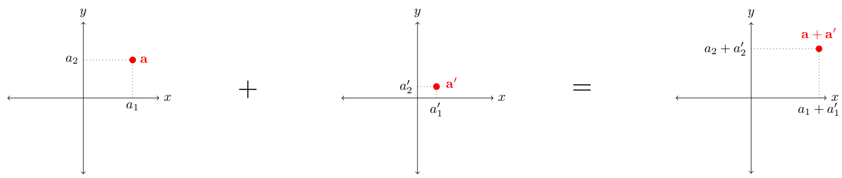
1.1.2.1 Sommering

Eerstens het aldrie hierdie versamelings 'n natuurlike *sommeringsbewerking*. Ons kan twee elemente in 'n versameling bymekaar tel om 'n derde element in dieselfde versameling te kry.

In Versameling A kan ons twee elmente $\mathbf{a} = (a_1,\, a_2)$ en $\mathbf{a}' = (a'_1,\, a'_2)$ bymekaar tel deur hulle onderskeie komponente bymekaar te tel om 'n nuwe element $\mathbf{a} + \mathbf{a}' \in A$ te vorm:

$$\underbrace{(a_1,\, a_2)}_{\mathbf{a}} + \underbrace{(a'_1,\, a'_2)}_{\mathbf{a}'} := \underbrace{(a_1 + a'_1,\, a_2 + a'_2)}_{\mathbf{a}+\mathbf{a}'} \tag{1.1.4}$$

Byvoorbeeld, $(1,\, 3) + (2,\, -1.6) = (3,\, 1.4)$. Ons kan die sommeringsbewerking soos volg visualiseer:



Ons kan 'n soortgelyke benadering in versameling B volg. Versonderstel ons het twee elemente van B, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ en $\mathbf{b}' = (b_1', b_2', b_3')$. Let daarop dat, omdat $\mathbf{b} \in B$, bevredig $\mathbf{b}$ se komponente die vergelyking $b_1 - b_2 + b_3 = 0$. So bevredig b' ook $b_1' - b_2' + b_3' = 0$. Ons kan $\mathbf{b}$ en $\mathbf{b}'$ saamtel om 'n nuwe element $\mathbf{b} + \mathbf{b}'$ van B te kry, deur hulle komponente saam te tel soos tevore:

$$\underbrace{(b_1, b_2, b_3)}_{\mathbf{b}} + \underbrace{(b_1', b_2', b_3')}_{\mathbf{b}'} := \underbrace{(b_1 + b_1', b_2 + b_2', b_3 + b_3')}_{\mathbf{b}+\mathbf{b}'} \tag{1.1.5}$$

Nou moet ons versigtig wees. Hoe weet ons dat die uitdrukking aan die regterkant regtig 'n element van B is? Ons moet seker maak dat dit die vergelyking 'die eerste komponent minus die tweede komponent plus die derde komponent is gelyk aan nul' bevredig. Kom ons doen dit formeel:

$$\begin{aligned}(\mathbf{b}+\mathbf{b}')_1 - (\mathbf{b}+\mathbf{b}')_2 + (\mathbf{b}+\mathbf{b}')_3 &= (b_1 + b_1') - (b_2 + b_2') + (b_3 + b_3') \\ . &= (b_1 - b_2 + b_3) + (b_1' - b_2' + b_3') \\ &= 0 + 0 \\ &= 0.\end{aligned}$$

B kan op die selfde manier as A visualiseer word.

Daar is ook 'n sommeringsbewerking in die versameling C. Ons kan twee polinome algebraïes bymekaartel deur hulle ooreenstemmende koëffisiënte bymekaar te tel:

$$\begin{aligned}&[c_4x^4 + c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x^1 + c_0] + [d_4x^4 + d_3x^3 + d_2x^2 + d_1x^1 + d_0] \\ &:= (c_4 + d_4)x^4 + (c_3 + d_3)x^3 + (c_2 + d_2)x^2 + (c_1 + d_1)x^1 + (c_0 + d_0)\end{aligned} \tag{1.1.6}$$

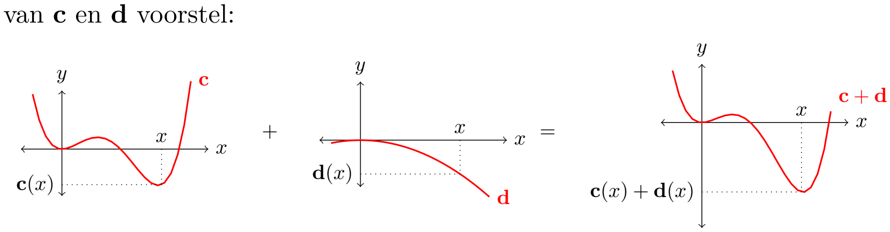
Byvoorbeeld,

$$[2x^4 + x^2 - 3x + 2] + [2x^3 - 7x^2 + x] = 2x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 2x + 2.$$

Daar is nog 'n manier om aan die sommering van polinome te dink. Elke polinoom $\mathbf{c}$ kan gesien word as 'n *funksie*, in die sin dat ons 'n arbitrêre waarde x in die polinoom $\mathbf{c}$ in kan vervang, en dit sal 'n waarde $\mathbf{c}(x)$ voortbring. Byvoorbeeld, as $\mathbf{c}(x) = 3x^2 - 1$, dan is $\mathbf{c}(2) = 11$. As ons polinome as funksies beskou, dan kan aan die som $\mathbf{c} + \mathbf{d}$ van twee polinome gedink word as 'n nuwe funksie wat, wanneer 'n getal x invervang word, dit die waarde $\mathbf{c}(x) + \mathbf{d}(x)$ teruggee. Wiskundig geskryf,

$$(\mathbf{c} + \mathbf{d})(x) := \mathbf{c}(x) + \mathbf{d}(x) \tag{1.1.7}$$

Deur so te dink, kan ons die grafiek van $\mathbf{c} + \mathbf{d}$ as die som van die grafieke van $\mathbf{c}$ en $\mathbf{d}$ voorstel:



1.1.2.2 Nul-element

In aldrie versamelings A, B en C, bestaan daar 'n spesifieke element (die *nul-element*) $\mathbf{0}$ wat, as dit by 'n ander element getel word, lewer dit weer dieselfde element onveranderd terug.

In A word die nul-element $\mathbf{0}$ definieer deur

$$\mathbf{0} := (0, 0) \in A. \tag{1.1.8}$$

Wanneer jy hierdie punt by 'n ander punt $(a_1,\, a_2) \in A$ tel, gebeur niks nie!

$$(0,\, 0) + (a_1,\, a_2) = (a_1,\, a_2).$$

Moenie die nul-element $\mathbf{0} \in A$ met die reële getal nul $(0 \in \mathbb{R})$ verwar nie. Dit is nog 'n rede hoekom ek vetdruk gebruik! (Jy moet elemente van A onderstreep om die onderskeid te tref.)

$(0, 0, 0) \in B$ is die nul-element $\mathbf{0}$ in B. As jy dit by 'n ander punt $(u_1, u_2, u_3) \in B$ tel, gebeur niks nie!

$$(0,\, 0,\, 0) + (u_1,\, u_2,\, u_3) = (u_1,\, u_2,\, u_3).$$

In C is die *nul-polinoom* die nul-element $\mathbf{0}$. Algebraïes is dit die vierdegraadse polinoom waarvan die koëffisiënte almal nul is:

$$\mathbf{0} = 0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0 \tag{1.1.9}$$

As ons aan die polinoom as 'n funksie dink, dan is die nul-polinoom $\mathbf{0}$ die funksie wat vir alle waardes van x nul is, i.e. $\mathbf{0}(x) = 0$ vir alle x. Hoe ons ookal daaraan dink, as ons die nul-polinoom by 'n ander polinoom tel, gebeur niks nie!

$$\begin{aligned}&[0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0] + [c_4x^4 + c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0]\\ &= [c_4x^4 + c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0]\end{aligned}$$

1.1.2.3 Skalaarvermenigvuldiging

Die laaste kenmerk wat A, B en C in gemeen het is dat met elke versameling, hul elemente met reële getalle *vermenigvuldig* kan word en steeds in die versameling sal wees.

Byvoorbeeld, as $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ 'n elment van A is, dan kan ons dit met 'n arbitrêre reële getal, sê maar 9, vermenigvuldig, om 'n nuwe element $9 \cdot a$ van A te kry. Hierdie vermenigvuldiging word komponentgewys gedoen:

$$9 \cdot (a_1,\, a_2) := (9a_1,\, 9a_2). \tag{1.1.10}$$

In die algemeen, as $k \in \mathbb{R}$ 'n arbitrêre reële getal is, dan kan ons 'n arbitrêre element $\mathbf{a} \in A$ met k vermenigvuldig om 'n nuwe element $k \cdot \mathbf{a} \in A$ te kry deur elke komponent van $\mathbf{a}$ met k te vermenigvuldig:

$$\underbrace{k.(a_1,\, a_2)}_{\text{Skalaarvermenigvuldiging}} := (\underbrace{ka_1}_{\text{Vermenigvuldig twee getalle}},\, \underbrace{ka_2})$$

Wees versigtig om te onderskei tussen skalaarvermenigvuldiging $k \cdot \mathbf{a}$ (aangedui met $\cdot$) en gewone vermenigvuldiging van reële getalle ka_1 (aangedui sonder enige simbool, die twee simbole word bloot langs mekaar geplaas). Later gaan ons 'n kortpad neem en ophou om die $\cdot$ eksplisiet uit te skryf — wees gewaarsku!

Visueel *skaleer* die vermenigvuldigingsbewerking $\mathbf{a}$ met 'n faktor van k. Dit is hoekom ons dit *skalaarvermenigvuldiging* noem.

Daar is 'n soortgelyke skalaarvermenigvuldigingsbewerking in B:

$$k(u_1,\, u_2,\, u_3) := (ku_1,\, ku_2,\, ku_3) \tag{1.1.11}$$

Daar is ook 'n skalaarvermenigvuldigingsbewerking in C. Ons vermenigvuldig elke koëffisient van 'n polinoom $\mathbf{c} \in C$ met k:

$$k \cdot [c_4x^4 + c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0] = kc_0x^4 + kc_3x^3 + kc_2x^2 + kc_1x + kc_0 \tag{1.1.12}$$

As ons aan 'n polinoom $\mathbf{c}$ as 'n funksie dink, dan korrespondeer dit met vertikale *skalering* van die grafiek met 'n faktor van k.

1.1.3 Kenmerkse wat die versamelings *nie* het nie

Kom on noem 'n paar kenmerke wat die versamelings *nie* het nie, of ten minste nie in gemeen het nie.

- Die versameling $A = \mathbb{R}^2$ het 'n *vermenigvuldigingsbewerking*. Dit is omdat ons $\mathbb{R}^2$ as die komplekse vlak $\mathbb{C}$ kan beskou; ons weet hoe om komplekse getalle kan vermenigvuldig. Daar is geen duidelike kandidaat vir 'n vermenigvuldigingsbewerking op B nie. Dieselfde geld vir C: as jy twee vierdegraadse polinome in C vermenigvuldig, eindig jy met 'n agtstegraadse polinoom, wat nie in C is nie!
- Daar is 'n *'bereken die afgeleide'*-bewerking op C,

  $$\mathbf{c} \mapsto \frac{d}{dx}\mathbf{c}$$

  wat ons later weer sal teëkom. Let op dat die wanneer die afgeleide bereken word, die graad van 'n polinoom met 1 afneem, so die resultaat bly in C, wat beteken dat dit 'n goedgedefinieerde afbeelding van C na C is. Daar is geen ooreenstemmende bewerking hiervoor in A en B nie.

  > Let daarop dat daar geen *integrasie*-afbeelding van C na C is nie, want integrasie van 'n polinoom *verhoog* die graad met 1, so die resultaat mag dalk 'n polinoom van graad 5 wees, wat nie in C is nie!

1.1.4 Reëls

Ons het gevind dat elk van ons drie versamelings A, B en C 'n *sommeringsbewerking* $+$, 'n *nul-element* $\mathbf{0}$ en 'n *skalaarvermenigvuldigingsbewerking* $\cdot$ het. Kan ons enige reëls identifiseer waaraan hierdie bewerkings in al drie versamelings moet voldoen?

Byvoorbeeld, ons kan aan die sommeringsbewerking in A dink as 'n funksie wat aan elke elementpaar $\mathbf{a}$ en $\mathbf{a}'$ in A 'n nuwe element $\mathbf{a} + \mathbf{a}'$ in A toeken. Voldoen hierdie bewerking aan enige reëls?

Kom ons kyk. Laat $\mathbf{a} = (a_1,\, a_2)$ en $\mathbf{a}' = (a_1',\, a_2')$ elemente van A wees. Ons kan hulle in twee verskillende volgordes bymekaar tel,

$$\mathbf{a} + \mathbf{a}' = (a_1 + a_1',\, a_2 + a_2')$$

en

$$\mathbf{a}' + \mathbf{a} = (a_1' + a_1,\, a_2' + a_2).$$

Kom dit op dieselfde neer? In ander woorde, geld

$$\mathbf{a} + \mathbf{a}' = \mathbf{a}' + \mathbf{a} \tag{1.1.13}$$

as 'n reël? Die antwoord is *ja*, maar hoekom? Om na te gaan of twee elemente van A dieselfde is, moet ons nagaan of elkeen van hulle komponente gelyk is. Die eerste komponent van $\mathbf{a} + \mathbf{a}'$ is $a_1 + a_1'$. Die eerste komponent van $\mathbf{a}' + \mathbf{a}$ is $a_1' + a_1$. Is $a_1 + a_1' = a_1' + a_1$? Ja — want beide is net gewone reële getalle (nie elemente van A nie), en ons weet dat vir gewone reële getalle kan jy in enige orde saamtel met dieselfde resultaat. So die eerste komponent van $\mathbf{a} + \mathbf{a}'$ is gelyk aan die eerste komponent van $a' + a$. Net so kan ons nagaan dat die tweede komponent van $\mathbf{a} + \mathbf{a}'$ gelyk is aan die tweede komponent van $\mathbf{a}' + \mathbf{a}$. So all die komponente van $\mathbf{a} + \mathbf{a}'$ is gelyk aan al die ooreenstemmende komponente van $\mathbf{a}' + \mathbf{a}$. So, uiteindelik kan ons tot die gevolgtrekking kom dat $\mathbf{a} + \mathbf{a}' = \mathbf{a}' + \mathbf{a}$.

Geld hierdie reël (1.1.13) ook vir sommeringsoperators in B en C? Ja. Byvoorbeeld, kom ons gaan na dat dit vir C geld. Veronderstel dat $\mathbf{c}$ en $\mathbf{c}'$ polinome in C is. Geld die reël

$$\mathbf{c} + \mathbf{c}' = \mathbf{c}' + \mathbf{c} \tag{1.1.14}$$

steeds?

Die linker- en regterkante van (1.1.14) is elemente van C. En alle elemente van C is polinome. Om na te gaan of twee polinome gelyk is, moet ons nagaan of hulle gelyk is *as funksies*, met ander woorde, of jy identiese resultate uitkry vir enige moontlike insetwaarde van x wat invervang word.

By 'n arbitrêre insetwaarde x is die linkerkant $(\mathbf{c} + \mathbf{c}')(x) = \mathbf{c}(x) + \mathbf{c}'(x)$. Aan die anderkant is die regterkant $(\mathbf{c}' + \mathbf{c})(x) = \mathbf{c}'(x) + \mathbf{c}(x)$. Nou, let op dat $\mathbf{c}(x)$ en $\mathbf{c}'(x)$ gewone getalle is (en nie polinome nie). So $\mathbf{c}(x) + \mathbf{c}'(x) = \mathbf{c}'(x) + \mathbf{c}(x)$, want dit is waar vir gewone getalle. So vir elke insetwaarde x, $(\mathbf{c} + \mathbf{c}')(x) = (\mathbf{c}' + \mathbf{c})(x)$. Daarom is die polinome $\mathbf{c} + \mathbf{c}'$ en $\mathbf{c}' + \mathbf{c}$ gelyk, hulle uitsetwaarde is dieselfde vir alle getalle x.

Daar is ander reëls wat ook vir al drie versamelings geld. Byvoorbeeld, in al drie versamelings geld die reël

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) \tag{1.1.15}$$

vir alle elemente $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ en $\mathbf{z}$. Kan jy ander reëls identifiseer wat vir al drie versamelings geld?

1.2 Definisie van 'n abstrakte vektorruimte

Wiskunde behels die identifisering van patrone. Ons het drie versamelings gevind, A, B en C, wat aanvanklik baie soortgelyk voorkom maar baie in gemeen het. In elke versamiling is daar 'n sommeringsbewerking, 'n nulvektor en 'n skalaarvermenigvuldigingbewerking. Verder geld dieselfde reëls vir hierdie bewerkings. Kom ons noteer hierdie patroon deur dit 'n naam te gee en die reëls eksplisiet neer te pen.

Definisie 1.2.1 A **vektorruimte** is 'n versameling V wat met die volgende data toegerus is:

D1. 'n *Sommeringsbewerking*. (I.e. vir elke elementpaar $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V$, word 'n nuwe element $\mathbf{v} + \mathbf{v}'$ definieer.)

D2. 'n *Nul-vektor.* (I.e. 'n spesiale vektor $\mathbf{0} \in V$ word bepaal.)

D3. 'n *Skalaarvermenigvuldigingsbewerking.* (I.e., vir elke reële getal k en elke element $\mathbf{v} \in V$ word 'n nuwe element $k \cdot \mathbf{v} \in V$ definieer.)

Hierdie data moet aan die volgende reëls vir alle $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ in V en vir alle reële getalle k en l voldoen:

R1. $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$

R2. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$

R3a. $\mathbf{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v}$

R3b. $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$

R4. $k \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = k \cdot \mathbf{v} + k \cdot \mathbf{w}$

R5. $(k + l) \cdot \mathbf{v} = k \cdot \mathbf{v} + l \cdot \mathbf{v}$

R6. $k \cdot (l \cdot \mathbf{v}) = (kl) \cdot \mathbf{v}$

R7. $1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$

R8. $0 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$

◊

Ons noem elemente van 'n vektorruimte *vektore* en ons skryf hulle in vetdruk, bv. $\mathbf{v} \in V$. Dit is om vektore van reële getalle te onderskei, wat ons *skalare* noem en wat nie in vetdruk geskryf word nie. Dit is moeilik om vetdruk met handskrif uit te druk, so jy kan hulle onderstreep, soos volg: $\underline{v}$.

In hierdie hoofstuk sal ons skalaarvermenigvuldiging met 'n $\cdot$ skryf, byvoorbeeld $k \cdot \mathbf{v}$, maar in hieropvolgende hoofstukke sal on doodgewoon $k\mathbf{v}$ skryf, so weer versigtig!

Om te bewys dat 'n gegewe versameling 'n vektorruimte is, moet 'n mens die volgende doen:

1. Definieer die versameling V.
2. Definieer die data van 'n sommeringsbewerking (D1), 'n nul-vektor (D2) en 'n skalaarvermenigvuldigingsbewerking (D3) op V.
3. Gaan na dat hierdie data aan reëls (R1) - (R8) voldoen.

1.3 Eerste voorbeeld van 'n vektorruimte

Ons is na die definisie (Definisie 1.2.1) van 'n abstrakte vektorruimte gelei deur die eienskappe van versamelings A, B en C in Afdeling 1.1 te bestudeer. Kom ons gaan na dat B wel 'n abstrakte vektorruimte is soos gedifineer in Definisie 1.2.1. Die ander versamelings word as oefeninge aan jou oorgelaat.

Voorbeeld 1.3.1 Die versameling B is 'n vektorruimte.. ***1. Definieer 'n versameling*** B

Ons definieer

$$B := \{(u_1, u_2, u_3) : u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R} \text{ and } u_1 - u_2 + u_3 = 0\}. \tag{1.3.1}$$

2. Definieer sommering, die nul-vektor en skalaarvermenigvuldiging.

D1. Sommering Ons definieer sommering soos volg. Veronderstel $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ en $\mathbf{v} = (v_1, , v_2, v_3)$ is elemente van B. Let op dat dit beteken $u_1 - u_2 + u_3 = 0$ en $v_1 - v_2 + v_3 = 0$. Ons definieer $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ as:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} := (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3). \tag{1.3.2}$$

Ons moet nagaan dat dit sin maak. Ons behoort te vind dat $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ ook 'n element van B is. Ons kan nie bloot enige definisie neerskryf nie! Om na te gaan of $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ 'n element van$B$ is, moet ons nagaan of dit vergelyking (1.3.1) bevredig. Kom ons kyk:

$$\begin{aligned}
&(u_1 + v_1) - (u_2 + v_2) + (u_3 + v_3) \\
&= (u_1 - u_2 + u_3) + (v_1 - v_2 + v_3) && \text{(Hierdie algebraïese stap is waar vir gewone getalle)} \\
&= 0 + 0 && \text{(want } \mathbf{u} \text{ en } \mathbf{v} \text{ is in } B\text{)} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Daarom het ons dat $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ inderdaad 'n element van B is, so ons het ons eie goed-gedefinieerde? sommeringsbewerking op B definieer, wat twee arbitrêre elemente van B neem en weer 'n element van B teruggee.

D2. Nulvektor Ons definieer die nulvektor $\mathbf{0} \in B$ as

$$\mathbf{0} := (0, 0, 0). \tag{1.3.3}$$

Ons moet seker maak dat dit sin maak. Is $(0, 0, 0)$ regtig 'n element van B, oftewel, bevredig dit vergelyking (1.3.1)? Ja, omdat $0 - 0 + 0 = 0$. So ons het 'n goed-gedefinieerde nul-vektor.

D3. Skalaarvermenigvuldiging Ons definieer skalaarvermenigvuldiging soos op B soos volg. Laat k 'n reële getal en$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ 'n element van B wees. Ons definieer

$$k \cdot \mathbf{u} := (ku_1, ku_2, ku_3). \tag{1.3.4}$$

Ons moet seker maak dat dit sinmaak. As ek 'n vektor $\mathbf{v}$ in B met 'n skalaar k vermenigvuldig, dan moet die resultaat $k \cdot \mathbf{u}$ 'n element van B wees. Behoort (ku_1, ku_2, ku_3) werklik aan B? Kom ons kyk of dit die definiërende vergelyking (1.3.1) bevredig:

$$\begin{aligned}
&ku_1 - ku_2 + ku_3 \\
&= k(u_1 - u_2 + u_3) && \text{(Hierdie algebraïese stap is waar vir gewone getalle)} \\
&= k0 && \text{(want } \mathbf{u} \text{ is in } B\text{)} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Daarom is $k \cdot \mathbf{u}$ wel 'n element van B, so ons het 'n goed-gedefinieerde skalaarvermenigvuldigingsbewerking op B gevind.

3. Maak seker die data bevredig die reëls.

Ons moet seker maak dat ons data D1, D2 en D3 reëls R1 — R8 bevredig. So, veronderstel $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ en $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ is in B en veronderstel dat k en l reëlle getalle is.

R1 Ons gaan na:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{v}+\mathbf{w} && \text{(R1.)}\\
&= (v_1+w_1,\, v_2+w_2,\, v_3+w_3) && \text{(definisie van sommering in } B\text{)}\\
&= (w_1+v_1,\, w_2+v_2,\, w_3+v_3) && \text{(want } x+y=y+x \text{ is waar vir reële getalle)}\\
&= \mathbf{w}+\mathbf{v}. && \text{(definisie van sommering in } B\text{)}
\end{aligned}$$

R2 Ons gaan na:

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}\\
&= (u_1+v_1,\, u_2+v_2,\, u_3+v_3)+\mathbf{w} && \text{(definisie van sommering in } B\text{)}\\
&= ((u_1+v_1)+w_1,\, (u_2+v_2)+w_2,\, (u_3+v_3)+w_3) && \text{(definisie van sommering in } B\text{)}\\
&= (u_1+(v_1+w_1),\, u_2+(v_2+w_2),\, u_3+(v_3+w_3)) && \text{(want } (x+y)+z=x+(y+z) \text{ is waar vir reële g}\\
&= \mathbf{u}+(v_1+w_1,\, v_2+w_2,\, v_3+w_3) && \text{(definisie van sommering in } B\text{)}\\
&= \mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w}) && \text{(definisie van sommering in } B\text{).}
\end{aligned}$$

R3 Ons gaan na:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{0}+\mathbf{v}\\
&= (0,\,0,\,0)+(v_1,\,v_2,\,v_3) && \text{(definisie van die nul-vektor in}B\\
&= (0+v_1,\, 0+v_2,\, 0+v_3) && \text{(definisie van sommering in } B\text{)}\\
&= (v_1,\,v_2,\,v_3) && \text{(want } x+0=x \text{ is waar vir reële getalle)}\\
&= \mathbf{v}.
\end{aligned}$$

Met dieselfde benadering, gaan ons na dat $\mathbf{v}+\mathbf{0}=\mathbf{v}$.

R4 Ons gaan na:

$$\begin{aligned}
&k\cdot(\mathbf{v}+\mathbf{w})\\
&= k\cdot(v_1+w_1,\, v_2+w_2,\, v_3+w_3) && \text{(definisie van sommering in } B\text{)}\\
&= (k(v_1+w_1,\, k(v_2+w_2),\, k(v_3+w_3)) && \text{(definisie van skalaarvermenigvuldiging in}B\text{)}\\
&= (kv_1+kw_1,\, kv_2+kw_2,\, kv_3+kw_3) && \text{(want } k(x+y)=kx+ky \text{ vir reële getalle } x,y\text{)}\\
&= (kv_1,\, kv_2,\, kv_3)+(kw_1,\, kw_2,\, kw_3) && \text{(definisie van sommering in } B\text{)}\\
&= k\cdot\mathbf{v}+k\cdot\mathbf{w} && \text{(definisie van skalaarvermenigvuldiging in } B\text{)}
\end{aligned}$$

R5 Ons gaan na:

$$\begin{aligned}
&(k+l)\cdot\mathbf{v}\\
&= ((k+l)v_1,\, (k+l)v_2,\, (k+l)v_3) && \text{(definisie van skalaarvermenigvuldiging in } B\text{)}\\
&= (kv_1+lv_1,\, kv_2+lv_2,\, kv_3+lv_3) && \text{(want } (k+l)x=kx+lx \text{ vir reële getalle)}\\
&= (kv_1,\, kv_2,\, kv_3)+(lv_1,\, lv_2,\, lv_3) && \text{(definisie van sommering in } B\text{)}\\
&= k\cdot\mathbf{v}+l\cdot\mathbf{v} && \text{(definisie van skalaarvermenigvuldiging in } B\text{)}
\end{aligned}$$

R6 Ons gaan na:

$$\begin{aligned}
&k\cdot(l\cdot\mathbf{v})\\
&= k\cdot(lv_1,\, lv_2,\, lv_3) && \text{(definisie van skalaarvermenigvuldiging in } B\text{)}\\
&= (k(lv_1),\, k(lv_2),\, k(lv_3)) && \text{(definisie van skalaarvermenigvuldiging in } B\text{)}\\
&= ((kl)v_1,\, (kl)v_2,\, (kl)v_3) && \text{(want } k(lx)=(kl)x \text{ vir reële getalle)}\\
&= (kl)\cdot\mathbf{v} && \text{(definisie van skalaarvermenigvuldiging in } B\text{).}
\end{aligned}$$

R7 Ons gaan na:

$$\begin{aligned} 1 \cdot \mathbf{v} &= (1v_1,\, 1v_2,\, 1v_3) && \text{(definisie van skalaarvermenigvuldiging in } B\text{)} \\ &= (v_1,\, v_2,\, v_3) && \text{(want } 1x = x \text{ vir reële getalle } x\text{)} \\ &= \mathbf{v}. \end{aligned}$$

R8 Ons gaan na:

$$\begin{aligned} 0 \cdot \mathbf{v} &= (0v_1,\, 0v_2,\, 0v_3) && \text{(definisie van skalaarvermenigvuldiging in in } B\text{)} \\ &= (0,\, 0,\, 0) && \text{(want } 0x = 0 \text{ vir reële getalle} \\ &= \mathbf{0} && \text{(definisie van die nul-vektor in } B\text{).} \end{aligned}$$

□

Oefeninge

1. Bewys dat die versameling A ui Afdeling 1.1 toegerus met die sommeringsbewerking (1.1.4), die nulvektor (1.1.8) en die skalaarvermenigsvuldigingsbewerking (1.1.10) 'n vektorruimte is.

2. Bewys dat die versameling C uit Afdeling 1.1 toegerus met die sommeringsbewerking (1.1.6), die nulvektor (1.1.9) en die skalaarvermenigsvuldingsbewerking (1.1.12) 'n vektorruimte is.

3. Definieer C' as die versameling van alle polinome met graad *presies* gelyk aan 4, asook die nulpolinoom. Toon aan dat as C' die sommeringsbewerking (1.1.6), die nulvektor (1.1.9) en die skalaarvermenigvuldigingsbewerking (1.1.12) gegee word, dan is C' *nie* 'n vektorruimte nie.

Wenk. Gee 'n teenvoorbeeld!

Oplossing. Beskou die volgende twee polinome in C':

$$\mathbf{p}(x) = x^4 + x^3,$$
$$\mathbf{q}(x) = -x^4.$$

Let op dat die som $p + q$ nie in C' is nie, want

$$\mathbf{p}(x) + \mathbf{q}(X) = (1-1)x^4 + x^3 = x^3$$

wat graad 3 het. Dus C' is nie geslote onder addisie nie en so dit kan nie 'n vektorruimte wees nie, want die sommeringsbewerking is nie goedgedefineerd op C' nie.

4. Beskou die versameling

$$X := \{(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 : a_1 \geq 0, a_2 \geq 0\}$$

toegerus met dieselfde sommeringsbewerking (1.1.4), nulvektor (1.1.8) en skalaarvermenigvuldigingsbewerking (1.1.10) as in A. Is X 'n vektorruimte? Indien nie, hoekom nie?

Oplossing. X is not a vector space since the additive inverse of an element in X may fail to be in X. For example, consider $(1, 0)$. The additive inverse of $(1, 0)$ would have to be $(-1, 0)$. However, $(-1, 0)$ is certainly *not* in X. Hence X is not a vector space.

Oplossings

· Oefeninge

1.3.3. Oplossing. Beskou die volgende twee polinome in C':

$$\begin{aligned}\mathbf{p}(x) &= x^4 + x^3, \\ \mathbf{q}(x) &= -x^4.\end{aligned}$$

Let op dat die som $p + q$ nie in C' is nie, want

$$\mathbf{p}(x) + \mathbf{q}(X) = (1-1)x^4 + x^3 = x^3$$

wat graad 3 het. Dus C' is nie geslote onder addisie nie en so dit kan nie 'n vektorruimte wees nie, want die sommeringsbewerking is nie goed-gedefineerd op C' nie.

1.3.4. Oplossing. X is not a vector space since the additive inverse of an element in X may fail to be in X. For example, consider $(1,0)$. The additive inverse of $(1,0)$ would have to be $(-1,0)$. However, $(-1,0)$ is certainly *not* in X. Hence X is not a vector space.

1.4 Verdere voorbeelde en slaggate

Voorbeeld 1.4.1 Nie 'n vektor-ruimte nie. Definieer die versameling V deur

$$V := \{a, b\}. \tag{1.4.1}$$

Definieer die sommeringsbewerking deur

$$\begin{aligned}\mathbf{a} + \mathbf{a} &:= \mathbf{a} & \quad \mathbf{a} + \mathbf{b} &:= \mathbf{a} \\ \mathbf{b} + \mathbf{a} &:= \mathbf{b} & \quad \mathbf{b} + \mathbf{b} &:= \mathbf{c}\end{aligned}$$

Om na te gaan of dit 'n goed-gedefinieerde bewerking is, moet ons nagaan dat die sommering van enige twee elemente van V 'n goed-gedefinieerde element van V lewer. Maar $\mathbf{v} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$, so die som van $\mathbf{b} \in V$ met homself lewer iets ($\mathbf{c}$) wat nie 'n element van V is nie. So V is nie 'n vektorruimte nie want dit het nie 'n goed-gedefinieerde sommeringsbewerking nie. □

Voorbeeld 1.4.2 Weereens nie 'n vektor-ruimte nie. Definieer die versameling V deur

$$V := \{a, b\}. \tag{1.4.2}$$

Definieer die sommeringsbewerking as

$$\begin{aligned}\mathbf{a} + \mathbf{a} &:= \mathbf{a} & \quad \mathbf{a} + \mathbf{b} &:= \mathbf{b} \\ \mathbf{b} + \mathbf{a} &:= \mathbf{b} & \quad \mathbf{b} + \mathbf{b} &:= \mathbf{a}\end{aligned}$$

Dit is 'n goed-gedefinieerde bewerking, omdat enige twee elemente van V se som n goedgedefinieerde element van V lewer.

Definieer die nul-vektor deur

$$\mathbf{0} := \mathbf{a}. \tag{1.4.3}$$

Dit is goed-gedefinieerd, want $\mathbf{a}$ is 'n element van V.

Definieer skalaarvermenigvuldiging met 'n reële getal $k \in \mathbb{R}$ as

$$k \cdot \mathbf{a} := \mathbf{a} \text{ en } k \cdot \mathbf{b} := \mathbf{b}. \tag{1.4.4}$$

Dit is 'n goed-gedefinieerde skalaarvermenigvuldigingsbewerking, want dit laat skalaarvermenigvuldiging met enige skalaar k toe en gee 'n goed-gedefinieerde element $k \cdot \mathbf{v} \in V$ terug. □

Verstaanpunt 1.4.3 Wys dat hierdie bewerkings R1, R2, R3, R4, R6 en R7 bevredig, maar nie R5 en R8 nie.

Oplossing. R1: Ons moet kontrolleer of $\mathbf{v}+\mathbf{w} = \mathbf{w}+\mathbf{v}$ vir alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$. Duidelik is $\mathbf{a}+\mathbf{a} = \mathbf{a}+\mathbf{a}$ en soortgelyk vir $\mathbf{b}$. Finaalweg $\mathbf{b} = \mathbf{a}+\mathbf{b} = \mathbf{b}+\mathbf{a}$.

R2: Ons moet kontrolleer of $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w} = \mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$ vir alle $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$. Dit vereis dat ons 8 vergelykings in totaal kontrolleer. Ons sal net die oplossing vir een van hulle aandui, die res is soortgelyk. Ons kontrolleer of

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{b} = \mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{b}$$

Beskou:

$$\begin{aligned} \text{LK} &= (\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{b} \\ &= \mathbf{b}+\mathbf{b} \\ &= \mathbf{a}. \end{aligned}$$

Deur 'n soortgelyke metode,

$$\begin{aligned} \text{RK} &= \mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{b}) \\ &= \mathbf{a}+\mathbf{a} \\ &= \mathbf{a} \\ \therefore LK &= RK. \end{aligned}$$

R3, R4, R6, en R7 volg almal in dieselfde manier.

Ons sal aantoon hoekom R5 nie bevredig is nie. Ons sal 'n teenvoorbeeld gee. Vat $k = 2 = l, \mathbf{v} = \mathbf{b}$. Dan is:

$$\begin{aligned} \text{LK} &= (2+2).\mathbf{b} \\ &= 4.\mathbf{b} \\ &= \mathbf{b} \end{aligned}$$

maar

$$\begin{aligned} \text{RK} &= 2.\mathbf{b}+2.\mathbf{b} \\ &= \mathbf{b}+\mathbf{b} \\ &= \mathbf{a} \end{aligned}$$

Omdat LK $\neq$ RK in hierdie geval nie, kan R5 nie in algemeen waar wees nie.

Voorbeeld 1.4.4 Die nul-vektorruimte. Definieer die versameling Z as

$$Z := \{\mathbf{z}\}. \tag{1.4.5}$$

Let op dat dit net 'n enkele element bevat, $\mathbf{z}$. Definieer sommering as

$$\mathbf{z}+\mathbf{z} := \mathbf{z} \tag{1.4.6}$$

Definieer die nul-element as

$$\mathbf{0} := z. \tag{1.4.7}$$

Laastens, definieer skalaarvermenigvuldiging met 'n skalaar $k \in \mathbb{R}$ as:

$$k \cdot \mathbf{z} := \mathbf{z}. \tag{1.4.8}$$

□

Verstaanpunt 1.4.5 Wys dat hierdie data reëls R1 tot R8 bevredig.

Voorbeeld 1.4.6 $\mathbb{R}^n$**.** Definieer die versameling $\mathbb{R}^n$ as

$$\mathbb{R}^n := \{(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n) : x_i \in \mathbb{R} \text{ vir alle } i = 1 \ldots n\}. \tag{1.4.9}$$

Definieer sommering as

$$(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n) + (y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_n) := (x_1 + y_1,\, x_2 + y_2,\, \ldots,\, x_n + y_n). \tag{1.4.10}$$

Definieer die nul-element as

$$\mathbf{0} := (0,\, 0,\, \ldots,\, 0). \tag{1.4.11}$$

Definieer skalaarvermenigvuldiging as

$$k \cdot (x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n) := (kx_1,\, kx_2,\, \ldots,\, kx_n). \tag{1.4.12}$$

□

Verstaanpunt 1.4.7 Wys dat hierdie data reëls R1 tot R8 bevredig.

Voorbeeld 1.4.8 $\mathbb{R}^\infty$**.** Definieer die versameling $\mathbb{R}^\infty$ as

$$\mathbb{R}^\infty := \{(x_1,\, x_2,\, x_3,\, \ldots,) : x_i \in \mathbb{R} \text{ vir alle } i = 1, 2, 3, \ldots\} \tag{1.4.13}$$

So 'n element $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^\infty$ is 'n oneindige ry van reële getalle. Definieer die sommeringsbewerking komponentgewys:

$$(x_1,\, x_2,\, x_3,\, \ldots) + (y_1,\, y_2,\, y_3,\, \ldots) := (x_1 + y_1,\, x_2 + y_2,\, x_3 + y_3,\, \ldots). \tag{1.4.14}$$

Definieer die nul-element as

$$\mathbf{0} := (0,\, 0,\, 0,\, \ldots), \tag{1.4.15}$$

die oneindige reeks waarvan alle komponente nul is. Laastens, definieer skalaarvermenigvuldiging komponentgewys:

$$k \cdot (x_1,\, x_2,\, x_3,\, \ldots) := (kx_1,\, kx_2,\, kx_3,\, \ldots) \tag{1.4.16}$$

Die studie van oneindigheid is 'n belangrike deel van wiskunde. Het jy al die fliek *The man who knew infinity* wat oor my gaan, gesien?

□

Verstaanpunt 1.4.9 Wys dat hierdie data die reëls R1 tot R8 bevredig.

Oplossing. Ons sal net R4 kontrolleer, die res is soortgelyk.
R4 :Laat

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= (v_1, v_2, v_3, \ldots)\\ \mathbf{w} &= (w_1, w_2, w_3, \ldots)\end{aligned}$$

Ons moet kontrolleer of $k.(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = k.\mathbf{v} + k.\mathbf{w}$.

$$\begin{aligned}\text{LK} &= k.(\mathbf{v} + \mathbf{w})\\ &= k.\left[(v_1, v_2, v_3, \ldots) + (w_1, w_2, w_3, \ldots)\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= k.\,(v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3, \ldots) \\
&= (k(v_1 + w_1), k(v_2 + w_2), k(v_3 + w_3), \ldots) \\
&= (kv_1 + kw_1, kv_2 + kw_2, kv_3 + kw_3, \ldots) \\
&= (kv_1, kv_2, kv_3, \ldots) + (kw_1, kw_2, kw_3, \ldots) \\
&= k.(v_1, v_2, v_3, \ldots) + k.(w_1, w_2, w_3, \ldots) \\
&= k.\mathbf{v} + k.{=}w \\
&= \text{RK}
\end{aligned}$$

Voorbeeld 1.4.10 Funksies op 'n versameling. Laat X enige versameling wees. Definieer die versameling $\text{Fun}(X)$ van *reële getal-funksies op X* as

$$\text{Fun}(X) := \{\mathbf{f} : X \to \mathbb{R}\}. \tag{1.4.17}$$

Let op dat die funksies arbitrêr kan wees; daar is geen vereiste dat hulle kontinu of differensieerbaar moet wees nie. So 'n vereiste maak nie sin nie, aangesien X 'n arbitrêre versameling kan wees. Byvoorbeeld, X kan die versameling $\{a, b, c\}$ wees — sonder enige verdere inligting maak dit nie sin om te sê dat die funksie $\mathbf{f} : X \to \mathbb{R}$ kontinu is nie.

Definieer die sommeringsbewerking as

$$(\mathbf{f} + \mathbf{g})(x) := \mathbf{f}(x) + \mathbf{g}(x), x \in X \tag{1.4.18}$$

Maak seker dat jy verstaan wat hierdie formule sê! Ons begin met twee funksies$\mathbf{f}$ en $\mathbf{g}$, en ons definieer hulle som $\mathbf{f} + \mathbf{g}$. Dit is veronderstel om self 'n funksie van X te wees. Om 'n funksie op X te definieer, moet ek vir elke $x \in X$ neerskryf watter waarde die funksie lewer. En dit is wat die formule sê: die waarde wat die funksie $\mathbf{f} + \mathbf{g}$ aan die element $x \in X$ toeken, word defnieer as die waarde $\mathbf{f}(x)$ plus die getal $\mathbf{g}(x)$. Onthou: $\mathbf{f}$ is 'n funksie, terwyl $\mathbf{f}(x)$ 'n getal is!

Definieer die nul-vektor $\mathbf{0}$ as die funksie wat die getal 0 lewer vir elke insetwaarde $x \in X$:

$$\mathbf{0}(x) := 0 \text{ vir alle } x \in X. \tag{1.4.19}$$

Definieer skalaarvermenigvuldiging as

$$(k.\mathbf{f})(x) := k\mathbf{f}(x). \tag{1.4.20}$$

□

Verstaanpunt 1.4.11 Notasie-uitdaging! Sê of die volgende kombinasie van simbole 'n reële waarde of 'n funksie voorstel.

1. $\mathbf{f}$
2. $\mathbf{f}(x)$
3. $k \cdot \mathbf{f}$
4. $(k \cdot \mathbf{f})(x)$

Oplossing.

1. Funksie
2. Reële getal
3. Funksie
4. Reële getal

Verstaanpunt 1.4.12 Laat $X = \{a, b, c\}$.

1. Skryf drie verskillende funksies$\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h}$ in $\mathrm{Fun}(X)$ neer.

2. Vir die funksies wat jy in Item 1.4.12.1 geskryf het, bereken $\mathbf{f} + \mathbf{g}$, asook $3 \cdot \mathbf{h}$.

Oplossing.

