Lineêre Algebra W214

Bruce Bartlett
Afrikaanse vertaling deur Murray Heymann

February 21, 2019

Contents

Nota aan die student

Jou tweede ontmoeting met lineêre algebra lê tans voor jou. In die eerste jaar is daar gefokus op sisteme van lineêre vergelykings, matrikse en matriksdeterminane. Die kursus wat volg, keer terug na hierdie onderwerpe, maar met 'n meer abstrakte, wiskundige aanslag.

Moenie *abstraksie* vrees nie. Dit behels eenvoudig om ontslae te raak van oorbodige besonderhede en om jouself uitsluitlik met die mees belangrike kenmerke van 'n probleem te bemoei. Dit leen jou daartoe om die probleem beter te verstaan. Daar is minder dinge om jou oor te bekommer! Verder, as jy 'n ander probleem sou teëkom wat op eerste oogopslag anders lyk, maar dieselfde belangrike kenmerke met die oorskpronklike probleem deel, dan kan jy die probleem op dieselfde manier verstaan. Dít maak abstraksie baie kragtig.

In die studie van abstrakte wiskunde gebruik ons die taal van *definisies*, *stellings* en *bewyse*. Om aan hierdie denkwyse gewoond te raak (en abstrakte wiskundige denke te ontwikkel) kan aanvanklik oorweldigend voel. Maar volhard! Eendag sal jy dit 'snap' en jy sal besef dit is heelwat eenvoudiger as wat jy jou voorgestel het.

Wiskunde word nie gelees soos 'n roman nie. Jy benodig 'n *pen en notaboekie* byderhand en jy sal aktief by die materiaal *betrokke* moet raak. Byvoorbeeld, as jy 'n definisie teëkom, begin deur dit in jou notaboekie neer te skryf. Net die blote skryf daarvan kan terapeuties wees!

As jy 'n uitgewerkte voorbeeld behandel, skryf die voorbeeld self uit. Miskien probeer die voorbeeld vir jou wys dat A gelyk aan B is. Vra jouself af: Verstaan ek wat 'A' werklik beteken? En wat 'B' beteken? Slegs dan is jy gereed om te oorweeg of A gelyk aan B is!

Baie sterkte met hierdie nuwe fase van jou wiskundige opleiding. Geniet die reis!

Hoofstuk 1

Abstrakte vektorruimtes

1.1 Inleiding

1.1.1 Drie verskillende versamelings

Ons begin met 'n speletjie. In wiskunde is 'n *versameling* X maar net 'n kolleksie van onderskeibare objekte. Hierdie objekte word *elemente* van X genoem.

Ek gaan drie verskillende versamelings aan jou toon en jy moet sê watter eienskappe hulle in gemeen het.

Die eerste versameling, A, word gedefinieer as die versameling van alle geordende pare (x, y), waar x en y reële getalle is.

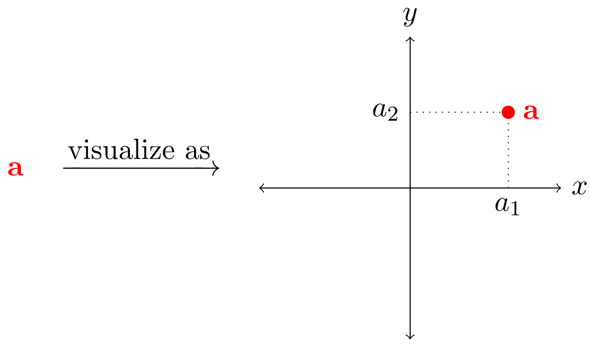
Kom ons stop hier vir 'n oomblik en vertaal die definisie van Afrikaans na wiskundige simbole. Die vertaling is:

$$A := \{(a_1,\, a_2) : a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}. \tag{1.1}$$

Die := staan vir ‘is gedefinieer as’. Die { en } simbole staan vir ‘die versalmeling van alle’. Die enkele dubbelpunt : staan vir ‘waar’ of ‘sodat’. Die komma tussen a en b staan vir ‘en’. Die $\in$ staan vir ‘’n element van’. En $\mathbb{R}$ staan vir die versameling van alle reële getalle. Veels geluk! — jy gebruik die taal van wiskunde!

'n Element van A is 'n arbitrêre paar van reële getalle $\mathbf{a} = (a_1,\, a_2)$. Byvoorbeeld, $(1,\, 2) \in A$ en $(3.891,\, e^{\pi})$ is elemente van A. Let ook op dat ek 'n vetdruk $\mathbf{a}$ gebruik om na 'n element van A te verwys