1.

$$\begin{aligned} f(a) &= 4 \\ f(b) &= 0 \\ f(c) &= 2 \\ \\ g(a) &= 1 \\ g(b) &= 1 \\ g(c) &= 1 \\ \\ h(a) &= 0 \\ h(b) &= 3 \\ h(c) &= 0 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} (f + g)(a) &= 5 \\ (f + g)(b) &= 1 \\ (f + g)(c) &= 3 \\ \\ (3.h)(a) &= 0 \\ (3.h)(b) &= 9 \\ (3.h)(c) &= 0 \end{aligned}$$

Verstaanpunt 1.4.13 Wys dat die data hierbo reëls R1 tot R8 bevredig, i.e. dat $\mathrm{Fun}(X)$ 'n vektorruimte is.

Oplossing.

1.

$$\begin{aligned} f(a) &= 4 \\ f(b) &= 0 \\ f(c) &= 2 \\ \\ g(a) &= 1 \\ g(b) &= 1 \\ g(c) &= 1 \\ \\ h(a) &= 0 \\ h(b) &= 3 \\ h(c) &= 0 \end{aligned}$$

2.

$$(f+g)(a) = 5$$
$$(f+g)(b) = 1$$
$$(f+g)(c) = 3$$

$$(3.h)(a) = 0$$
$$(3.h)(b) = 9$$
$$(3.h)(c) = 0$$

Voorbeeld 1.4.14 Matrikse. Die versameling $\mathrm{Mat}_{n,m}$ van alle $n \times m$ matrikse is 'n vektorruimte. Sien Appendix 5 om matrikse te hersien. □

Verstaanpunt 1.4.15 Wys dat met hierdie bewerkings vorm die versameling $\mathrm{Mat}_{n,m}$ van alle $n \times m$-matrikse 'n vektorruimte.

Voorbeeld 1.4.16 Ons sal Col_n skryf vir die vektorruimte$\mathrm{Mat}_{n,1}$ van n-dimensionele *kolomvektore*,

$$\mathrm{Col}_n = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} : x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

So, Col_n 'is' net $\mathbb{R}^n$, maar ons beklemtoon dat die komponente in kolomme gerangskik word. □

Oefeninge

1. Definieer 'n sommeringsbewerking op die versameling $X := \{\mathbf{0}, \mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ met die volgende tabel:

+	**0**	**a**	**b**
0	**0**	**a**	**b**
a	**a**	**0**	**a**
b	**b**	**a**	**0**

Die tabel werk soos volg. Vir die berekening $\mathbf{b} + \mathbf{a}$, vind die kruising van ry $\mathbf{b}$ en kolom $\mathbf{a}$. ons sien dat $\mathbf{b} + \mathbf{a} := \mathbf{a}$.

Bewys dat hierdie sommeringsbewerking R1 bevredig.

2. Bewys dat die sommeringsoperasie van Oefening 1.4.1 nie R2 bevredig nie.

3. Definieer 'n snaakse sommeringsbewerking$\hat{+}$ op $\mathbb{R}$ as

$$x \hat{+} y := x - y$$

Bevredig $\hat{+}$ R2? Indien wel, bewys dit. Indien nie, gee 'n teenvoorbeeld.

Oplossing. No, for example:

$$(1 \hat{+} 2) \hat{+} 3 = (1-2) - 3 = -4.$$

But

$$1 \hat{+} (2 \hat{+} 3) = 1 - (2-3) = 2.$$

4. Construct an operation $\boxplus$ on $\mathbb{R}$ satisfying R1 but not R2.

Oplossing. Define $x \boxplus y = |x-y|$. R1 is satisfied since $x \boxplus y = |x-y| = |y-x| = y \boxplus x$. However, R2 is not satisfied since $(1 \boxplus 2) \boxplus 3 = ||1-2|-3| = 2$ but $1 \boxplus (2 \boxplus 3) = |1-|2-3|| = 0$

5. Laat $\mathbb{R}^+$ die versameling van positiewe reële getalle wees. Definieer 'n sommeringsbewerking $\oplus$, 'n nul-vektor z en 'n skalaarvermenigvuldigingsbewerking . op $\mathbb{R}^+$ as volg:

$$x + y := \mathbf{xy}$$
$$z := 1$$
$$k.x := x^k$$

waar $x, y \in \mathbb{R}^+$ en k 'n skalaar is (i.e. 'n arbitrêre reële getal).

(a) Gaan na dat hierdie bewerkings goed-gedefinieerd is. Byvoorbeeld, is $x + y \in \mathbb{R}^+$, soos dit hoort?

(b) Gaan na dat hulle R1 tot R8 bevredig, sodat$\mathbb{R}^+$ 'n vektorruimte met hierdie bewerkings vorm.

Oplossing.

(a) Let x, y be two positive reals. Then

$$x \oplus y := xy$$

is certainly also a positive real number. Similarly, for any $k \in R$ and any $x \in \mathbb{R}^+$,

$$k.x := x^k$$

is also positive. To see this, for any fixed k, notice that the graph of the function $f(x) = x^k$restricted to $x \geq 0$ lies above the x-axis.

(b)

6. Consider the operation $\oplus$ on $\mathbb{R}^2$ defined by:

$$(a_1, a_2) \oplus (b_1, b_2) := (a_1 + b_2, a_2 + b_1).$$

(a) Does this operation satisfy R1 ?

(b) Does this operation satisfy R2 ?

Oplossing.

(a) Yes. This follows from the usual rules for addition in $\mathbb{R}$.

$$(a_1, a_2) \oplus (b_1, b_2) := (a_1 + b_2, a_2 + b_1) = (b_1 + a_1, b_2 + a_2) = (b_1, b_2) \oplus (a_1, a_2).$$

(b) Similar to a, except using the associativity of addition in $\mathbb{R}$.

Oplossings

· Oefeninge

1.4.3. Oplossing. No, for example:

$$(1\hat{+}2)\hat{+}3 = (1-2)-3 = -4.$$

But

$$1\hat{+}(2\hat{+}3) = 1-(2-3) = 2.$$

1.4.4. Oplossing. Define $x \boxplus y = |x-y|$. R1 is satisfied since $x \boxplus y = |x-y| = |y-x| = y \boxplus x$. However, R2 is not satisfied since $(1 \boxplus 2) \boxplus 3 = ||1-2|-3| = 2$ but $1 \boxplus (2 \boxplus 3) = |1-|2-3|| = 0$

1.4.5. Oplossing.

(a) Let x, y be two positive reals. Then

$$x \oplus y := xy$$

is certainly also a positive real number. Similarly, for any $k \in R$ and any $x \in \mathbb{R}^+$,

$$k.x := x^k$$

is also positive. To see this, for any fixed k, notice that the graph of the function $f(x) = x^k$restricted to $x \geq 0$ lies above the x-axis.

(b)

1.4.6. Oplossing.

(a) Yes. This follows from the usual rules for addition in $\mathbb{R}$.

$$(a_1, a_2) \oplus (b_1, b_2) := (a_1+b_2, a_2+b_1) = (b_1+a_1, b_2+a_2) = (b_1, b_2) \oplus (a_1, a_2).$$

(b) Similar to a, except using the associativity of addition in $\mathbb{R}$.

1.5 'n Paar resultate rakende abstrakte vektorruimtes

Dit is tyd om die reëls van vektorruimtes te gebruik om 'n paar algemene resultate te bewys.

> Ons is op die punt om on eerste formele bewys in die kursus te doen!

Hulpstelling 1.5.1 *Veronderstel V is 'n vektor-ruimte met nul-vektor $\mathbf{0}$. As $\mathbf{0}'$ 'n ander vektor is wat reël R3(a) bevredig,*

$$\mathbf{0}' + \mathbf{v} = \mathbf{v} \text{ vir alle } \mathbf{v} \in V \tag{1.5.1}$$

dan volg dit dat $\mathbf{0} = \mathbf{0}'$.

Bewys.

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \mathbf{0}' + \mathbf{0} && \text{gebruik (1.5.1) vir } \mathbf{v} = \mathbf{0} \\ &= \mathbf{0}' && (\text{ R3b }) \end{aligned}$$

■

Definisie 1.5.2 Laat V 'n vektorruimte wees; ons definieer die **sommeringsinverse** van 'n vektor $\mathbf{v} \in V$ as

$$-\mathbf{v} := (-1) \cdot \mathbf{v}$$

$\Diamond$

Hulpstelling 1.5.3 *As V 'n vektorruimte is, dan vir alle $\mathbf{v} \in V$,*

$$-\mathbf{v} + \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ en } \mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}. \tag{1.5.2}$$

Bewys.

$$\begin{aligned}
-\mathbf{v} + \mathbf{v} &= (-1).\mathbf{v} + \mathbf{v} && \text{(Definisie } -\mathbf{v}\text{)}\\
&= (-1).\mathbf{v} + 1.\mathbf{v} \\
&= (-1+1).\mathbf{v} && \text{(R5)}\\
&= 0.\mathbf{v} \\
&= \mathbf{0} && \text{(R8)}
\end{aligned}$$

Verder,

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) &= -\mathbf{v} + \mathbf{v} && \text{(R1)}\\
&= \mathbf{0} && \text{(deur vorige bewys)}
\end{aligned}$$

■

Hulpstelling 1.5.4 *Veronderstel twee vektore $\mathbf{w}$ en $\mathbf{v}$ in 'n vektor-ruimte bevredig $\mathbf{w} + \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Dan volg dit dat $\mathbf{w} = -\mathbf{v}$.*

Bewys.

$$\begin{aligned}
\mathbf{w} &= \mathbf{w} + \mathbf{0} && \text{(R3b)}\\
&= \mathbf{w} + (\mathbf{v} + -\mathbf{v}) && \text{Hulpstelling 1.5.3}\\
&= (\mathbf{w} + \mathbf{v}) + -\mathbf{v}) && \text{(R2)}\\
&= \mathbf{0} + -\mathbf{v} && \text{(volgens aanname)}\\
&= -\mathbf{v} && \text{(R3a).}
\end{aligned}$$

■

Laat ons twee meer hulpstellings bewys, net vir goeie oefening.

Hulpstelling 1.5.5 *Laat V 'n vektorruimte wees en k enige skalaar. Dan is*

$$k.\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

Bewys.

$$\begin{aligned}
k.\mathbf{0} &= k.(0.\mathbf{0}) && \text{(R8 for } \mathbf{v} = \mathbf{0}\text{)}\\
&= ((k)(0)).\mathbf{0} && \text{(R6)}\\
&= 0.\mathbf{0} && ((k)(0) = 0 \text{ vir enige reële getal } k)\\
&= \mathbf{0} && \text{(R8 vir } \mathbf{v} = \mathbf{0}\text{)}
\end{aligned}$$

■

Hulpstelling 1.5.6 *Veronderstel dat $\mathbf{v}$ 'n vektor in 'n vektorruimte V is en dat k 'n skalaar is. Dan volg dit dat*

$$k \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow k = 0 \text{ of } \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Bewys. ***Bewys van*** $\Leftarrow$. Veronderstel $k = 0$. Dan $k \cdot \mathbf{v} = 0 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$ deur R8 van 'n vektor-ruimte. Aan die ander kant, veronderstel $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Dan $k \cdot \mathbf{v} = k \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ deur Oefening 1.5.2.

Bewys van $\Rightarrow$***)***. Veronderstel $k \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Daar is twee moontlikhede: óf $k = 0$, óf $k \neq 0$. As $k = 0$, dan is ons klaar. As $k \neq 0$, dan bestaan $\frac{1}{k}$ en ons vermenigvuldig albei kante daardeur:

$$\begin{aligned}
k \cdot \mathbf{v} &= \mathbf{0} \\
\therefore \frac{1}{k} \cdot (k \cdot \mathbf{v}) &= \frac{1}{k} \cdot \mathbf{0} && \text{(Vermenigvuldig beide kante met } \tfrac{1}{k}) \\
\therefore \left(\frac{1}{k} k\right) \cdot \mathbf{v} &= \mathbf{0} && \text{(R6 aan LK. Gebruik Oefening 1.5.2 aan die RK.)} \\
\therefore 1 \cdot \mathbf{v} &= \mathbf{0} && \text{(gebruik } \tfrac{1}{k}k = 1) \\
\therefore \mathbf{v} &= \mathbf{0} && \text{(R7)}
\end{aligned}$$

Daarom, in die geval waar $k \neq 0$ dit volg dat $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, wat ons in die eerste plek wou bewys. ■

Voorbeeld 1.5.7 Kom ons oefen die gebruik van die reëls van vektorruimtes om alledaagse berekeninge uit te voer. Byvoorbeeld, veronderstel dat ons vir die vektor $\mathbf{x}$ in die volgende vergelyking wil oplos:

$$\mathbf{v} + 7 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{w} \tag{1.5.3}$$

Ons gaan te werk met die reëls soos volg:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} + 7 \cdot \mathbf{x} &= \mathbf{w} \\
\therefore -\mathbf{v} + (\mathbf{v} + 7 \cdot \mathbf{x}) &= -\mathbf{v} + \mathbf{w} && \text{(tel } -\mathbf{v} \text{ aan beide kante by)} \\
\therefore (-\mathbf{v} + \mathbf{v}) + 7 \cdot \mathbf{x} &= -\mathbf{v} + \mathbf{w} && \text{(gebruik R2 aan LK)} \\
\therefore \mathbf{0} + 7 \cdot \mathbf{x} &= -\mathbf{v} + \mathbf{w} && \text{(gebruik Lemma 1.5.3 aan LK)} \\
\therefore 7 \cdot \mathbf{x} &= -\mathbf{v} + \mathbf{w} && \text{(gebruik R3a aan LK)} \\
\therefore \frac{1}{7} \cdot (7 \cdot \mathbf{x}) &= \frac{1}{7} \cdot (-\mathbf{v} + \mathbf{w}) && \text{(skalaarvermenigvuldig aan beide kante met } \tfrac{1}{7}) \\
\therefore (\frac{1}{7} 7) \cdot \mathbf{x} &= \frac{1}{7} \cdot (-\mathbf{v} + \mathbf{w}) && \text{(gebruik R6 aan LK)} \\
\therefore 1 \cdot \mathbf{x} &= \frac{1}{7} \cdot (-\mathbf{v} + \mathbf{w}) && \text{(vermenigvuldig } \tfrac{1}{7} \text{ met 7)} \\
\therefore \mathbf{x} &= \frac{1}{7} \cdot (-\mathbf{v} + \mathbf{w}) && \text{(R7)}
\end{aligned}$$

Soos die kursus vorder sal ons hierdie stappe uitlaat. Maar dit is belangrik dat jy hulle almal kan weergee, as dit van jou gevra sou word! □

Oefeninge

1. Bewys dat, vir alle vektore v in 'n vektorruimte, $-(-\mathbf{v}) = \mathbf{v}$.

Oplossing. We apply the definition of $-\mathbf{v}$ twice:

$$-(-\mathbf{v}) = (-1).(-\mathbf{v}) = (-1).(-1.(\mathbf{v})).$$

Using Item we get

$$(-1).(-1(\mathbf{v})) = ((-1)(-1)).\mathbf{v} = 1.\mathbf{v}.$$

Finally, a single application of Item allows us to conclude that

$$1.\mathbf{v} = \mathbf{v}$$

2. Laat V 'n vektorruimte wees met nul-vektor $\mathbf{0}$. Bewys dat vir alle skalare k, $k \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Oplossing. We apply Item to $k.\mathbf{0}$:

$$k.\mathbf{0} = k.(\mathbf{0} + \mathbf{0}).$$

By Item we get

$$k.(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = k.\mathbf{0} + k.0.$$

We now know

$$k.\mathbf{0} = k.\mathbf{0} + k.0.$$

Adding the inverse of $k.0$ to both sides we get

$$\mathbf{0} = k.\mathbf{0} + \mathbf{0} = k.0.$$

And we are done.

3. Laat V 'n vektorruimte wees. Veronderstel dat 'n vektor $\mathbf{v} \in V$ bevredig

$$5.\mathbf{v} = 2.\mathbf{v}. \tag{1.5.4}$$

Toon aan dat $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Oplossing.

$$\begin{aligned}
&5.v = 2.v \\
&\implies 5.v + (-2).v = 2.v + (-2).v \\
&\implies (5-2).v = (2-2).v \\
&\implies 3.v = 0.v \\
&\implies (\frac{1}{3}3).v = (\frac{1}{3}0)v \\
&\implies 1v = 0v \\
&\implies v = 0
\end{aligned}$$

4. Veronderstel dat twee vektore $\mathbf{x}$ en $\mathbf{w}$ in 'n vektorruimte $2\mathbf{x} + 6\mathbf{w} = \mathbf{0}$ bevredig. Los op vir $\mathbf{x}$, maar wys eksplisiet hoe jy die reëls van 'n vektorruimte gebruik het, soos in Voorbeeld 1.5.7.

Oplossing.

$$\begin{aligned}
&2\mathbf{x} + 6\mathbf{w} = \mathbf{0} \\
\implies\ & 2\mathbf{x} + 6\mathbf{w} + (-6\mathbf{w})\mathbf{0} + (-6\mathbf{w}) && \text{(Existence of Inverses)} \\
\implies\ & 2\mathbf{x} + 0 = -6\mathbf{w} && \text{(Item)} \\
\implies\ & 2\mathbf{x} = -6\mathbf{w} && \text{(Item)} \\
\implies\ & (\frac{1}{2})(2\mathbf{x}) = ((\frac{1}{2}))(-6\mathbf{w}) \\
\implies\ & (\frac{1}{2}2)\mathbf{x} = (-\frac{1}{2}6)\mathbf{w}) && \text{(Item)} \\
\implies\ & 1\mathbf{x} = -3\mathbf{w} \\
\implies\ & \mathbf{x} = -3\mathbf{w} && \text{(Item)}
\end{aligned}$$

5. Suppose V is a vector space which is not the zero vector space. Show that V contains infinitely many elements.

Wenk 1. Since V is not the zero vector space, there must exist a vector $\mathbf{v} \in V$ such that $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.

Wenk 2. Use the idea of the proof from Oefening 1.5.3.

True or False For each of the following statements, write down whether the statement is true or false, and prove your assertion. (In other words, if you say that it is true, prove that it is true, and if you say that it is false, prove that it is false, by giving an *explicit counterexample.*)

6. If $k.\mathbf{v} = \mathbf{0}$ in a vector space, then it necessarily follows that $k = 0$.

7. If $k.\mathbf{v} = \mathbf{0}$ in a vector space, then it necessarily follows that $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

8. The empty set can be equipped with data D1 , D2 , D3 satisfying the rules of a vector space.

Oplossing. False. In order for the empty set to be a vector space, it must have a zero vector. That is, we must be able to find some $v \in$ the empty set satisfying the axioms for the zero vector. However, since the empty set has no elements in it, by definition, we cannot ever hope to find such a v. Hence the empty set can never be a vector space.

9. Rule R3b of a vector space follows automatically from the other rules.

Oplossing. True. Combining R1 and R3a gives R3b .

10. Rule R7 of a vector space follows automatically from the other rules.

Oplossing. False. Let V be a non-zero vector space (such as $\mathbb{R}^2$). Redefine scalar multiplication as follows

$$k.v := 0 \text{ for all scalars k and all vectors v.}$$

Then V will satisfy all the rules of a vector space except R7. Thus it is not the case that R7 follows from the other rules.

Oplossings

· Oefeninge

1.5.1. Oplossing. We apply the definition of $-\mathbf{v}$ twice:

$$-(-\mathbf{v}) = (-1).(-\mathbf{v}) = (-1).(-1.(\mathbf{v})).$$

Using Item we get

$$(-1).(-1(\mathbf{v})) = ((-1)(-1)).\mathbf{v} = 1.\mathbf{v}.$$

Finally, a single application of Item allows us to conclude that

$$1.\mathbf{v} = \mathbf{v}$$

1.5.2. Oplossing. We apply Item to $k.\mathbf{0}$:

$$k.\mathbf{0} = k.(\mathbf{0} + \mathbf{0}).$$

By Item we get

$$k.(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = k.\mathbf{0} + k.0.$$

We now know

$$k.\mathbf{0} = k.\mathbf{0} + k.0.$$

Adding the inverse of $k.0$ to both sides we get

$$\mathbf{0} = k.\mathbf{0} + \mathbf{0} = k.0.$$

And we are done.

1.5.3. Oplossing.

$$\begin{aligned} & 5.v = 2.v \\ & \implies 5.v + (-2).v = 2.v + (-2).v \\ & \implies (5-2).v = (2-2).v \\ & \implies 3.v = 0.v \\ & \implies (\frac{1}{3}3).v = (\frac{1}{3}0)v \\ & \implies 1v = 0v \\ & \implies v = 0 \end{aligned}$$

1.5.4. Oplossing.

$$\begin{aligned} 2\mathbf{x} + 6\mathbf{w} &= \mathbf{0} \\ \implies 2\mathbf{x} + 6\mathbf{w} + (-6\mathbf{w})\mathbf{0} + (-6\mathbf{w}) & \qquad \text{(Existence of Inverses)} \\ \implies 2\mathbf{x} + 0 = -6\mathbf{w} & \qquad \text{(Item)} \\ \implies 2\mathbf{x} = -6\mathbf{w} & \qquad \text{(Item)} \\ \implies (\frac{1}{2})(2\mathbf{x}) = ((\frac{1}{2}))(-6\mathbf{w}) & \\ \implies (\frac{1}{2}2)\mathbf{x} = (-\frac{1}{2}6)\mathbf{w}) & \qquad \text{(Item)} \\ \implies 1\mathbf{x} = -3\mathbf{w} & \\ \implies \mathbf{x} = -3\mathbf{w} & \qquad \text{(Item)} \end{aligned}$$

True or False **1.5.8. Oplossing**. False. In order for the empty set to be a vector space, it must have a zero vector. That is, we must be able to find some $v \in$ the empty set satisfying the axioms for the zero vector. However, since the empty set has no elements in it, by definition, we cannot ever hope to find such a v. Hence the empty set can never be a vector space.

1.5.9. Oplossing. True. Combining R1 and R3a gives R3b .

1.5.10. Oplossing. False. Let V be a non-zero vector space (such as $\mathbb{R}^2$). Redefine scalar multiplication as follows

$$k.v := 0 \text{ for all scalars k and all vectors v.}$$

Then V will satisfy all the rules of a vector space except R7. Thus it is not the case that R7 follows from the other rules.

1.6 Deelruimtes

In hierdie deel san ons die konsep van 'n *deelruimte* bekend stel. Dié konsep sal ons toelaat om vinnig nuwe voorbeelde van vektorruimtes te vind.

1.6.1 Definition of a subspace

Definisie 1.6.1 'n deelversameling $U \subseteq V$ van 'n vektor-ruimte V is 'n **deelruimte van** V as:

- Vir alle $\mathbf{u}, \mathbf{u}' \in U$, $\mathbf{u} + \mathbf{u}' \in U$
- $\mathbf{0} \in U$
- Vir alle skalare k en alle vektore $\mathbf{u} \in U$, $k \cdot \mathbf{u} \in U$

$\Diamond$

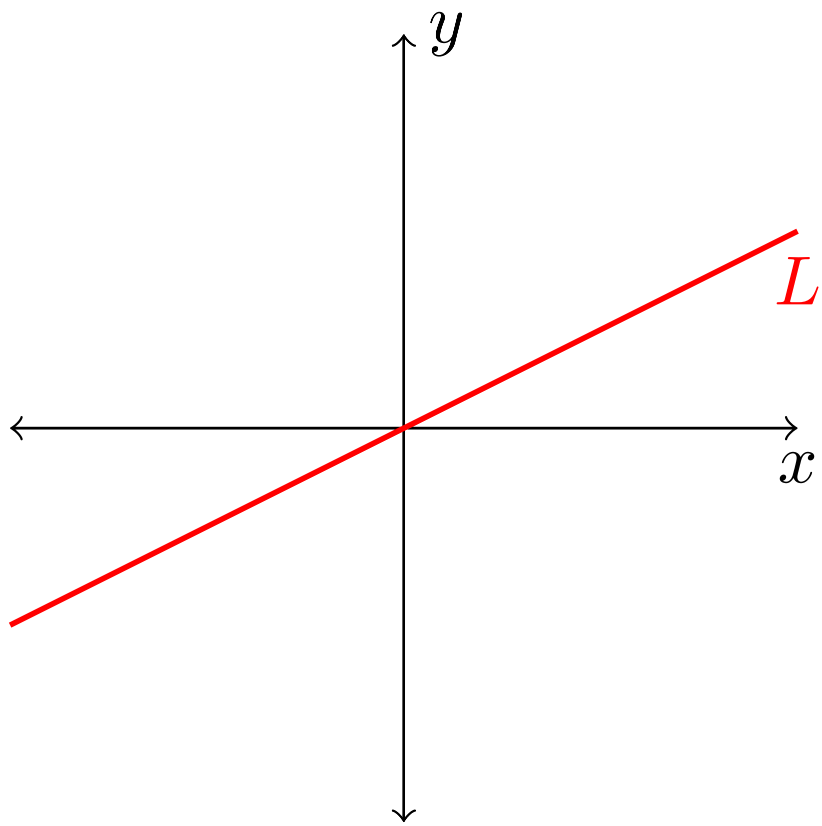
Hulpstelling 1.6.2 *As U 'n deelruimte van 'n vektorruimte V is, dan is U ook 'n vektorruimte, toegerus met dieselfde sommeringsbewerking, nul-vektor en skalaarvermenigvuldigingsbewerking as V.*

Bewys. Aangesien U 'n deelruimte is, weet ons dat dit sin maak om dit "toe te rus met dieselfde sommeringsbewerking, nul-vektor en skalaarvermenigvuldigingsbewerking as V". (As U *nie* 'n deelruimte was nie, dan sou ons byvoorbeeld kon vind dat $\mathbf{u}, \mathbf{u}' \in U$ maar $\mathbf{u} + \mathbf{u}' \notin U$, So die sommeringsbewerking sou nie sin maak nie.)

So ons moet net reëls R1 tot R8 nagaan. Aangesien die reëls geld vir alle vektore $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ in V, Sal hulle beslis geld vir alle vektore $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ in U. So reëls R1 tot R8 word bevredig. $\blacksquare$

1.6.2 Voorbeelde van deelruimtes

Voorbeeld 1.6.3 Lyn in $\mathbb{R}^2$. 'n Lyn L deur die oorsprong in $\mathbb{R}^2$ is 'n deelruimte van $\mathbb{R}^2$:



Figuur 1.6.4: A line through the origin in $\mathbb{R}^2$.

Onthou dat lyn L gespesifiseer kan word deur 'n homogene lineêre vergelyking van die form:

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by = 0\} \tag{1.6.1}$$

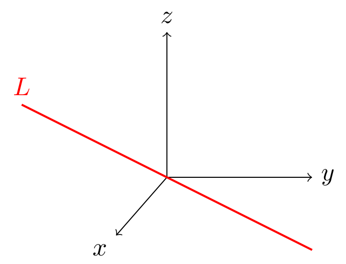
vir konstantes a en b. So, as $\mathbf{v} = (x, y)$ en $\mathbf{v}' = (x', y')$ op L lê, dan lê hulle som $\mathbf{v} + \mathbf{v}' = (x + x', y + y')$ ook op L, want hul komponente bevredig die definiërende vergelyking (1.6.1):

$$\begin{aligned}
&a(x + x') + b(y + y') \\
&= (ax + by) + (ax' + by') \\
&= 0 + 0 && \text{(want } ax + by = 0 \text{ en } ax' + by' = 0\text{)} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

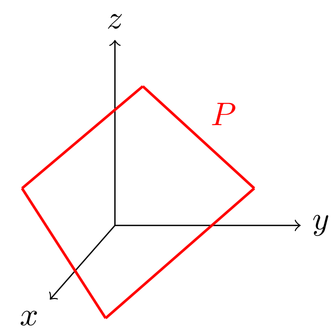
Dit maak ook meetkundig sin: As jy na beeld Figuur 1.6.4 kyk, sal jy sien dat die som van twee vektore $\mathbf{v}, \mathbf{v}'$ op L met die kop-op-stert-metode 'n verdere vektor op L tot gevolg sal hê. $\square$

Verstaanpunt 1.6.5 Voltooi die bewys dat L 'n deelruimte van $\mathbb{R}^2$ is deur na te gaan dat die nul-vektor op lyn L is en dat die vermenigvuldiging van 'n vektor in L met 'n skalaar 'n vektor op L lewer.

Voorbeeld 1.6.6 Lyne en vlakke in $\mathbb{R}^3$. 'n Lyn L en 'n vlak P deur die oorsprong in $\mathbb{R}^3$ is ook 'n deelruimte van $\mathbb{R}^3$:



Figuur 1.6.7: A line through the origin in $\mathbb{R}^3$.



Figuur 1.6.8: A plane through the origin in $\mathbb{R}^3$.

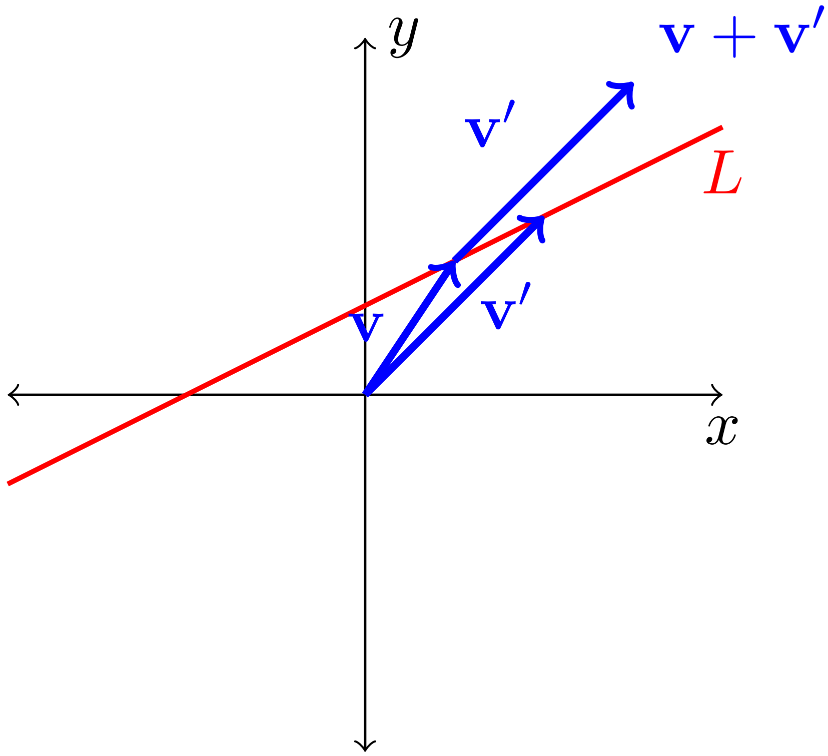
□

Voorbeeld 1.6.9 Nul-vektorruimte. As V 'n vektorruimte is, dan is die versameling $\{\mathbf{0}\} \subseteq V$ wat slegs die nul-vektor $\mathbf{0}$ 'n deelruimte van V. □

Verstaanpunt 1.6.10 Gaan na dat dit waar is.

Voorbeeld 1.6.11 Nie 'n vektorruimte nie: 'n Lyn nie deur die oorsprong nie. Wees versigtig — nie *elke* lyn $L \subset \mathbb{R}^2$ vorm 'n deelruimte van $\mathbb{R}^2$ nie. As L nie deur die oorsprong loop nie, dan vind ons dat $\mathbf{0} \notin L$, so L is nie 'n deelruimte nie.

Nog 'n rede dat L nie 'n deelruimte is nie is dat dit nie geslote onder sommering is nie: As ons twee nie-nul vektore $\mathbf{v}$ en $\mathbf{v}'$ op L bymekaar tel, kry ons 'n vektor $\mathbf{v} + \mathbf{v}'$ wat nie op L lê nie:



Figuur 1.6.12: A line which does not pass through the origin is not closed under addition.

□

Voorbeeld 1.6.13 Hyperplanes orthogonal to a fixed vector. This example generalizes Voorbeeld 1.6.6 to higher dimensions. Let $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ be a fixed nonzero vector. The *hyperplane orthogonal to* $\mathbf{v}$ is the set W of all vectors orthogonal to $\mathbf{v}$, that is,

$$W := \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0\}. \tag{1.6.2}$$

You will prove in Exercise Verstaanpunt 1.6.14 that W is a subspace of $\mathbb{R}^n$.

For example, consider the vector $\mathbf{v} = (1, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$. Then the hyperplane orthogonal to $\mathbf{v}$ is

$$W = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0\}. \tag{1.6.3}$$

If we write $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ then $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$ translates into the equation

$$w_1 + 2w_2 + 3w_3 = 0. \tag{1.6.4}$$

So, W can be regarded as the set of vectors in $\mathbb{R}^3$ whose components satisfy (1.6.4). □

Verstaanpunt 1.6.14 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$

$$W := \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0\}.$$

$\mathbb{R}^n$

Oplossing.

Closed under addition.. Suppose $\mathbf{w}, \mathbf{w}' \in W$.
That is, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$ and $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}' = 0$.
We must show that $\mathbf{w} + \mathbf{w}' \in W$.
That is, we must show that $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} + \mathbf{w}') = 0$.
Indeed,

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} + \mathbf{w}) &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}' \\ &= 0 + 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Contains the zero vector.. Since $\mathbf{v} \cdot \mathbf{0} = 0$, we conclude that $\mathbf{0} \in W$.

Closed under scalar multiplication.. Suppose $\mathbf{w} \in W$ and k is a scalar.
That is, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$.
We must show that $k.\mathbf{w} \in W$.
That is, we must show that $\mathbf{v} \cdot (k.\mathbf{w}) = 0$.
Indeed,

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot (k.\mathbf{w}) &= k.(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) \\ &= (k)(0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Voorbeeld 1.6.15 Kontinue funksies as 'n deelruimte. Die versameling

$$\mathrm{Cont}(I) := \{\mathbf{f} : I \to \mathbb{R}, \mathbf{f} \text{ kontinu}\}$$

van alle kontinue funksies op die interval I is 'n deelruimte van die versameling $\mathrm{Fun}(I)$ van *alle* funksies op I. Kom ons bevestig dat dit die definisie bevredig. Jy weet reeds van vorige kursusse dat:

- As $\mathbf{f}$ en $\mathbf{g}$ kontinue funksies op I is, dan is $\mathbf{f} + \mathbf{g}$ ook 'n kontinue funksie.
- Die nul-funksie $\mathbf{0}$ gedefinieer as $\mathbf{0}(x) = 0$ vir alle $x \in I$ is 'n kontinue funksie.
- As $\mathbf{f}$ 'n kontinue funksie is en k 'n skalaar is, dan is $k \cdot \mathbf{f}$ ook kontinu.

Daarom, deur Lemma 1.6.2, is $\mathrm{Cont}(I)$ 'n vektorruimte in eie reg. □

Voorbeeld 1.6.16 Differensieerbare funksies as 'n deelruimte. So ook is die versameling

$$\mathrm{Diff}(I) := \{\mathbf{f} : (0, 1) \to \mathbb{R}, \mathbf{f}\text{differensieerbaar}\}$$

van differensieerbare fuksies op die oop interval I 'n deelruimte van $\mathrm{Fun}(I)$. □

Verstaanpunt 1.6.17 Bevestig dit. Ook, is $\mathrm{Diff}(I)$ 'n deelruimte van $\mathrm{Cont}(I)$?

Voorbeeld 1.6.18 Vektorruimtes van polinome. 'n *Polinoom* is 'n funksie $\mathbf{p} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ van die vorm

$$\mathbf{p}(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0. \tag{1.6.5}$$

vir onveranderlike reële koëffisiënte $a_0, \ldots, a_n$. Twee polinome $\mathbf{p}$ en $\mathbf{q}$ is *gelyk* as hulle *as funksies* gelyk is, m.a.w. as $\mathbf{p}(x) = \mathbf{q}(x)$ vir alle $x \in \mathbb{R}$. Die *graad* van 'n polinoom is die hoogste mag van x wat in die formule voorkom.

Byvoorbeeld, $2x^3 - x + 7$ is 'n polinoom van graad 3, terwyl $x^5 - 2$ 'n polinoom van graad 5 is.

Die versameling van *alle* polinome word as Poly geskryf en die versameling van alle polinome van 'n graad kleiner of gelyk aan n word as Poly_n geskryf. $\square$

Verstaanpunt 1.6.19 Gaan na dat Poly en Poly_n wel deelruimtes van $\mathrm{Cont}(\mathbb{R})$ is.

Voorbeeld 1.6.20 Polynomials in many variables. A *monomial* in two variables x and y is an expression of the form $x^m y^n$ for some nonnegative integers m, n. The *total degree* of the monomial is $m+n$.For example,

$$x^3y^2, xy^7, \quad \text{and } x^3$$

are monomials in the variables x and y of total degree

$$5, 8, \quad \text{and } 3$$

respectively. A *polynomial in two variables* is a linear combination of monomials. The *degree* of the polynomial is the highest total degree of the monomials occuring in the linear combination. For instance,

$$p = 5x^3y^2 - 3xy^7, \quad q = xy^2 - x^3 + 3y^2 \tag{1.6.6}$$

are polynomials in two variables with total degree 8 and 3 respectively.

We write Poly^2 for the set of *all* polynomials in two variables, and Poly^2_n for the set of all two-variable polynomials of total degree less than or equal to n. For instance, consier the polynomial

$$p = 5x^3y^2 - 3xy^7$$

The total degree of p is 8. So:

- $p \in \mathrm{Poly}^2$,
- $p \in \mathrm{Poly}^2_8$
- $p \in \mathrm{Poly}^2_{12}$
- $p \ni \mathrm{Poly}^2_7$

We can regard a polynomial p in two variables as a special kind of function

$$p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}.$$

In this way, we can regard Poly_2 (and similarly Poly^2_n) as a subset of the vector space $\mathrm{Fun}(\mathbb{R}^2)$ of *all* functions on $\mathbb{R}^2$. Indeed, they are *subspaces*, as the reader will check.

Two polynomials p and q in variables x and y are defined to be *equal* if and only if all their corresponding coefficients are equal. This is equivalent to the statement that $p(x,y) = q(x,y)$ for all $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

In the same way, we can talk about 3-variable polynomials, and so on, eg.

$$r = 5x^3y^2z + 3xy - 4xz^3$$

is a polynomial of total degree 6 in the variables x, y, z. We can regard a polynomial in k variables as a special kind of function

$$r : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}.$$

We write Poly^k for the vector space of all k-variable polynomials. We can regard Poly^k as a subspace of the vector space $\mathrm{Fun}(\mathbb{R}^k)$ of *all* functions on $\mathbb{R}^k$. Similary, we write Poly^k_n for the vector space of all k-variable polynomials of total degree less than or equal to n, and we regard it too as a subspace of $\mathrm{Fun}(\mathbb{R}^n)$. $\square$

> When we say simply 'p is a polynomial' we will mean that p is a polynomial in a single variable, i.e. $p \in \mathrm{Poly}$. Note that $\mathrm{Poly} = \mathrm{Poly}^1$ and that $\mathrm{Poly}_n = \mathrm{Poly}^1_n$.

Voorbeeld 1.6.21 Trigonometriese polinome. 'n *Trigonometriese polinoom* is 'n funksie $\mathbf{T} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ van die vorm

$$\mathbf{T}(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin(kx). \tag{1.6.7}$$

Die *graad* van 'n trigonometriese polinoom is die grootste veelvoud van x wat binne een van die sinusse of kosinusse in die formule voorkom. Byvoorbeeld,

$$3 - \cos(x) + 6\sin(3x)$$

is 'n trigonometriese polinoom van graad 3. Ons skryf die versameling van *alle* trigonometriese polinome as Trig en die versameling van alle trigonometriese polinome van graad kleiner of gelyk aan n as Trig_n. □

Verstaanpunt 1.6.22 Wys dat Trig en Trig_n deelruimtes van $\mathrm{Cont}(\mathbb{R})$ is.

Verstaanpunt 1.6.23 Oorweeg die funksie $\mathbf{f}(x) = \sin^3(x)$. Wys dat $\mathbf{f} \in \mathrm{Trig}_3$ deur dit in die vorm (1.6.7) te skryf. Wenk: gebruik die identiteite

$$\begin{aligned}
\sin(A)\sin(B) &= \frac{1}{2}(\cos(A-B) - \cos(A+B)) \\
\sin(A)\cos(B) &= \frac{1}{2}(\sin(A-B) + \sin(A+B)) \\
\cos(A)\cos(B) &= \frac{1}{2}(\cos(A-B) + \cos(A+B))
\end{aligned}$$

wat maklik volg uit die sommeringsformules

$$\begin{aligned}
\sin(A \pm B) &= \sin A \cos B \pm \cos A \sin B \\
\cos(A \pm B) &= \cos A \cos B \mp \sin A \sin B.
\end{aligned}$$

1.6.3 Solutions to homogenous linear differential equations

A homogenous nth order linear ordinary differential equation on an interval I is a differential equation of the form

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0, \quad x \in I \tag{1.6.8}$$

where $y^{(k)}$ means the nth derivative of y. A *solution* to the differential equation is just some function $y(x)$ defined on the interval I which satisfies (1.6.8).

Voorbeeld 1.6.24 An example of a 2nd order homogenous linear differential equation. For instance,

$$x^2y'' - 3xy' + 5y = 0, \quad x \in (0, \infty) \tag{1.6.9}$$

is a homogenous 2nd order linear differential equation on the interval $(0, \infty)$, and

$$y_1(x) = x^2 \sin(\log x) \tag{1.6.10}$$

is a solution to (1.6.9). Similarly,

$$y_2(x) = x^2 \cos(\log x) \tag{1.6.11}$$

is also a solution to (1.6.9).

We can use SageMath to check that these are indeed solutions to (1.6.9). Click the `Evaluate (Sage)` button --- it should output 'True', indicating that y_1 is indeed a solution to the differential equation.

```
def solves_de(y):
 return bool(x^2 *diff(y,x,2) -3*x*diff(y,x) + 5*y == 0)

y1 = x^2*sin(log(x))

solves_de(y1)
```

Edit the code above to check whether y_2 is a solution of the differential equation (1.6.9).

We can also plot the graphs of y_1 and y_2. Again, click on `Evaluate (Sage)`.

```
y1 = x^2*sin(log(x))
y2 = x^2*cos(log(x))

plot([y1, y2], (x, 0, 1), legend_label=['y1', 'y2'])
```

Play with the code above, and plot some different functions.

□

Verstaanpunt 1.6.25 Check by hand that (1.6.10) and (1.6.11) are indeed solutions of the differential equation (1.6.9).

Suppose we are given an nth order homogenous linear differential equation of the form (1.6.8) on some interval $I \subseteq \mathbb{R}$. Write V for the set of *all* solutions to the differential equation. That is,

$$V := \{y : a_n(x)y^{(n)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0\} \tag{1.6.12}$$

We can regard V as a subset of the set of *all* functions on the interval I:

$$V \subseteq \text{Fun}(I)$$

Verstaanpunt 1.6.26 Show that V is a subspace of $\text{Fun}(I)$.

So, by Hulpstelling 1.6.2, we conclude that *the set of solutions to a homogenous linear differential equation is a vector space.*

Voorbeeld 1.6.27 Continuation of Voorbeeld 1.6.24. Consider the differential equation from Voorbeeld 1.6.24. We saw that

$$y_1 = x^2 \sin(\log x), \quad y_2 = x^2 \cos(\log x)$$

are solutions. So, any linear combination of y_1 and y_2 is *also* a solution. For instance,

$$y = 2y_1 + 5y_2$$

is also a solution. Let us check this in SageMath.

```
def solves_de(y):
  return bool(x^2 *diff(y,x,2) -3*x*diff(y,x) + 5*y == 0)

y1 = x^2*sin(log(x))
y2 = x^2*sin(cos(x))

solves_de(2*y1 + 5*y2)
```

□

Voorbeeld 1.6.28 A non-example: Solutions to a nonlinear ODE. We saw in the previous example that linear ordinary differential equations (ODEs) are well-behaved - a linear combination of solutions is still a solution. This need not occur in the nonlinear case. For example, consider the nonlinear ODE

$$y' = y^2. \tag{1.6.13}$$

The general solution is given by

$$y_c = \frac{1}{c - x}$$

where c is a constant. For instance,

$$y_1 = \frac{1}{1 - x}, \quad y_2 = \frac{1}{2 - x}$$

are solutions.

Use the SageMath script below to check whether the linear combination $y_1 + y_2$ is also a solution.

```
y = function('y')(x)

def solves_de(f):
 return bool(diff(f,x) - f^2 == 0)

y1 = 1/(1-x)
y2 = 1/(2-x)

solves_de(y1+y2)
```

The answer is `False`! So linear combinations of solutions to the nonlinear differential equation (1.6.13) are no longer solutions, in general. □

Voorbeeld 1.6.29 Finding the general solution to a differential equation in SageMath. Let us use SageMath to find the general solution of the following ordinary differential equation

$$y'' + 2y' + y = 0. \tag{1.6.14}$$

We can do this as follows. Note that we need to be a bit more careful now, first defining our variable x and then declaring that y is a function of x.

```
var('x')
y = function('y')(x)

diff_eqn = diff(y,x,2) +2*diff(y,x,1) + 5*y == 0
  desolve(diff_eqn,y)

desolve(diff_eqn, y)
```

SageMath reports that the general solution is given in terms of two unspecified constants `_K1` and `_K2` as `(_K2*cos(2*x) + _K1*sin(2*x))*e^(-x)`.

If we set `_K1` equal to 1 and `_K2` equal to 0 in the general solution, we will get a particular solution y_1 of the differential equation.

```
var('x,␣␣_K1,␣␣_K2')
y = function('y')(x)

diff_eqn = diff(y,x,2) +2*diff(y,x,1) + 5*y == 0

my_soln = desolve(diff_eqn,y)

y1 = my_soln.substitute(_K1==1, _K2==0)

y1
```

SageMath is telling us that $y_1 = e^{-x}\sin(2x)$ is a particular solution.

> Edit the code to set `_K2` equal to 0 and `_K1` equal to 1 in the general solution to get a different particular solution y_2. What is y_2?

$\square$

1.6.4 Oefeninge

1. Wys dat die versameling

$$V := \{(a, -a, b, -b) : a, b \in \mathbb{R}\}$$

'n deelruimte van $\mathbb{R}^4$ is.

2. Wys dat die versameling

$$V := \{\text{polinome van die vorm } \mathbf{p}(x) = ax^3 + bx^2 - cx + a,\ a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

'n deelruimte van Poly_3 is.

3. Laat $b \in \mathbb{R}$. Bewys dat

$$V := \{(x_1,\, x_2,\, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = b\}$$

'n deelruimte van $\mathbb{R}^3$ is as en slegs as $b = 0$. (Onthou dat as en slegs as beteken dat die vorentoe- *en* die terug-implikasie bewys moet word.)

4. Beskou die versameling

$$V := \{\mathbf{f} \in \text{Diff}((-1, 1)) : f'(0) = 2\}.$$

Is V 'n deelruimte van $\text{Diff}((-1, 1))$? As jy dink dat dit is, *bewys* dat dit so is. As jy dink dit is nie, *bewys* dat dit nie is nie!

5. Beskou die versameling

$$V := \{(x_1,\, x_2,\, x_3,\, \ldots) \in \mathbb{R}^\infty : \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}.$$

Is V 'n deelruimte van $\mathbb{R}^\infty$? As jy dink dit is wel, *bewys* dat dit so is. As jy dink dit is nie, *bewys* dat dit nie is nie!

6. Is $\mathbb{R}^+ := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R} : \mathbf{x} \geq 0\}$ 'n deelruimte van $\mathbb{R}$? As jy dink dit is wel, *bewys* dat dit so is. As jy dink dit is nie, *bewys* dat dit nie is nie!

7. Gee 'n voorbeeld van 'n nie-leë deelversameling U van $\mathbb{R}^2$ wat geslote is onder sommering en die vind van sommeringsinverses (i.e. as $\mathbf{u}$ in U is, dan is $-\mathbf{u}$ in V), maar nié 'n deelruimte van $\mathbb{R}^2$ is nie.

8. Gee 'n voorbeeld van 'n nie-leë deelversameling V van $\mathbb{R}^2$ wat geslote onder skalaarvermenigvuldiging is, maar nié 'n deelruimte van $\mathbb{R}^2$ is nie.

The next 4 exercises will help acquaint the reader with the concept of the sum of two subspaces. First, we'll need a definition.

Definisie 1.6.30 Let V be a vector space. Suppose U and W are two subspaces of V. The sum $U + W$ of U and W is defined by

$$U + V = \{\mathbf{u} + \mathbf{w} \in V \,:\, \mathbf{u} \in U, \mathbf{w} \in W\}$$

$\Diamond$

In the exercises below, V, U, W will be as above.

9. Show that $U + V$ is a subspace of V.

10. Show that $U + V$ is, in fact, the smallest subspace of V containing both U and V.

11. If $W \subset U$ what is $U + W$?

12. Can you think of two subspaces of $\mathbb{R}^2$ whose sum is $\mathbb{R}^2$? Similarly, can you think of two subspaces of $\mathbb{R}^2$ whose sum is not all of $\mathbb{R}^2$?

1.6.5 Oplossings

Hoofstuk 2

Eindigdimensionele vektorruimtes

In hierdie kursus konsentreer ons op *eindigdimensionele* vektorruimtes, wat ons in hierdie hoofstuk sal definieer.

> *Waarskuwing*: Van hier af verder gaan ek verkorte notasie vir skalaarvermenigvuldiging gebruik en $k \cdot \mathbf{v}$ bloot as $k\mathbf{v}$ skryf!

2.1 Lineêre kombinasies en span

Ons begin met 'n paar basiese definisies.

Definisie 2.1.1 'n **Lineêre kombinasie** van 'n eindige kolleksie vektore $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ in 'n vektorruimte V is 'n vektor van die vorm

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_b\mathbf{v}_n \tag{2.1.1}$$

waar $a_1, a_2, \ldots, a_n$ skalare is. As al die skalare a_i gelyk aan nul is, dan sê ons dat dit die **triviale lineêre kombinasie** is. ◊

Voorbeeld 2.1.2 In $\mathbb{R}^3$ is $(6, 2, -14)$ 'n lineêre kombinasie van $(-3, 1, 2)$ en $(-2, 0, 3)$, want

$$(6, 2, -14) = 2(-3, 1, 2) - 6(-2, 0, 3).$$

□

Voorbeeld 2.1.3 Checking if a vector is a linear combination of other vectors. In $\mathbb{R}^4$, is $\mathbf{v} = (2, -1, 3, 0)$ a linear combination of

$$\mathbf{v}_1 = (1, 3, 2, 0), \mathbf{v}_2 = (5, 1, 2, 4), \text{ and } \mathbf{v}_3 = (-1, 0, 2, 1)?$$

To check this, we need to check if the equation

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + a_3\mathbf{v}_3, \tag{2.1.2}$$

which is an equation in the unknowns a_1, a_2, a_3, has any solutions. Let us write out (2.1.2) explicitly:

$$(2, -1, 3, 0) = a_1(1, 3, 2, 0) + a_2(5, 1, 2, 4) + a_3(-1, 0, 2, 1) \tag{2.1.3}$$

$$\therefore (2, -1, 3, 0) = (a_1 + 5a_2 - a_3, 3a_1 + a_2, 2a_1 + 2a_2 + 2a_3, 4a_2 + a_3) \tag{2.1.4}$$

(2.1.4) is an equation between two vectors in $\mathbb{R}^4$. Two vectors in $\mathbb{R}^4$ are equal if and only if their corresponding coefficients are equal. So, (2.1.2) is equivalent to the following system of simultaneous linear equations:

$$a_1 + 5a_2 - a_3 = -2 \tag{2.1.5}$$
$$3a_1 + a_2 = -1 \tag{2.1.6}$$
$$2a_1 + 2a_2 + 2a_3 = 3 \tag{2.1.7}$$
$$4a_2 + a_3 = 0 \tag{2.1.8}$$

In other words, our question becomes: do equations (2.1.5)–(2.1.8) have a solution?

This is the kind of problem you already know how to solve by hand, from first year. We can also use SageMath to do it for us. We simply tell it what our unknown variables are, and then ask it to solve the equation. Press `Evaluate (Sage)` to see the result.

```
var('a1, a2, a3')

solve([a1 + 5*a2 - a3 == 2,
       3*a1 + a2 == -1,
       2*a1 + 2*a2 + 2*a3 ==3,
       4*a2 + a3 == 0],
       [a1, a2, a3])
```

SageMath returns an empty list `[]`. In other words, there are no solutions to equations (2.1.5)–(2.1.8). Therefore $\mathbf{v}$ cannot be expressed as a linear combination of $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$. □

Voorbeeld 2.1.4 Checking if a polynomial is a linear combination of other polynomials. In Poly_2, can $p = x^2 - 1$ be expressed as a linear combination of

$$p_1 = 1 + x^2,\ p_2 = x - 3,\ p_3 = x^2 + x + 1,\ p_4 = x^2 + x - 1?$$

To check this, we need to check if the equation

$$p = a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 + a_4 p_4, \tag{2.1.9}$$

which is an equation in the unknowns a_1, a_2, a_3, a_4, has any solutions. Let us write out (2.1.9) explicitly, grouping together powers of x:

$$\begin{aligned} p &= a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 + a_4 p_4 \\ \therefore x^2 - 1 &= a_1(1 + x^2) + a_2(x - 3) + a_3(x^2 + x + 1) + a_4(x^2 + x - 1) \\ \therefore -1 + x^2 &= (a_1 - 3a_2 + a_3 - a_4) + (a_2 + a_3 + a_4)x + (a_1 + a_3 + a_4)x^2 \end{aligned}$$

Now, two polynomials are equal if and only if all their coefficients are equal. So, (2.1.9) is equivalent to the following system of simultaneous linear equations:

$$a_1 - 3a_2 + a_3 - a_4 = -1 \tag{2.1.10}$$
$$a_2 + a_3 + a_4 = 0 \tag{2.1.11}$$
$$a_1 + a_3 + a_4 = 1 \tag{2.1.12}$$

In other words, our question becomes: do equations (2.1.10)–(2.1.12) have a solution? We ask SageMath.

```
var('a1, a2, a3, a4')

solve([a1 - 3*a2 + a3 - a4 == -1,
```

```
    a2 + a3 + a4 == 0,
    a1 + a3 - a4 == 1],
    [a1, a2, a3, a4])
```

```
[[a1 == 2*r1 + 2/3, a2 == (2/3), a3 == -r1 + 1/3, a4 == r1]]
```

Here, `r1` and `r2` are to be interpreted as free paramters. I'm going to call them s and t instead, because that's what we usually call our free parameters! So, equations (2.1.10)–(2.1.12) have *infinitely* many solutions, parameterized by two free parameters s and t. In particular, there exists *at least one* solution. For instance, if we take $s = 2$ and $t = 1$ (a totally arbitrary choice!), we get the following solution:

$$a_1 = \frac{8}{3},\ a_2 = \frac{2}{3}, a_3 = -\frac{5}{3}, a_4 = 1 \tag{2.1.13}$$

$$\text{i.e. } p = \frac{8}{3}p_1 + \frac{2}{3}p_2 - \frac{5}{3}p_3 + p_4 \tag{2.1.14}$$

You should expand out the right hand side of (2.1.14) by hand and check that it indeed is equal to p.

We conclude that p can indeed be expressed as a linear combination of p_1, p_2, p_3 and p_4. □

Voorbeeld 2.1.5 Definieer die funksies $\mathbf{f}, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 \in \text{Diff}$ as

$$\mathbf{f}(x) = \cos^3 x, \mathbf{f}_1(x) = \cos(x), \mathbf{f}_2(x) = \cos(3x).$$

Dan is $\mathbf{f}$ 'n lineêre kombinasie van $\mathbf{f}_1$ en $\mathbf{f}_2$, vanweë die identiteit $\cos(3x) = \frac{1}{4}(3\cos x + \cos(3x))$. Sien Voorbeeld 1.6.21. Met ander woorde,

$$\mathbf{f} = \frac{3}{4}\mathbf{f}_1 + \frac{1}{4}\mathbf{f}_2.$$

Hierdie voorbeeld wys dat $\mathbf{f}$ ook 'n trigonometriese polinoom is,selfs al is die oorspronklike formule $\mathbf{f}(x) = cos(3x)$ nie van die form (1.6.7) nie. □

Definisie 2.1.6 Ons sê dat die lys vektore $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ in 'n vektorruimte V V **span** as elke vektor $\mathbf{v} \in V$ 'n lineêre kombinasie van die vektore uit $\mathcal{B}$. ♢

Voorbeeld 2.1.7 $\mathbb{R}^2$ word deur

$$\mathbf{e}_1 := (1,\ 0),\ \ \mathbf{e}_2 := (0, 1)$$

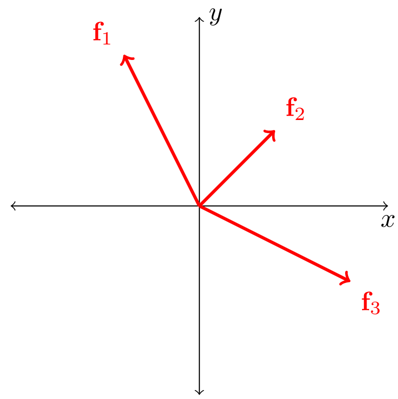
gespan, want elke vektor $\mathbf{v} = (a_1,\ a_2)$ kan as 'n lineêre kombinasie

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2$$

uitgedruk word. □

Voorbeeld 2.1.8 Checking if a list of vectors space the vector space. Is $\mathbb{R}^2$ spanned by the following list of vectors?

$$\mathbf{f}_1 := (-1, 2),\ \mathbf{f}_2 := (1, 1),\ \mathbf{f}_3 := (2, -1)$$



Figuur 2.1.9: A list of vectors which spans $\mathbb{R}^2$.

Oplossing. To check this, we need check if every vector $\mathbf{v} \in V$ can be written as a linear combination of $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ and $\mathbf{f}_3$.

So, let $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ be a fixed, but arbitrary, vector in $\mathbb{R}^2$. We need to check if the following equation has a solution for a_1, a_2, a_3:

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{f}_1 + a_2\mathbf{f}_2 + a_3\mathbf{f}_3 \tag{2.1.15}$$

Let us write this equation out explicitly:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= a_1\mathbf{f}_1 + a_2\mathbf{f}_2 + a_3\mathbf{f}_3 && (2.1.16)\\ \therefore (v_1, v_2) &= a_1(-1, 2) + a_2(1, 1) + a_3(2, -1) && (2.1.17)\\ \therefore (v_1, v_2) &= (-a_1 + a_2 + 2a_3, 2a_1 + a_2 - a_3) && (2.1.18) \end{aligned}$$

(2.1.18) is an equation between two vectors in $\mathbb{R}^2$. Two vectors in $\mathbb{R}^2$ are equal if and only if their corresponding coefficients are equal. So, (2.1.18) is equivalent to the following system of simultaneous linear equations:

$$\begin{aligned} -a_1 + a_2 + 2a_3 &= v_1 && (2.1.19)\\ 2a_1 + a_2 - a_3 &= v_2 && (2.1.20) \end{aligned}$$

In other words, the original question

> Is $\mathbb{R}^2$ spanned by $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$?

is equivalent to the question

> Can we always solve (2.1.19)–(2.1.20) for a_1, a_2, a_3, no matter what the fixed constants $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ are?

You already know how to solve simultaneous linear equations such as (2.1.19)–(2.1.20) by hand:

$$\begin{aligned} -a_1 + a_2 + 2a_3 &= v_1 && (2.1.21)\\ 2a_1 + a_2 - a_3 &= v_2 && (2.1.22)\\ & && (2.1.23)\\ \therefore -a_1 + a_2 + 2a_3 &= v_1 && (2.1.24) \end{aligned}$$

$$3a_2 + 3a_3 = 2v_1 + v_2 \qquad R2 \to R2 + 2R1 \tag{2.1.25}$$
$$\tag{2.1.26}$$
$$\text{Let } a_3 = t \tag{2.1.27}$$
$$\therefore a_2 = \frac{1}{3}(2v_1 + v_2) - t \tag{2.1.28}$$
$$\therefore a_1 = -\frac{1}{3}(-v_1 + v_2) + t \tag{2.1.29}$$

In other words, no matter what v_1, v_2 are, there are always infinitely many solutions (they are parameterized a free parameter t) to (2.1.19)–(2.1.20), and hence to our original equation (2.1.15). That is, we can express *any* $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ as a linear combination of the vectors $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$... and in fact there are *infinitely* many ways to do it, parameterized by a free parameter t!

For instance, suppose we try to write $\mathbf{v} = (2, 3)$ as a linear combination of $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$. If we take our general solution ((2.1.27)–(2.1.29)), and set $t = 0$, then we get

$$a_1 = \frac{1}{3},\ a_2 = \frac{7}{3},\ a_3 = 0$$
$$\text{i.e. } \mathbf{v} = \frac{1}{3}\mathbf{f}_1 + \frac{7}{3}\mathbf{f}_2$$

Or we could take, say, $t = 1$. Then our solution will be

$$a_1 = \frac{4}{3},\ a_2 = \frac{4}{3},\ a_3 = 1$$
$$\text{i.e. } \mathbf{v} = \frac{4}{3}\mathbf{f}_1 + \frac{4}{3}\mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3$$

There are infinitely many solutions. But the important point is that *there is always a solution to (2.1.15)*, no matter what $\mathbf{v}$ is. Therefore, the vectors $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ indeed span $\mathbb{R}^2$.

Finally, let us solve this problem using SageMath. Working by hand, we arrive at the simultanous linear equations (2.1.19)–(2.1.20), and then put it into a Sage cell:

```
var('a1, a2, a3, v1, v2')

solve([-a1 + a2 + 2*a3 == v1,
       2*a1 + a2 - a3  == v2],
       [a1, a2, a3])
```

Note that I needed to tell Sage that `v1` and `v2` are variables, and that I am asking it to solve for `a1`, `a2` and `a3`. On my computer, Sage outputs:

`[[a1 == r1 - 1/3*v1 + 1/3*v2, a2 == -r1 + 2/3*v1 + 1/3*v2, a3 == r1]]`

Here, `r1` is to be interpreted as our free parameter t. So Sage is giving us the same solution as we found by hand, (2.1.27)–(2.1.29). □

Voorbeeld 2.1.10 $\mathbb{R}^n$ word deur

$$\mathbf{e}_1 := (1, 0, \dots, 0),\ \ \mathbf{e}_2 := (0, 1, \dots, 0),\ \ \dots,\ \ \mathbf{e}_n := (0, 0, \dots, 0, 1) \tag{2.1.30}$$

gespan, want elke vektor $\mathbf{v} = (a_1,\, a_2,\, \dots,\, a_n)$ kan as 'n lineêre kombinasie

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \cdots + a_n\mathbf{e}_n. \tag{2.1.31}$$

uitgedruk word. □

Verstaanpunt 2.1.11 Bevestig die korrektheid van (2.1.31).

Stelling 2.1.12 *Let V be a vector space. Suppose $U = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ spans V. Furthermore, suppose that $W = \{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ has the property that for any $\mathbf{u}_i \in U$, $\mathbf{u}_i$ is a linear combination of elements in W. That is, there exist scalars $a_{i,1}, \ldots, a_{i,m}$ such that*

$$\mathbf{u}_i = \sum_{k=1}^{m} a_{i,1}\mathbf{w}_k.$$

Then W also spans V.

Bewys. Let $\mathbf{v} \in V$ be arbitrary. Since U spans V, there exist constants c_i such that

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} c_i\mathbf{u}_i.$$

By assumption,

$$\mathbf{u}_i = \sum_{k=1}^{m} a_{i,1}\mathbf{w}_k.$$

Substituting the second equation into the first, we obtain

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} c_i \sum_{k=1}^{m} a_{i,1}\mathbf{w}_k.$$

Using the usual rules for addition and multiplication in a vector space, we find that v is a linear combination of the w_i's. Since $v \in V$ was arbitrary, we conclude that W must also span V. ■

Oefeninge

1. Recall from 1st year that a function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is even if $f(-x) = f(x)$ and odd if $f(-x) = -f(x)$. Show that every vector in the vector space $\mathrm{Fun}(\mathbb{R})$ is a linear combination of an even function and an odd function.

Oplossing. The solution is relatively straightforward. Define the following two functions:

$$f_{\text{even}}(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) + f(-x)\right), \quad f_{\text{odd}}(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) - f(-x)\right)$$

It is easy to see that, as the names suggest, f_{even} is an even function and $f_{\text{odd}}(x)$ is an odd function. We simply sum f_{even} and f_{odd}:

$$f_{\text{even}}(x) + f_{\text{odd}}(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) + f(-x)\right) + \frac{1}{2}\left(f(x) - f(-x)\right) = f(x).$$

2. Suppose $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ spans V. Prove that $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_4$ also spans V.

Oplossing. If we are given that $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ spans V then to show that any other collection of vectors in V spans V it suffices to show that each of $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ can be written has a linear combination of the new collection - you should try prove this yourself! With this observation in hand, the exercise has an easy solution.

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) + (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3) + (\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4) + \mathbf{v}_4 \\
\mathbf{v}_2 &= (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3) + (\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4) + \mathbf{v}_4
\end{aligned}$$

$$\mathbf{v}_3 = (\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4) + \mathbf{v}_4$$
$$\mathbf{v}_4 = \mathbf{v}_4$$

3. Consider the following polynomials in Poly_2:

$$\mathbf{r}_1(x) := 3x^2 - 2,\ \mathbf{r}_2(x) := x^2 + x,\ \mathbf{r}_3(x) := x + 1,\ \mathbf{r}_4(x) := x - 1$$

(a) Can the polynomial $\mathbf{p}$ with $\mathbf{p}(x) = x^2 + 1$ be written as a linear combination of $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$, $\mathbf{r}_4$?

(b) If so, in *how many ways* can this be done?

Oplossing.

(a) We must set up the appropriate system of linear equations:

$$\begin{aligned} & a\mathbf{r}_1(x) + b\mathbf{r}_2(x) + c\mathbf{r}_3(x) + d\mathbf{r}_4(x) && = \mathbf{p}(x) \\ \Longrightarrow\ & a(3x^2 - 2) + b(x^2 + x) + c(x + 1) + d(x - 1) && = x^2 + 1 \end{aligned}$$

After grouping like powers of x we obtain

$$x^2(3a + b) + x(b + c + d) + (-2a + c - d) = x^2 + 1.$$

We equate coefficients on both sides of the equation to obtain the following system of linear equations:

$$\begin{aligned} 3a + b + 0c + 0d &= 1, \\ 0a + 1b + 1c + 1d &= 0, \\ -2a + 0b + 1c + -1d &= 1. \end{aligned}$$

Using your preferred method for solving a system of linear equations (such as Gauss reduction), we obtain a solution set of the form:

$$\begin{aligned} & d \text{ is free}, \\ & a = 2 + 2d, \\ & b = -5 - 6d, \\ & c = 5 + 5d. \end{aligned}$$

And so $\mathbf{p}(x)$ is indeed a linear combination of $\mathbf{r}_1(x), \mathbf{r}_2(x), \mathbf{r}_3(x), \mathbf{r}_4(x)$.

(b) Since d is free in the above solution set, we can write $\mathbf{p}(x)$ as a linear combination of $\mathbf{r}_1(x), \mathbf{r}_2(x), \mathbf{r}_3(x), \mathbf{r}_4(x)$ in an uncountably infinite number of ways (one for each real number!).

4. Suppose that the vectors $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ and $\mathbf{e}_4$ span a vector space V. Show that the vectors $\mathbf{f}_1 := \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1$, $\mathbf{f}_2 := \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2$, $\mathbf{f}_3 := \mathbf{e}_4 - \mathbf{e}_3$, $\mathbf{f}_4 := \mathbf{e}_4$ also span V.

Oplossing. You could choose to show this directly or we could use a clever approach based on **2**. From **2**, we know that $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}v_3, \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_4$ must span V. But if these vectors span V, then non-zero multiples of the vectors also span V. Thus $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4$ must span V.

5. Show that the polynomials

$$\mathbf{q}_0(x) := 1,\ \mathbf{q}_1(x) := x,\ \mathbf{q}_2(x) := 2x^2 - 1,\ \mathbf{q}_3(x) := 4x^3 - 3x$$

span Poly_3.

Oplossing. Once again we base our strategy on 2. Pick a spanning set for Poly_3. We'll use $1, x, x^2, x^3$, since it's the simplest. $1, x$ are certainly spanned by $\mathbf{q}_0 x), \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$ since $1 = \mathbf{q}_0(x)$ and $x = \mathbf{q}_1(x)$. It can easily be seen that

$$x^2 = \frac{1}{2}\mathbf{q}_2(x) + \frac{1}{2}\mathbf{q}_0(x) x^3 = \frac{1}{4}\mathbf{q}_3(x) + \frac{3}{4}\mathbf{q}_1(x),$$

.completing the proof.

6. Let $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ be a list of vectors in a vector space V. Suppose that $\mathcal{S}$ spans V. Suppose that w is another vector in V. Prove that the list of vectors $\mathcal{S}' = \{\mathbf{w}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ also spans V.

7. Let $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ be a list of vectors in a vector space V. Suppose that $\mathcal{S}$ spans V. Suppose that one of the vectors in the list, say $\mathbf{v}_r$, can be expressed as a linear combination of the preceding vectors:

$$\mathbf{v}_r = a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_{r-1}\mathbf{v}_{r-1} \tag{2.1.32}$$

Suppose that we remove $\mathbf{v}_r$ from $\mathcal{S}$, to arrive at a new list

$$\mathcal{T} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \hat{\mathbf{v}}_r, \ldots, \mathbf{s}_n\}$$

Prove that $\mathcal{T}$ also spans V.

Oplossing. We must show that every vector $\mathbf{v} \in V$ can be written as a linear combination of the vectors from $\mathcal{T}$. So let $\mathbf{v} \in V$. Since $\mathcal{S}$ spans V, we know we can write $\mathbf{v}$ as a linear combination of the vectors from $\mathcal{S}$:

$$\mathbf{v} = b_1\mathbf{v}_1 + \cdots + b_r\mathbf{v}_r + \cdots + b_n\mathbf{v}_n \tag{2.1.33}$$

Substituting (2.1.32) into (2.1.36) gives

$$\mathbf{v} = b_1\mathbf{v}_1 + \cdots + b_r(a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_{r-1}\mathbf{v}_{r-1}) + b_{r+1}\mathbf{v}_{r+1} + \cdots + b_n\mathbf{v}_n \tag{2.1.34}$$

$$= (b_1 + b_r a_1)\mathbf{v}_1 + \cdots + (b_r + b_r a_{r-1})\mathbf{v}_{r-1} + b_{r+1}\mathbf{v}_{r+1} + \cdots + b_n\mathbf{v}_n \tag{2.1.35}$$

Equation (2.1.38) shows that we can express $\mathbf{v}$ as a linear combination of the vectors from $\mathcal{T}$. Hence $\mathcal{T}$ spans V.

Oplossings

· Oefeninge

2.1.1. **Oplossing**. The solution is relatively straightforward. Define the following two functions:

$$f_{\text{even}}(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) + f(-x)\right), \quad f_{\text{odd}}(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) - f(-x)\right)$$

It is easy to see that, as the names suggest, f_{even} is an even function and $f_{\text{odd}}(x)$ is an odd function. We simply sum f_{even} and f_{odd}:

$$f_{\text{even}}(x) + f_{\text{odd}}(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) + f(-x)\right) + \frac{1}{2}\left(f(x) - f(-x)\right) = f(x).$$

2.1.2. Oplossing. If we are given that $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ spans V then to show that any other collection of vectors in V spans V it suffices to show that each of $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ can be written has a linear combination of the new collection - you should try prove this yourself! With this observation in hand, the exercise has an easy solution.

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) + (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3) + (\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4) + \mathbf{v}_4 \\
\mathbf{v}_2 &= (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3) + (\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4) + \mathbf{v}_4 \\
\mathbf{v}_3 &= (\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4) + \mathbf{v}_4 \\
\mathbf{v}_4 &= \mathbf{v}_4
\end{aligned}$$

2.1.3. Oplossing.

(a) We must set up the appropriate system of linear equations:

$$\begin{aligned}
& a\mathbf{r}_1(x) + b\mathbf{r}_2(x) + c\mathbf{r}_3(x) + d\mathbf{r}_4(x) && = \mathbf{p}(x) \\
\Longrightarrow\ & a(3x^2 - 2) + b(x^2 + x) + c(x + 1) + d(x - 1) && = x^2 + 1
\end{aligned}$$

After grouping like powers of x we obtain

$$x^2(3a + b) + x(b + c + d) + (-2a + c - d) = x^2 + 1.$$

We equate coefficients on both sides of the equation to obtain the following system of linear equations:

$$\begin{aligned}
3a + b + 0c + 0d &= 1, \\
0a + 1b + 1c + 1d &= 0, \\
-2a + 0b + 1c + -1d &= 1.
\end{aligned}$$

Using your preferred method for solving a system of linear equations (such as Gauss reduction), we obtain a solution set of the form:

$$\begin{aligned}
& d \text{ is free}, \\
& a = 2 + 2d, \\
& b = -5 - 6d, \\
& c = 5 + 5d.
\end{aligned}$$

And so $\mathbf{p}(x)$ is indeed a linear combination of $\mathbf{r}_1(x), \mathbf{r}_2(x), \mathbf{r}_3(x), \mathbf{r}_4(x)$.

(b) Since d is free in the above solution set, we can write $\mathbf{p}(x)$ as a linear combination of $\mathbf{r}_1(x), \mathbf{r}_2(x), \mathbf{r}_3(x), \mathbf{r}_4(x)$ in an uncountably infinite number of ways (one for each real number!).

2.1.4. Oplossing. You could choose to show this directly or we could use a clever approach based on **2**. From **2**, we know that $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}v_3, \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_4$ must span V. But if these vectors span V, then non-zero multiples of the vectors also span V. Thus $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4$ must span V.

2.1.5. Oplossing. Once again we base our strategy on 2. Pick a spanning set for Poly_3. We'll use $1, x, x^2, x^3$, since it's the simplest. $1, x$ are certainly spanned by $\mathbf{q}_0 x), \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$ since $1 = \mathbf{q}_0(x)$ and $x = \mathbf{q}_1(x)$. It can easily be seen that

$$x^2 = \frac{1}{2}\mathbf{q}_2(x) + \frac{1}{2}\mathbf{q}_0(x)x^3 = \frac{1}{4}\mathbf{q}_3(x) + \frac{3}{4}\mathbf{q}_1(x),$$

.completing the proof.

2.1.7. Oplossing. We must show that every vector $\mathbf{v} \in V$ can be written as a linear combination of the vectors from $\mathcal{T}$. So let $\mathbf{v} \in V$. Since $\mathcal{S}$ spans V, we know we can write $\mathbf{v}$ as a linear combination of the vectors from $\mathcal{S}$:

$$\mathbf{v} = b_1\mathbf{v}_1 + \cdots + b_r\mathbf{v}_r + \cdots + b_n\mathbf{v}_n \tag{2.1.36}$$

Substituting (2.1.32) into (2.1.36) gives

$$\mathbf{v} = b_1\mathbf{v}_1 + \cdots + b_r(a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_{r-1}\mathbf{v}_{r-1}) + b_{r+1}\mathbf{v}_{r+1} + \cdots + b_n\mathbf{v}_n \tag{2.1.37}$$

$$= (b_1 + b_r a_1)\mathbf{v}_1 + \cdots + (b_r + b_r a_{r-1})\mathbf{v}_{r-1} + b_{r+1}\mathbf{v}_{r+1} + \cdots + b_n\mathbf{v}_n \tag{2.1.38}$$

Equation (2.1.38) shows that we can express $\mathbf{v}$ as a linear combination of the vectors from $\mathcal{T}$. Hence $\mathcal{T}$ spans V.

2.2 Lineêre onafhanklikheid

Definisie 2.2.1 ’n Lys van vektore $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ in ’n vektorruimte V is **lineêr onafhanklik** as die vergelyking

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{e}_2 + \cdots k_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \tag{2.2.1}$$

slegs die triviale oplossing $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$ het. Andersins word die lys vektore $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ **lineêr afhanklik** genoem. $\Diamond$

Opmerking 2.2.2 Nulvektor impliseer lineêr onafhanklik. Veronderstel een van die vektore $\mathbf{v}_i$ in die lys $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ is die nulvektor $\mathbf{0}$. Dan is die lys $\mathcal{B}$ lineêr afhanklik, want die vergelyking (2.2.1) het die nie-triviale oplossing

$$0\mathbf{v}_1 + \cdots + 0\mathbf{v}_{i-1} + 1\mathbf{v}_i + 0\mathbf{v}_{i+1} + \cdots + 0\mathbf{v}_n = \mathbf{0},$$

met ander woorde,

$$k_1 = 0, \ldots, k_{i-1} = 0, k_i = 1, k_{i+1} = 0, \ldots, k_n = 0.$$

So: *’n lineêr onafhanklike lys bevat nooit die nulvektor nie!*

Voorbeeld 2.2.3 Die lys van vektore $\mathbf{f}_1 = (-1, 2)$ en $\mathbf{f}_2 = (1, 1)$ uit Voorbeeld 2.1.8 is lineêr onafhanklik, omdat die vergelyking

$$k_1(-1, 2) + k_2(1, 1) = (0, 0)$$

ekwivalent is aan die sisteem van vergelykings

$$-k_1 + k_2 = 0, \quad 2k_1 + k_2 = 0 \tag{2.2.2}$$

wat slegs die trivale oplossing $k_1 = 0$ en $k_2 = 0$ het. $\square$

Verstaanpunt 2.2.4 Bevestig dat (2.2.2) slegs die triviale oplossing het.

Oplossing.

$$(2k_1 + k_2) - (-k_1 + k_2) = 0 = 3k_2 \implies k_2 = 0 \implies k_1 = 0.$$

Voorbeeld 2.2.5 Die lys van vektore $\mathbf{f}_1 = (-1, 2)$, $\mathbf{f}_2 = (1, 1)$, $\mathbf{f}_3 = (2, -1)$

uit Voorbeeld 2.1.8 is lineêr afhanklik, want die vergelyking

$$k_1(-1,\ 2) + k_2(1,\ 1) + k_3(2,\ -1) = (0,\ 0) \tag{2.2.3}$$

is ekwivalent aan die sisteem van vergelykings

$$-k_1 + k_2 + 2k_3 = 0, \quad 2k_1 + k_2 - k_3 = 0 \tag{2.2.4}$$

wat 'n een-dimansionele vektorruimte van oplossings het wat deur t parameteriseer word,

$$k_1 = t,\ k_2 = -t,\ k_3 = t, t \in \mathbb{R}. \tag{2.2.5}$$

Byvoorbeeld, vir $t = 2$, is

$$2(-1,\ 2) - 2(1,\ 1) + 2(2,\ -1) = (0,\ 0)$$

sodat (2.2.3) non-triviale oplossings het. □

Verstaanpunt 2.2.6 Wys dat (2.2.4) die oplossingsversameling (2.2.5) het.

Oplossing. We have a system of consistent homogenous linear equations so we know there exists at least one solution, namely the trivial solution. Since we have 3 unknowns but only 2 equations, we do not have a unique solution. Let k_1 be free, i.e. $k_1 = t, t \in \mathbb{R}$. Then

$$(-k_1+k_2+2k_3)-(2k_1+k_2-k_3) = 0 = -3k_1+3k_3 \implies -k_1+k_3 = 0 \implies k_3 = t. -t+k_2+2t = 0 \implies k_2 = -t$$

Voorbeeld 2.2.7 Die lys polinome

$$\mathbf{q}_0(x) := 1,\ \mathbf{q}_1(x) := x,\ \mathbf{q}_2(x) := 2x^2 - 1,\ \mathbf{q}_3(x) := 4x^3 - 3x$$

uit Voorbeeld 2.1.5 is lineêr onafhanklik in Poly_3. Dit is omdat die vergelyking

$$k_0\mathbf{q}_0 + k_1\mathbf{q}_1 + k_2\mathbf{q}_2 + k_3\mathbf{q}_3 = \mathbf{0}$$

vereenvoudig as die volgende polinoomvergelyking:

$$4k_3x^3 + 2k_2x^2 + (-3k_3 + k_1)x + (-k_2 + k_0) = 0$$

Hierdie is ekwivalent aan die volgende stelsel vergelykings,

$$4k_3 = 0, \quad 2k_2 = 0, \quad -3k_3 + k_1 = 0, \quad k_0 - k_2 = 0$$

wat slegs die triviale oplossing $k_0 = k_1 = k_2 = k_3 = 0$ het. □

Hier is twee meer maniere om hoe van lineêre afhanklike lyste vektore te dink.

Stelling 2.2.8 Equivalent Criterions for Linear Dependence. *Let $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ be a list of vectors in a vector space V. The following statements are equivalent:*

1. *The list of vectors $\mathcal{B}$ is linearly dependent.*
2. *(Linear Combination of Other Vectors)One of the vectors in the list $\mathcal{B}$ is a linear combination of the other vectors in $\mathcal{B}$.*
3. *(Linear Combination of Preceding Vectors)Either $\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$, or for some $r \in \{2, 3, \ldots, n\}$, $\mathbf{v}_r$ is a linear combination of $\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \ldots,\ \mathbf{v}_{r-1}$.*

Bewys. We will show that (1) ⇔ (2), (1) ⇒ (3) and (3) ⇒ (2), and conclude that each statement implies the others.

(1) $\Rightarrow$ (2). Suppose that $\mathcal{B}$ is linearly dependent. This means that there are scalars k_1, k_2, …, k_n, not all zero, such that

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}. \tag{2.2.6}$$

Let k_s be one of the nonzero coefficients. Then, by taking the other vectors to the other side of the equation, and multuplying by $\frac{1}{k_s}$ we can solve for $\mathbf{v}_s$ in terms of the other vectors:

$$\mathbf{v}_s = -\frac{k_1}{k_s}\mathbf{v}_1 - \ldots - \frac{k_n}{k_s}\mathbf{v}_n \qquad \text{(No } \mathbf{v}_i \text{ terms on RHS)}$$

Therefore, (2) is true.

(2) $\Rightarrow$ (1). Suppose that one of the vectors in the list, say $\mathbf{v}_s$, is a linear combination of the others vectors. That is,

$$\mathbf{v}_s = k_1\mathbf{v}_1 + \ldots + k_n\mathbf{v}_n \qquad \text{(No term on RHS.)}$$

Rearranging this equation gives:

$$k_1\mathbf{v}_1 + \ldots + (-1)\mathbf{v}_s + \ldots + k_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}. \tag{2.2.7}$$

Not all the coefficients on the LHS of (2.2.7) are zero, since the coefficient of $\mathbf{v}_s$ is equal to -1. Therefore, $\mathcal{B}$ is linearly dependent.

(1) $\Rightarrow$ (3). Suppose that the list $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ is linearly dependent. This means that there are scalars k_1, k_2, …, k_n, not all zero, such that

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}. \tag{2.2.8}$$

Let $r \in \{1, 2, \ldots, n\}$ be the largest index such that $k_r \neq 0$. (We are told that not all the k_i are zero, so this makes sense.) If $r = 1$, then (2.2.8) is simply the equation

$$k_1\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}, \text{where } k_1 \neq 0.$$

Therefore $\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$ by Lemma 1.5.6, and we are done. On the other hand, suppose $r \neq 1$. Then (2.2.8) becomes the equation

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_r\mathbf{v}_r = \mathbf{0}, \text{where } k_r \neq 0.$$

By dividing by k_r, we can now solve for $\mathbf{v}_r$ in terms of the preceding vectors $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, …, $\mathbf{v}_{r-1}$:

$$\therefore \mathbf{v}_r = -\frac{k_1}{k_r}\mathbf{v}_1 - \frac{k_2}{k_r}\mathbf{v}_2 - \cdots - \frac{k_{r-1}}{k_r}\mathbf{v}_{r-1}$$

Therefore, (3) is true.

(3) $\Rightarrow$ (2) Suppose that (3) is true. In other words, either:

- $\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$. Therefore, $\mathcal{B}$ is linearly dependent, by Opmerking 2.2.2. In other words, (1) is true. Therefore, since we have already proved that (1) $\Rightarrow$ (2), we conclude that (2) is true.
- For some $r \in \{2, \ldots, n\}$, $\mathbf{v}_r$ is a linear combination of $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{r-1}$. In this case, clearly $\mathbf{v}_r$ is a linear combination of the other vectors in $\mathcal{B}$, so (2) is true.

In both cases, (2) is true. So, (3) $\Rightarrow$ (2). ■

Voorbeeld 2.2.9 Ons het in Voorbeeld 2.2.5 gesien dat die lys vektore $\mathbf{f}_1 = (-1, 2)$, $\mathbf{f}_2 = (1, 1)$, $\mathbf{f}_3 = (2, -1)$ in $\mathbb{R}^3$ lineêr afhanklik is. Gee twee alternatiewe bewyse hiervan, deur gebruik te maak van Stelling 2.2.8.

Oplossing 1. Ons kontrolleer Item 2 uit Stelling 2.2.8. Dit wil sê, ons kontrolleer of een van die vektore in die lys 'n lineêre kombinasie van die ander vektore is. Inderdaad, ons sien deur inspeksie dat

$$\mathbf{f}_2 = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_3. \tag{2.2.9}$$

Dus, $\mathcal{B}$ is lineêr afhanklik.

Oplossing 2. Ons kontrolleer Item 3 uit Stelling 2.2.8. Dit wil sê, ons kontrolleer:

- $\mathbf{f}_1 = \mathbf{0}$ (nie waar nie), óf
- $\mathbf{f}_2$ is 'n skalaarveelvoud van $\mathbf{f}_1$ (nie waar nie), óf
- $\mathbf{f}_3$ is 'n lineêre kombinasie van $\mathbf{f}_1$ en $\mathbf{f}_2$, wat waar is:

$$\mathbf{f}_3 = -\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2$$

□

Stelling 2.2.10 Afstampproposisie. *Veronderstel $\mathcal{L} = \{\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \ldots, \mathbf{l}_m\}$ is 'n lineêr onafhanklike lys vektore in 'n vektorruimte V en dat $\mathcal{S} = \{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_n\}$ vir V span. Dan is $m \leq n$.*

Bewys. Begin met die oorspronglike lys vektore

$$\mathcal{S} = \{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_n\} \tag{2.2.10}$$

wat V span en oorweeg die 'opgeblase' lys

$$\mathcal{S}' = \{\mathbf{l}_1, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \cdots, \mathbf{s}_n\} \tag{2.2.11}$$

Nou, omdat $\mathcal{S}$ vir V span, weet ons in besonder dat $\mathbf{l}_1$ kan uitgedruk word as 'n lineêre kombinasie van die vektore $\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_n$. Dus, deur Item 2 van Stelling 2.2.8, weet ons dat $\mathcal{S}'$ lineêr afhanklik is. Dus, deur Item 3 van Stelling 2.2.8, óf:

- $\mathbf{l}_1 = \mathbf{0}$. Dit kan nie waar wees nie, want dan sou $\mathcal{L}$ lineêr afhanklik wees weens Opmerking 2.2.2, wat in teenstryding is met ons oorspronklike aanname.
- een van die $\mathbf{s}$-vectore, noem dit $\mathbf{s}_r$, kan uitgedruk word as 'n lineêre kombinasie van die voorafgaande vektore. Ons kan dan $\mathbf{s}_r$ uit die lys $\mathcal{S}'$ verwyder ('afstamp'), en die resulterende lys

  $$\mathcal{S}_1 := \{\mathbf{l}_1, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \cdots, \hat{\mathbf{s}_r}, \cdots, \mathbf{s}_n\} \qquad (\mathbf{s}_r \text{ omitted}) \tag{2.2.12}$$

  sal nog steeds vir V span, deur Oefening 2.1.7.

In hierdie manier kan ons aangaan: elke keer 'n $\mathbf{l}$-vektor oor te dra en 'n $\mathbf{s}$-vektor te verwyder, en die resulterende lys sal nog steeds vir V span:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \{\mathbf{l}_1, \ldots, \mathbf{l}_m\} & \qquad \mathcal{S} &= \{\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_n\} \\ \mathcal{L}_1 &= \{\mathbf{l}_2, \ldots, \mathbf{l}_m\} & \qquad \mathcal{S}_1 &= \{\mathbf{l}_1, \underbrace{\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_n}_{n-1}\} \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_2 = \{\mathbf{l}_3, \ldots, \mathbf{l}_m\} \qquad\qquad \mathcal{S}_2 = \{\mathbf{l}_2, \mathbf{l}_1, \underbrace{\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_n}_{n-2}\}$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

Nou, veronderstel dat $m > n$. Wanneer ons die $n$ste stadium van hierdie proses bereik, sal $\mathcal{S}_n = \{\mathbf{l}_n, \ldots, \mathbf{l}_1\}$, en dit sal vir V span. Dus, in besonder, $\mathbf{l}_{n+1}$ (let op dat hierdie vektore wel bestaan, want $m > n$) sal 'n lineêre kombinasie van $\mathbf{l}_1, \ldots, \mathbf{l}_n$ wees. Maar dan, deur Item 2 van Stelling 2.2.8, lei ons af dat $\mathcal{L}$ lineêr afhanklik is. Maar ons het aangeneem van die begin af dat $\mathcal{L}$ lineêr *on*afhanklik is. So ons het 'n teenstryding. Dus, ons aanname dat $m > n$ moet vals wees. Dus, dit moet waar wees dat $m \leq n$. ■

Oefeninge

1. Wys dat die lys vektore (2, 3, 1), (1, −1, 2), (7, 3, c) lineêr afhanklik in $\mathbb{R}^3$ is as en slegs as $c = 8$.

Oplossing. We set up a linear equation and find the necessary conditions on c. Suppose some linear combination of the vectors equals 0:

$$k_1(2,\ 3,\ 1) + k_2(1,\ -1,\ 2) + k_3(7,\ 3,\ c) = \mathbf{0} = (0, 0, 0)$$

This vector equation gives rise to a system of 3 linear equations:

$$2k_1 + k_2 + 7k_3 = 0, 3k_1 - k_2 + 3k_3 = 0, k_1 + 2k_2 + ck_3 = 0.$$

The corresponding matrix equation is

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

This matrix is non-invertible if and only if its determinant is 0. Furthermore, the matrix being non-invertible will mean we can find a non-trivial solution to the intial equation. We compute the determinant:s

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & c \end{bmatrix} = -5c + 40$$

which is 0 if and only if $c = 8$.

2. Die lys vektore in $\mathrm{Mat}_{2,2}$ gegee deur

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

is lineêr onafhanklik (ons sal dit in Oefening 2.3.6.4 bewys, maar ter wille van hierdie vraag kan jy aanvaar dat dit waar is). Herhaal dieselfde stappe as in Voorbeeld 2.2.9 om die eerste vektor in die lys te vind wat of die nulvektor of 'n lineêre kombinasie van die voorafgaande vektore is.

Oplossing. Firstly note that $\mathbf{v}_1$ is non-zero, so we consider $\mathbf{v}_2$. $\mathbf{v}_2$ cannot be a scalar multiple of $\mathbf{v}_1$ by considering the matrix entry in position (1,2). We now consider $\mathbf{v}_3$. Suppose

$$a \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

This gives rise to a system of four linear equations. In particular, we have the equation for the matrix entry in position (1,2):

$$2a + 0b = 0$$

And hence $a = 0$. But clearly

$$b \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

for any choice of b. Hence $\mathbf{v}_3$ is not a scalar multiple of $\mathbf{v}_1$ and $\mathbf{v}_2$. We consider $\mathbf{v}_4$ next. Suppose

$$a \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

The equation for the entry in position (1,2) is simply

$$2a = 3$$

and so $a = \frac{3}{2}$. The corresponding equation for the entry in position (1,1) is thus

$$\frac{3}{2} + b + c = 0.$$

Using this result, we consider the equation for the entry in position (2,2) and compute:

$$\frac{3}{2} + b + 3c = -1 \implies \frac{3}{2} + b + c + 2c = -1 \implies 2c = -1 \implies c = -\frac{1}{2}$$

and so $b = -1$. SHOW THAT THIS IS INCONSISTENT WITH (2,1).

3. $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\} V \mathcal{S} V w V \mathcal{S}' = \{\mathbf{w}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\} V$

Oplossing. To say that $\mathcal{S}$ spans V is to say that for every vector $\mathbf{v} \in V$ there exist scalars $(a_i^{\mathbf{v}})$ depending on $\mathbf{v}$ such that

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^{\mathbf{v}} \mathbf{v}_i = \mathbf{v}.$$

But of course, it is also true that

$$0\mathbf{w} + \sum_{i=1}^{n} a_i^{\mathbf{v}} \mathbf{v}_i = \mathbf{v}$$

because $0\mathbf{w} = 0$ and so has no effect on the sum. Hence any vector in V is a linear combination of $\mathbf{w}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ which is to say that the set $\mathcal{S}' = \{\mathbf{w}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ spans V.

4. Laat $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ 'n lineêr onafhanklike lys vektore in 'n vektorruimte V wees. Veronderstel dat $\mathbf{v}$ 'n vektor in V is wat nie as 'n lineêre kombinasie van die vektore uit $\mathcal{B}$ geskryf kan word nie. Toon aan dat die lys $\mathcal{B}' = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}\}$ lineêr onafhanklik is. (Wenk: Gebruik die Lineêre Kombinasie van Voorafgaande Vektore Proposisie.)

5. Consider the vector space of functions on the closed unit interval, $\mathrm{Fun}([0,1])$. Show that for any $n \in \mathbb{N}$, we can find n linear independent vectors in $\mathrm{Fun}([0,1])$.

6. (Bonus) Try adapt the argument in the question above to show that for any $n \in \mathbb{N}$, we can find n linear independent vectors in $\mathrm{Cont}([0,1])$, the vector space of all continuous real valued functions on $[0,1]$.

Oplossings

· Oefeninge

2.2.1. Oplossing. We set up a linear equation and find the necessary conditions on c. Suppose some linear combination of the vectors equals 0:

$$k_1(2,\ 3,\ 1) + k_2(1,\ -1,\ 2) + k_3(7,\ 3,\ c) = \mathbf{0} = (0,0,0)$$

This vector equation gives rise to a system of 3 linear equations:

$$2k_1 + k_2 + 7k_3 = 0, 3k_1 - k_2 + 3k_3 = 0, k_1 + 2k_2 + ck_3 = 0.$$

The corresponding matrix equation is

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

This matrix is non-invertible if and only if its determinant is 0. Furthermore, the matrix being non-invertible will mean we can find a non-trivial solution to the intial equation. We compute the determinant:s

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & c \end{bmatrix} = -5c + 40$$

which is 0 if and only if $c = 8$.

2.2.2. Oplossing. Firstly note that $\mathbf{v}_1$ is non-zero, so we consider $\mathbf{v}_2$. $\mathbf{v}_2$ cannnot be a scalar multiple of $\mathbf{v}_1$ by considering the matrix entry in position (1,2). We now consider $\mathbf{v}_3$. Suppose

$$a \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

This gives rise to a system of four linear equations. In particular, we have the equation for the matrix entry in position (1,2):

$$2a + 0b = 0$$

And hence $a = 0$. But clearly

$$b \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

for any choice of b. Hence $\mathbf{v}_3$ is not a scalar multiple of $\mathbf{v}_1$ and $\mathbf{v}_2$. We consider $\mathbf{v}_4$ next. Suppose

$$a \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

The equation for the entry in position (1,2) is simply

$$2a = 3$$

and so $a = \frac{3}{2}$. The corresponding equation for the entry in position (1,1) is thus

$$\frac{3}{2} + b + c = 0.$$

Using this result, we consider the equation for the entry in position (2,2) and compute:

$$\frac{3}{2} + b + 3c = -1 \implies \frac{3}{2} + b + c + 2c = -1 \implies 2c = -1 \implies c = -\frac{1}{2}$$

and so $b = -1$. SHOW THAT THIS IS INCONSISTENT WITH (2,1).

2.2.3. Oplossing. To say that $\mathcal{S}$ spans V is to say that for every vector $\mathbf{v} \in V$ there exist scalars $(a_i^{\mathbf{v}})$ depending on $\mathbf{v}$ such that

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^{\mathbf{v}} \mathbf{v}_i = \mathbf{v}.$$

But of course, it is also true that

$$0\mathbf{w} + \sum_{i=1}^{n} a_i^{\mathbf{v}} \mathbf{v}_i = \mathbf{v}$$

because $0\mathbf{w} = 0$ and so has no effect on the sum. Hence any vector in V is a linear combination of $\mathbf{w}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ which is to say that the set $\mathcal{S}' = \{\mathbf{w}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ spans V.

2.3 Basis en dimensie

In hierdie afdeling introduseer ons die begrippe van:

- 'n *deelruimte* van 'n vektorruimte, en ,
- die *dimensie* van 'n vektorruimte.

Dan bereken ons die dimensies van die vektorruimtes wat ons tot hierdie punt gesien het. Ons eindig deur die *sifalgoritme* te verduidelik, wat ons toelaat om nuttige resultate rakend basis en dimensie te bewys.

Definisie 2.3.1 'n Lys vektore $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ in 'n vektorruimte V word 'n **basis** van V genoem as dit lineêr onafhanklik is en V span. ♢

Stelling 2.3.2 Invariansie van dimensie. *As* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ *en* $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ *albei basisse van 'n vektorruimte* V *is, dan is* $m = n$.

Bewys. Dit is 'n gevolg van Proposisie 2.2.10 (die afstampproposisie). Aangesien die $\mathbf{e}$-vectore V lineêr onfafhanklik is en die $\mathbf{f}$-vektore V span, het ons $m \leq n$. Aan die ander kant, omdat die $\mathbf{f}$-vektore linêr onfahanklik is en die $\mathbf{e}$-vektore V span, het ons $n \leq m$. Daarom is $m = n$. ■

Definisie 2.3.3 'n Vektorruimte V is **eindigdimensioneel** as dit 'n eindige basis het. In daardie geval is die **dimensie** van V die aantal elemente in 'n basis vir V. 'n Vektorruimte is **oneindigdimensioneel** as dit nie eindigdimensioneel is nie. ♢

Let op dat die konsep van die 'dimensie van'n vektorruimte' slegs goedgedefinieerd is as gevolg van Stelling 2.3.2.

Die geval van die nulvektorruimte $Z = \{\mathbf{0}\}$ is nie eksplisiet in Definisie 2.3.3 gehanteer nie. Ons hanteer dit as 'n spesiale geval. Naamlik, ons *defineer* die dimensie van die nulvektorruimte Z as 0. So, volgens die definisie is Z is eindig-dimensionaal, en sy dimensie is gelyk aan 0.

2.3.1 Dimensies van bekende vektorruimtes

Voorbeeld 2.3.4 Standaard basis vir $\mathbb{R}^n$. Die lys vektore

$$\mathbf{e}_1 := (1, 0, \ldots, 0), \ \mathbf{e}_2 := (0, 1, \ldots, 0), \ \ldots, \ \mathbf{e}_n := (0, 0, \ldots, 0, 1)$$

is 'n basis vir $\mathbb{R}^n$. Ons het reeds in Voorbeeld 2.1.10 gesien dat die lys $\mathbb{R}^n$ span. Ons moet seker maak dat die lys lineêr onafhanklik is. So, suppose that

$$a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \cdots + a_n\mathbf{e}_n = \mathbf{0}.$$

Uitbreiding van die linkerkant na komponente volgens die definisie van die standaard basisvektore $\mathbf{e}_i$ lewer die vergelyking

$$(a_1, 0, 0, \ldots, 0) + (0, a_2, 0, \ldots, 0) + \cdots + (0, 0, 0, \ldots, a_n) = (0, 0, 0, \ldots, 0).$$

Met ander woorde, ons het dat

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) = (0, 0, 0, \ldots, 0)$$

wat beteken dat $a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_n = 0$, presies wat ons moes bewys. Gevolglik is die lys vektore $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ lineêr onafhanklik en daarom is dit 'n basis vir $\mathbb{R}^n$. So $\mathbb{R}^n$ het dimensie n. □

Voorbeeld 2.3.5 A basis for $\mathbb{R}^4$. Check whether the following list of vectors

$$\mathbf{v}_1 = (1, 0, 2, -3), \, \mathbf{v}_2 = (1, 3, -1, 2), \, \mathbf{v}_3 = (0, 1, 2, -1), \mathbf{v}_4 = (1, 2, 3, 4) \quad (2.3.1)$$

is a basis for $\mathbb{R}^4$.

Oplossing. First we check if the list of vectors is linearly independent. Consider the equation

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + a_3\mathbf{v}_3 + a_4\mathbf{v}_4 = \mathbf{0} \quad (2.3.2)$$

$$\therefore a_1(1, 0, 2, -3) + a_2(1, 3, -1, 2) + a_3(0, 1, 2, -1) + a_4(1, 2, 3, 4) = (0, 0, 0, 0) \quad (2.3.3)$$

$$\therefore (a_1 - a_2 + a_4, 3a_2 + a_3 + 2a_4, 2a_1 - a_2 + 2a_3 + 3a_4, -3a_1 + 2a_2 - a_3 + 4a_4) = (0, 0, 0, 0) \quad (2.3.4)$$

So the list of vectors is linearly indepedent if and only if the following equations have only the trivial solution $a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 0, a_4 = 0$:

$$a_1 - a_2 + a_4 = 0 \quad (2.3.5)$$

$$3a_1 + a_3 + 2a_4 = 0 \quad (2.3.6)$$

$$2a_1 - a_2 + 2a_3 + 3a_4 = 0 \tag{2.3.7}$$
$$-3a_1 + 2a_2 - a_3 + 4a_4 = 0 \tag{2.3.8}$$

We can compute the solutions to equations (2.3.5)–(2.3.8) by hand, or using SageMath.

```
var('a1,␣a2,␣a3,␣a4')

solve([a1 - a2 + a4 == 0,
       3*a1 + a3 + 2*a4 == 0,
       2*a1 - a2 + 2*a3 + 3*a4 == 0,
       -3*a1 + 2*a2 - a3 + 4*a4 == 0],
       [a1, a2, a3, a4])
```

SageMath outputs:

```
[[a1 == 0, a2 == 0, a3 == 0, a4 == 0]]
```

So indeed, equations (2.3.5)–(2.3.8) have only the trivial solution. Therefore the list of vectors is linearly independent.

Next, we need to check that the list of vectors spans $\mathbb{R}^4$. (There is a shorter way of doing this, using Gevolg 2.3.27 below, but for now we prove it from first principles.) So, let $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3, w_4)$ be an arbitrary vector in $\mathbb{R}^4$. We need to show that there exists at least one way to express $\mathbf{w}$ as a linear combination of the vectors $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$. In other words, we need to check if there exists at least one solution to the following equation:

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + a_3\mathbf{v}_3 + a_4\mathbf{v}_4 = \mathbf{w} \tag{2.3.9}$$
$$\therefore a_1(1,0,2,-3) + a_2(1,3,-1,2) + a_3(0,1,2,-1) + a_4(1,2,3,4) = (w_1,w_2,w_3,w_4) \tag{2.3.10}$$
$$\therefore (a_1 - a_2 + a_4, 3a_2 + a_3 + 2a_4, 2a_1 - a_2 + 2a_3 + 3a_4, -3a_1 + 2a_2 - a_3 + 4a_4) = (w_1,w_2,w_3,w_4) \tag{2.3.11}$$

So the list of vectors spans $\mathbb{R}^4$ if and only if the following equations for a_1, a_2, a_3, a_4 always have a solution, no matter what the values of w_1, w_2, w_3, w_4 are:

$$a_1 - a_2 + a_4 = w_1 \tag{2.3.12}$$
$$3a_1 + a_3 + 2a_4 = w_2 \tag{2.3.13}$$
$$2a_1 - a_2 + 2a_3 + 3a_4 = w_3 \tag{2.3.14}$$
$$-3a_1 + 2a_2 - a_3 + 4a_4 = w_4 \tag{2.3.15}$$

We can compute the solutions to equations (2.3.12)–(2.3.15) by hand, or using SageMath:

```
var('a1,␣a2,␣a3,␣a4,␣w1,␣w2,␣w3,␣w4')

solve([a1 - a2 + a4 == w1,
       3*a1 + a3 + 2*a4 == w2,
       2*a1 - a2 + 2*a3 + 3*a4 == w3,
       -3*a1 + 2*a2 - a3 + 4*a4 == w4],
       [a1, a2, a3, a4])
```

Note that we ask SageMath to solve for `a1, a2, a3, a4`, since `w1, w2, w3, w4` are regarded as constants in the equation... we are not trying to solve for them, they are fixed, but arbitrary! SageMath outputs:

```
[[a1 == 1/9*w1 + 7/18*w2 - 2/9*w3 - 1/18*w4, a2 == -2/3*w1 + 5/12*w2
- 1/6*w3 + 1/12*w4, a3 == -7/9*w1 - 2/9*w2 + 5/9*w3 - 1/9*w4, a4 ==
2/9*w1 + 1/36*w2 + 1/18*w3 + 5/36*w4]]
```

In other words, there does indeed exist a solution, no matter what (w_1, w_2, w_3, w_4) is. For instance, if $(w_1, w_2, w_3, w_4) = (3, 1, 2, 4)$, then the solution is

$$a_1 = \frac{1}{18}, a_2 = -\frac{19}{12}, a_3 = -\frac{17}{9}, a_4 = \frac{49}{36}.$$

In other words,

$$(3, 1, 2, 4) = \frac{1}{18}\mathbf{v}_1 - \frac{19}{12}\mathbf{v}_2 - \frac{17}{9}\mathbf{v}_3 + \frac{49}{36}\mathbf{v}_4.$$

Since there exists a solution to equation (2.3.9) for each vector $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^4$, we conclude that $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ spans $\mathbb{R}^4$.

Hence $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ is a basis for $\mathbb{R}^4$, since it is linearly independent and spans $\mathbb{R}^4$. □

Voorbeeld 2.3.6 Die lys polinome

$$\mathbf{p}_0(x) := 1,\ \mathbf{p}_1(x) := x,\ \mathbf{p}_2(x) := x^2,\ \ldots,\ \mathbf{p}_n(x) := x^n$$

is 'n basis vir Poly_n, so $\dim \text{Poly}_n = n + 1$. Duidelik span hierdie lys Poly_n per definisie, so ons moet net seker maak dat hulle line{êr} onafhanklik is. Veronderstel dat

$$a_0\mathbf{p}_0 + a_1\mathbf{p}_1 + a_2\mathbf{p}_2 + \cdots + a_n\mathbf{p}_n = \mathbf{0}.$$

Dit is 'n vergelyking van funksies, so dit geld vir alle $x \in \mathbb{R}$! Met ander woorde, vir *alle* $x \in \mathbb{R}$ het ons het die vergelyking

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = 0. \tag{2.3.16}$$

Dink versigtig hieraan. Vergelyking (2.3.16) verteenwordig 'n *oneindige* stelsel van vergelykings vir die onbekendes $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Daar is een vergelyking vir elke waarde van $x \in \mathbb{R}$. Byvoorbeeld

$$
\begin{aligned}
&(x = 1) & a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0 \quad &(2.3.17)\\
&(x = -1) & a_0 - a_1 + a_2 + \cdots + (-1)^n a_n = 0 \quad &(2.3.18)\\
&(x = 2) & a_0 + 2a_1 + 4a_3 + \cdots + 2^n a_n = 0 \quad &(2.3.19)\\
&(x = 3) & a_0 + 3a_1 + 9a_3 + \cdots + 3^n a_n = 0 \quad &(2.3.20)\\
& & \vdots \quad &(2.3.21)
\end{aligned}
$$

Veronderstel dat ons waardes vir $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ kan vind wat *elkeen* van hierdie oneindig veel vergelykings (2.3.17)–(2.3.21) op los. Ons kan nou ons standpunt verander. Naamlik, stel hierdie vaste waardes vir $a_0, a_1, \ldots, a_n$ in Vergelyking (2.3.16) en beskou Vergelyking (2.3.16) as 'n vergelyking vir die onbekende x (die koëffisiente $a_0, a_1, \ldots, a_n$ is nou *vasgemaak.*) Ons trek die gevolg dat *elke* $x \in \mathbb{R}$ 'n wortel van hierdie polinoom vergelyking is!

Maar, ons weet uit algebra dat 'n polinoom van die vorm (2.3.16) met nie-nul koëffisiënte *meestens* n wortels $x_1, x_2, \ldots, x_n$ het . So, die koëffisiënte moet nul wees, i.e. $a_0 = a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$, wat is wat ons moes bewys. □

Voorbeeld 2.3.7 Veronderstel X is 'n eindige versameling. Dan is $\text{Fun}(X)$ eindig-dimensioneel, met dimensie $|X|$, waar die basis gegee word deur die funksies f_a, $a \in X$, gedefinieer deur:

$$f_a(x) := \begin{cases} 1 & \text{if } x = a \\ 0 & \text{andersins} \end{cases} \tag{2.3.22}$$

Ons sal dit in 'n reeks oefeninge bewys.

Die formule aan die regterkant van (2.3.22) kom so gereeld in wiskunde voor dat ons dit 'n spesiale simbool gee, naamlik δ_{ab} (die 'Kronecker-delta'). Hierdie simbool staan vir die formule: "As $a = b$, gee die waarde 1. As $a \neq b$, gee die waarde 0". In hierdie taal kan ons die definisie van die funksies f_a as

$$f_a(x) := \delta_{ax} \tag{2.3.23}$$

herskryf.

□

Verstaanpunt 2.3.8 Suppose $X = \{a, b, c\}$.

1. Evaluate the function f_b at each $x \in X$.
2. Show that $\{f_a, f_b, f_c\}$ is a basis for $\text{Fun}(X)$.

Verstaanpunt 2.3.9 Nou, laat X 'n arbitrêre eindige versameling wees. Oorweeg die versameling funksies

$$\mathcal{B} = \{f_a : a \in X\}$$

Toon aan dat $\mathcal{B}$ 'n basis vir $\text{Fun}(X)$ is.

Voorbeeld 2.3.10 Trig_n is $(2n+1)$-dimensioneel, met basis

$$\mathbf{T}_0(x) := 1,\ \ \mathbf{T}_1(x) := \cos x,\ \mathbf{T}_2(x) := \sin x,\ \mathbf{T}_3(x) := \cos 2x,$$
$$\mathbf{T}_4(x) := \sin 2x,\ \ldots,\ \mathbf{T}_{2n-1}(x) := \cos nx,\ \mathbf{T}_{2n}(x) := \sin nx.$$

Hierdie funksies span Trig_n per definisie. Hulle is ook lineêr onafhanklik, alhoewel ons dit nie sal bewys nie. □

Voorbeeld 2.3.11 Die dimensie van $\text{Mat}_{n,m}$ is nm. 'n Basis word gegee deur die matrikse

$$\mathsf{E}_{ij}, i = 1 \ldots n,\ j = 1 \ldots m$$

wat 'n 1 in ry i en kolom j het, en nulle orals elders.

Normaalweg is A 'n matriks en A_{ij} is die element van die matriks in die posisie (i, j). Maar nou is E_{ij} 'n matriks in eie reg! 'n Element in posisie (k, l) sal geskryf word as $(\mathsf{E}_{ij})_{kl}$. Ek hoop jy vind dit nie te verwarrend nie. Trouens, ons kan 'n elegante formule vir die elemente van E_{ij} neerskryf deur gebruik te maak van die Kronecker delta-simbool:

$$(\mathsf{E}_{ij})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl} \tag{2.3.24}$$

□

Verstaanpunt 2.3.12 Kontroleer dat (5.0.1) wel die korrekte formule vir die matrikselemente van E_{ij} gee.

Voorbeeld 2.3.13 Die standaard basis van $\mathrm{Mat}_{2,2}$ is

$$\mathsf{E}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathsf{E}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathsf{E}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathsf{E}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

□

Voorbeeld 2.3.14 Die standaard basis van Col_n is

$$\mathbf{e}_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \mathbf{e}_n := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

□

Voorbeeld 2.3.15 Dimension of a hyperplane. Let $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ be a fixed vector, and consider the hyperplane $W \subset \mathbb{R}^n$ orthogonal to $\mathbf{v}$ as in Voorbeeld 1.6.13. Then you will prove in Exercise Verstaanpunt 2.3.17 that $\mathrm{Dim}(W) = n - 1$.

For instance, consider the specific example from Voorbeeld 1.6.13, namely the plane $W \subset \mathbb{R}^3$ of vectors orthogonal to $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$. In other words,

$$W = \{(w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3 : w_1 + 2w_2 + 3w_3 = 0\}. \tag{2.3.25}$$

There is no 'standard' basis for W. But, here is one basis (as good as any other):

$$\mathbf{a} = (1, 0, -\frac{1}{3}), \quad \mathbf{b} = (0, 1, -\frac{2}{3}). \tag{2.3.26}$$

You will show this is indeed a basis for W in Verstaanpunt 2.3.16 below. I computed these vectors as follows. To obtain $\mathbf{a}$, I simply set $w_1 = 1, w_2 = 0$ and then solved for w_3 using Equation (2.3.25). Similarly, for $\mathbf{b}$, I simply set $w_1 = 0, w_2 = 1$ and then solved for w_3 using (2.3.25).

There is nothing special about my method above for computing a basis for W. Here is a different basis for W, which I arrived at by choosing random values of w_1 and w_2 and then calculating what w_3 must be in order to satisfy Equation (2.3.25):

$$\mathbf{u} = (1, 2, -\frac{5}{3}), \quad \mathbf{v} = (-4, 2, 0). \tag{2.3.27}$$

In any event, we see that $\mathrm{Dim}(W) = 2$. □

Verstaanpunt 2.3.16 Show that the list of vectors $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ from (2.3.26) in Voorbeeld 2.3.15 is a basis for W.

Verstaanpunt 2.3.17 Let $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ be a fixed vector, and set

$$W := \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0\}$$

Prove that $\mathrm{Dim}(W) = n - 1$.

Wenk. Find a basis for the solution space of the equation determining W.

2.3.2 Dimension of space of solutions to a homogenous linear differential equation

We will now compute the dimension of the vector space of solutions to a homogenous linear ordinary differential equation. We will need the following theorem from the theory of differential equations, which we won't prove.

Stelling 2.3.18 Existence and uniqueness of solutions to linear ODE's.

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y^{(1)} + a_0(x)y == 0 \tag{2.3.28}$$

$Ia_0(x), \cdots, a_{n-1}(x)I$

$$y(x_0) = c_0 \tag{2.3.29}$$
$$y^{(1)}(x_0) = c_1 \tag{2.3.30}$$
$$\vdots \tag{2.3.31}$$
$$y^{(n-1)}(x_0) = c_{n-1} \tag{2.3.32}$$

$x_0 \in Ic_0, \ldots, c_{n-1}y(x)I$ *(2.3.28)(2.3.29)–(2.3.32)*

Voorbeeld 2.3.19 Application of existence and uniqueness theorem of solutions to ODE. Consider the ODE

$$x^2y^{''} - 3xy^{'} + 5y = 0 \quad \text{on } (0, \infty) \tag{2.3.33}$$

from Voorbeeld 1.6.24. To apply Stelling 2.3.18, we first rewrite it in the form

$$y^{''} - \frac{3}{x}y' + \frac{5}{x^2}y = 0 \quad \text{on } (0, \infty). \tag{2.3.34}$$

The coefficient functions $\frac{3}{x}$ and $\frac{5}{x^2}$ are continuous on $(0, \infty)$ so we can apply Stelling 2.3.18. Choose, say, $x_0 = 1$ and two arbitrary numbers c_0, c_1. Then Stelling 2.3.18 says that there exists a unique solution $y(x)$ to the differential equation (2.3.34) satisfying the initial conditions:

$$y(1) = c_0 \tag{2.3.35}$$
$$y'(1) = c_1 \tag{2.3.36}$$

Let us verify this in SageMath. First, we ask SageMath to find the most general solution to the differential equation (2.3.34):

```
x = var('x')
y = function('y')(x)

ode = diff(y,x,2) - 3/x * diff(y,x,1) + 5/x^2 * y == 0

show(desolve(ode, y))
```

SageMath tells us that the most general solution to the differential equation (2.3.34) is

$$y = K_1x^2\sin(\log(x)) + K_2x^2\cos(\log(x)). \tag{2.3.37}$$

Let us now apply the initial conditions (2.3.35)–(2.3.36). We can compute $y(1)$ and $y'(1)$ using the formula for y from (2.3.37). So (2.3.35)–(2.3.36) becomes (check this):

$$K_2 = c_0 \tag{2.3.38}$$
$$K_1 + 2K_2 = c_1 \tag{2.3.39}$$

Equations (2.3.38)–(2.3.39) have a unique solution, namely $K_1 = c_1 - 2c_0, K_2 = c_0$. So indeed, for any initial conditions (2.3.35)–(2.3.36), the differential equation (2.3.34) has a unique solution, namely:

$$y = (c_1 - 2c_0)x^2\sin(\log(x)) + c_0x^2\cos(\log(x))$$

For instance, if our initial conditions were

$$y(1) = 1 \tag{2.3.40}$$
$$y'(1) = 0 \tag{2.3.41}$$

then the unique solution is

$$y = -2x^2 \sin(\log(x)) + x^2 \cos(\log(x)). \tag{2.3.42}$$

You can also check this explicitly in SageMath, using the `ics=[1,1,0]` option of `desolve` (the first number is the value of x_0, the second number is the value of $y(x_0)$, and the third number is the value of y'(x_0), etc.):

```
x = var('x')
y = function('y')(x)

ode = diff(y,x,2) - 3/x * diff(y,x,1) + 5/x^2 * y == 0

show(desolve(ode, y, ics=[1,1,0]))
```

SageMath outputs the same solution as in (2.3.42). Similarly, if our initial conditions were

$$y(1) = 1 \tag{2.3.43}$$
$$y'(1) = 0 \tag{2.3.44}$$

then the unique solution is

$$y = x^2 \sin(\log(x)).$$

□

2.3.3 Dimensies van deelruimtes

Ons gaan nou deelruimtes van vektorruimtes se dimensie bestudeer.

Stelling 2.3.20 *Laat W 'n deelruimte van 'n eindig-dimensionele vektorruimte V wees. Dan is W eindig-dimensioneel, en* $\mathrm{Dim}(W) \leq \mathrm{Dim}(V)$.

Bewys. Let

$$\mathcal{C} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$$

be a basis for V, so that $\mathrm{Dim}(V) = n$. We just need to show that W is finite-dimensional, i.e. that there exists a basis

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k\}$$

for W. For then $\mathcal{B}$ will be a list of k linearly independent vectors which live in W (and hence also in V) and hence we must have $k \leq n$ by Stelling 2.2.10, as $\mathcal{C}$ spans V.

We show that W is finite-dimensional as follows.

If W is the zero vector space $\{\mathbf{0}\}$, then W is finite-dimensional by definition.

If W is not the zero vector space, then there exists a nonzero vector $\mathbf{w}_1 \in W$. Consider the list $\mathcal{B}_1 = \{\mathbf{w}_1\}$. Note that $\mathcal{B}_1$ is linearly independent, by Item 3 of Stelling 2.2.8. So, if $\mathcal{B}_1$ spans W, then it is a basis for W, and so W is finite-dimensional and we are done.

If $\mathcal{B}_1$ does not span W, then there exists a vector $\mathbf{w}_2 \in W$ which is not a scalar multiple of $\mathbf{e}_1$. Now consider the list $\mathcal{B}_2 = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. Once again, $\mathcal{B}_2$ is linearly independent, by Item 3 of Stelling 2.2.8. So, if $\mathcal{B}_2$ spans W, then it is a basis for W, and we are done.

If $\mathcal{B}_2$ does not span W, then there exists a vector $\mathbf{w}_3 \in W$ which is not a linear combination of $\mathbf{w}_1$ and $\mathbf{w}_2$. Now consider the list $\mathcal{B}_3 = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$. Again, $\mathcal{B}_3$ is linearly independent, by Item 3 of Stelling 2.2.8. If it does not span W, then there exists a vector $\mathbf{w}_4 \in W$ which is not a linear combination of $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$. So consider the list $\mathcal{B}_4 = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4\}$.

This process must terminate for some $k \leq n$. If not, then it will produce a list $\mathcal{B}_{n+1} = \{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_{n+1}\}$. This would be a linearly independent list of $n+1$ vectors from V. But $\operatorname{Dim} V = n$, so this is impossible, by Stelling 2.2.10. Hence for some $k \leq n$ we must have that $\mathcal{B}_k$ is a basis for W, and we are done. ■

2.3.4 Oneindig-dimensionele vektorruimtes

Dit is goed om 'n paar voorbeelde van oneindig-dimensionele vektorruimte te hê.

Stelling 2.3.21 Poly *is oneindigdimensioneel.*

Bewys. Veronderstel Poly is eindigdimensioneel. Dit beteken daar bestaan 'n eindige versameling polinome $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$ wat Poly span. Maar, laat d die hoogste graad van al die polinome in die lys $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$ wees. Dan is $\mathbf{p} := x^{d+1}$ 'n polinoom wat nie in die span van $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$ is nie, want die sommering en skalaarvermenigvuldiging van polinome kan nooit die graad verhoog nie. Ons het 'n teenstelling bereik. So ons aanvanklike aanname kan nie waar wees nie, i.e. Poly kan nie eindigdimensioneel wees nie. ■

Voorbeeld 2.3.22 Ons sal dit nie hier bewys nie, maar die volgende vektorruimtes is ook eindigdimensioneel:

- $\mathbb{R}^\infty$,
- $\operatorname{Fun}(X)$ waar X 'n eindige versameling is,
- $\operatorname{Cont}(I)$ vir enige nie-leë interval I,
- $\operatorname{Diff}(I)$ vir enige oop interval I, en
- Poly^k.

□

2.3.5 Die sifalgoritme en die gebruike daarvan

As ons die bewys van Proposisie 2.2.10 (die 'Afstampproposisie') noukeurig bestudeer, vind ons dat dit van 'n *sif-algoritme* gebruik maak. Hierdie algoritme kan op *enige* lys vektore $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ in 'n vektorruimte toegepas word. Beskou elke vektor $\mathbf{v}_i$ in so 'n lys opeenvolgend. As $\mathbf{v}_i$ die nul-vektor is, of as dit 'n lineêre kombinasie van die voorafgaande vektore $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}$ is, verwyder dit van die lys.

Voorbeeld 2.3.23 Sif die volgende lys vektore in $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} &\mathbf{v}_1 = (1, 2, -1), && \mathbf{v}_2 = (0, 0, 0), && \mathbf{v}_3 = (3, 6, -3) \\ &\mathbf{v}_4 = (1, 0, 5), && \mathbf{v}_5 = (5, 4, 13), && \mathbf{v}_6 = (1, 1, 0). \end{aligned}$$

Ons begin met $\mathbf{v}_1$. Aangesien dit nie die nul-vektor is nie en nie 'n lineêre kombinasie van enige voorafgaande vektore is nie, bly dit in die lys. Nou beweeg ons aan na $\mathbf{v}_2$, wat nul is, so ons verwyder dit. Ons skuif aan na $\mathbf{v}_3$, wat ons deur inspeksie vasstel dat dit as$3\mathbf{v}_1$ geskryf kan word, so ons verwyder dit. Ons beweeg aan na $\mathbf{v}_4$. Dit is nie nul nie, en dit kan nie as 'n veelvoud van $\mathbf{v}_1$ uitgedruk word nie (bevestig dit vir jouself), so dit bly in die lys. Ons beweeg aan na $\mathbf{v}_5$. Ons kyk of dit as die lineêre kombinasie

$$\mathbf{v}_5 = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_4$$

geskryf kan word en vind die oplossing $a = 2, b = 3$ (bevestig self), so ons verwyder dit. Uiteindelik kom ons by $\mathbf{v}_6$. Ons ondersoek of dit as 'n lineêre kombinasie

$$\mathbf{v}_6 = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_4$$

geskryf kan word en vind geen oplossings nie (bevestig self), so dit bly in die lys. Ons finale gesifte lys is

$$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_6.$$

□

Verstaanpunt 2.3.24 Doen die drie 'bevestig self'-bewerkings hierbo.

Die volgende resultate wys dat sifting a baie nuttige manier is om 'n basis vir 'n vektorruimte te konstrueer!

Hulpstelling 2.3.25 *As 'n lys vektore $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ 'n vektorruimte V span, dan sal sifting van die lys in 'n basis vir V resulteer.*

Bewys. By elke stap vind ons dat 'n vektor wat uit die lys verwyder word óf die nul-vektor is, óf 'n lineêre kombinasie van die voorafgaande vektore is wat nié uit die lys verwyder word nie. So as ons die vektor uit die lys verwyder, sal die oorblywende vektore steeds V span. Daarom span die vektore in die finale lys steeds V.

Om te sien dat die finale gesifte lys lineêr onafhanklik is, pas ons Proposisie 2.2.8 toe. Deur konstruksie is geen vektor in die finale lys 'n lineêre kombinasie van die voorafgaande vektore nie (ander sou dit verwyder gewees het!). Daarom is die finale lys nie lineêr afhanklik nie, so dit moet lineêr onafhanklik wees! ■

Gevolg 2.3.26 *Enige lineêr onafhanklike lys vektore $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ in 'n eindig-dimensionele vektorruimte V kan uitgebrei word tot 'n basis van V.*

Bewys. Aangesien V eindig-dimensioneel is, het dit 'n basis $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$. Oorweeg nou die lys

$$L : \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$$

wat duidelik V span. Deur die lys te sif, sal ons 'n basis vir V kry, volgens Lemma 2.3.25. Sommige van die $\mathbf{e}$-vektore mag dalk verwyder wees in die proses. Maar geeneen van die $\mathbf{v}$-vektore sal verwyder word nie, aangesien dit sou beteken dat sommige vektore $\mathbf{v}_i$ 'n lineêre kombinasie van die voorafgaande vektore $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}$ is, wat onmoontlik is, omdat $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ 'n lineêr onafhanklike lys is. Dus ná sifting van die lys L brei ons ons die oorspronklike lys $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ uit na 'n basis van V. ■

Gevolg 2.3.27 *As $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ 'n lineêr onafhanklike lys van n vektore in 'n n-dimensionele vektorruimte V is, dan is dit 'n basis.*

Bewys. Volgens Gevolgtrekking 2.3.26 kan ons $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ uitbrei tot 'n basis van V. Maar V het dimensie n, so die basis moet slegs n vektore bevat volgens Stelling 2.3.2 (Onveranderlikheid van Dimensie). Gevolglike het ons geen vektore bygevoeg nie, en ons oorspronklike lys is reeds 'n basis. ■

Voorbeeld 2.3.28 In Voorbeeld 2.2.7 het ons gewys dat die lys polinome

$$\mathbf{q}_0(x) := 1,\ \mathbf{q}_1(x) := x,\ \mathbf{q}_2(x) := 2x^2 - 1,\ \mathbf{q}_3(x) := 4x^3 - 3x$$

lineêr onafhanklik in Poly_3 is. Aangesien $\dim \mathrm{Poly}_3 = 4$, sien ons dat dit 'n basis vir Poly_3 is.

In Oefening 2.1.5 het jy gewys dat $\mathbf{q}_0, \ldots, \mathbf{q}_3$ 'n basis vir Poly_3 is deur 'n 'brute krag' benadering. Hierdie nuwe metode is *verskillend*!

$\square$

2.3.6 Oefeninge

1. Sif die lys vektore

$$\mathbf{v}_1 = (0,0,0), \qquad \mathbf{v}_2 = (1,0,-1), \qquad \mathbf{v}_3 = (1,2,3)$$
$$\mathbf{v}_4 = (3,4,5), \qquad \mathbf{v}_5 = (4,8,12), \qquad \mathbf{v}_6 = (1,1,0).$$

2. Laat V 'n vektorruimte van dimensie n wees. Besluit (en skryf jou besluit neer!) of die volgende bewerings waar of onwaar is. As dit waar is, bewys dit. Indien nie, gee 'n teenvoorbeeld.

- Enige lineêr onafhanklike lys vektore in V bevat hoogstens n vektore.
- Enige lys vektore wat V span bevat ten minste n vektore.

3. Voltooi die bewys van die volgende Lemma.

Lemma. Veronderstel dat V 'n vektorruimte van dimensie n is. Dan is enige lineêr onafhanklike lys van n vektore in V 'n basis vir V.

Bewys. Laat $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ 'n lineêr onafhanklike lys vektore in V wees.

Veronderstel dat $\mathcal{B}$ *nie* 'n basis vir V is nie.
Daarom span $\mathcal{B}$ nie V nie, want... (a)
Daarom bestaan daar $\mathbf{v} \in V$ sodanig dat ... (b)
Voeg nou $\mathbf{v}$ by die lys $\mathcal{B}$ om 'n nuwe lys te vorm, $\mathcal{B}' :=$ ... (c)
Die nuwe lys $\mathcal{B}'$ is lineêr onafhanklik omdat ... (d)
Dit is 'n teenstelling, omdat ... (e)
Dus $\mathcal{B}$ moet 'n basis vir V wees.

4. Gebruik Oefening 2.3.6.2(a) om aan te toon dat die lys matrikse in $\mathrm{Mat}_{2,2}$ vanaf Oefening 2.2.2 lineêr onafhanklik is.

5. In elke geval, gebruik die resultate uit Oefeninge 2.3.6.2 en 2.3.6.3 om te bepaal of $\mathcal{B}$ 'n basis vir V is:

- $V = \mathrm{Poly}_2$, $\mathcal{B} = \left\{2 + x^2,\ 1 - x,\ 1 + x - 3x^2,\ x - x^2\right\}$
- $V = \mathrm{Mat}_{2,2}$,
$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \right\}$$
- $V = \mathrm{Trig}_2$, $\mathcal{B} = \left\{\sin^2 x,\ \cos^2 x,\ 1 - \sin 2x,\ \cos 2x + 3\sin 2x\right\}$

6. Laat $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ 'n lineêr onafhanklike lys vektore in 'n vektorruimte V wees. Skryf neer of die volgende bewerings waar of onwaar is. As dit waar is, bewys dit. As dit onwaar is, gee 'n teenvoorbeeld. Wenk: Gebruik die definisie van lineêre onafhanklikheid.

- Die lys $\{\mathbf{u}+\mathbf{v},\ \mathbf{v}+\mathbf{w},\ \mathbf{u}+\mathbf{w}\}$ is lineêr onafhanklik.
- Die lys $\{\mathbf{u}-\mathbf{v},\ \mathbf{v}-\mathbf{w},\ \mathbf{u}-\mathbf{w}\}$ is lineêr onafhanklik.

7. Vir elkeen van die volgende, toon aan dat V 'n deelruimte van Poly_2 is, vind 'n basis vir V, en bereken $\dim V$.

- $V = \{p \in \mathrm{Poly}_2 : p(2) = 0\}$
- $V = \{p \in \mathrm{Poly}_2 : xp'(x) = p(x)\}$

Verstaanpunt 2.3.29 Prove or disprove: there exits a basis $\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ of Poly_3 such that none of the polynomials p_0, p_1, p_2, p_3 have degree 2.

Verstaanpunt 2.3.30 Prove or disprove: if U and W are distinct subspaces of V with $U \neq V$ and $W \neq V$, then $\dim(U + V) = \dim(U) + \dim(V)$. (Recall the definition of the sum of two subspaces from Oefening 1.6.4.9.)

2.3.7 Oplossings

2.4 Koördinaatvektore

Daar is 'n meer direkte manier om oor 'n basis te dink.

Stelling 2.4.1 Basisse gee koördinate. *'n Lys vektore* $\mathbf{e}_1$*,* $\mathbf{e}_2$*, …,* $\mathbf{e}_n$ *in 'n vektorruimte* V *is 'n basis van* V *as en slegs as elke vektor* $\mathbf{v} \in V$ *op presies* een *manier as 'n lineêre kombinasie*

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \cdots + a_n\mathbf{e}_n \tag{2.4.1}$$

geskryf kan word. Dit is, vir elke $\mathbf{v} \in V$ bestaan *daar skalare* a_1*,* a_2*, …,* a_n *wat (2.4.1) bevredig en verder is hierdie skalare* uniek*.*

> Dit is belangrik om die wiskundige frase 'daar bestaan'n unieke X wat Y bevredig' te verstaan. Dit beteken twee dinge. Eerstens, daar *bestaan* 'n X wat Y bevredig. Tweedens, daar *geen ander* X wat Y bevredig nie.

> Ons noem die skalare $a_1, a_2, \ldots, a_n$ in (2.4.1) die *koördinate* van $\mathbf{v}$ in die basis $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$.

Bewys. $\Rightarrow$. Veronderstel dat die lys vektore $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, …, $\mathbf{e}_n$ 'n basis vir V vorm. Veronderstel $\mathbf{v} \in V$. Omdat die lys vektore V span, weet ons dat ons $\mathbf{v}$ as 'n lineêre kombinasie van vektore in die lys op ten minste een manier *kan* skryf,

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \cdots + a_n\mathbf{e}_n. \tag{2.4.2}$$

Ons moet wys dat dit die *enigste* manier is om $\mathbf{v}$ as 'n lineêre kombinasie van die vektore $\mathbf{e}_i$ uit te druk. Veronderstel ons het ook

$$\mathbf{v} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + \cdots + b_n\mathbf{e}_n. \tag{2.4.3}$$

Die verskil van die twee vergelykings lewer

$$\mathbf{0} = (a_1 - b_1)\mathbf{e}_1 + (a_2 - b_2)\mathbf{e}_2 + \cdots + (a_n - b_n)\mathbf{e}_n.$$

Omdat die lys vektore $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, …, $\mathbf{e}_n$ lineêr onafhanklik is, kom ons tot die gevolgtrekking dat

$$a_1 - b_1 = 0,\ a_2 - b_2 = 0,\ \cdots,\ a_n - b_n = 0.$$

Dit is, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, ensovoorts tot en met $a_n = b_n$ en daarom is (2.4.2) uniek.

$\Leftarrow$. Aan die ander kant, veronderstel dat elke vektor $\mathbf{v}$ as 'n unieke lineêre kombinasie

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \cdots + a_n\mathbf{e}_n$$

geskryf kan word. Die feit dat elke $\mathbf{v}$ as 'n lineêre kombinasie van $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ geskryf *kan* word, beteken hulle span V. Ons moet steeds wys dat hulle lineêr onafhanklik is. So, veronderstel daar bestaan skalare b_1, b_2, ..., b_n, sodat

$$b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + \cdots + b_n\mathbf{e}_n = \mathbf{0}. \tag{2.4.4}$$

Ons moet wys dat b_i almal nul moet wees. Ons weet reeds van *een* moontlike oplossing van (2.4.4) : stel elke $b_i = 0$. Maar ons weet ook dat elke vektor (spesifiek, die vektor $\mathbf{0}$) op presies een manier as 'n lineêre kombinasie van vektore $\mathbf{e}_i$ uitgedurk kan word. Daarom moet dit die enigste oplossing wees, i.e. ons vind dat $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$, en daarom is die lys vektore $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ lineêr onafhanklik. ■

Definisie 2.4.2 Laat $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ 'n basis vir vektorruimte V wees, en laat $\mathbf{v} \in V$. Skryf

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{b}_1 + a_2\mathbf{b}_2 + \cdots + \mathbf{a}_n\mathbf{b}_n\,.$$

Dan word die kolomvektor

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} := \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathrm{Col}_n$$

die **koördinaatvektor van v met betrekking tot basis $\mathcal{B}$** genoem. ♢

Ek dui aan dat 'n kolleksie objekte 'n *lys* is (waar volgorde van belang is) en nie bloot 'n *versameling* nie (waar dit nie van belang is nie) deur van my eie tuisgemaakte simbole $\{\ldots\}$ gebruik te maak. 'n Basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ is 'n lys van vektore. Die volgorde van die vektore is van belang want dit affekteer die koördinaatvektor $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$.

Voorbeeld 2.4.3 Vind die koördinaatvektor van $\mathbf{p} = 2x^2 - 2x + 3$ met betrekking tot die basis $\mathcal{B} = \left\{1 + x, x^2 + x - 1, x^2 + x + 1\right\}$ van Poly_3.

Oplossing. Ons skryf $\mathbf{p}$ as 'n lineêre kombinasie van polinome van die basis $\mathcal{B}$:

$$2x^2 - 2x + 3 = -4(1 + x) - \frac{5}{2}(x^2 + x - 1) + \frac{9}{2}(x^2 + x + 1)$$

$$[\mathbf{p}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -4 \\ -\frac{5}{2} \\ \frac{9}{2} \end{bmatrix}$$

□

Verstaanpunt 2.4.4 Bevestig dit!

Voorbeeld 2.4.5 Vind die koördinaatvektore van $\mathbf{v}$ en $\mathbf{w}$ in Figuur 2.4.6 met betrekking tot die basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$.

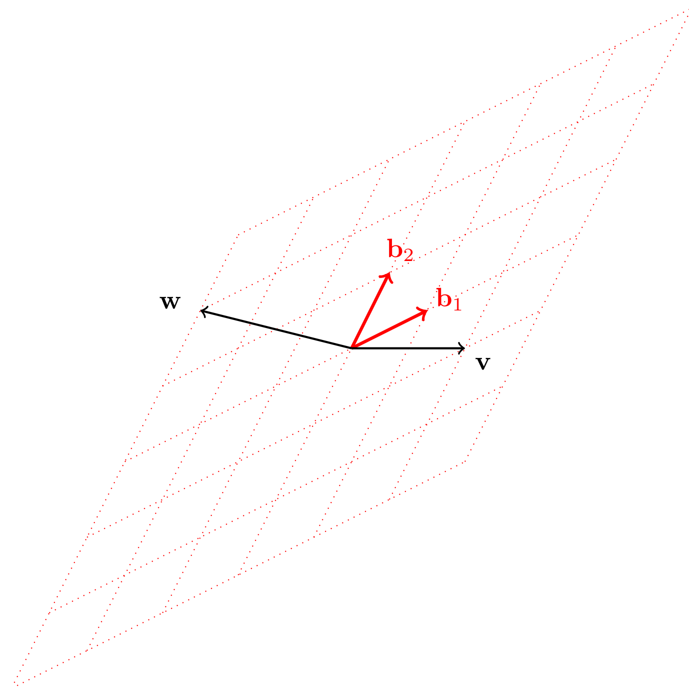
Oplossing. Deur inspeksie sien ons dat $\mathbf{v} = 2\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2$, sodat

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} := \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Ook deur inspeksie sien ons dat $\mathbf{w} = -3\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2$, sodat

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

□



Figuur 2.4.6: Die basis B vir $\mathbb{R}^2$.

Voorbeeld 2.4.7 Vind die koördinaatvektor van die funksie $\mathbf{f}$ gegee deur

$$\mathbf{f}(x) = \sin^2 x - \cos^3 x$$

met betrekking tot die standaard basis

$$\mathcal{S} = \{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos 3x, \sin 3x\}$$

van Trig_3.

Oplossing. Met die sommeringsformules vir sin en cos soos in Oefening 1.6.23 bereken ons

$$\sin^2 x - \cos^3 x = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\cos x - \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{4}\cos 3x. \tag{2.4.5}$$

We could also do this in SageMath as follows:

```
x=var('x')

f = sin(x)^2 - cos(x)^3

show(f.reduce_trig())
```

Gevolglik

$$[\mathbf{f}]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \end{bmatrix}$$

□

Verstaanpunt 2.4.8 Bevestig die uitbreiding (2.4.5) met die hand.
Oplossing.

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \implies \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$$

$$\cos^3 x = \cos x \cos^2 x = \cos x(1-\sin^2 x) = \cos x(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x) = \frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}\cos x\cos 2x$$

$$\cos x\cos 2x = \cos 3x+\sin x\sin 2x = \cos 3x+2\sin^2 x\cos x = \cos 3x+(1-\cos 2x)\cos x = \cos 3x+\cos x-\cos 2x\cos x$$

Thus

$$\sin^2 x-\cos^3 x = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x-(\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}\cos x\cos 2x) = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\cos 3x+\frac{1}{2}\cos x) = \frac{1}{2}-\frac{3}{4}\cos$$

Hulpstelling 2.4.9 *Laat $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ 'n basis vir 'n vektorruimte V wees. Dan het ons dat vir alle vektore $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ en alle skalare k*

1. $[\mathbf{v}+\mathbf{w}]_{\mathcal{B}} = [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} + [\mathbf{w}]_{\mathcal{B}}$
2. $[k\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = k[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$

Bewys. (a) Veronderstel dat

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \cdots + a_n\mathbf{e}_n$$

en

$$\mathbf{w} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + \cdots + b_n\mathbf{e}_n\,.$$

Dan, deur van die re{\"e}ls van 'n vektorruimte gebruik te maak, bereken ons

$$\mathbf{v}+\mathbf{w} = (a_1+b_1)\mathbf{e}_1 + (a_2+b_2)\mathbf{e}_2 + \cdots + (a_n+b_n)\mathbf{e}_n\,.$$

Van hier af lees ons dat

$$[\mathbf{v}+\mathbf{w}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{bmatrix}.$$

Die bewys van (b) is soortgelyk. ■

Oefeninge

1. Bewys Lemma 2.4.9(b) in die geval waar V twee-dimensioneel is, sodat $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. Verduidelik elke stap met die toepaslike reël van 'n vektorruimte.

Oplossing. As before, suppose that

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2$$

Which gives

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}.$$

Then

$$\begin{aligned} k\mathbf{v} &= k(a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2) \\ &= k(a_1\mathbf{e}_1) + k(a_2\mathbf{e}_2) && \text{(R4)} \\ &= (ka_1)\mathbf{e}_1 + (ka_2)\mathbf{e}_2 && \text{(R6)} \end{aligned}$$

Reading off the coefficients, we obtain

$$k\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_1 \\ ka_2 \end{bmatrix},$$

as desired.

2. Laat $\mathcal{B}$ die volgende basis van $\mathrm{Mat}_{2,2}$ wees:

$$\mathsf{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathsf{B}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \mathsf{B}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathsf{B}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Bereken $[\mathsf{A}]_{\mathcal{B}}$, waar

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Oplossing. To determine $[\mathsf{A}]_{\mathcal{B}}$, we must find the scalars a_1, a_2, a_3, a_4 satisfying

$$a_1\mathsf{B}_1 + a_2\mathsf{B}_2 + a_3\mathsf{B}_3 + a_4\mathsf{B}_4 = \mathsf{A}.$$

This results in a system of 4 linear equations in 4 variables, one equation for each entry in A:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= 1 \\ a_3 + a_4 &= 2 \\ a_3 - a_4 &= 3 \\ a_1 - a_2 + a_3 &= 4 \end{aligned}$$

Solving this equation, we get

$$a_1 = 0, \quad a_2 = -\frac{3}{2}, \quad a_3 = \frac{5}{2}, \quad a_4 = -\frac{1}{2}.$$

Hence

$$[\mathsf{A}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

3.

(a) Find a basis $\mathcal{B}$ for the vector space

$$V := \{p \in \text{Poly}_2 : p(2) = 0\}.$$

(b) Consider $p(x) = x^2 + x - 6$. Show that $p \in V$.

(c) Determine the coordinate vector of p with respect to your basis $\mathcal{B}$, i.e. determine $[p]_{\mathcal{B}}$.

Oplossing.

(a)
$$p(x) = x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2)$$

and so $p(2) =$ and hence $p \in V$.

(b) Recall that $\mathcal{B} = \{x-2, x(x-2)\}$.

$$p(x) = x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2) = 3(x-2) + x(x-2)$$

and so
$$[p]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

4. Find the coordinate representation of $\mathbf{p}(x) = 3x^3 - 7x + 1$ with respect to your basis in Exercise 2.3.29.

Oplossing. We shall use the basis $\mathcal{B} = \{x^3, x^3 + x^2, x, 1\}$. Since $\mathbf{p}(x)$ has no degree 2 term, we know immediately that

$$\mathbf{p}(x) = ax^3 + 0(x^3 + x^2) + cx + d.$$

Reading off the rest of the coefficients, we see that $a = 3, c = -7, d = 1$. Hence
$$[p]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

5. Consider the vector space W from Voorbeeld 2.3.15,

$$W = \{(w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3 : w_1 + 2w_2 + 3w_3 = 0\},$$

and the following bases for W:

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}, \quad \mathcal{C} = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$$

where

$$\mathbf{a} = (1, 0, -\frac{1}{3}), \qquad \mathbf{b} = (0, 1, -\frac{2}{3})$$
$$\mathbf{u} = (1, 2, -\frac{5}{3}), \qquad \mathbf{v} = (-4, 2, 0)$$

Consider the vector $\mathbf{w} = (-2, 4, -2) \in W$. Compute $[\mathbf{w}]_{\mathcal{B}}$ and $[\mathbf{w}]_{\mathcal{C}}$.

6. Let V be the vector space of solutions to the differential equation

$$y'' + y = 0. \tag{2.4.6}$$

(a) Show that $\mathcal{B} = \{\cos x, \sin x\}$ is a basis for V.

(b) Let $y \in V$ be defined as the unique solution to the differential equation in (2.4.6) satisfying

$$y(\frac{\pi}{6}) = 1, \quad y'(\frac{\pi}{6}) = 0.$$

(Note that we can indeed define y uniquely in this way due to Stelling 2.3.18.) Compute $[y]_{\mathcal{B}}$.

(c) Let $z(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

i. Show that $z \in V$ by checking that it solves the differential equation (2.4.6).

ii. Determine $[z]_{\mathcal{B}}$.

7. Let V be the vector space of solutions to the differential equation

$$(1 - x^2)y^{''} - xy' + 4y = 0, \quad x \in (-1, 1). \tag{2.4.7}$$

(a) Show that y_1 and y_2 are elements of V, where

$$y_1(x) = 2x^2 - 1, \quad y_2(x) = x\sqrt{1 - x^2}.$$

(b) Show that $\mathcal{B} = \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2\}$ is a basis for V.

(c) Let $y \in V$ be defined as the unique solution to the differential equation in (2.4.7) satisfying

$$y(\frac{1}{2}) = 1, \quad y'(\frac{1}{2}) = 0.$$

(Note that we can indeed define y uniquely in this way due to Stelling 2.3.18.) Compute $[y]_{\mathcal{B}}$.

2.5 Basisverandering

2.5.1 Koördinaatvektore verskil in verskillende basisse

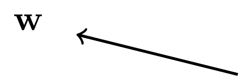
Veronderstel dat $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ en $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\}$ twee verskillende basisse vir $\mathbb{R}^2$ is, geïllustreer soos volg:

(a) Die basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$

(b) Die basis $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\}$.

Figuur 2.5.1: Twee verskillende basisse $\mathbb{R}^2$

Veronderstel ons word 'n vektor $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ gegee:



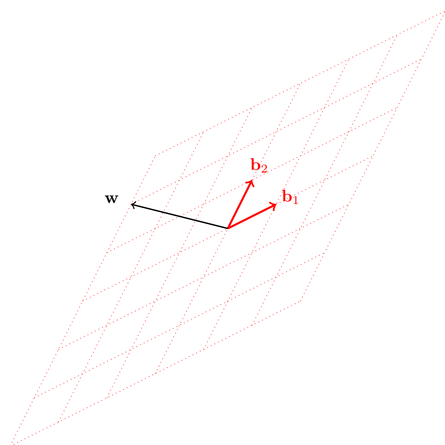
Ons wil die koördinaatvektor van *dieselfde* vektor $\mathbf{w}$ relatief tot twee verskillende basisse $\mathcal{B}$ en $\mathcal{C}$ bereken.

Met hierdie spesifieke vektor $\mathbf{w}$, uit Figuur 2.5.2 sien ons dat in die basis $\mathcal{B}$ het ons

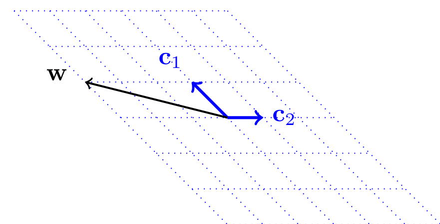
$$\mathbf{w} = -3\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 \qquad \therefore [\mathbf{w}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}. \tag{2.5.1}$$

Aan die anderkant, in basis $\mathcal{C}$ ons sien uit Figuur 2.5.3 dat:

$$\mathbf{w} = \mathbf{c}_1 - 3\mathbf{c}_2 \qquad \therefore [\mathbf{w}]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}. \tag{2.5.2}$$



Figuur 2.5.2: $\mathbf{w} = -3\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2$



Figuur 2.5.3: $\mathbf{w} = \mathbf{c}_1 - 3\mathbf{c}_2$

So *dieselfde* vektor $\mathbf{w}$ het verskillende koördinaatvektore $[\mathbf{w}]_{\mathcal{B}}$ en $[\mathbf{w}]_{\mathcal{C}}$ relatief tot die basisse $\mathcal{B}$ en $\mathcal{C}$!

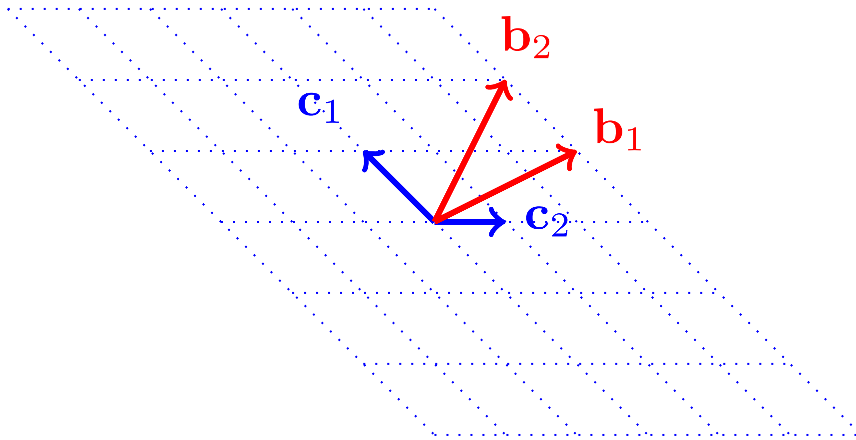
2.5.2 Omskakeling van een basis na 'n ander

Veronderstel nou dat ons die basisse $\mathcal{B}$ en $\mathcal{C}$ ken, asook die koördinaatvektor $[\mathbf{w}]_{\mathcal{B}}$ van $\mathbf{w}$ in die basis $\mathcal{B}$,

$$[\mathbf{w}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix},$$

dit is, $\mathbf{w} = -3\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2$. Hoe kan ons $[\mathbf{w}]_{\mathcal{C}}$, die koördinaatvektor van $\mathbf{w}$ in die basis $\mathcal{C}$ bereken?

Die beste benadering is om elke vektor in $\mathcal{B}$ as 'n lineêre kombinasie van die basisvektore in $\mathcal{C}$ uit te druk. In die volgende figuur word die vektore $\mathbf{b}_1$ en $\mathbf{b}_2$ uitgebeeld teen die agtergrond van die basis $\mathcal{C}$:



Ons lees af dat:

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{c}_1 + 3\mathbf{c}_2 \tag{2.5.3}$$
$$\mathbf{b}_2 = 2\mathbf{c}_1 + 3\mathbf{c}_2 \tag{2.5.4}$$

Daarom bereken ons:

$$\begin{aligned}\mathbf{w} &= -3\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 \\ &= -3(\mathbf{c}_1 + 3\mathbf{c}_2) + 2(2\mathbf{c}_1 + 3\mathbf{c}_2) \\ &= \mathbf{c}_1 - 3\mathbf{c}_2\end{aligned}$$

Hiervan lees ons af dat

$$[\mathbf{w}]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} \tag{2.5.5}$$

Wat die korrekte antwoord is, soos ons weet uit (2.5.2).
Hierdie berekening kan in terme van matrikse uitgedruk word.

Definisie 2.5.4 Laat $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ en $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n\}$ basisse vir 'n vektorruimte V wees. Die **basisomskakelingsmatriks van $\mathcal{B}$ na $\mathcal{C}$** is die $n \times n$-matriks $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ waarvan die kolomme die koördinaatvektore $[\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}}, \ldots, [\mathbf{b}_n]_{\mathcal{C}}$ is:

$$\mathsf{P}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} := \left[\begin{bmatrix} \\ \mathbf{b}_1 \\ \\ \end{bmatrix}_{\mathcal{C}} \begin{bmatrix} \\ \mathbf{b}_2 \\ \\ \end{bmatrix}_{\mathcal{C}} \cdots \begin{bmatrix} \\ \mathbf{b}_n \\ \\ \end{bmatrix}_{\mathcal{C}} \right].$$

$\Diamond$

Voorbeeld 2.5.5 In die deurlopende voorbeeld, sien ons uit (2.5.3) en (2.5.4) dat

$$[\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{b}_2]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Daarom is die basisomskakelingsmatriks van $\mathcal{B}$ na $\mathcal{C}$

$$\mathsf{P}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

$\square$

Voordat ons verder gaan, hersien ons 'n aspek van matriksvermenigvuldiging. Veronderstel ons groepeer m kolomvektore saam om 'n matriks te vorm:

$$\left[\begin{bmatrix} \\ \mathrm{C}_1 \\ \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ \mathrm{C}_2 \\ \\ \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} \\ \mathrm{C}_m \\ \\ \end{bmatrix} \right]$$

(Ons basisomskakelingsmatriks $\mathsf{P}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ is so gevorm.) Dan word die produk van hierdie matriks met 'n kolomvektor soos volg bereken:

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ \mathrm{C}_1 \\ \\ \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \\ \mathrm{C}_2 \\ \\ \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} \\ \mathrm{C}_m \\ \\ \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

(For instance, our change-of-basis matrix $\mathsf{P}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ was formed in this way.) Then the product of this matrix with a column vector can be computed as follows:

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ \mathrm{C}_1 \\ \\ \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \\ \mathrm{C}_2 \\ \\ \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} \\ \mathrm{C}_m \\ \\ \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} \\ \mathrm{C}_1 \\ \\ \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} \\ \mathrm{C}_2 \\ \\ \end{bmatrix} + \cdots + a_m \begin{bmatrix} \\ \mathrm{C}_m \\ \\ \end{bmatrix}. \tag{2.5.6}$$

Verstaanpunt 2.5.6 Bewys die bostaande formule!

Oplossing. We check the i^{th} entry of the LHS of (2.5.6) using just the definition of matrix multiplation.

$$(\text{LHS})_i = (\mathrm{C}_1)_i a_1 + \ldots + (\mathrm{C}_n)_i a_n = (\text{RHS})_i$$

and we're done!

Ons kan nou die volgende stelling bewys.

Stelling 2.5.7 Basisomskakeling. *Veronderstel dat* $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ *en* $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n\}$ *basisse vir 'n vektorruimte* V *is, en laat* $\mathsf{P}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ *die basiskomskakelingsmatriks van* $\mathcal{B}$ *na* $\mathcal{C}$ *wees. Dan, vir alle vektore* $\mathbf{v}$ *in* V,

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} = \mathsf{P}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}. \tag{2.5.7}$$

Bewys. Laat $\mathbf{v} \in V$. Brei $\mathbf{v}$ uit in die basis $\mathcal{B}$:

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{b}_1 + a_2\mathbf{b}_2 + \cdots + a_n\mathbf{b}_n, \text{i.e. } [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

Dan,

$$\begin{aligned} {}_{\mathcal{C}} &= [a_1\mathbf{b}_1 + \cdots + a_n\mathbf{b}_n]_{\mathcal{C}} \\ &= a_1[\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}} + \cdots + a_n[\mathbf{b}_n]_{\mathcal{C}} && \text{(Lemma 2.4.9)} \\ &= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ \mathbf{b}_1 \\ \\ \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \\ \mathbf{b}_2 \\ \\ \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} \\ \mathbf{b}_n \\ \\ \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} && \text{(2.5.6)} \\ &= \mathsf{P}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}\,. \end{aligned}$$

■

Voorbeeld 2.5.8 In ons deurlopende voorbeeld, sê die stelling dat vir *enige* vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$,

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}.$$

Dit geld dan ook vir ons vektor $\mathbf{w}$, waarvan die koördinate in die basis $\mathbf{B}$ is:

$$[\mathbf{w}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

So in hierdie geval sê die stelling dat

$$[\mathbf{w}]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

wat met ons vorige berekening (2.5.5) ooreenstem! □

2.5.3 Oefeninge

1. Dit is 'n voortsetting van Oefening 2.4.2. Beskou die volgende twee basisse vir $\mathrm{Mat}_{2,2}$:

$$\mathcal{B} = \left\{ \mathrm{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 11 \end{bmatrix}, \mathrm{B}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \mathrm{B}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathrm{B}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{C} = \left\{ \mathrm{C}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathrm{C}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathrm{C}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathrm{C}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right\}$$

(a) Bereken die basisomskakelingmatrikse $\mathsf{P}_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$ en $\mathsf{P}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}$.

(b) Bereken $[\mathsf{A}]_{\mathcal{B}}$ en $[\mathsf{A}]_{\mathcal{C}}$, waar

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

(c) Gaan na dat $[\mathsf{A}]_{\mathcal{C}} = \mathsf{P}_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} [\mathsf{A}]_{\mathcal{B}}$ en dat $[\mathsf{A}]_{\mathcal{B}} = \mathsf{P}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}} [\mathsf{A}]_{\mathcal{C}}$.

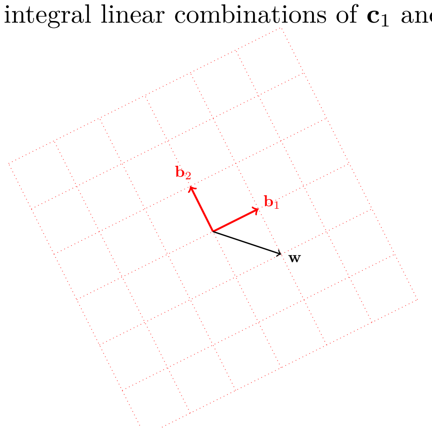
2. Bereken die basisomskakelingmatriks $\mathsf{P}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{S}}$ van die standaardbasis

$$\mathcal{S} = \{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x\}$$

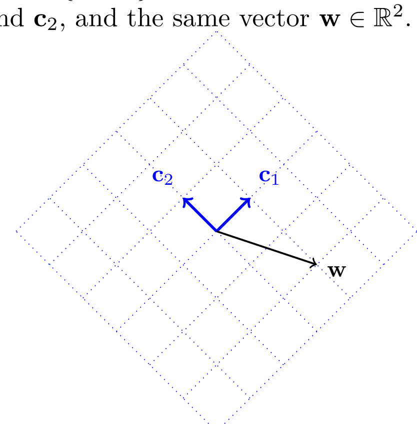
van Trig_2 na die basis

$$\mathcal{B} = \left\{1, \cos x, \sin x, \cos^2 x, \sin^2 x\right\} .$$

3. Figuur 2.5.9 displays a basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ for $\mathbb{R}^2$, a background of integral linear combinations of $\mathbf{b}_1$ and $\mathbf{b}_2$, and a certain vector $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$. Similarly, Figuur 2.5.10 displays another basis $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\}$ for $\mathbb{R}^2$, a background of integral linear combinations of $\mathbf{c}_1$ and $\mathbf{c}_2$, and the same vector $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$.



Figuur 2.5.9: The vector $\mathbf{w}$ against a background of integral linear combinations of the basis vectors from $\mathcal{B}$.

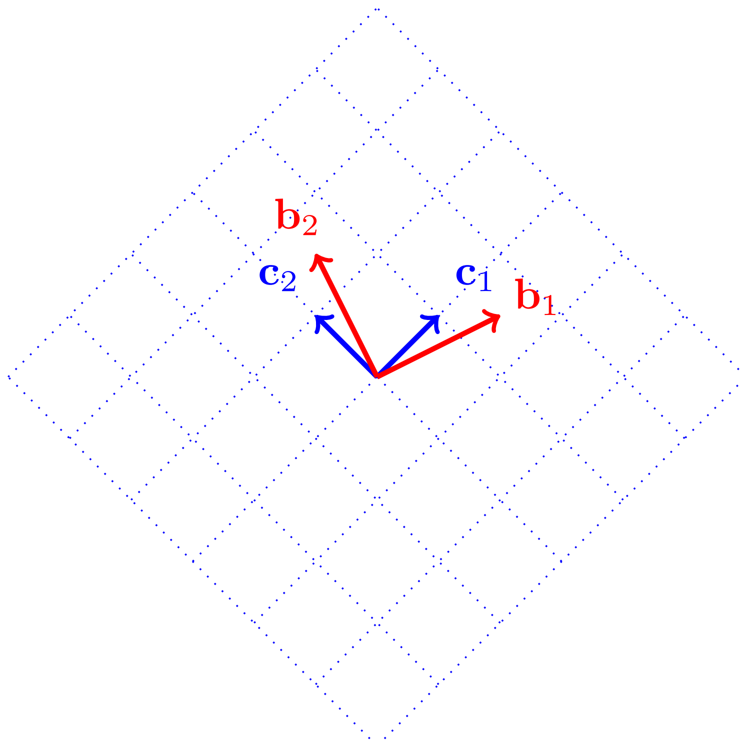


Figuur 2.5.10: The vector $\mathbf{w}$ against a background of integral linear combinations of the basis vectors from $\mathcal{C}$.

(a) Determine $[\mathbf{w}]_{\mathcal{B}}$, directly from Figuur 2.5.9.

(b) Determine $[\mathbf{w}]_{\mathcal{C}}$, directly from Figuur 2.5.10.

(c) The following figure displays the $\mathcal{B}$ basis against a background of integral linear combinations of the $\mathcal{C}$ basis:



Determine the change-of-basis matrix $\mathsf{P}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$. (You may assume that all coefficients are either integers and half-integers.)

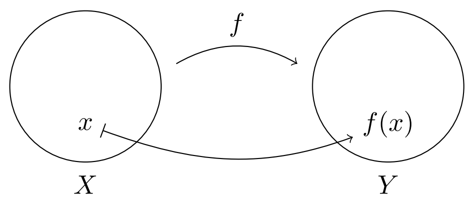
(d) Multiply the matrix you computed in (c) with the column vector you computed in (a). That is, compute the product $\mathsf{P}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[\mathsf{w}]_{\mathcal{B}}$. Is your answer the same as what you obtained in (b)?

Hoofstuk 3

Lineêre afbeeldings

3.1 Definisie en Voorbeelde

Herinner jouself daaraan dat 'n *funksie* (of 'n *afbeelding*) $f : X \to Y$ van 'n versameling X na 'n versameling Y maar net 'n reël is wat aan elke element van X 'n element $f(x)$ van Y toeken. Ons skryf $x \mapsto f(x)$ om aan te dui dat 'n element $x \in X$ op $f(x) \in Y$ afbeeld deur die funksie f. Sien Figuur 3.1.1. Twee funksies $f, g : X \to Y$ is *gelyk* as $f(x) = g(x)$ vir alle x in X.



Figuur 3.1.1: 'n Funksie $f : X \to Y$.

Definisie 3.1.2 Laat V en W vektorruimtes wees. 'n **lineêre afbeelding** van V na W is 'n funksie $T : V \to W$ wat die volgende bevredig:

- $T(\mathbf{v} + \mathbf{v}') = T(\mathbf{v}) + T(\mathbf{v}')$ vir alle vektore $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V$
- $T(k\mathbf{v}) = kT(\mathbf{v})$ vir alle vektore $\mathbf{v} \in V$ en skalare $k \in \mathbb{R}$

$\Diamond$

'n Ander naam vir 'n lineêre afbeelding is 'n *lineêre transformasie*.

Voorbeeld 3.1.3 Identiteitsafbeelding. Laat V 'n vektorruimte wees. Die funksie

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_V : V &\to V \\ \mathbf{v} &\mapsto \mathbf{v} \end{aligned}$$

word die *identiteitsafbeelding* op V genoem. Die is duidelik 'n lineêre afbeelding, omdat

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_V(\mathbf{v} + \mathbf{w}) &= \mathbf{v} + \mathbf{w} \\ &= \mathrm{id}_V(\mathbf{v}) + \mathrm{id}_V(\mathbf{w}) \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_V(k\mathbf{v}) &= k\mathbf{v} \\ &= k\,\mathrm{id}_V(\mathbf{v}). \end{aligned}$$

□

Voorbeeld 3.1.4 Projeksie. Die funksie

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x \end{aligned}$$

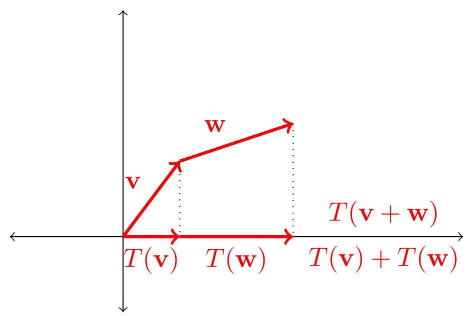
wat vektore op die x-as projekteer is 'n lineêre afbeelding.

Kom ons bevestig sommering algebraïes:

$$T\left((x_1, y_1)\right) + \left((x_2, y_2)\right) \stackrel{?}{=} T\left((x_1, y_1)\right) + T\left((x_2, y_2)\right)$$

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= T\left((x_1 + x_2, y_1 + y_2)\right) \\ &= x_1 + x_2 \end{aligned} \qquad\qquad \text{RHS} = x_1 + x_2$$

Hier is 'n grafiese weergawe van hierdie bewys:



□

Verstaanpunt 3.1.5 Bewys algebraïes dat $T(k\mathbf{v}) = kT(\mathbf{v})$, sodat T 'n lineêre afbeelding is.

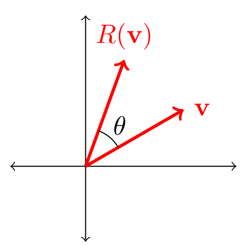
Oplossing.

$$T(k\mathbf{v}) = T(k(x, y)) = T(kx, ky) = kx = kT((x, y)) = kT(\mathbf{v})$$

Voorbeeld 3.1.6 Rotasie. Neem 'n vaste hoek θ. Die funksie

$$\begin{aligned} R : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ \mathbf{v} &\mapsto \text{rotasie van } \mathbf{v} \text{ anti-kloksgewys met 'n hoek } \theta \end{aligned}$$

is 'n lineêre afbeelding, met 'n soortgelyke grafiese argument as in Voorbeeld 3.1.4.



□

Voorbeeld 3.1.7 (Kruisproduk met 'n vaste vektor) Neem 'n vaste vektor $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Die funksie

$$\begin{aligned} C : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{v} &\mapsto \mathbf{w} \times \mathbf{v} \end{aligned}$$

is 'n lineêre afbeelding as gevolg van die eienskappe van die kruisproduk,

$$\begin{aligned} \mathbf{w} \times (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) &= \mathbf{w} \times \mathbf{v}_1 + \mathbf{w} \times \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{w} \times (k\mathbf{v}) &= k\mathbf{w} \times \mathbf{v}. \end{aligned}$$

□

Voorbeeld 3.1.8 (Dotproduk met 'n vaste vektor) Neem 'n vaste vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$. Die funksie

$$\begin{aligned} D : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R} \\ \mathbf{v} &\mapsto \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \end{aligned}$$

(hier is $\cdot$ die dotproduk van vektore, nie skalaarvermenigvuldiging nie!) is 'n lineêre afbeelding, vanweë die eienskappe

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{u} \times \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{u} \cdot (k\mathbf{v}) &= k\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}. \end{aligned}$$

> Ons sal binnekort sien dat *alle* lineêre afbeeldings $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ (inderwaarheid alle lineêre afbeeldings $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$) van hierdie vorm is.

□

Voorbeeld 3.1.9 (Differensiasie) Die bewerking 'neem die afgeleide' kan as 'n lineêre afbeelding

$$\begin{aligned} D : \text{Poly}_n &\to \text{Poly}_{n-1} \\ \mathbf{p} &\mapsto \mathbf{p}', \end{aligned}$$

interpreteer word. Byvoorbeeld, $D(2x^3 - 6x + 2) = 6x - 6$. □

Verstaanpunt 3.1.10 (a) Hoekom is D 'n afbeelding van Poly_n na Poly_{n-1}? (b) Bevestig dat D lineêr is.

Oplossing.

1. As you know from calculus, taking the derivative of a polynomial decreases every power of x by 1. So if $\mathbf{p}$ is in Poly_n, then $\mathbf{p}$ has degree at most n . Therefore, its image under D has degree at most $n - 1$. Thus $\mathbf{p}'$ is in Poly_{n-1}.

2. Let $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ be in Poly_n. For concreteness, we write

$$\mathbf{p} = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \mathbf{q} = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j.$$

We check additivity of D:

$$D(\mathbf{p}+\mathbf{q}) = D\left(\sum_{j=0}^{n}(a_j+b_j)x^j\right) = \sum_{j=1}^{n}(a_j+b_j)jx^{j-1} = \sum_{j=1}^{n} ja_jx^{j-1}+\sum_{j=0}^{n} jb_jx^{j-1} = D(\mathbf{p})+D(\mathbf{q}).$$

Next we check how D interacts with scalar multiplication:

$$D(k\mathbf{p}) = D\left(\sum_{j=0}^{n} ka_jx^j\right) = \sum_{j=1}^{n} ka_jx^{j-1} = k\left(\sum_{j=1}^{n} a_jx^{j-1}\right) = kD(\mathbf{p}).$$

And so we conclude that $D$is linear.

Voorbeeld 3.1.11 (Anti-afgeleide) Die operasie 'find die unieke anti-afgeleide met nul as konstante term' kan as 'n lineêre afbeelding

$$\begin{aligned} A : \mathrm{Poly}_n &\to \mathrm{Poly}_{n+1} \\ \mathbf{p} &\mapsto \int_0^x \mathbf{p}(t)\,dt \end{aligned}$$

interpreteer word. Byvoorbeeld, $A(2x^3 - 6x + 2) = 4x^4 - 3x^2 + 2x$. □

Verstaanpunt 3.1.12 (a) Bevestig die korrektheid van die laaste sin. (b) Hoekom is A 'n afbeelding vanaf Poly_n na Poly_{n+1}? (c) Bevestig dat A lineêr is.

Oplossing.

1. ?

2. You know from calculus that the antiderivative of a polynomial $\mathbf{p}$ must always have degree one greater than $\mathbf{p}$. Hence A maps Poly_n to Poly_{n+1}.

3. Let $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ be in Poly_n. Using the usual properties of the integral, we compute

   $$A(\mathbf{p}+\mathbf{q}) = \int_0^x \mathbf{p}(t)+\mathbf{q}(t)\,dt = \int_0^x \mathbf{p}(t)\,dt + \int_0^x \mathbf{q}(t)\,dt = A(\mathbf{p}) + A(\mathbf{q}).$$

   Similarly,

   $$A(k\mathbf{p}) = k\int_0^x \mathbf{p}(t)\,dt = \int_0^x k\mathbf{p}(t)\,dt = A(k\mathbf{p}).$$

Voorbeeld 3.1.13 Skuifafbeelding. Definieer die 'skuif aan met 1'-afbeelding

$$\begin{aligned} S : \mathrm{Poly}_n &\to \mathrm{Poly}_n \\ \mathbf{p} &\mapsto S(\mathbf{p}) \end{aligned}$$

as $S(\mathbf{p})(x) = \mathbf{p}(x-1)$. □

Verstaanpunt 3.1.14 Gaan na dat S 'n lineêre afbeelding is.

Oplossing. Let

$$\mathbf{p} = \sum_{j=0}^{n} a_jx^j\mathbf{q} = \sum_{j=0}^{n} b_jx^j$$

$$S(k\mathbf{p}) = S\left(\sum_{j=0}^{n} k a_j x^j\right) = \sum_{j=0}^{n} k a_j (x-1)^j = k\sum_{j=0}^{n} a_j (x-1)^j = kS(\mathbf{p}).$$

$$S(\mathbf{p}+\mathbf{q}) = S\left(\sum_{j=0}^{n} (a_j+b_j) x^j\right) = \sum_{j=0}^{n} (a_j+b_j)(x-1)^j = \sum_{j=0}^{n} a_j (x-1)^j + \sum_{j=0}^{n} b_j (x-1)^j = S(\mathbf{p})+S(\mathbf{q}).$$

Oorweeg die geval $n = 3$. In terme van die standaard basis

$$\mathbf{p}_0(x) = 1,\ \mathbf{p}_1(x) = x,\ \mathbf{p}_2(x) = x^2,\ \mathbf{p}_3(x) = x^3$$

van Poly_3, het ons:

$$\begin{aligned} S(\mathbf{p}_0) &= \mathbf{p}_0 \\ S(\mathbf{p}_1) &= \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0 \\ S(\mathbf{p}_2) &= \mathbf{p}_2 - 2\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_0 \\ S(\mathbf{p}_3) &= \mathbf{p}_3 - 3\mathbf{p}_2 + 3\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0 \end{aligned}$$

Verstaanpunt 3.1.15 Bevestig dit.

Oplossing. $S(\mathbf{p}_0) = \mathbf{p}_0$ is trivial.

$$S(\mathbf{p}_1) = x-1 = \mathbf{p}_1-\mathbf{p}_0 S(\mathbf{p}_2) = (x-1)^2 = x^2-2x+1 = \mathbf{p}_2-2\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_0 S(\mathbf{p}_3) = (x-1)^3 = x^3-3x^2+3x-1 = \mathbf{p}_3-3\mathbf{p}$$

Voorbeeld 3.1.16 Matrikse dien as lineêre afbeeldings. Elke $n \times m$-matriks A induseer 'n *lineêre afbeelding*

$$\begin{aligned} T_{\mathsf{A}} : \mathrm{Col}_m &\to \mathrm{Col}_n \\ \mathbf{v} &\mapsto \mathsf{A}\mathbf{v}\,. \end{aligned}$$

Dit is, $T_{\mathsf{A}}(\mathbf{v}) := \mathsf{A}\mathbf{v}$ is die matriksproduk van A met die kolomvektor $\mathbf{v}$. Die feit dat T_{A} wel 'n lineêre afbeelding is volg vanuit die lineariteit van matriksvermenigvuldiging (Proposisien 5.0.4 deel 2 en3).

> Let daarop dat 'n $n \times m$-matriks 'n lineêre afbeelding vanaf Col_m na Col_n is!

$\square$

Hulpstelling 3.1.17 *Veronderstel $T : V \to W$ is 'n lineêre afbeelding. Dan volg dit dat*

1. $T(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$
2. $T(-\mathbf{v}) = -T(\mathbf{v})$ *vir alle vektore* $\mathbf{v} \in V$.

Bewys. Ons werk soos volg:

1.

$$\begin{aligned} T(\mathbf{0}_V) &= T(0\mathbf{0}_V) && (\text{R8 toegepas op } \mathbf{v} = \mathbf{0}_V \in V) \\ &= 0T(\mathbf{0}_V) && (\text{T is lineêr}) \\ &= \mathbf{0}_W && (\text{R8 toegepas op } \mathbf{v} = T(\mathbf{0}_V) \in W \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} T(-\mathbf{v}) &= T((-1)\mathbf{v}) && (\text{defn van } -\mathbf{v} \in V) \\ &= (-1)T(\mathbf{v}) && (\text{T is lineêr}) \end{aligned}$$

$$= -T(\mathbf{v}) \qquad\qquad (\text{defn van } -T(\mathbf{v}) \in W)$$

■

Die volgende resultaat is baie belangrik. Dit wys dat as ons weet hoe 'n lineêre afbeelding op 'n basis tewerk gaan, dan weet ons hoe dit optree op die hele vektorruimte (dit is waar 'uniekheid' inkom). Verder kan ons willekeurig 'n formule opmaak vir wat T met die basisvektore doen en ons is gewaarborg dat dit sal uitbrei tot 'n lineêre afbeelding wat op die hele vektorruimte gedefinieer is (dit is waarna die 'bestaan' deel verwys).

Stelling 3.1.18 Voldoende om 'n lineêre afbeelding op 'n basis te definieer. *Veronderstel $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m\}$ is 'n basis vir V en $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m$ is vektore in W. Dan bestaan daar 'n unieke lineêre afbeelding $T : V \to W$ sodat*

$$T(\mathbf{e}_i) = \mathbf{w}_i, i = 1 \dots m.$$

Bewys. Bestaansbewys. Om 'n lineêre afbeelding T tedefinieer, moet ons $T(\mathbf{v})$ vir elke vektor $\mathbf{v}$ definieer. Ons kan $\mathbf{v}$ in terme van sy koördinaatvektor $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ met betrekking tot die basis $\mathcal{B}$ as

$$\mathbf{v} = [\mathbf{v}]_{\mathcal{B},1}\mathbf{e}_1 + \cdots + [\mathbf{v}]_{\mathcal{B},m}\mathbf{e}_m \tag{3.1.1}$$

skryf, waar $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B},i}$ die inskrywing in ry i van die koördinaatvektor $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ is. Ons definieer

$$T(\mathbf{v}) := [\mathbf{v}]_{\mathcal{B},1}\mathbf{w}_1 + [\mathbf{v}]_{\mathcal{B},2}\mathbf{w}_2 + \cdots [\mathbf{v}]_{\mathcal{B},m}\mathbf{w}_m. \tag{3.1.2}$$

Duidelik het ons $T(\mathbf{e}_i) = \mathbf{w}_i$. Om die bestaansbewys te voltooi, moet ons wys dat T lineêr is:

$$\begin{aligned}
T(\mathbf{v}+\mathbf{v}') &= [\mathbf{v}+\mathbf{v}']_{\mathcal{B},1}\mathbf{w}_1 + \cdots + [\mathbf{v}+\mathbf{v}']_{\mathcal{B},m}\mathbf{w}_m \\
&= \big([\mathbf{v}]_{\mathcal{B},1} + [\mathbf{v}']_{\mathcal{B},1}\big)\mathbf{w}_1 + \cdots + \big([\mathbf{v}]_{\mathcal{B},m} + [\mathbf{v}']_{\mathcal{B},m}\big)\mathbf{w}_m \quad ([\mathbf{v}+\mathbf{v}']_{\mathcal{B}} = [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} + [\mathbf{v}']_{\mathcal{B}}) \\
&= [\mathbf{v}]_{\mathcal{B},1}\mathbf{w}_1 + \cdots + [\mathbf{v}]_{\mathcal{B},m}\mathbf{w}_m + \\
&\qquad [\mathbf{v}']_{\mathcal{B},1}\mathbf{w}_1 + \cdots + [\mathbf{v}']_{\mathcal{B},m}\mathbf{w}_m \\
&= T(\mathbf{v}) + T(\mathbf{w}).
\end{aligned}$$

Net so kan ons bevestig dat $T(k\mathbf{v}) = kT(\mathbf{v})$, wat die bestaansbewys voltooi.

Uniekheidsbewys. Veronderstel dat $S, T : V \to W$ lineêre afbeeldings is met

$$S(\mathbf{e}_i) = \mathbf{w}_i, \text{ en } T(\mathbf{e}_i) = \mathbf{w}_i, i = 1 \dots m. \tag{3.1.3}$$

Dan,

$$\begin{aligned}
S(\mathbf{v}) &= S\big([\mathbf{v}]_{\mathcal{B},1}\mathbf{e}_1 + \cdots + [\mathbf{v}]_{\mathcal{B},m}\mathbf{e}_m\big) \\
&= [\mathbf{v}]_{\mathcal{B},1}S(\mathbf{e}_1) + \cdots + [\mathbf{v}]_{\mathcal{B},m}S(\mathbf{e}_m) && (S \text{ is lineêr}) \\
&= [\mathbf{v}]_{\mathcal{B},1}\mathbf{w}_1 + \cdots + [\mathbf{v}]_{\mathcal{B},m}\mathbf{w}_m && (\text{want } S(\mathbf{e}_i) = \mathbf{w}_i) \\
&= [\mathbf{v}]_{\mathcal{B},1}T(\mathbf{e}_1) + \cdots + [\mathbf{v}]_{\mathcal{B},m}T(\mathbf{e}_m) && (\text{want } T(\mathbf{e}_i) = \mathbf{w}_i) \\
&= T([\mathbf{v}]_{\mathcal{B},1}\mathbf{e}_1 + \cdots + [\mathbf{v}]_{\mathcal{B},m}\mathbf{e}_m) && (T \text{ is lineêr}) \\
&= T(\mathbf{v}).
\end{aligned}$$

Gevolglik $S = T$, met ander woorde, die lineêre afbeelding wat (3.1.3) bevredig is uniek. ■

Voorbeeld 3.1.19 As 'n voorbeeld van Proposisie 3.1.18, definieer ons die 'n lineêre afbeelding

$$T\,\mathrm{Col}_2 \qquad\qquad \to \mathrm{Fun}(\mathbb{R})$$

bloot deur die werking op die standaard basis van Col_2 te definieer. Byvoorbeeld, ons bepaal

$$\begin{aligned} \mathsf{e}_1 &\to f_1 \\ \mathsf{e}_2 &\to f_2 \end{aligned}$$

Die punt is dat ons vry is om e_1 en e_2 na *enige funksies* f_1 en f_2 wat ons wil te stuur, en ons is gewaarborg dat dit 'n goed-gedefinieerde lineêre afbeelding $T : \mathrm{Col}_2 \to \mathrm{Fun}(\mathbb{R})$ sal gee. Byvoorbeeld, ons stel $f_1(x) = \sin x$ en $f_2(x) = |x|$. Dan is die algemene formule vir T

$$\left(T\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right)(x) = a \sin x + b|x|$$

□

Voorbeeld 3.1.20 Rotasie-afbeelding op die standaard basis. Kom ons bereken die aksie van die 'anti-kloksgewyse rotasie met θ'-afbeelding R van Voorbeeld 3.1.6 met betrekking tot die standaard basis $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ van $\mathbb{R}^2$.

Vanuit die figuur het ons:

$$R(\mathbf{e}_1) = (\cos\theta, \sin\theta) \qquad\qquad R(\mathbf{e}_2) = (-\sin\theta, \cos\theta)$$

sodat

$$R(\mathbf{e}_1) = \cos\theta\,\mathbf{e}_1 + \sin\theta\,\mathbf{e}_2, R(\mathbf{e}_2) = -\sin\theta\,\mathbf{e}_1 + \cos\theta\,\mathbf{e}_2.$$

Nou wat ons die aksie van R op die standaard basisvektore verstaan, kan ons die aksie op 'n arbitrêre vektor $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ bereken:

$$\begin{aligned} R\left((x,y)\right) &= R(x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2) \\ &= xR(\mathbf{e}_1) + yR(\mathbf{e}_2) \\ &= x(\cos\theta, \sin\theta) + y(-\sin\theta, \cos\theta) \\ &= (x\cos\theta - y\sin\theta,\ x\sin\theta + y\cos\theta). \end{aligned}$$

□

Oefeninge

1. Laat V 'n vektorruimte wees en laat $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ 'n vaste vektor wees. Definieer die afbeelding T soos volg:

$$\begin{aligned} T : V &\to V \\ \mathbf{v} &\mapsto \mathbf{a} + \mathbf{v} \end{aligned}$$

- Is T 'n lineêre afbeelding? (Ja of nee)
- Bewys jou antwoord vir (a).

Oplossing.

(a) No.

(b) According to Hulpstelling 3.1.17, $T(0) = 0$ is a necessary condition for T to be linear. However,

$$T(\mathbf{0}) = \mathbf{a} + 0 = \mathbf{a} \neq \mathbf{0}.$$

Hence T cannot be linear.

2. Beskou die afbeelding $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ wat deur $T((x, y, z)) = (z, x, y)$ gegee word.

- Is T 'n lineêre afbeelding? (Ja of nee)
- Bewys jou antwoord vir (a).

Oplossing.

(a) Yes.

(b)

$$T((x, y, z) + (a, b, c)) = T((x + a, y + b, z + c)) = (z+c, x+a, y+b) = (z, x, y)+(c, a, b) = T((x, y, z$$

$$T(k(x, y, z)) = T(kx, ky, kz) = (kz, kx, ky) = k(z, x, y) = kT((x, y, z)).$$

3. Definieer die 'vermenigvuldig met x^2'-afbeelding

$$\begin{aligned} M : \mathrm{Poly}_n &\to \mathrm{Poly}_{n+2} \\ \mathbf{p} &\mapsto M(\mathbf{p}) \end{aligned}$$

waar $M(\mathbf{p})(x) = x^2\mathbf{p}(x)$.

- Hoekom beeld M Poly_n op Poly_{n+2} af?
- Bewys dat M lineêr is.
- Bereken die aksie van M op die standaard basis vir Poly_3, soos in Voorbeeld 3.1.13.

Oplossing.

(a) If $p(x)$ has degree at most n, then $\mathbf{q}(x) := x^2\mathbf{p}(x)$ has degree at most $n + 2$.

(b) The proof is simple and follows from the usual properties of polynomials. Using the fact that multiplication of polynomials distributes over addition we compute

$$M(\mathbf{p}+\mathbf{q})(x) = x^2(\mathbf{p}(x)+\mathbf{q}(x)) = x^2\mathbf{p}(x)+x^2\mathbf{q}(x) = M(\mathbf{p})(x)+M(\mathbf{q})(x).$$

We may consider the scalar k as a constant polynomial. Thus, using the commutativity and associativity of polynomial multiplication we compute

$$M(k\mathbf{p})(x) = x^2k\mathbf{p}(x) = k(x^2\mathbf{p}(x)) = kM(\mathbf{p})(x).$$

(c)

$$M(\mathbf{p}_0) = x^2 1 = x^2 = \mathbf{p}_2 M(\mathbf{p}_1) = x^2 x = x^3 = \mathbf{p}_3 M(\mathbf{p}_2) = x^2 x^2 = x^4 = \mathbf{p}_4 M(\mathbf{p}_3) = x^2 x^3 = x^5 = \mathbf{p}_5$$

4. Definieer die 'integreer oor die interval $[-1, 1]$'-afbeelding

$$\begin{aligned} I : \mathrm{Poly}_n &\to \mathbb{R} \\ \mathbf{p} &\mapsto \int_{-1}^{1} \mathbf{p}(x)\, dx \end{aligned}$$

- Bewys dat I lineêr is.
- Bereken die aksie van I met betrekking tot die standaard basis $\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_3$ vir Poly_3.
- Bereken die aksie van I met betrekking tot die basis $\mathbf{q}_0, \ldots, \mathbf{q}_3$ vir Poly_3 uit Voorbeeld 2.2.7.

Oplossing.

(a) We use the properties of the integral.

$$I(\mathbf{p}+\mathbf{q}) = \int_{-1}^{1} (\mathbf{p}(x) + \mathbf{q}(x))\, dx = \int_{-1}^{1} \mathbf{p}(x)\, dx + \int_{-1}^{1} \mathbf{q}(x)\, dx = I(\mathbf{p}) + I(\mathbf{q}).$$

$$I(k\mathbf{p}) = \int_{-1}^{1} k\mathbf{p}(x)\, dx = k \int_{-1}^{1} \mathbf{p}(x)\, dx = kI(\mathbf{p})$$

(b)

$$I(\mathbf{p}_0) = \int_{-1}^{1} 1dx = x|_{-1}^{1} = 2I(\mathbf{p}_1) = \int_{-1}^{1} xdx = \frac{1}{2}x^2|_{-1}^{1} = 0I(\mathbf{p}_2) = \int_{-1}^{1} x^2dx = \frac{1}{3}x^3|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}I(\mathbf{p}_3) =$$

(c) We use the results above:

$$I(\mathbf{q}_0) = \int_{-1}^{1} 1dx = x|_{-1}^{1} = 2I(\mathbf{q}_1) = \int_{-1}^{1} xdx = \frac{1}{2}x^2|_{-1}^{1} = 0I(\mathbf{q}_2) = \int_{-1}^{1} 2x^2 - 1dx = 2\int_{-1}^{1} x^2dx - \int_{-1}^{1}$$

5. Bereken die aksie van die differensiasie-afbeelding $D : \mathrm{Poly}_4 \to \mathrm{Poly}_3$ uit Voorbeeld 3.1.9 met betrekking tot die standaard basisse van die twee vektorruimtes.

6. Beskou die kruisproduk-lineêre afbeelding $C : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uit Voorbeeld 3.1.7 in die geval $\mathbf{w} = (1, 2, 3)$. Bereken die aksie van C met betrekking tot die standaard basis van $\mathbb{R}^3$.

Oplossing.

$$D(\mathbf{p}_0) = D(1) = 0D(\mathbf{p}_1) = D(x) = 1 = \mathbf{p}_0D(\mathbf{p}_2) = D(x^2) = 2x = 2\mathbf{p}_1D(\mathbf{p}_3) = D(x^3) = 3x^2 = 3\mathbf{p}_2D(\mathbf{p}_4)$$

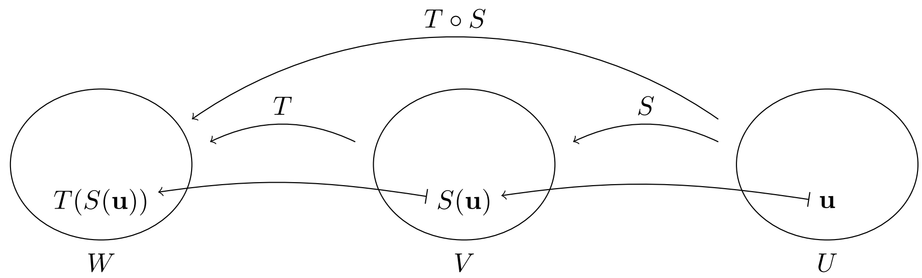
3.2 Komposisie van lineêre afbeeldings

Definisie 3.2.1 As $S : U \to V$ en $T : V \to W$ lineêre afbeeldings is, dan is die **komposisie van T met S** die afbeelding $T \circ S : U \to W$ gedefinieer as

$$(T \circ S)(\mathbf{u}) := T(S(\mathbf{u}))$$

waar $\mathbf{u}$ in U is. ◊

Sien Figuur 3.2.2.



Figuur 3.2.2: Komposisie van lineêre afbeeldings.

> Volgens wiskundige konvensie skryf ons die evaluering van funksies van regs na links, bv. $f(x)$. Dit wil sê, jy begin met die regterkantste simbool, x, dan pas jy f daarop toe. Daarom is die mees natuurlike manier om hierdie prentjies te teken van regs na links!

Voorbeeld 3.2.3 Laat $S : \mathbb{R}^3 \to \text{Poly}_2$ en $T : \text{Poly}_2 \to \text{Poly}_4$ lineêre afbeeldings wees wat soos volg gedefinieer word:

$$S((a,b,c)) := ax^2 + (a-b)x + c, T(p(x)) = x^2 p(x).$$

Dan kan $T \circ S$ soos volg bereken word:

$$\begin{aligned}(T \circ S)((a,b,c)) &= T(S((a,b,c))) \\ &= T(ax^2 + (a-b)x + c) \\ &= x^2(ax^2 + (a-b)x + c) \\ &= ax^4 + (a-b)x^3 + cx^2.\end{aligned}$$

□

Stelling 3.2.4 *As $S : U \to V$ en $T : V \to W$ lineêre afbeeldings is, dan is $T \circ S : U \to W$ ook 'n lineêre afbeelding.*

Bewys. Laat $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2} \in U$. Dan:

$$\begin{aligned}(T \circ S)(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) &= T(S(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2)) && \text{(defn van } T \circ S) \\ &= T(S(\mathbf{u}_1) + S(\mathbf{u}_2)) && (S \text{ is lineêr }) \\ &= T(S(\mathbf{u}_1)) + T(S(\mathbf{u}_2)) && (T \text{ is lineêr }) \\ &= (T \circ S)(\mathbf{u}_1) + (T \circ S)(\mathbf{u}_2) && \text{(defn van } T \circ S)\end{aligned}$$

Op soortgelyke wyse het ons

$$\begin{aligned}(T \circ S)(k\mathbf{u}) &= T(S(k\mathbf{u})) && \text{(defn van } T \circ S) \\ &= T(kS(\mathbf{u})) && (S \text{ is lineêr }) \\ &= kT(S(\mathbf{u})) && (T \text{ is lineêr }) \\ &= k(T \circ S)(\mathbf{u}) && \text{(defn van } T \circ S)\end{aligned}$$

■

Voorbeeld 3.2.5 Oorweeg as lineêre afbeeldings die anti-afgeleide (A) en die afgeleide (D)

$$\begin{aligned} A : \mathrm{Poly}_n &\to \mathrm{Poly}_{n+1} \\ D : \mathrm{Poly}_{n+1} &\to \mathrm{Poly}_n \,. \end{aligned}$$

Is $D \circ A = \mathrm{id}_{\mathrm{Poly}_n}$?

Oplossing. Ons bereken die aksie van $D \circ A$ op die basis x^k, $k = 0 \dots n$ van Poly_n:

$$x^k \overset{A}{\mapsto} \frac{x^{k+1}}{k+1} \overset{D}{\mapsto} \frac{k+1}{k+1} x^k = x^k$$

Daarom, vir $k = 0 \dots n$,

$$\begin{aligned} (D \circ A)(x^k) &= x^k \\ &= \mathrm{id}_{\mathrm{Poly}_n}(x^k). \end{aligned}$$

Omdat $D \circ A$ en $\mathrm{id}_{\mathrm{Poly}_n}$ op 'n basis van Poly_n ooreenstem, stem hulle ooreen met alle vektore $\mathbf{p} \in \mathrm{Poly}_n$ volgens Proposisie 3.1.18. Daarom is $D \circ A = \mathrm{id}_{\mathrm{Poly}_n}$.

> Om die waarheid te sê, die stelling dat $D \circ A = \mathrm{id}_{\mathrm{Poly}_n}$ is presies Deel I van die Fundamentele Stelling van Calculus, toegepas op die spesiale geval van polinome!

$\square$

Verstaanpunt 3.2.6 Is $A \circ D = \mathrm{id}_{\mathrm{Poly}_{n+1}}$? As dit is, bewys dit. Indien nie, gee 'n eksplisiete teenvoorbeeld.

Oplossing. The statement is not true! For example, let $\mathbf{p}(x) = x + 1$. Then

$$(A \circ D)(x + 1) = A(1) = x \neq x + 1.$$

Oefeninge

1. Laat $R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die 'rotasie met θ'-afbeelding van Voorbeeld 3.1.20 wees,

$$R((x, y)) = (x \cos\theta - y \sin\theta,\ x sin\theta + y \cos\theta).$$

Gaan algebraïes na dat $R_\phi \circ R_\theta = R_{\phi+\theta}$ deur die aksie van die lineêre afbeeldings op beide kante van die vergelyking op 'n arbitrêre vektor $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ te bereken.

Oplossing.

$$\begin{aligned} R_\phi R_\theta(x, y) &= R_\phi(x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta) \\ &= ((x\cos\theta - y\sin\theta)\cos\phi - (x\sin\theta + y\cos\theta)\sin\phi,\ (x\cos\theta - y\sin\theta)\sin\phi + (x\sin\theta + y\cos\theta) \\ &= (x(\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi) - y(\sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi),\ x(\cos\theta\sin\phi + \sin\theta\cos\phi) + y(\cos\theta \\ &= \big(x\cos(\theta+\phi) - y\sin(\theta+\phi),\ x\sin(\theta+\phi) + y\cos(\theta+\phi_)\big) \\ &= R_{\phi+\theta}(x, y) \end{aligned}$$

2. Laat $M : \mathrm{Poly}_3 \to \mathrm{Poly}_4$ die 'vermenigvuldig met x'-afbeelding wees, $M(p)(x) = xp(x)$. Laat $S : \mathrm{Poly}_4 \to \mathrm{Poly}_4$ die afbeelding $S(p(x)) = p(x - 1)$ wees. Net so, laat $T : \mathrm{Poly}_3 \to \mathrm{Poly}_3$ die afbeelding $T(p(x)) = p(x - 1)$ wees. Bereken $S \circ M$ en $M \circ T$. Is hulle gelyk?

Oplossing.

$$(S \circ M)(p(x)) = S(M(p(x))) = S(xp(x)) = (x-1)p(x-1)$$

whereas

$$(M \circ S)(p(x)) = M(p(x-1)) = xp(x-1).$$

Thus $S \circ M \neq M \circ S$.

3.3 Isomorfismes van vektorruimtes

Veronderstel jy het twee versamelings,

$$A = \{\text{voël}, \text{oog}, \text{persoon}\} \text{en} B = \{, , \}.$$

Die elemente van A en B is nie *dieselfde* nie, so A is nie *gelyk* aan B nie. Maar dit is nie heeltemal bevredigend nie — duidelik is die elemente van A net die Afrikaanse beskrywings van die Sjinese simbole in B. Hoe kan ons dit noukeurig wiskundig beskryf?

Ons kan twee afbeeldings definieer, byvoorbeeld

$$\begin{aligned} S : A &\to B \\ \text{voêl} &\mapsto \\ \text{oog} &\mapsto \\ \text{persoon} &\mapsto \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} T : B &\to A \\ &\mapsto \text{voêl} \\ &\mapsto \text{oog} \\ &\mapsto \text{persoon}. \end{aligned}$$

Dan neem ons waar dat

$$T \circ S = \mathrm{id}_A \text{ and} S \circ T = \mathrm{id}_B. \tag{3.3.1}$$

'n Paar afbeeldings $S : A \to B$ en $T : B \to A$ wat (3.3.1) bevredig word 'n *isomorfisme van versamelings* tussen A en B genoem. As jy wil, kan jy T as S^{-1} herdoop, omdat $S^{-1} \circ S = \mathrm{id}_A$ en $S \circ S^{-1} = \mathrm{id}_B$. (Om T van die begin af S^{-1} te noem sou voortydig gewees het. Ek moes dit eers definieer en seker maak dat dit (3.3.1) bevredig. Slegs dan het ek die reg om dit S^{-1} te noem!)

Dalk is jy 'n ietwat spaarsamige persoon. Jy sien die nut van die Afrikaans-na-Sjinese afbeelding S, maar nie die nut van die Sjinees-na-Afrikaanse afbeelding T nie. Buitendien, aangesien geen twee verskillende Afrikaanse woorde in A na dieselfde Sjinese simbool in B afgebeeld word nie ('S is een-tot-een') en elke Sjinese simbool $y \in B$ is gelyk aan $S(x)$ vir een of ander $x \in A$ ('S is *op*'), het ons nie T nodig nie. Dit is oorbodig!

Hierop sou ek reageer soos volg: jy is reg, maar is dit nie nuttig om 'n eksplisiete Sjinees-na-Afrikaanse afbeelding T te hê nie? In boekwinkels word woordeboeke in pare geskep, in 'n enkele volume. Buitendien, as mens die Afrikaanse woord vir wil opsoek, sal dit lastig wees om deur die hele Afrikaans-na-Sjinese woordeboek te werk, om die Afrikaanse woord vir te vind!

Dit lei tot die volgende definisie.

Definisie 3.3.1 Ons sê dat 'n lineêre afbeelding $S : V \to W$ 'n **isomorfisme** is as daar 'n lineêre afbeelding $T : W \to V$ bestaan, sodat

$$T \circ S = \mathrm{id}_V \text{ en} S \circ T = \mathrm{id}_W . \tag{3.3.2}$$

$\lozenge$

Hulpstelling 3.3.2 Inverses is Uniek. *As $S : V \to W$ 'n isomorfisme is en $T, T' : W \to V$ bevredig albei*

$$\begin{aligned} T \circ S &= \mathrm{id}_V, & S \circ T &= \mathrm{id}_W \\ T' \circ S &= \mathrm{id}_V, & S \circ T' &= \mathrm{id}_W \end{aligned}$$

dan is $T = T'$.

> Hierdie lemma laat ons toe om T *die* inverse van S te noem (teenoor *'n* inverse van S), en ons kan $T = S^{-1}$ skryf.

Bewys. Om te wys dat $T = T'$, moet ons wys dat vir alle $\mathbf{w} \in W$, $T(\mathbf{w}) = T'(\mathbf{w})$. Inderdaad:

$$\begin{aligned} T(\mathbf{w}) &= T(\mathrm{id}_W(\mathbf{w})) && (\text{Defn van } \mathrm{id}_W) \\ &= T((S \circ T')(\mathbf{w})) && (S \circ T' = \mathrm{id}_W) \\ &= T(S(T'(\mathbf{w}))) && (\text{Defn van } S \circ T') \\ &= (T \circ S)(T'(\mathbf{w})) && (\text{Defn van } T \circ S) \\ &= \mathrm{id}_V(T'(\mathbf{w})) && (T \circ S = \mathrm{id}_V) \\ &= T'(\mathbf{w}) && (\text{Defn van } \mathrm{id}_V). \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Definisie 3.3.3 Ons sê twee vektorruimtes V en W is **isomorfies** as daar 'n isomorfisme tussen hulle bestaan. $\lozenge$

Voorbeeld 3.3.4 Wys dat $\mathbb{R}^n$ isomorfies aan Poly_{n-1} is.

Oplossing. Ons definieer 'n paar lineêre afbeeldings

$$S : \mathbb{R}^n \rightleftarrows \mathrm{Poly}_{n-1} : T$$

soos volg:

$$\begin{aligned} (a_1, a_2, \ldots, a_n) &\overset{S}{\mapsto} a_1 + a_2 x + \cdots + a_n x^{n-1} \\ (a_1, a_2, \ldots, a_n) &\overset{T}{\leftarrow\!\shortmid} a_1 + a_2 x + \cdots + a_n x^{n-1} \end{aligned}$$

Ons het duidelik dat $T \circ S = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ en $S \circ T = \mathrm{id}_{\mathrm{Poly}_{n-1}}$. $\square$

Verstaanpunt 3.3.5 Maak seker dat hierdie afbeeldings lineêr is.

Ons sal nou wys dat tot op die vlak van isomorfisme, bestaan daar net een vektorruimte van elke dimensie!

Stelling 3.3.6 *Twee eindigdimensionele vektorruimtes V en W is isomorfies as en slegs as hulle dieselfde dimensie het.*

Bewys. $\Rightarrow$. Veronderstel V en W is isomorfies, d.m.v. 'n paar lineêre afbeeldings $S : V \rightleftarrows W : T$. Laat $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m\}$ 'n basis vir V wees. Dan maak ek die bewering dat $\mathcal{C} = \{S(\mathbf{e}_1), \ldots, S(\mathbf{e}_m)\}$ 'n basis vir W is. Die lys vektore $\mathcal{C}$

is inderdaad lineêr onafhanklik , want as

$$a_1 S(\mathbf{e}_1) + a_2 S(\mathbf{e}_2) + \cdots + a_m S(\mathbf{e}_m) = \mathbf{0}_W,$$

dan lewer die toepassing van T aan beide kante

$$\begin{aligned} T(a_1 S(\mathbf{e}_1) + a_2 S(\mathbf{e}_2) + \cdots + a_m S(\mathbf{e}_m)) &= T(\mathbf{0}_W) \\ \therefore a_1 T(S(\mathbf{e}_1)) + a_2 T(S(\mathbf{e}_2)) + \cdots + a_m T(S(\mathbf{e}_m)) &= \mathbf{0}_V \qquad (T \text{ is lineêr}) \\ \therefore a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + \cdots + a_m \mathbf{e}_m &= \mathbf{0}_V \qquad (T \circ S = \mathrm{id}_V) \end{aligned}$$

wat impliseer dat $a_1 = a_2 = \cdots = a_m = 0$, aangesien $\mathcal{B}$ lineêr onafhanklik is. Verder span die lys vektore $\mathcal{C}$ vir W, want as $\mathbf{w} \in W$, met T daarop toegepas, dan kan ons

$$T(\mathbf{w}) = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + \cdots + a_m \mathbf{e}_m$$

skryf vir skalare a_i aangesien$\mathcal{B}$ V span. Maar dan

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= S(T(\mathbf{w})) && (\text{since } S \circ T = \mathrm{id}_W) \\ &= S(a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + \cdots + a_m \mathbf{e}_m) \\ &= a_1 S(\mathbf{e}_1) + a_2 S(\mathbf{e}_2) + \cdots + a_m S(\mathbf{e}_m) && (S \text{ is lineêr}) \end{aligned}$$

sodat $\mathcal{C}$ W span. Daarom is $\mathcal{C}$ 'n basis vir V, so $\dim V =$ aantal vektore in $=$ n, terwyl $\dim W =$ aantal vektore in $= n$.

$\Leftarrow$. Veronderstel $\dim V = \dim W$. Laat $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m$ 'n basis vir V wees, en laat $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m$ 'n basis vir W wees. (Ons weet dat die aantal basisvektore dieselfde is, want $\dim V = \dim W$.)

Om lineêre afbeeldings te definieer

$$S : V \rightleftarrows W : T$$

is dit voldoende, volgens Proposisie 3.1.18 (Voldoende om 'n Line{\^e}re Afbeelding te Definieer op 'n Basis), om die aksie van S en T op die basisvektore te definieer. Ons pen neer:

$$\mathbf{e}_i \overset{S}{\mapsto} \mathbf{f}_i$$
$$\mathbf{e}_i \overset{T}{\hookleftarrow} \mathbf{f}_i$$

Duidelik het ons $T \circ S = \mathrm{id}_V$ en $S \circ T = \mathrm{id}_W$. ■

Voorbeeld 3.3.7 Wys dat $\mathrm{Mat}_{n,m}$ isomorfies aan $\mathbb{R}^{mn}$ is.

Oplossing. Ons observeer volgens Voorbeeld 2.3.11, $\dim \mathrm{Mat}_{n,m} = mn$, terwyl uit Voorbeeld 2.3.4, is $\dim \mathbb{R}^{mn}$ ook gelyk aan mn. □

Daar is een baie belangrike isomorfisme wat ons herhaaldelik gaan gebruik. Laat V 'n vektorruimte weest met 'n basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m\}$. Oorweeg die afbeelding

$$\begin{aligned} {}_{\mathcal{B}} : V &\to \mathrm{Col}_m \\ \mathbf{v} &\mapsto [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

, wat 'n vektor $\mathbf{v} \in V$ na sy ooreenstemmende koördinaatvektor$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} \in \mathrm{Col}_m$ stuur. Lemma 2.4.9 sê presies dat $[\cdot]_{\mathcal{B}}$ 'n lineêre afbeelding is. Ons gaan nou die inverse beskryf.

Definisie 3.3.8 Laat V 'n m-dimensionele vektorruimte wees met basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m\}$. Laat $\mathsf{c} \in \mathrm{Col}_m$ 'n m-dimensionele kolomvektor wees. Dan is die

vektor in V wat ooreenstem aan c relatief tot die basis $\mathcal{B}$

$$\mathbf{vec}_{V,\mathcal{B}}(\mathsf{c}) := \mathsf{c}_1\mathbf{e}_1 + \mathsf{c}_2\mathbf{e}_2 + \cdots + \mathsf{c}_m\mathbf{e}_m.$$

◊

Voorbeeld 3.3.9 Die polinome $\mathcal{B} = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$ waar

$$\mathbf{p}_1 := 1 + x, \mathbf{p}_2 := 1 + x + x^2, \mathbf{p}_3 := 1 - x^2$$

is 'n basis vir Poly_2 (bevestig dit self). Dan, byvoorbeeld,

$$\begin{aligned}\mathbf{vec}_{\mathrm{Poly}_3,\mathcal{B}}\left(\begin{bmatrix}2\\-3\\3\end{bmatrix}\right) &= 2(1+x) - 3(1+x+x^2) + 3(1-x^2)\\ &= 2 - x - 6x^2 \in \mathrm{Poly}_3\ .\end{aligned}$$

□

Verstaanpunt 3.3.10 Wys dat:

- $\mathbf{vec}_{V,\mathcal{B}}(\mathsf{c} + \mathsf{c}') = \mathbf{vec}_{V,\mathcal{B}}(\mathsf{c}) + \mathbf{vec}_{V,\mathcal{B}}(\mathsf{c}')$
- $\mathbf{vec}_{V,\mathcal{B}}(k\mathsf{c}) = k\,\mathbf{vec}_{V,\mathcal{B}}(\mathsf{c})$.

Dit beteken dat $\mathbf{vec}_{V,\mathcal{B}} : \mathrm{Col}_m \to V$ 'n lineêre afbeelding is.

Oplossing.

1.

$$\begin{aligned}\mathbf{vec}_{V,\mathcal{B}}(\mathsf{c} + \mathsf{c}') &= \mathbf{vec}_{V,\mathcal{B}}\left(\begin{bmatrix}c_1\\\vdots\\c_n\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}c_1'\\\vdots\\c_n'\end{bmatrix}\right)\\ &= \mathbf{vec}_{V,\mathcal{B}}\left(\begin{bmatrix}c_1 + c_1'\\\vdots\\c_n + c_n'\end{bmatrix}\right)\\ &= (c_1 + c_1')\mathbf{e}_1 + \cdots + (c_n + c_n')\mathbf{e}_n\\ &= (c_1\mathbf{e}_1 + \cdots + c_n\mathbf{e}_n) + (c_1'\mathbf{e}_1 + \cdots + c_n'\mathbf{e}_n)\\ &= \mathbf{vec}_{V,\mathcal{B}}(\mathsf{c}) + \mathbf{vec}_{V,\mathcal{B}}(\mathsf{c}')\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\mathbf{vec}_{V,\mathcal{B}}(k\mathsf{c}) &= \mathbf{vec}_{V,\mathcal{B}}\left(k\begin{bmatrix}c_1\\\vdots\\c_n\end{bmatrix}\right)\\ &= \mathbf{vec}_{V,\mathcal{B}}\left(\begin{bmatrix}kc_1\\\vdots\\kc_n\end{bmatrix}\right)\\ &= (kc_1\mathbf{e}_1 + \cdots + kc_n\mathbf{e}_n)\\ &= k(c_1\mathbf{e}_1 + \cdots + c_n\mathbf{e}_n)\\ &= k\,\mathbf{vec}_{V,\mathcal{B}}(\mathsf{c})\end{aligned}$$

Stelling 3.3.11 *Laat V 'n vektorruimte met basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m\}$ wees. Die afbeeldings*

$$\begin{aligned} {}_{\mathcal{B}} : V &\rightleftarrows \mathrm{Col}_m : \mathbf{vec}_{V,\mathcal{B}} \\ \mathbf{v} &\mapsto [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} \\ \mathbf{vec}_{V,\mathcal{B}}(\mathsf{c}) &\hookleftarrow \mathsf{c} \end{aligned}$$

is 'n isomorfisme van vektorruimtes.

Bewys. Gegee $\mathbf{v} \in V$, brei dit in die basis $\mathcal{B}$ uit:

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{e}_1 + \ldots + a_m\mathbf{e}_m.$$

Dan,

$$\begin{aligned} \big(\mathbf{vec}_{V,\mathcal{B}} \circ [\cdot]_{\mathcal{B}}\big)(\mathbf{v}) &= \mathbf{vec}_{V,\mathcal{B}}\big([\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}\big) \\ &= \mathbf{vec}_{V,\mathcal{B}}\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}\right) \\ &= a_1\mathbf{e}_1 + \cdots + a_m\mathbf{e}_m \\ &= \mathbf{v} \end{aligned}$$

sodat $\mathbf{vec}_{V,\mathcal{B}} \circ [\cdot]_{\mathcal{B}} = \mathrm{id}_V$. Aan die ander kant, gegee

$$\mathsf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} \in \mathrm{Col}_m\,,$$

dan het ons

$$\begin{aligned} \big([\cdot]_{\mathcal{B}} \circ \mathbf{vec}_{V,\mathcal{B}}\big)(\mathsf{c}) &= \big[\mathbf{vec}_{V,\mathcal{B}}(\mathsf{c})\big]_{\mathcal{B}} \\ &= \big[\mathsf{c}_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \mathsf{c}_m\mathbf{e}_m\big] \\ &= \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} \\ &= \mathsf{c} \end{aligned}$$

waar die tweede laaste stap die *definisie* van die koördinaatvektor van $\mathbf{v} = \mathsf{c}_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \mathsf{c}_m\mathbf{e}_m$ gebruik. Gevolglik $[\cdot]_{\mathcal{B}} \circ \mathbf{vec}_{V,\mathcal{B}} = \mathrm{id}_{\mathrm{Col}_m}$. ∎

> Die bostaande resultaat is baie belangrik in lineêre algebra. Dit sê dat, as ons 'n basis vir 'n abstrakte eindigdimensionele vektorruimte V gekies het, dan kan ons die elemente van V behandel asof hulle kolomvektore is!

Oefeninge

1. Is die volgende vektorruimtes isofmorfies?

$$W = \left\{ p \in \text{Poly}_2 : \int_0^2 p(x)dx = 0 \right\}.$$

As hulle is, gee 'n eksplisiete isomorfisme tussen hulle. Indien nie, bewys dat hulle nie isofmorfies is nie.

Oplossing. V consists of all vectors (x, y, z, w) satisyfing the linear equations

$$\begin{aligned} x + 2y - w &= 0 \\ -x + y + z &= 0. \end{aligned}$$

We are free to choose x and y arbitrarily, but then (1) above fixes w and (2) fixes z. Hence V is a 2 dimensional subspace.

Onto W. Let $p(x) = ax^2 + bx + c$. For $p(x)$ to be in W, $p(x)$ must satisfy the following equation:

$$\int_0^2 ax^2 + bx + c\, dx = \frac{8a}{3} + 2b + 2c = 0.$$

Thus, for any choice of a and b, c is uniquely determined. Hence W is a 2 dimensional subspace.

Since both V and W are 2 dimensional vector spaces, they are isomorphic by Stelling 3.3.6. To exhibit an explicit isomorphism between the V and W we shall need find bases for both spaces.

Since V is 2 dimensional, a basis for V consists of any two non-zero vectors in V that are not scalar multiples of one another. By inspection, we find the basis $\mathcal{B}_V = \{(1, 0, 1, 1), (0, 1, -1, 2)\}$. By similar reasoning, we find a basis $\mathcal{B}_W = \{\frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{2}, x - 1\}$. By Stelling 3.1.18, there is a unique linear map $T : V \to W$ such that

$$\begin{aligned} T((1, 0, 1, 1)) &= \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{2} \\ T((0, 1, -1, 2)) &= x - 1. \end{aligned}$$

This map is an isomorphism, as demonstrated by the proof of Stelling 3.3.6.

2. Is die volgende vektorruimtes isomorfies?

$$V = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{v} \times (1, 2, 3) = \mathbf{0}\}$$

$$W = \left\{ M \in \text{Mat}_{2,2} : M^T = -M \right\}.$$

As hulle is, gee 'n eksplisiete isomorfisme tussen hulle. Indien nie, bewys dat hulle nie isomorfies is nie. **Oplossing**.

We use some geometry to find the dimension of V. $\mathbf{v} \in V$ if and only if

$$|\mathbf{v}||(1, 2, 3)| \sin\theta = 0$$

where θ is the angle between $\mathbf{v}$ and $(1, 2, 3)$. Thus V consists of $\mathbf{0}$ as well as all those vectors parallel to $(1, 2, 3)$. But this set is precisely all vectors of the form $k(1, 2, 3)$ with $k \in \mathbb{R}$. Hence V is 1 dimensional with basis $\{(1, 2, 3)\}$.

W consists of all matrices (a_{ij}) satisfying

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{bmatrix}.$$

Thus $a_{11} = a_{22} = 0$ and $b = -c$. So W consists of all those matrices of the

form
$$\begin{bmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{bmatrix}.$$
This also shows that
$$\{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\}$$
is a basis for W. Hence V and W are isomorphic with the isomorphism given by the unique linear map $V \to W$ satisfying
$$(1,2,3) \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

3.4 Lineêre afbeeldings en matrikse

Definisie 3.4.1 Laat $T : V \to W$ 'n lineêre afbeelding vanaf 'n vektorruimte V na 'n vektorruimte W wees. Laat $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m\}$ 'n basis vir V en $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n\}$ 'n basis vir W wees. Die **matriks van T relatief tot die basisse $\mathcal{B}$ en $\mathcal{C}$** is definieer as die $n \times m$-matriks waarvan die kolomme die koördinaatvektore van $T(\mathbf{b}_i)$ relatief tot die basis $\mathcal{C}$ is:

$$[T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} := \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} T(\mathbf{b}_1) \end{bmatrix}_{\mathcal{C}} & \begin{bmatrix} T(\mathbf{b}_2) \end{bmatrix}_{\mathcal{C}} & \ldots & \begin{bmatrix} T(\mathbf{b}_m) \end{bmatrix}_{\mathcal{C}} \end{bmatrix}$$

◊

> Verstaan jy hoekom $[T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ 'n $n \times m$-matriks is?

Voorbeeld 3.4.2 Example from class! □

Stelling 3.4.3 *Laat $T : V \to W$ 'n lineêre afbeelding vanaf 'n vektorruimte V na 'n vektorruimte W wees. Laat $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m\}$ 'n basis vir V en $\mathcal{C}$ 'n basis vir W wees. Dan vir alle vektore $\mathbf{v}$ in V,*

$$[T(\mathbf{v})]_{\mathcal{C}} = [T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} \tag{3.4.1}$$

Bewys. Die bewys is soortgelyk aan dié van die Basisveranderingstelling (Stelling 2.5.7). Laat $\mathbf{v} \in V$. Brei dit uit in die basis $\mathcal{B}$:

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{b}_1 + a_2\mathbf{b}_2 + \cdots + a_m\mathbf{b}_m, \text{i.e. } [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}.$$

Dan,

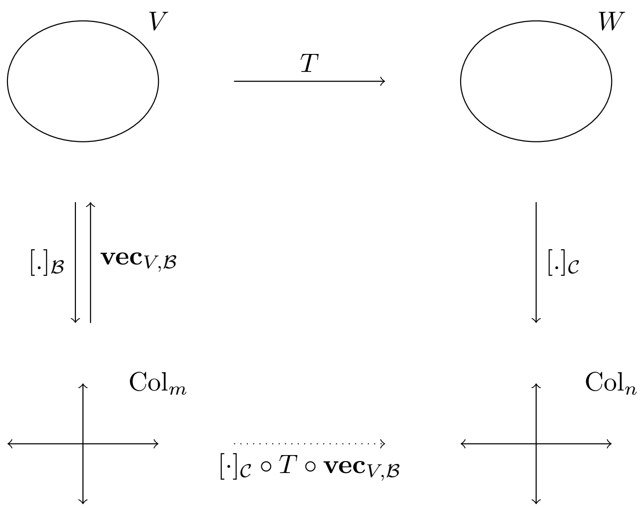
$$\begin{aligned}
{}_{\mathcal{C}} &= [T(a_1\mathbf{b}_1 + \cdots + a_m\mathbf{b}_m)]_{\mathcal{C}} \\
&= [a_1T(\mathbf{b}_1) + \cdots + a_nT(\mathbf{b}_m)]_{\mathcal{C}} && (T \text{ is lineêr}) \\
&= a_1[T(\mathbf{b}_1)]_{\mathcal{C}} + \cdots + a_n[T(\mathbf{b}_m)]_{\mathcal{C}} && (\text{Hulpstelling 2.4.9}) \\
&= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} T(\mathbf{b}_1) \end{bmatrix}_{\mathcal{C}} & \begin{bmatrix} T(\mathbf{b}_2) \end{bmatrix}_{\mathcal{C}} & \ldots & \begin{bmatrix} T(\mathbf{b}_m) \end{bmatrix}_{\mathcal{C}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \\
&= [T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}\,.
\end{aligned}$$

■

As ons hierdie stelling 'n naam moes gee, sou dit "Die verhouding tussen Lineêre Afbeeldings, Koördinaatvektore en Matriksvermenigvuldiging van Kolomvektore-Stelling" wees!

Voorbeeld 3.4.4 Voortsetting van klasvoorbeeld. □

Ons kan Stelling 3.4.3 in 'n meer abstrakte manier interpreteer soos volg. Ons het die volgende diagram van lineêre afbeeldings van vektorruimtes:



Die boonste afbeelding is die lineêre afbeelding $T : V \to W$. Die afbeelding links van V na Col_m is die koördinaatvektorafbeelding $[\cdot]_{\mathcal{B}}$ wat met die basis $\mathcal{B}$ assosieer word. Sy inverse afbeelding $\mathbf{vec}_{V,\mathcal{B}} : \mathrm{Col}_m \to V$ word ook geteken. Die afbeelding aan die regterkant is die koördinaatvektorafbeedling $[\cdot]_{\mathcal{C}}$ vanaf W na Col_n wat met basis C assosieer word. Die stippelpyl heel onder is die komposisieafbeelding, en kan soos volg eksplisiet bereken word.

Hulpstelling 3.4.5 *Die komposisieafbeelding*

$$[\cdot]_{\mathcal{C}} \circ T \circ \mathbf{vec}_{V,\mathcal{B}} : \mathrm{Col}_m \to \mathrm{Col}_n$$

is matriksvermenigvuldiging met $[T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$. *Dit is, vir alle kolomvektore* u *in* Col_m*,*

$$\left([\cdot]_{\mathcal{C}} \circ T \circ \mathbf{vec}_{V,\mathcal{B}}\right)(\mathsf{u}) = [T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}\, \mathsf{u}.$$

Bewys. Definieer $\mathbf{v} := \mathbf{vec}_{V,\mathcal{B}}(\mathsf{u})$. Dan is $\mathbf{v}$ die vektor in V waarvan die koördinaatvektor met betrekking tot basis $\mathcal{B}$ u is. Dit is, $\mathsf{u} = [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$. So,

$$\begin{aligned}
\left([\cdot]_{\mathcal{C}} \circ T \circ \mathbf{vec}_{V,\mathcal{B}}\right)(\mathsf{c}) &= [\cdot]_{\mathcal{C}}\left(T\left(\mathbf{vec}_{V,\mathcal{B}}(\mathsf{u})\right)\right) && \text{(Defn van komposisieafbeelding)} \\
&= [\cdot]_{\mathcal{C}}(T(\mathbf{v})) && \text{(Defn van } \mathbf{v}\text{)} \\
&= [T(\mathbf{v})]_{\mathcal{C}} && \text{(Defn van } [\cdot]_{\mathcal{C}}\text{)} \\
&= [T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} && \text{(Stelling 3.4.3).}
\end{aligned}$$

■

Voor ons aanbeweeg, moet ons nog iets van matrikse hersien. Veronderstel

A is 'n matriks met n rye. Laat

$$\mathsf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \mathsf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \mathsf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

die standaard basis vir Col_n wees. Dan kan die $i$de kolom van A verkry word deur A met e_i te vermenigvuldig:

$$i\text{de column of } \mathsf{A} = A\mathsf{e}_i. \tag{3.4.2}$$

Verstaanpunt 3.4.6 Bevestig dit!

Nou kan ons die volgende stelling bewys.

Stelling 3.4.7 Funktorialiteit van die Matriks-Lineêre Afbeelding. *Laat $S : U \to V$ en $T : V \to W$ lineêre afbeeldings tussen eindigdimensionele vektorruimtes wees. Laat $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ en $\mathcal{D}$ basisse vir U, V en W onderskeidelik wees. Dan,*

$$[T \circ S]_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{C}}[S]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$$

waar die regterkant die matriksproduk van $[T]_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{C}}$ en $[S]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ is.

Bewys. Ons het:

$$\begin{aligned}
&i\text{th column of } [T \circ S]_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{B}} \\
&\qquad = [(T \circ S)(\mathbf{b}_i)]_{\mathcal{D}} && (\text{Defn of } [T \circ S]_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{B}}) \\
&\qquad = [T(S(\mathbf{b}_i))]_{\mathcal{D}} && (\text{Defn of } T \circ S) \\
&\qquad = [T]_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{C}}\,[S(\mathbf{b}_i]_{\mathcal{C}} && (\text{Stelling 3.4.3}) \\
&\qquad = [T]_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{C}}\,[S]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}\,[\mathbf{b}_i]_{\mathcal{B}} && (\text{Stelling 3.4.3}) \\
&\qquad = [T]_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{C}}\,[S]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}\,\mathsf{e}_i && (\text{ want } [\mathbf{b}_i]_{\mathcal{B}} = \mathsf{e}_i\ ) \\
&\qquad = i\text{th column of } [T]_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{C}}[S]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} && (3.4.2).
\end{aligned}$$

■

Gevolg 3.4.8 *Laat $T : V \to W$ 'n lineêre afbeelding wees, en veronderstel $\mathcal{B}$ is 'n basis vir V, en $\mathcal{C}$ is 'n basis vir W. Dan*

$$T \text{ is 'n isomorfisme} \iff [T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} \text{ is inverteerbaar.}$$

Bewys. $\Rightarrow$. Veronderstel die lineêre afbeelding T is 'n isomorfisme. Dit beteken daar bestaan 'n lineêre afbeelding $S : W \to V$ sodat

$$S \circ T = \text{id}_V \text{ and } T \circ S = \text{id}_W\ /$$

Daarom,

$$[S \circ T]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}} = [\text{id}_V]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}} \text{ en } [T \circ S]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{C}} = [\text{id}_W]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{C}}.$$

Daarom, volgens die Funktorialiteit van die Matriks van 'n Lineêre Afbeelding (Stelling 3.4.7),

$$[S]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}[T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = I \text{ en } [T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[S]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}} = I$$

Daarom is die matriks $[T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ inverteerbaar, met inverse

$$[T]^{-1}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = [S]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}.$$

$\Leftarrow$. Veronderstel die matriks $[T] \equiv [T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ is inverteerbaar. Definieer die lineêre afbeelding

$$S : W \to V$$

deur eerstens dit op die basisvektore in $\mathcal{C}$ te definieer as

$$S(\mathbf{c}_i) := \sum_{p=1}^{\dim V} [T]^{-1}_{pi} \lfloor_p$$

en dit dan tot die hele W deur lineariteit uit te brei. Dan het ons

$$\begin{aligned}
(T \circ S)(\rfloor_i) &= T(S(\rfloor_i)) \\
&= T\left(\sum_{p=1}^{\dim V} [T]^{-1}_{pi} \mathbf{b}_p\right) \\
&= \sum_{p=1}^{\dim V} \sum_{q=1}^{\dim W} [T]^{-1}_{pi} [T]_{qp} \mathbf{c}_q \\
&= \sum_{q=1}^{\dim W} \left(\sum_{p=1}^{\dim V} [T]_{qp} [T]^{-1}_{pi}\right) \mathbf{c}_q \\
&= \sum_{q=1}^{\dim W} \left([T][T]^{-1}\right)_{qi} \mathbf{c}_q \\
&= \sum_{q=1}^{\dim W} I_{qi} \mathbf{c}_q \\
&= \sum_{q=1}^{\dim W} \delta_{qi} \mathbf{c}_q \\
&= \mathbf{c_i}.
\end{aligned}$$

Daarom, $T \circ S = \mathrm{id}_W$. Op 'n soortgelyke manier kan ons bewys dat $S \circ T = \mathrm{id}_V$. Daarom is die lineêre afbeelding T 'n isomorfisme, met inverse $T^{-1} = S$. ■

Ons kan dit nog verder verfyn, naamlik, 'die inverse van die matriks van'n lineêre afbeelding is gelyk aan die matriks van die inverse van die lineêre afbeelding.'

Gevolg 3.4.9 *Veronderstel $\mathcal{B}$ en $\mathcal{C}$ is basisse vir vektorruimtes V en W onderskeidelik. Veronderstel 'n lineêre afbeelding $T : V \to W$ het inverse $T^{-1} : W \to V$. Dan*

$$[T]^{-1}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = [T^{-1}]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}.$$

Bewys. Ons het

$$\begin{aligned}
{}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[T^{-1}]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}} &= [T \circ T^{-1}]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{C}} && \text{(Stelling 3.4.7)} \\
&= [\mathrm{id}_W]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{C}} && (T \circ T^{-1} = \mathrm{id}_W) \\
&= I
\end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned}
{}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}[T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} &= [T^{-1} \circ T]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}} && \text{(Stelling 3.4.7)} \\
&= [\mathrm{id}_V]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}} && (T^{-1} \circ T = \mathrm{id}_V) \\
&= I.
\end{aligned}$$

■

Die volgende Lemma sê dat die 'basisveranderingsmatriks' in Afdeling 2.5

is net die matriks van die identiteitslineêre afbeelding met betrekking tot die betrokke basisse.

Hulpstelling 3.4.10 *Laat $\mathcal{B}$ en $\mathcal{C}$ basisse vir 'n m-dimensionele vektorruimte V wees. Dan*

$$\mathsf{P}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = [\mathrm{id}]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}.$$

Bewys.

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} &= [[\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}} \cdots [\mathbf{b}_m]_{\mathcal{C}}] && \text{(Defn van } \mathsf{P}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}\text{)} \\
&= [[\mathrm{id}(\mathbf{b}_1)]_{\mathcal{C}} \cdots [\mathrm{id}(\mathbf{b}_m)]_{\mathcal{C}}] \\
&= [\mathrm{id}]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}. && \text{(Defn van } [\mathrm{id}]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}\text{)}
\end{aligned}$$

■

Die volgende Stelling sê vir ons hoe die matriks van 'n lineêre bewerking verander as ons die basis verander waarmee ons die matriks bereken.

Stelling 3.4.11 *Laat $\mathcal{B}$ en $\mathcal{C}$ basisse vir 'n vektorruimte V wees, en laat $T : V \to V$ 'n lineêre bewerking op V wees. Dan*

$$[T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{C}} = \mathsf{P}^{-1}[T]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}}P$$

waar $P \equiv P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$.

Bewys.

$$\begin{aligned}
\text{RHS} &= \mathsf{P}^{-1}[T]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}}P \\
&= [\mathrm{id}]^{-1}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}[T]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}}[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}} && \text{(Hulpstelling 3.4.10)} \\
&= [\mathrm{id}]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}}[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}} && \text{(Gevolg 3.4.9)} \\
&= [\mathrm{id} \circ T \circ \mathrm{id}]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{C}} && \text{(Stelling 3.4.7)} \\
&= [T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{C}} \\
&= \text{LHS.}
\end{aligned}$$

■

Oefeninge

1. Laat

$$T : \mathrm{Trig}_1 \to \mathrm{Trig}_2$$

die 'vermenigvuldig met $\sin x$'-lineêre afbeelding wees, $T(f)(x) = \sin x f(x)$. Bereken $[T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ met betrekking tot die standaard basis $\mathcal{B}$ van Trig_1 en $\mathcal{C}$ van Trig_2.

Oplossing. Recall the standard double angle formulae:

$$\begin{aligned}
\sin(2x) &= 2\sin x \cos x \\
\cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x
\end{aligned}$$

With these in mind, we compute:

$$\begin{aligned}
T(T_0) &= \sin x = T_2 \\
T(T_1) &= \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin(2x) = \frac{1}{2}T_4 \\
T(T_2) &= \sin x \sin x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x) = \frac{1}{2}T_0 - \frac{1}{2}T_3
\end{aligned}$$

Thus

$$[T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Laat

$$S : \mathrm{Trig}_2 \to \mathrm{Trig}_2$$

die 'skuif met $\frac{\pi}{6}$'-afbeelding wees, $S(f)(x) = f(x - \frac{\pi}{6})$. Bereken $[S]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{C}}$ met betrekking tot die standaardbasis $\mathcal{C}$ van Trig_2.

Oplossing. In this exercise, we shall use the standard angle addition formulae for trigonometric functions:

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$
$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

We compute

$$\begin{aligned}
S(T_0) &= 1 = T_0 \\
S(T_1) &= \cos(x - \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}T_1 + \frac{1}{2}T_2 \\
S(T_2) &= \sin(x - \frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = -\frac{1}{2}T_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}T_2 \\
S(T_3) &= \cos(2x - \frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos^2 x + \sin x \cos x \\
&= -\frac{\sqrt{3}}{2}(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos x) + \frac{\sqrt{3}}{2}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x) + \frac{1}{2}\sin 2x \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}T_3 + \frac{1}{2}\sin 2x.
\end{aligned}$$

Similarly,

$$S(T_4) = \sin(2x - \frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x = -\frac{1}{2}T_3 + \frac{\sqrt{3}}{2}T_4.$$

Hence

$$[S]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}.$$

3. Bevestig Stelling 3.4.3 vir die lineêre afbeelding $S : \mathrm{Mat}_{2,2} \to \mathrm{Mat}_{2,2}$ gegee deur $S(\mathsf{M}) = \mathsf{M}^T$, met behulp van die volgende basisse van $\mathrm{Mat}_{2,2}$:

4. Maak seker dat die lineêre afbeeldings T en S van Oefeninge 3.4.1 en 3.4.2 $[S \circ T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = [S]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ bevredig.

3.5 Kern en waardeversameling van 'n lineêre afbeelding

Definisie 3.5.1 Laat $T : V \to W$ 'n lineêre afbeelding tussen vektorruimtes V en W wees. Die **kern** van T, geskryf $\text{Ker}(T)$, is die versameling van alle vektore $\mathbf{v} \in V$ wat deur T op $\mathbf{0}_W$ afgebeeld word. Dit is,

$$\text{Ker}(T) := \{\mathbf{v} \in V : T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_W\}.$$

Die **beeld** van T, geskryf $\Im(T)$, is die versameling van alle vektore $\mathbf{w} \in W$ sodat $\mathbf{w} = T(\mathbf{v})$ vir een of ander $\mathbf{v} \in V$. Dit is,

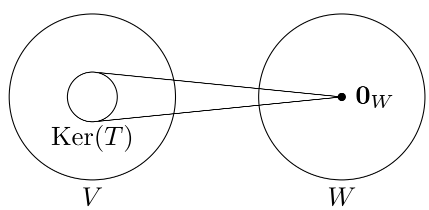
$$\Im(T) := \{\mathbf{w} \in W : \mathbf{w} = T(\mathbf{v}) \text{ vir 'n } \mathbf{v} \in V\}$$

$\diamondsuit$

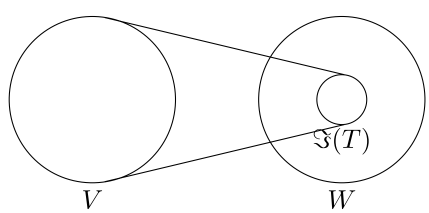
Sien Figuur 3.5.2 en Figuur 3.5.3 vir 'n skematiese voorstelling.

Soms, om absoluut duidelik te wees, sal ek 'n onderskrif op die nulvektor sit om aan te dui aan watter vektorruimte dit behoort, bv. $\mathbf{0}_W$ verwys na die nulvektor in W, terwyl $\mathbf{0}_V$ na die nulvektor in V verwys.

Nog 'n naam vir die kern van T is die *nulruimte* van T, en nog 'n naam vir die beeld van T is die *waardeversameling* van T.



Figuur 3.5.2: $\text{Ker}(T)$



Figuur 3.5.3: $\Im(T)$

Hulpstelling 3.5.4 *Laat $T : V \to W$ 'n lineêre afbeelding wees.. Dan:*

1. $\text{Ker}(T)$ *is 'n deelruimte van* V
2. $\Im(T)$ *is 'n deelruimte van* W

Bewys. (i) Ons moet seker maak dat die drie vereistes van 'n deelruimte bevredig word.

1. $\text{Ker}(T)$ is geslote onder sommering. Veronderstel $\mathbf{v}$ en $\mathbf{v}'$ is in $\text{Ker}(T)$.

Met ander woorde, $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ en $T(\mathbf{v}') = \mathbf{0}$. Ons moet wys dat $\mathbf{v} + \mathbf{v}'$ in $\mathrm{Ker}(T)$ is, met ander woorde, dat$T(\mathbf{v} + \mathbf{v}') = \mathbf{0}$. Inderdaad,

$$T(\mathbf{v} + \mathbf{v}') = T(\mathbf{v}) + T(\mathbf{v}') = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

2. $\mathbf{0}_V \in \mathrm{Ker}(T)$. Om te wys dat $\mathbf{0}_V$ in $\mathrm{Ker}(T)$ is, moet ons wys dat $T(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$. Inderdaad, dit is waar want T is 'n lineêre afbeelding, volgens Lemma 3.1.17.

3. $\mathrm{Ker}(T)$ is geslote onder skalaarvermenigvuldiging. Veronderstel $\mathbf{v} \in \mathrm{Ker}(T)$ en $k \in \mathbb{R}$ is 'n skalaar. Ons moet wys dat $k\mathbf{v} \in \mathrm{Ker}(T)$, dit is, ons moet wys dat $T(k\mathbf{v}) = \mathbf{0}$. Inderdaad,

$$T(k\mathbf{v}) = kT(\mathbf{v}) = k\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

(ii) Weereens moet ons die drie vereistes van 'n deelruimte nagaan.

1. $\Im(T)$ is geslote onder sommering. Veronderstel $\mathbf{w}$ en $\mathbf{w}'$ is in $\Im(T)$. Met ander woorde, daar bestaan vektore $\mathbf{v}$ en $\mathbf{v}'$ in V sodat $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$ en $T(\mathbf{v}') = \mathbf{w}'$. Ons moet wys dat $\mathbf{w}+\mathbf{w}'$ ook in $\Im(T)$ is, met ander woorde, dat daar 'n vekor $\mathbf{u}$ in V bestaan, sodat $T(\mathbf{u}) = \mathbf{w} + \mathbf{w}'$. Inderdaad, stel $\mathbf{u} := \mathbf{v} + \mathbf{v}'$. Dan,

$$T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v} + \mathbf{v}') = T(\mathbf{v}) + T(\mathbf{v}') = \mathbf{w} + \mathbf{w}'.$$

2. $\mathbf{0}_W \in \Im(T)$. Om te wys dat $\mathbf{0}_W \in \Im(T)$, moet ons wys dat daar 'n $\mathbf{v} \in V$ bestaan, sodat $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_W$. Inderdaad, kies $\mathbf{v} = \mathbf{0}_V$. Dan is $T(\mathbf{v}) = T(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$ volgens Lemma 3.1.17.

3. $\Im(T)$ is geslote onder skalaarvermenigvuldiging. Veronderstel $\mathbf{w} \in \Im(T)$ en k is 'n skalaar. Ons moet wys dat $k\mathbf{w} \in \Im(T)$. Die feit dat $\mathbf{w}$ in $\Im(T)$ is, beteken dat daar 'n $\mathbf{v}$ in V bestaan, sodat $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$. Ons moet wys dat daar 'n $\mathbf{u} \in V$ bestaan, sodat $T(\mathbf{u}) = k\mathbf{w}$. Inderdaad, stel $\mathbf{u} := k\mathbf{v}$. Dan

$$T(\mathbf{u}) = T(k\mathbf{v}) = kT(\mathbf{v}) = k\mathbf{w}.$$

■

Nou dat ons weet dat die kern en beeld van 'n lineêre afbeelding deelruimtes is en dus vektorruimtes in eie reg, kan ons die volgende definisie gee.

Definisie 3.5.5 Laat $T : V \to W$ 'n lineêre afbeelding vanaf 'n eindig-dimensionele vektorruimte V na 'n vektorruimte W wees. Die **nulheidsgraad** van T is die dimensie van $\mathrm{Ker}(T)$, en die **rang** van T is die dimensie van $\Im(T)$:

$$\mathrm{Nullity}(T) := \mathrm{Dim}(\mathrm{Ker}(T))$$
$$\mathrm{Rank}(T) = \mathrm{Dim}(\Im(T))$$

◊

Die 'dimensie van $\mathrm{Ker}(T)$' maak sin, want $\mathrm{Ker}(T)$ is 'n deelruimte van 'n eindig-dimensionele vektorruimte V, en daarom is dit eindig-dimensioneel volgens Proposisie 2.3.20. Ons weet nog nie dat $\Im(T)$ eindig-dimensioneel is nie, maar dit sal volg uit die Rang-Nulheidgraad-stelling (Stelling 3.5.9).

Voorbeeld 3.5.6 Laat $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ 'n konstante nie-nul vektor wees. Oorweeg die 'kruisproduk met $\mathbf{a}$'-lineêre afbeelding van Voorbeeld 3.1.7,

$$C : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$\mathbf{v} \mapsto \mathbf{a} \times \mathbf{v}$$

Bepaal die kern, beeld en nulheidsgraad van C.

Oplossing. Die kern van C is die deelruimte van $\mathbb{R}^3$ wat uit al die vektore $\mathbf{v} \in V$ bestaan, sodat $\mathbf{a} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Uit die meetkundige formule van die kruisproduk,

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{a}||\mathbf{v}| \sin \theta$$

waar θ die hoek van $\mathbf{a}$ tot $\mathbf{v}$ is, sien ons dat

$$\mathbf{a} \times \mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ of } \theta = 0 \text{ of } \theta = \pi.$$

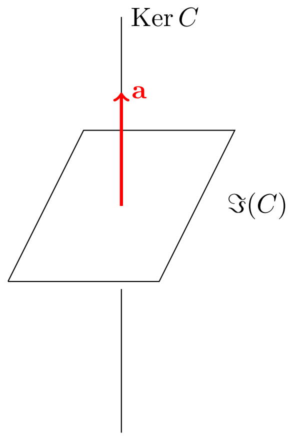
Met ander woorde, $\mathbf{v}$ moet 'n skalaarveelvoud van $\mathbf{a}$ wees. So,

$$\operatorname{Ker}(C) = \{k\mathbf{a}, k \in \mathbb{R}\}.$$

Ek beweer dat die *beeld* van C die deelruimte van *alle* vektore loodreg op $\mathbf{a}$ is, i.e.

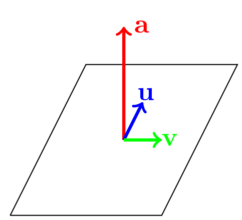
$$\Im(C) := \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{u} \cdot \mathbf{a} = 0\}. \tag{3.5.1}$$

As jy my glo, dan is die prentjie soos volg:



Laat ek vergelyking (3.5.1) bewys. Per definisie is die beeld van C die deelruimte van $\mathbb{R}^3$ bestaande uit alle vektore $\mathbf{w}$ van die vorm $\mathbf{w} = \mathbf{a} \times \mathbf{v}$ vir een of ander $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Dit impliseer dat $\mathbf{w}$ loodreg op $\mathbf{a}$ is. Dit was die 'maklike' deel. Die 'moeliker' deel is om die ander rigting te bewys. Dit is, ons moet wys dat as $\mathbf{u}$ loodreg op $\mathbf{a}$ is, dan is $\mathbf{u}$ in die beeld van C, i.e. daar bestaan 'n vektor $\mathbf{v}$ sodat $C(\mathbf{v}) = \mathbf{u}$.

Ons kan inderdaad $\mathbf{v}$ kies om die vektor te wees wat verkry word deur $\mathbf{u}$ met 90 grade kloksgewys te roteer in die vlak I, en dit soos nodig te skaleer:



In terme van 'n formule het ons

$$\mathbf{v} = \frac{|\mathbf{u}|}{|\mathbf{a}|}\mathbf{u} \times \mathbf{a}.$$

Let daarop dat dit nie die *enigste* vektor $\mathbf{v}$ is waarvoor $C(\mathbf{v}) = \mathbf{u}$ nie. Inderdaad, as ons by $\mathbf{v}$ enige vektor op die lyn deur$\mathbf{a}$ tel, sal die resulterende vektor

$$\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v} + k\mathbf{a}$$

ook $C(\tilde{\mathbf{v}}) = \mathbf{u}$ bevredig, want

$$C(\tilde{\mathbf{v}}) = C(\mathbf{v} + k\mathbf{a}) = C(\mathbf{v}) + C(k\mathbf{a}) = \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}.$$

□

Voorbeeld 3.5.7 Bepaal die kern, beeld en nulheidsgraad van die lineêre afbeelding

$$\begin{aligned} I : \mathrm{Trig}_2 &\to \mathbb{R} \\ T &\mapsto \int_0^\pi T(x)dx. \end{aligned}$$

Oplossing. Die kern van I bestaan uit alle tweede graadse trigonometriese polinome

$$T(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x$$

sodat

$$\int_0^\pi (a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x)\, dx = 0.$$

Deur die integrale te bereken, word die vergelyking

$$\pi a_0 + 2b_1 = 0$$

met geen beperkings op die ander konstantes a_1, a_2, b_2 nie. Met ander woorde,

$$\mathrm{Ker}(I) = \Big\{ \text{ alle trigonometriese polinome van die vorm}(a_0(1 - \frac{\pi}{2}\sin x) + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x),\ \text{waa}$$

Daarom is $\mathrm{Nullity}(I) = \mathrm{Dim}(\mathrm{Ker}(I)) = 4$.

Die beeld van I bestaan uit alle reële getalle $p \in \mathbb{R}$, sodat daar 'n $T \in \mathrm{Trig}_2$ bestaan waarvoor $I(T) = p$. Ek beweer dat

$$\Im(I) = \mathbb{R}.$$

Inderdaad, gegee $p \in \mathbb{R}$, dan kies ons $T(x) = \frac{p}{2} \sin x$, want

$$I(T) = \frac{p}{2} \int_0^\pi \sin x\, dx = p.$$

Daarom is $\Im(I) = \mathbb{R}$, en $\mathrm{Rank}(I) = 1$.

Let daarop dat die keuse van $T(x) = \frac{p}{2}\sin(x)$ wat $I(T) = p$ bevredig nie uniek is nie. Ons kan sê $\tilde{T} = T + S$ waar $S \in \mathrm{Ker}(I)$ en ons sal steeds hê dat $I(\tilde{T}) = p$:

$$I(\tilde{T}) = I(T + S) = I(T) + I(S) = p + 0 = p.$$

□

Voorbeeld 3.5.8 Oorweeg die funksie

$$\begin{aligned} T : \mathrm{Poly}_2 &\to \mathbb{R}^2 \\ p &\mapsto (p(1), p'(1)). \end{aligned}$$

Wys dat T 'n lineêre afbeelding is, en bepaal T se kern, beeld, rang en nulheidsgraad.

Oplossing. Ons wys eers dat T 'n lineêre afbeelding is. Laat $p, q \in \mathrm{Poly}_2$. Dan

$$\begin{aligned} T(p+q) &= ((p+q)(1),\, (p+q)'(1)) && \text{(Defn van } T\text{)} \\ &= (p(1)+q(1),\, (p+q)'(1)) && \text{(Defn van die funksie } p+q\text{)} \\ &= (p(1)+q(1),\, (p'+q')(1)) && ((p+q)' = p'+q') \\ &= (p(1)+q(1),\, p'(1)+q'(1)) && \text{(Defn van } p'+q'\text{)} \\ &= (p(1),\, p'(1)) + (q(1),\, q'(1)) && \text{(Defn of + in } \mathbb{R}^2\text{)} \\ &= T(p) + T(q). \end{aligned}$$

Die bewys van $T(kp) = kT(p)$ is soortgelyk.

Die kern van T is die versameling van alle polinome

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

sodat $T(p) = (0, 0)$. Dit vertaal in die vergelyking

$$(a_0 + a_1 + a_2,\, a_1 + 2a_2) = (0, 0).$$

Dit lei verder na die vergelykings:

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 + a_2 &= 0 \\ a_0 + a_1 + a_2 &= 0 \\ a_1 + 2a_2 &= 0 \end{aligned}$$

waarvan die vergelyking $a_2 = t$, $a_1 = -2t$, $a_0 = -t$ is, waar $t \in \mathbb{R}$. Daarom

$$\mathrm{Ker}(T) = \left\{\text{polinome van die vorm } -t - 2tx + tx^2 \text{ waar } t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Daarom is $\mathrm{Nullity}(T) = 1$.

Die beeld van T is die versameling van alle $(v, w) \in \mathbb{R}^2$ sodat daar 'n polinoom $p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ in Poly_2 bestaan waarvoor $T(p) = (v, w)$. So, (v, w) is in die beeld van T as en slegs as ons 'n polinoom $p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ kan vind sodat

$$(a_0 + a_1 + a_2, a_1 + 2a_2) = (v, w).$$

Met ander woorde, (v, w) is in die beeld van T as en slegs as die vergelykings

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 + a_2 &= v \\ a_1 + 2a_2 &= w \end{aligned}$$

'n oplossing het vir een of ander a_0, a_1, a_2. Maar hierdie vergelykings het *altyd* 'n oplossing, vir *alle* $(v, w) \in \mathbb{R}^2$. Byvoorbeeld, een oplossing is

$$a_2 = 0,\ a_1 = w,\ a_0 = v - w$$

wat ooreenstem met die polinoom

$$p(x) = v - w + wx. \tag{3.5.2}$$

Let daarop dat $T(p) = (v, w)$. Daarom,

$$\Im(T) = \{\text{all } (v, w) \in \mathbb{R}^2\} = \mathbb{R}^2.$$

Daarom is $\text{Rank}(T) = \text{Dim}(\Im(T)) = 2$.

Let daarop dat die keuse van die polinoom $p(x) = v - w + wx$ van (3.5.2) wat $T(p) = (v, w)$ bevredig nie die *enigste* moontlike keuse is nie. Inderdaad, enige polinoom van die vorm $\tilde{p} = p + q$ waar $q \in \text{Ker}(T)$ sal $T(\tilde{p}) = (v, w)$ ook bevredig, want

$$T(\tilde{p}) = T(p + q) = T(p) + T(q) = (v, w) + (0, 0) = (v, w).$$

□

Stelling 3.5.9 Rang-Nulheidsgraadstelling. *Laat $T : V \to W$ 'n lineêre afbeelding vanaf 'n eindigdimensionele vektorruimte V na 'n vektorruimte W wees. Dan*

$$\text{Nullity}(T) + \text{Rank}(T) = \text{Dim}(V).$$

Bewys. Laat $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$ 'n basis vir $\text{Ker}(T)$ wees. Omdat $\mathcal{B}$ 'n lys onafhanklike vektore in V is, kan ons dit uitbrei na 'n basis $\mathcal{C} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k, \mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_p\}$ vir V, volgens Gevolgtrekking 2.3.26. Ek beweer dat

$$\mathcal{D} := \{T(\mathbf{f}_1), \ldots, T(\mathbf{f}_p)\}$$

'n basis vir $\Im(T)$ is. As ek dit kan bewys, sal ons klaar wees, want dan het ons

$$\begin{aligned} \text{Nullity}(T) + \text{Rank}(T) &= k + p \\ &= \text{Dim}(V). \end{aligned}$$

Kom ons bewys dat $\mathcal{D}$ 'n basis vir $\Im(T)$ is.

$\mathcal{D}$ is lineêr onafhanklik. Veronderstel

$$b_1 T(\mathbf{f}_1) + \cdots + b_p T(\mathbf{f}_p) = \mathbf{0}_W.$$

Ons herken die linkerkant as $T(b_1\mathbf{f}_1 + \cdots + b_p\mathbf{f}_p)$. Daarom

$$b_1\mathbf{f}_1 + \cdots + b_p\mathbf{f}_p \in \text{Ker}(T)$$

wat beteken ons kan dit as 'n lineêre kombinasie van vektore in $\mathcal{B}$ skryf,

$$b_1\mathbf{f}_1 + \cdots + b_p\mathbf{f}_p = a_1\mathbf{e}_1 + \cdots + a_k\mathbf{e}_k.$$

Deur al die terme aan eenkant te versamel, word dit die vergelyking

$$-a_1\mathbf{e}_1 - \cdots - a_k\mathbf{e}_k + b_1\mathbf{f}_1 + \cdots + b_p\mathbf{f}_p = \mathbf{0}_V.$$

Ons herken die linkerkant as 'n lineêre kombinasie van die $\mathcal{C}$-basisvektore. Aangesien hulle lineêr onafhanklik is, moet al die skalare nul wees. Onder andere, $b_1 = \cdots = b_p = 0$, wat is wat ons wou bewys.

$\mathcal{D}$ span W. Veronderstel $\mathbf{w} \in \Im(T)$. Ons moet wys dat $\mathbf{w}$ 'n lineêre kombinasie van vektore in $\mathcal{D}$ is. Aangesien $\mathbf{w}$ in die beeld van T is, bestaan daar 'n $\mathbf{v} \in V$ sodat $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$. Omdat $\mathcal{C}$ 'n basis vir V is, kan ons skryf

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{e}_1 + \cdots + a_k\mathbf{e}_k + b_1\mathbf{f}_1 + \cdots + b_p\mathbf{f}_p$$

vir skalare $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_p$. Dan

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= T(\mathbf{v}) \\ &= T(a_1\mathbf{e}_1 + \cdots + a_k\mathbf{e}_k + b_1\mathbf{f}_1 + \cdots + b_p\mathbf{f}_p) \\ &= a_1T(\mathbf{e}_1) + \cdots + a_kT(\mathbf{e}_k) + b_1T(\mathbf{f}_1) + \cdots + b_pT(\mathbf{f}_p) \\ &= b_1T(\mathbf{f}_1) + \cdots + b_pT(\mathbf{f}_p) \qquad (\mathbf{e}_i \in \text{Ker}(T)) \end{aligned}$$

sodat $\mathbf{w}$ wel 'n lineêre kombinasie van die vektore in $\mathcal{D}$ is. ■

Oefeninge

1. Verifieer die Rang-Nulheidgraad-stelling vir die volgende lineêre afbeeldings. D.w.s., vir elke afbeelding T, (a) bepaal $\mathrm{Ker}(T)$ en $\Im(T)$ eksplisiet, (b) bepaal die dimensie van $\mathrm{Ker}(T)$ en $\Im(T)$, (c) maak seker dat die getalle die Rang-Nulheidsgraad-stelling bevredig.

(a) Die identiteitsafbeelding $\mathrm{id}_V : V \to V$ op 'n eindig-dimensionele vektorruimte V.

(b) Die nul-afbeelding

$$\begin{aligned} Z : V &\to V \\ \mathbf{v} &\mapsto \mathbf{0} \end{aligned}$$

op 'n eindig-dimensionele vektorruimte V.

(c) Die afbeelding

$$\begin{aligned} T : \mathrm{Poly}_3 &\to \mathrm{Col}_3 \\ p &\mapsto \begin{bmatrix} p(1) \\ p(2) \\ p(3) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(d) Die afbeelding

$$\begin{aligned} S : \mathrm{Trig}_2 &\to \mathrm{Col}_2 \\ f &\mapsto \begin{bmatrix} \int_0^\pi f(x)\cos x dx \\ \int_0^\pi f(x)\sin x dx \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Oplossing.

(a) id_V sends only a single vector to 0, namely the vector $\mathbf{0}_v$. Thus $\mathrm{Ker}(\mathrm{id}_v) = \{\mathbf{0}_v\}$ and hence $\mathrm{Nullity}(\mathrm{id}_v) = 0$. $\Im(\mathrm{id}_V) = V$ and so $\mathrm{Rank}(\mathrm{id}_V) = \mathrm{Dim}(V)$. The equation

$$\mathrm{Dim}\, V + 0 = \mathrm{Dim}\, V.$$

verifies the Rank-Nullity Theorem for this example.

(b) The zero map spends every element in V to $\mathbf{0}$. Hence $\mathrm{Ker}(Z) = V$ and so $\mathrm{Nullity}(Z) = \mathrm{Dim}\, V$. For the same reason $\Im(Z) = \{0\}$ and thus $\mathrm{Rank}(Z) = 0$. The equation

$$\mathrm{Dim}\, V + 0 = \mathrm{Dim}\, V.$$

verifies the Rank-Nullity Theorem for this example.

(c) $\mathbf{p}(x) \in \mathrm{Ker}(T)$ if and only if

$$p(1) = p(2) = p(3) = 0.$$

But any degree 3 polynomial with $1, 2$ and 3 as roots must be of the form

$$a(x-1)(x-2)(x-3)$$

where $a \in \mathbb{R}$. Conversely, any element of this form is in $\mathrm{Ker}\, T$. Hence

$$\mathrm{Ker}(T) = \{a(x-1)(x-2)(x-3) \in \mathrm{Poly}_3 \; : \; a \in \mathbb{R}\}$$

and thus Nullity$(T) = 1$.

I claim that $\Im(T) = \mathrm{Col}_3$. That is, for any

$$\begin{bmatrix} s \\ t \\ u \end{bmatrix} \in \mathrm{Col}_3,$$

we can find a polynomial $\mathbf{p}$, of degree 3 or less, such that $p(1) = s, p(2) = t, p(3) = u$. To show this, you could set up the system of linear equations

$$\begin{aligned} a + b + c + d &= s \\ 8a + 4b + 2c + d &= t \\ 27b + 9b + 3c + d &= u \end{aligned}$$

and solve for the coefficients of $\mathbf{p}$. What is perhaps more elegant is to use the theory of Lagrange interpolation polynomials [1]. Given any 3 distinct points in $\mathbb{R}^2$, we can always find a degree two polynomial going through these 3 points. In our case, let the points be $(1, s), (2, t), (3, u)$. The degree two Lagrange polynomial going through these points is

$$\mathbf{p}(x) = u\left[\frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)}\right] + s\left[\frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)}\right] + t\left[\frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}\right].$$

It is easy to check that $p(1) = s, p(2) = t, p(3) = u$. Hence $\Im(T) = \mathrm{Col}_3$ and so Rank$(T) = 3$.

$$\mathrm{Rank}(T) + \mathrm{Nullity}(T) = 1 + 3 = 4 = \mathrm{Dim}(\mathrm{Poly}_3).$$

(d) It will be useful to have the following integrals at hand:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \cos(x) &= 0 \\ \int_0^\pi \sin(x) &= 0 \\ \int_0^\pi \cos^2(x) &= \pi/2 \\ \int_0^\pi \sin^2(x) &= \pi/2 \\ \int_0^\pi \sin(x)\cos(x) &= 0 \\ \int_0^\pi \cos(2x)\cos(x) &= 0 \\ \int_0^\pi \sin(2x)\cos(x) &= \frac{4}{3} \\ \int_0^\pi \cos(2x)\sin(x) &= -\frac{2}{3} \\ \int_0^\pi \sin(2x)\sin(x) &= 0 \end{aligned}$$

Now suppose

$$\mathbf{f}(x) = a + b\cos(x) + c\sin(x) + d\cos(2x) + e\sin(2x) \in \mathrm{Ker}(S).$$

Then

$$\int_0^\pi f(x)\cos(x)\,dx = b\frac{\pi}{2} + e\frac{4}{3} = 0 \tag{3.5.3}$$

$$\int_0^\pi f(x)\sin(x)\,dx = c\frac{\pi}{2} - d\frac{2}{3} = 0. \tag{3.5.4}$$

Conversely, any f satisfying the linear equations above is certainly in $\mathrm{Ker}(S)$. Hence

$$\mathrm{Ker}(S) = \{a+b\cos(x)+c\sin(x)+d\cos(2x)+e\sin(2x)\ :\ b\frac{\pi}{2}+e\frac{4}{3} = 0 \text{ and } c\frac{\pi}{2}-d\frac{2}{3} = 0\}$$

We can freely choose a since the constant will not affect the integrals. We are free to choose b, but then e is fully determined by (1) above. Similarly, we can freely choose c but then d is determined by (2). Hence

$$\mathrm{Nullity}(S) = 3.$$

We claim that $\Im(S) = \mathrm{Col}_2$. To see this, suppose

$$\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} \in \mathrm{Col}_2\,.$$

Now consider

$$f(x) = \frac{2s}{\pi}\cos(x) + \frac{2t}{\pi}\sin(x).$$

Using the table of integrals above, we see that

$$S(T) = \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}.$$

Hence

$$\mathrm{Rank}(T) = 2.$$

Since $\mathrm{Dim}(\mathrm{Trig}_2) = 5$, the Rank-Nullity theorem is verified for S.

2. Gee 'n voorbeeld van 'n lineêre afbeelding $T : \mathrm{Col}_4 \to \mathrm{Col}_4$ sodat $\mathrm{Rank}(T) = \mathrm{Nullity}(T)$.

Oplossing. Define T by

$$T : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\mathrm{Ker}(T) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \\ w \end{bmatrix} \in \mathrm{Col}_4 \right\}.$$

and

$$\Im(T) = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{Col}_4 \right\}.$$

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Lagrange_polynomial

Both $\mathrm{Ker}(T)$ and $\Im(T)$ are isomorphic to Col_2 and hence

$$\mathrm{Rank}(T) = \mathrm{Nullity}(2) = 2.$$

3. Vir elk van die volgende bewerings, sê of dit *waar* of *onwaar* is. As dit waar is, bewys dit. Indien nie, bewys dit.

(a) Daar bestaan 'n lineêre afbeelding $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ sodat

$$\mathrm{Ker}(T) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : x_1 = 3x_2 \text{ en } x_3 = x_4 = x_5\}.$$

(b) Daar bestaan 'n lineêre afbeelding $F : \mathrm{Trig}_3 \to \mathrm{Trig}_3$ sodat $\mathrm{Rank}(T) = \mathrm{Nullity}(T)$.

Oplossing.

(a) The statement is false. To see this, notice that if such a map were to exist then its kernel would be 2-dimensional since any choice of x_1 and x_3 uniquely determines an element in $\mathrm{Ker}(T)$. But then by the Rank-Nullity theorem, $\mathrm{Rank}(T) = 3$ since $\mathbb{R}^5$ is 5 dimensional. But $\Im(T)$ is a subspace of $\mathbb{R}^2$ - which is absurd, since $\mathbb{R}^2$ itself is 2-dimensional.

(b) The statemnt is false. Suppose such a map were to exist. Recall that $\mathrm{Dim}(\mathrm{Trig}_3) = 7$. Then by the Rank-Nullity theorem,

$$7 = \mathrm{Rank}(T) + \mathrm{Nullity}(T) = 2\,\mathrm{Rank}(T).$$

But 7 is odd, so we have a contradiction! Thus no such map can exist.

4. Laat $f(x, y, z)$ 'n funksie op $\mathbb{R}^3$ wees en laat $\mathbf{p} = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ 'n konstante punt wees. Vir elke vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$, kan ons die afgeleide van f in die rigting van $\mathbf{u}$ by $\mathbf{p}$ as 'n afbeelding

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{p}} : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R} \\ \mathbf{u} &\mapsto (\nabla f)(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{u}. \end{aligned}$$

sien.

(a) Wys dat $D_{\mathbf{p}}$ soos hierbo gedefinieer 'n lineêre afbeelding is.

(b) Beskou die voorbeeld van $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Bepaal $\mathrm{Ker}(D_{\mathbf{p}})$ vir alle punte $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$.

Oplossing.

(a) $D_{\mathbf{p}}$ being a linear maps follows from the usual properties of the dot product:

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{p}}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{p}) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{p}) \\ \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{p}) \end{bmatrix} \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{p}) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{p}) \\ \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{p}) \end{bmatrix} \cdot \mathbf{u} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{p}) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{p}) \\ \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{p}) \end{bmatrix} \cdot \mathbf{v} \\ &= D_{\mathbf{p}}(\mathbf{u}) + D_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

Similarly,

$$\begin{aligned}
D_{\mathbf{p}}(k\mathbf{u}) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{p}) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{p}) \\ \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{p}) \end{bmatrix} \cdot \mathbf{k}u \\
&= \begin{bmatrix} k\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{p}) \\ k\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{p}) \\ k\frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{p}) \end{bmatrix} \cdot \mathbf{u} \\
&= k \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{p}) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{p}) \\ \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{p}) \end{bmatrix} \cdot \mathbf{u} \\
&= kD_{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{u}
\end{aligned}$$

And so $D_{\mathbf{p}}$ is linear.

(b) $\mathbf{u} = (x_1, y_1, z_1) \in \operatorname{Ker}(D_{\mathbf{p}})$ if and only if

$$\begin{aligned}
& D_{\mathbf{p}}(\mathbf{u}) = 0 && (3.5.5)\\
\iff & \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{p}), \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{p}), \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{p})\right) \cdot (u_0, u_1, u_2) = 0 && (3.5.6)\\
\iff & 2x_0x_1 + 2y_0y_1 + 2z_0z_1 = 0. && (3.5.7)
\end{aligned}$$

Geometrically, $\operatorname{Ker}(D_{\mathbf{p}}$ consists of all vectors $\mathbf{v}$ that lie tangent to a circle of radius $|\mathbf{p}|$ centred at the origin at the point $\mathbf{p}$.

5. Gee, met behulp van die Rang-Nulheidgraad-stelling, 'n ander bewys van die feit dat die beeld van die afbeelding C in Voorbeeld 3.5.6 $\{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{u} \cdot \mathbf{a} = 0\}$ is.

Oplossing. For reference, we reproduce a portion of the proof in in Example 3.5.6:

"The kernel of C is the subspace of $\mathbb{R}^3$ consisting of all vectors $\mathbf{v} \in V$ such that $\mathbf{a} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$. From the geometric formula for the cross-product,

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{a}||\mathbf{v}| \sin\theta$$

where θ is the angle from $\mathbf{a}$ to θ, we see that

$$\mathbf{a} \times \mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ or } \theta = 0 \text{ or } \theta = \pi.$$

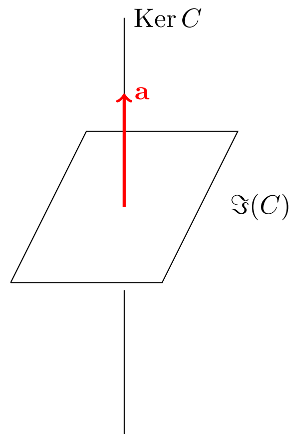
In other words, $\mathbf{v}$ must be a scalar multiple of $\mathbf{a}$. So,

$$\operatorname{Ker}(C) = \{k\mathbf{a}, k \in \mathbb{R}\}.$$

I claim that the *image* of C is the subspace of *all* vectors perpendicular to $\mathbf{a}$, i.e.

$$\Im(C) := \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{u} \cdot \mathbf{a} = 0\}. \tag{3.5.8}$$

If you believe me, then the picture is as follows:



Let me prove equation (3.5.1). By definition, the image of C is the subspace of $\mathbb{R}^3$ consisting of all vectors $\mathbf{w}$ of the form $\mathbf{w} = \mathbf{a} \times \mathbf{v}$ for some $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. This implies that $\mathbf{w}$ is perpendicular to $\mathbf{a}$.""

And thus we know that

$$\Im(C) \subset \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{u} \cdot \mathbf{a} = 0\}$$

We shall use the Rank-Nullity theorem to show the converse in a fantastically succint way. By the Rank-Nullity theorem

$$\begin{aligned} \mathrm{Dim}(\mathbb{R}^3) &= \mathrm{Nullity}(C) + \mathrm{Rank}(C) \\ \implies 3 &= 1 + \mathrm{Rank}(C). \end{aligned}$$

And so we also know the $\Im(C)$ is a 2-dimensional subspace of $\mathbb{R}^3$. Of course,

$$\{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{u} \cdot \mathbf{a} = 0\}$$

is also 2-dimensional. But now, if one 2-dimensional subspace is contained in another 2-dimensional subspace then the two subspaces must necessarily be the same! Hence

$$\Im(C) = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{u} \cdot \mathbf{a} = 0\}$$

(By using the Rank-Nullity theorem, we managed to bypass the trickest part of Voorbeeld 3.5.6!)

3.6 Injektiewe en surjektiewe lineêre afbeeldings

Definisie 3.6.1 'n Funksie $f : X \to Y$ vanaf 'n versameling X na 'n versameling Y word **een-tot-een** (of **injektief**) genoem as wanneer $f(x) = f(x')$ vir $x, x' \in X$ dit noodwendig volg dat $x = y$. Die funksie f word "**op**" (of **surjektief**) genoem as, vir alle $y \in Y$ daar 'n $x \in X$ bestaan sodat $f(x) = y$. $\diamondsuit$

As f 'n *lineêre afbeelding* tussen vektorruimtes is (en nie bloot 'n arbitrêre funksie tussen versamelings is nie), dan bestaan daar 'n eenvoudige manier om na te gaan of f injektief is.

Hulpstelling 3.6.2 *Laat $T : V \to W$ tussen vektorruimtes. Dan:*

$$T \textit{ is injektief} \iff \mathrm{Ker}(T) = \{\mathbf{0}_V\}.$$

Bewys. $\Rightarrow$. Veronderstel $T : V \to W$ is een-tot-een. Ons weet reeds van een element in $\text{Ker}(T)$, naamlik $\mathbf{0}_V$, aangesien $T(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$, want T is lineêr. Aangesien T een-tot-een is, moet dit die enigste element in $\text{Ker}(T)$ wees.

$\Leftarrow$. Veronderstel $\text{Ker}(T) = \{\mathbf{0}_V\}$. Nou, veronderstel dat

$$T(\mathbf{v}) = T(\mathbf{v}')$$

vir vektore $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V$. Dan het ons $T(\mathbf{v}) - T(\mathbf{v}') = \mathbf{0}_W$, en aangesien T lineêr is, beteken dit $T(\mathbf{v} - \mathbf{v}') = \mathbf{0}_W$. Gevolglik $\mathbf{v} - \mathbf{v}' \in \text{Ker}(T)$, en so $\mathbf{v} - \mathbf{v}' = \mathbf{0}_V$, met ander woorde, $\mathbf{v} = \mathbf{v}'$, wat is wat ons wou wys. ■

'n Verdere vereenvoudiging kom voor as T 'n lineêre afbeelding vanaf 'n vektorruimte V na V is (i.e. T is 'n lineêre bewerking op V), en V eindigdimensioneel is.

Hulpstelling 3.6.3 *Laat $T : V \to V$ 'n lineêre afbeelding op 'n eindigdimensionele vektorruimte V wees. Dan:*

$$T \textit{ is injective} \iff T \textit{ is surjektief.}$$

Bewys. $\Rightarrow$. Veronderstel T is injektief.

$$\begin{aligned}
&\therefore \text{Ker}(T) = \{\mathbf{0}_V\} && \text{(Hulpstelling 3.6.2)} \\
&\therefore \text{Nullity}(T) = 0 && \\
&\therefore \text{Rank}(T) = \text{Dim}(V) && \text{(deur Rang-Nulheidsgraad-stelling)} \\
&\therefore \Im(T) = V && \text{(Gevolg 2.3.27)}
\end{aligned}$$

Daarom is T surjektief.

$\Leftarrow$. Veronderstel T is surjektief.

$$\begin{aligned}
&\therefore \Im(T) = V && \\
&\therefore \text{Rank}(T) = \text{Dim}(V) && \\
&\therefore \text{Nullity}(T) = 0 && \text{(deur Rang-Nulheidsgraad-stelling)} \\
&\therefore \text{Ker}(T) = \{\mathbf{0}_V\} && \\
&\therefore T \text{ is injective.} && \text{(Gevolg 2.3.27)}
\end{aligned}$$

■

Stelling 3.6.4 *'n Lineêre afbeelding $T : V \to W$ is 'n isomorfisme as en slegs as T injektief en surjektief is.*

Bewys. $\Rightarrow$. Veronderstel V en W is isomorfies. Dit is, daar bestaan 'n paar lineêre afbeeldings $T : V \rightleftarrows W : S$ sodat $T \circ S = \text{id}_W$ en $S \circ T = \text{id}_C$. Ons sal wys dat T injektief en surjektief is.

$$\begin{aligned}
\text{Veronderstel dat } T(\mathbf{v}_1) &= T(\mathbf{v}_2). \\
\therefore S(T(\mathbf{v}_1)) &= S(T(\mathbf{v}_2)) \\
\therefore \text{id}_V(\mathbf{v}_1) &= \text{id}_V(\mathbf{v}_2) (\text{want } S \circ T = \text{id}_V) \\
\therefore \mathbf{v}_1 &= \mathbf{v}_2
\end{aligned}$$

wat wys dat T injektief is. Om te wys dat T surjektief is, laat $\mathbf{w} \in W$. Ons moet wys dat daar$\mathbf{v} \in V$ bestaan sodat $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$. Inderdaad, stel $\mathbf{v} := S(\mathbf{w})$. Dan

$$\begin{aligned}
T(\mathbf{v}) &= T(S(\mathbf{w})) \\
&= \text{id}_W(\mathbf{w}) (\text{deur } T \circ S = \text{id}_W) \\
&= \mathbf{w}.
\end{aligned}$$

$\Leftarrow$. Veronderstel dat daar 'n lineêre afbeelding $T : V \to W$ bestaan wat injektief en surjektief is. Ons wil wys dat daar 'n lineêre afbeelding $S : W \to V$ bestaan sodat $S \circ T = \mathrm{id}_V$ en $T \circ S = \mathrm{id}_W$, wat sal bewys dat V en W isomorfies is.

Ons definieer die inverse-afbeelding S soos volg:

$$\begin{aligned} S &: W \to V \\ &\mathbf{w} \mapsto \text{die unieke } \mathbf{v} \in V \text{ sodat } T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}. \end{aligned}$$

Hierdie afbeelding is goed-gedefinieer. Inderdaad, gegee $\mathbf{w} \in W$, die feit dat T surjektief is beteken daar bestaan *ten minste een* $\mathbf{v} \in V$ sodat $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$. Die feit dat T injektief is impliseer dat $\mathbf{v}$ uniek is. Want, as daar nog 'n $\mathbf{v}' \in V$ bestaan met $S(\mathbf{v}') = \mathbf{w}$, dan het ons $\mathbf{v}' = \mathbf{v}$, want T is injektief.

Nou het ons 'n goed-gedefinieerde *funksie* $S : W \to V$ wat $T \circ S = \mathrm{id}_W$ en $S \circ T = \mathrm{id}_V$ bevredig. Ons moet slegs nagaan dat S lineêr is.

Laat $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in W$. Dan

$$\begin{aligned} S(a\mathbf{w}_1 + b\mathbf{w}_2) &= S\big(aT(S(\mathbf{w}_1)) + bT(S(\mathbf{w}_2))\big) && (\text{using } T \circ S = \mathrm{id}_W) \\ &= S\big(aT(\mathbf{v}_1) + bT(\mathbf{v}_2)\big) && (\text{setting } \mathbf{v}_1 := S(\mathbf{w}_1), \mathbf{v}_2 := S(\mathbf{w}_2))) \\ &= S\big(T(a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2)\big) && (T \text{ is linear}) \\ &= a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 && ((S \circ T = \mathrm{id}_V) \end{aligned}$$

Gevolglik is S lineêr, wat die bewys voltooi. ■

Stelling 3.6.5 *Laat $T : V \to V$ 'n lineêre bewerking op 'n eindig-dimensionele vektorruimte V wees. Die volgende stellings is ekwivalent:*

- *T is injektief.*
- *T is surjektief.*
- *T is 'n isomorfisme.*

Bewys. (1) is ekwivalent aan (2) deur Lemma 3.6.3. Aan die ander kant is (1) en (2) ekwivalent aan (3) volgens Proposisie 3.6.4. ■

Hoofstuk 4

Tutoriale

4.1 W214 Lineêre Algebra 2019, Tutoriaal 1

Tutorial 1 bevat Afdeling 1.1 tot en met die einde van Afdeling 1.5. Die volgende oefeninge is gekies.

Oefeninge

1. Prove that set C from Section 1.1 together with the addition operation (1.1.6), the zero vector (1.1.9) and the scalar multiplication operation (1.1.12) forms a vector space.

Oplossing. Firstly, we note that the addition operator, the zero vector, and scalar multiplication are all well-defined. We are required to check R1-R8.

R1: Let

$$\begin{aligned} p &= a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \\ q &= b_4x^4 + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0. \end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned} p + q &= (a_4 + b_4)x^4 + \ldots + (a_0 + b_0) && \text{(defn of addition in C)} \\ &= (b_4 + a_4)x^4 + \ldots (b_0 + a_0) && \text{(s+t = t+s for real numbers s,t)} \\ &= q + p && \text{(defn of addition in C)} \end{aligned}$$

R2: Let $r = c_4x^4 + \ldots c_0$ Then

$$\begin{aligned} (p + q) + r &= \big[a_4 + b_4)x^4 + \ldots + (a_0 + b_0)\big] + (c_4x^4 + \ldots c_0) && \text{(defn of addition in} \\ &= ((a_4 + b_4) + c_4)x^4 + \ldots + ((a_0 + b_0) + c_4) && \text{(defn of addition in} \\ &= (a_4 + (b_4 + c_4)x^4 + \ldots + (a_0 + (b_0 + c_4)) && \text{((s+t)+u = s +(t+u) for real numbers s,t} \\ &= \big[(a_4x^4 + \ldots a_0\big] + \big[(b_4 + c_4)x^4 + \ldots (b_0 + c_0)\big] && \text{(defn of addition in} \\ &= p + (q + r) && \text{(defn of addition in} \end{aligned}$$

R3: Let $z = 0x^4 \ldots 0$. R3a:

$$\begin{aligned} z + p &= (0x^4 \ldots 0) + (a_4x^4 + \ldots a_0) && \text{(defn of addition in C)} \\ &= (0 + a_4)x^4 + \ldots (0 + a_0) && \text{(defn of addition in C)} \\ &= a_4x^4 + \ldots a_0 && \text{(0 + t = t for real numbers t)} \end{aligned}$$

$= p$

The rest of the rules are similar.

2. Define the set C' consisting of all polynomials of degree *exactly* 4. Show that if C' is given the addition operation (1.1.6), the zero vector (1.1.9) and the scalar multiplication operation (1.1.12) then C' *does not* form a vector space.

Wenk. Give a counterexample!

Oplossing. We shall show that C' is not closed under addition. Let

$$p = x^4$$
$$q = -x^4 + x^3.$$

Then

$$p + q = x^3.$$

But x^3 is not in C'. Hence C' is not closed under addition and so cannot be a vector space.

3. Consider the set

$$X := \{(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 : a_1 \geq 0, a_2 \geq 0\}$$

equipped with the same addition operation (1.1.4), zero vector (1.1.8) and scalar multiplication operation (1.1.10) as in A. Does X form a vector space? If not, why not?

Oplossing. X is not a vector space since scalar multiplication is not defined! For example, consider $(1, 1)$. $(1, 1) \in X$ but $(-1).(1, 1) = (-1, -1)$ is not.

4. Notation quiz! Say whether the following combination of symbols represents a real number or a function.

(a) f

(b) $f(x)$

(c) $k.f$

(d) $(k.f)(x)$

Oplossing.

(a) Function

(b) Real Number

(c) Function

(d) Real Number

5. Let $X = \{a, b, c\}$.

(a) Write down three different functions f, g, h in $\mathrm{Fun}(X)$.

(b) For each of the functions you wrote down in Item 4.1.5.a, calculate (i) $f + g$ and (ii) $3.h$.

Oplossing.

(a)

$$\begin{aligned} f(a) &= 4 \\ f(b) &= 0 \\ f(c) &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(a) &= 1 \\ g(b) &= 1 \\ g(c) &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(a) &= 0 \\ h(b) &= 3 \\ h(c) &= 0 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} (f+g)(a) &= 5 \\ (f+g)(b) &= 1 \\ (f+g)(c) &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3.h)(a) &= 0 \\ (3.h)(b) &= 9 \\ (3.h)(c) &= 0 \end{aligned}$$

6. Define a strange new addition operation $\hat{+}$ on $\mathbb{R}$ by

$$x \hat{+} y := x - y, \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

Does $\hat{+}$ satisfy R2? If it does, prove it. If it does not, give a counterexample.

Oplossing. No, for example:

$$(1 \hat{+} 2) \hat{+} 3 = (1-2) - 3 = -4.$$

But

$$1 \hat{+} (2 \hat{+} 3) = 1 - (2-3) = 2.$$

7. Construct an operation $\boxplus$ on $\mathbb{R}$ satisfying R1 but not R2.

Wenk. Try adjusting the formula from Oefening 4.1.6.

Oplossing. Define $x \boxplus y = |x-y|$. R1 is satisfied since $x \boxplus y = |x-y| = |y-x| = y \boxplus x$. However, R2 is not satisfied since $(1 \boxplus 2) \boxplus 3 = ||1-2|-3| = 2$ but $1 \boxplus (2 \boxplus 3) = |1 - |2-3|| = 0$

8. Prove that for all vectors $\mathbf{v}$ in a vector space, $-(-\mathbf{v}) = \mathbf{v}$.

Oplossing. The proof is as follows:

$$\begin{aligned} -(-v) &= (-1).\left((-1).v\right) && \text{(defn of -v applied twice)} \\ &= \left((-1)(-1)\right).v && \text{(R6)} \\ &= 1.v \\ &= v && \text{(R7)} \end{aligned}$$

9. Let V be a vector space. Suppose that a vector $\mathbf{v} \in V$ satisfies

$$5.\mathbf{v} = 2.\mathbf{v}. \tag{4.1.1}$$

Prove that $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Oplossing.

$$\begin{aligned}
&5.v = 2.v \\
&\implies 5.v + (-2).v = 2.v + (-2).v \\
&\implies (5-2).v = (2-2).v \\
&\implies 3.v = 0.v \\
&\implies (\frac{1}{3}3).v = (\frac{1}{3}0)v \\
&\implies 1v = 0v \\
&\implies v = 0
\end{aligned}$$

10. If $k.\mathbf{v} = \mathbf{0}$ in a vector space, then it necessarily follows that $k = 0$.

Oplossing. False. Take $\mathbb{R}^2$ as an example. If $v = (0,0)$ then $2.(0,0) = (0,0)$ but, of course, $2 \neq 0$.

11. The empty set can be equipped with data D1 , D2 , D3 satisfying the rules of a vector space.

Oplossing. False. In order for the empty set to be a vector space, it must have a zero vector. That is, we must be able to find some $v \in$ the empty set satisfying the axioms for the zero vector. However, since the empty set has no elements in it, by definition, we cannot ever hope to find such a v. Hence the empty set can never be a vector space.

12. Rule R7 of a vector space follows automatically from the other rules.

Oplossing. False. Let V be a non-zero vector space (such as $\mathbb{R}^2$). Redefine scalar multiplication as follows

$$k.v := 0 \text{ for all scalars k and all vectors v.}$$

Then V will satisfy all the rules of a vector space except R7. Thus it is not the case that R7 follows from the other rules.

4.2 W214 2019, Lineêre Algebra Tutoriaal 2

Let op: Jy is welkom om SageMath te gebruik om jou te help om van die probleme op te los. Jy kan of direk in die Sage cell intik hieronder (webblad weergawe), of jy kan die SageMath cell server gebruik.

Oefeninge

1.6 Deelruimtes.

1. Lees deur die webblad weergawe van Onderafdeling 1.6.3 (Solutions to homogenous linear differential equations), wat nuut is en 'n paar SageMath examples insluit. (Hierdie nuwe deel is net in Engels beskikbaar op hierdie stadium. Daar is geen probleme in hierdie tut hieroor nie, maar later sal ons dit 'n bietjie gebruik.)

2. Toon aan dat die versameling

$$V := \{(a, -a, b, -b) : a, b \in \mathbb{R}\}$$

'n deelruimte van $\mathbb{R}^4$ is.

3. Beskou die versameling

$$V := \{\mathbf{f} \in \text{Diff}((-1, 1)) : f'(0) = 2\}$$

Is V 'n deelruimte van Diff$((-1, 1))$? (Onthou:Diff$((-1, 1)$ is die vektorruimte van alle diferensieerbare funksies op die interval $(-1, 1)$.) As jy dink dit is, *bewys* dat dit is. As jy dink dit is nie, *bewys* dat dit is nie!

4. Is $\mathbb{R}^+ := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R} : \mathbf{x} \geq 0\}$ 'n deelruimte van $\mathbb{R}$? As jy dink dit is, *bewys* dat dit is. As jy dink dit is nie, *bewys* dat dit is nie!

5. Gee 'n voorbeeld van 'n nie-leë deelversameling $V \subseteq \mathbb{R}^2$ wat geslote onder skalaar vermenigvuldiging is, maar wat nie 'n deelruimte van $\mathbb{R}^2$ is nie.

2.1 Lineêre kombinasies en Span.

6. Kan die polinoom $p = x^3 - x + 2 \in \text{Poly}_3$ uitgedruk word as 'n lineêre kombinasie van

$$p_1 = 1 + x, p_2 = x^3 + x^2 + x - 1, p_3 = x^3 - x^2 + 1 \ ?$$

Stel die toepaslike stelsel van gelyktidige lineêre vergelykings op. Dan los hulle "met die hand" op, of gebruik SageMath, soos in Voorbeeld 2.1.4.

7. Voortgaan van die vorige vraag. Kan die selfde polinoom $p = x^3 - x + 2 \in \text{Poly}_3$ uitgedruk word as 'n lineêre kombinasie van

$$p_1 = 1 + x, p_2 = x^3 + x^2 + x - 1, p_3 = x^3 - x^2 + 1, p_4 = 1 - x \ ?$$

Stel die toepaslike stelsel lineêre vergelykings op. Dan los hulle "met die hand" op, of gebruik SageMath, soos in Voorbeeld 2.1.4.

8. Toon aan dat die polinoom

$$p_1 = 1 + x, p_2 = x^3 + x^2 + x - 1, p_3 = x^3 - x^2 + 1, p_4 = 1 - x$$

uit die vorige vraag Poly_3 span. Stel die toepaslike stelsel lineêre vergelykings op. Dan los hulle "met die hand" op, of gebruik SageMath, soos in Voorbeeld 2.1.8.

2.2 (Lineêre Onafhanklikheid).

9. $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\} V \mathcal{S} V w V \mathcal{S}' = \{\mathbf{w}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\} V$

Beskou die volgende lys matrikse (ons beskou hulle as vektore in $\mathrm{Mat}_{2,2}$):

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

10. Toon aan dat die lys lineêr afhanklik is. Jy is welkom om SageMath te gebruik (jy sal eers die toepaslike stelsel lineêre vergelykings moet opstel.)

11. Gaan deur dieselfde stappe as in Example 2.2.9 om die eerste vektor in die lys te vind wat 'n lineêre kombinasie van die voorafgaande vektore is. Jy is welkom om SageMath te gebruik by die punte in jou berekening waar jy sal 'n stelsel lineêre vergelykings moet oplos.

4.3 W214 2019, Lineêre Algebra Tutoriaal 3

Oefeninge

1.6 Deelruimtes.

1. Bewys waar of vals: Die versameling

$$V := \{p \in \mathrm{Poly}_2 : p(3) = 1\}$$

is 'n deelruimte van Poly_2.

2.2 Lineêre Onafhanklikheid.

2. Beskou die vektorruimte $V = \mathrm{Fun}([0,1])$ van funksies op die geslote eenheidinterval. Skryf neer 'n lineêr onafhanklike lys van 4 vektore in V.

2.3 Basis en Dimensie.

3. Bewys waar of vals: daar bestaan 'n basis $\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ van Poly_3 met die eienskap dat geeneen van die polinome p_0, p_1, p_2, p_3 graad 2 het.

4. Laat $W \subset \mathbb{R}^3$ die vlak ortogonaal aan die vektor $\mathbf{v} = (1,2,3)$ wees, soos in Voorbeeld 1.6.13 en Voorbeeld 2.3.15. Toon aan dat $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ 'n basis vir W is, waar

$$\mathbf{a} = (1, 0, -\frac{1}{3}), \quad \mathbf{b} = (0, 1, -\frac{1}{2}).$$

5. Vir elkeen van die volgende, toon aan dat V 'n deelruimte van Poly_2 is, vind 'n basis vir V, en bereken $\mathrm{Dim}\, V$.

(a) $V = \{p \in \mathrm{Poly}_2 : p(0) = 0, p(2) = 0\}$

(b) $V = \{p \in \mathrm{Poly}_2 : \int_0^1 p(t)dt = 0\}$

6. Sif die lys vektore

$$\mathbf{v}_1 = (0,0,0), \qquad \mathbf{v}_2 = (1,0,-1), \qquad \mathbf{v}_3 = (1,2,3)$$
$$\mathbf{v}_4 = (3,4,5), \qquad \mathbf{v}_5 = (4,8,12), \qquad \mathbf{v}_6 = (1,1,0).$$

7. Voltooi die volgende 'alternatiewe' bewys van Gevolg 2.3.27.

Lemma. Veronderstel dat V 'n vektorruimte van dimensie n is. Dan is enige lineêr onafhanklike lys van n vektore in V 'n basis vir V.

Bewys. Laat $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ 'n lineêr onafhanklike lys vektore in V wees.

Veronderstel dat $\mathcal{B}$ *nie* 'n basis vir V is nie.
Daarom span $\mathcal{B}$ nie V nie, want... (a)
Daarom bestaan daar $\mathbf{v} \in V$ sodanig dat ... (b)
Voeg nou $\mathbf{v}$ by die lys $\mathcal{B}$ om 'n nuwe lys te vorm, $\mathcal{B}' :=$ ... (c)
Die nuwe lys $\mathcal{B}'$ is lineêr onafhanklik omdat ... (d)
Dit is 'n teenstelling, omdat ... (e)
Dus $\mathcal{B}$ moet 'n basis vir V wees.

8. Gebruik die Afstampproposisie of die Invariansie van Dimensie Stelling om te besluit of $\mathcal{B}$ 'n basis vir V is.

(a) $V = \text{Poly}_2$, $\mathcal{B} = \left\{2 + x^2,\ 1 - x,\ 1 + x - 3x^2,\ x - x^2\right\}$

(b) $V = \text{Mat}_{2,2}$,

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \right\}$$

(c) $V = \text{Trig}_2$, $\mathcal{B} = \left\{\sin^2 x,\ \cos^2 x,\ 1 - \sin 2x,\ \cos 2x + 3\sin 2x\right\}$

(d) $V = \text{Mat}_{2,2}$, $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

Hoofstuk 5

Matrikshersiening

Kom ons onthou 'n paar goed oor matrikse en stel vas watter notasie ons gaan gebruik.

'n $n \times m$-*matriks* A is maar net 'n reghoekige skikking van getalle, met n rye en m kolomme:

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} \mathsf{A}_{11} & \mathsf{A}_{12} & \cdots & \mathsf{A}_{1m} \\ \mathsf{A}_{21} & \mathsf{A}_{22} & \cdots & \mathsf{A}_{2m} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathsf{A}_{n1} & \mathsf{A}_{n2} & \cdots & \mathsf{A}_{nm} \end{bmatrix}$$

Ek sal altyd matrikse in *'sans serif'*-lettertipe skryf, bv. A. Dit is moeilik om in handgeskrewe teks 'van lettertipe te verander,' maar ek moedig jou aan om ten minste die letters A, B, C, ens vir matrikse te reserveer, en om S, T, etc. vir lineêre afbeeldings te gebruik!

Twee $n \times m$ matrikse A en B kan bymekaargetel word, om n' nuwe $n \times m$ matriks $\mathsf{A} + \mathsf{B}$ te verkry:

$$(\mathsf{A} + \mathsf{B})_{ij} := \mathsf{A}_{ij} + \mathsf{B}_{ij}$$

Daar is die *nul* $n \times m$-*matriks*:

$$\mathsf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Jy kan ook 'n $n \times m$-matriks A met 'n skalaar k vermenigvuldig, om 'n nuwe $n \times m$ matriks $k\mathsf{A}$ te verkry:

$$(k\mathsf{A})_{ij} := k\mathsf{A}_{ij}$$

Hulpstelling 5.0.1

1. *Saam met hierdie bewerkings is die versameling* $\mathrm{Mat}_{n,m}$ *van alle* $n \times m$ *matrikse 'n vektorruimte.*

2. *Die dimensie van* Mat_{nm} *is* nm, *met die matrikse*

$$\mathsf{E}_{ij}, i = 1 \ldots n,\ j = 1 \ldots m$$

as basis, elk met ’n 1 *in die $i$de ry en $j$de kolom en nulle orals anders.*

Bewys. Die bewys word aan die leser as ’n oefening oorgelaat. ■

Voorbeeld 5.0.2 $\mathrm{Mat}_{2,2}$ het die basis

$$\mathsf{E}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathsf{E}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathsf{E}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathsf{E}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

□

Gewoonlik is A ’n matriks, en is A_{ij} die element van die matriks by posisie (i,j). Maar nou is E_{ij} ’n matriks in eie reg! Sy element by posisie (k,l) sal geskryf word as $(\mathsf{E}_{ij})_{kl}$. Ek hoop dit is nie te verwarrend nie. Ons kan ’n elegante formule vir die elemente van E_{ij} skryf met die Kronecker-delta-simbool:

$$(\mathsf{E}_{ij})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl} \tag{5.0.1}$$

Voorbeeld 5.0.3 Ons skryf Col_n vir die vektorruimte $\mathrm{Mat}_{n,1}$ van n-dimensional *kolomvektore*, en ons sal die standaard basisvektore as E_{i1} van Col_n skryf, of nog eenvoudiger as $\mathbf{e}_i$:

$$\mathbf{e}_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \mathbf{e}_n := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vektore in Col_n sal in vetdruk, sans-serif geskryf word, bv. $\mathbf{v} \in \mathrm{Col}_n$. □

\subsection{Matriksvermenigvuldiging}

Toegerus met hierdie bewerkings, vorm die versameling $\mathrm{Mat}_{n,m}$ van alle $n \times m$ matrikse ’n vektorruimte (sien Voorbeeld 1.4.14), met dimensienm UNCOMMENT! Ons skryf Col_n vir die vektorruimte $\mathrm{Mat}_{n,1}$ van n-dimensionele *kolomvektore.*

Die belangrikste bewerking is *matriksvermenigvuldiging.* ’n $n \times k$-matriks A kan van regs met ’n $k \times m$-matriks B vermenigvuldig word om ’n $n \times m$-matriks AB te kry,

deur die inskrywings van AB as

$$(\mathsf{AB})_{ij} := \mathsf{A}_{i1}\mathsf{B}_{1j} + \mathsf{A}_{i2}\mathsf{B}_{2j} + \cdots + \mathsf{A}_{ik}\mathsf{B}_{kj}$$

te definieer.

Stelling 5.0.4 *Die bostaande bewerkings op matrikse bevredig die volgende reëls presies wanneer die somme en produkte goed-gedefinieer is:*

1. $(\mathsf{A}+\mathsf{B})\mathsf{C} = \mathsf{AC} + \mathsf{BC}$
2. $\mathsf{A}(\mathsf{B}+\mathsf{C}) = \mathsf{AB} + \mathsf{AC}$
3. $(k\mathsf{A})\mathsf{B} = \mathsf{A}(k\mathsf{B}) = k(\mathsf{AB})$
4. $(\mathsf{AB})\mathsf{C} = \mathsf{A}(\mathsf{BC})$

Bewys. Die bewyse van (1) - (3) is roetinewerk wat jy hopelik voorheen al gedoen het. Kom ons bewys (4), om te oefen om Σ-notasie te gebruik! Veronderstel A, B en C het groottes $n \times k$, $k \times r$ en $r \times m$ onderskeidelik, sodat die matriksprodukte sinmaak. Dan:

$$\begin{aligned}
((\mathsf{AB})\mathsf{C})_{ij} &= \sum_{p=1}^{r} (\mathsf{AB})_{ip} \mathsf{C}_{pj} \\
&= \sum_{p=1}^{r} \left(\sum_{q=1}^{k} \mathsf{A}_{iq} \mathsf{B}_{qp} \right) \mathsf{C}_{pj} \\
&= \sum_{p,q} \mathsf{A}_{iq} \mathsf{B}_{qp} \mathsf{C}_{pj} \\
&= \sum_{q=1}^{k} \mathsf{A}_{iq} \left(\sum_{p=1}^{r} \mathsf{B}_{qp} \mathsf{C}_{pj} \right) \\
&= \sum_{q=1}^{k} \mathsf{A}_{iq} (\mathsf{BC})_{qj} \\
&= (\mathsf{A}(\mathsf{BC}))_{ij}.
\end{aligned}$$

■

Ek hoop nie die Σ-notasie in die bostaande bewys is te verwarrend nie! Kom ek skryf presies dieselfde bewys uit *sonder* Σ-notasie, in die eenvoudige geval waar A, B en C almal 2×2-matrikse is en ons wil die inskrywing by posisie 11 uitwerk.

$$\begin{aligned}
((\mathsf{AB})\mathsf{C})_{11} &= (\mathsf{AB})_{11}\mathsf{C}_{11} + (\mathsf{AB})_{12}\mathsf{C}_{21} \\
&= (\mathsf{A}_{11}\mathsf{B}_{11} + \mathsf{A}_{12}\mathsf{B}_{21})\mathsf{C}_{11} + (\mathsf{A}_{11}\mathsf{B}_{12} + \mathsf{A}_{12}\mathsf{B}_{22})\mathsf{C}_{21} \\
&= \mathsf{A}_{11}\mathsf{B}_{11}\mathsf{C}_{11} + \mathsf{A}_{12}\mathsf{B}_{21}\mathsf{C}_{11} + \mathsf{A}_{11}\mathsf{B}_{12}\mathsf{C}_{21} + \mathsf{A}_{12}\mathsf{B}_{22}\mathsf{C}_{21} \\
&= \mathsf{A}_{11}(\mathsf{B}_{11}\mathsf{C}_{11} + \mathsf{B}_{12}\mathsf{C}_{21}) + \mathsf{A}_{12}(\mathsf{B}_{21}\mathsf{C}_{11} + \mathsf{B}_{22}\mathsf{C}_{21}) \\
&= \mathsf{A}_{11}(\mathsf{BC})_{11} + \mathsf{A}_{12}(\mathsf{BC})_{21} \\
&= (\mathsf{A}(\mathsf{BC}))_{11}.
\end{aligned}$$

Verstaan jy nou die Σ-notasie-bewys? Die kritieke stap (om van die tweede tot die vierde lyn te vorder) word *omruil van die sommeringsvolgorde* genoem.

Die *transponering* van 'n $n \times m$-matriks A is die $m \times n$-matriks A^T waarvan die inskrywings gegee word deur

$$(\mathsf{A}^T)_{ij} := \mathsf{A}_{ji}.$$

Bibliography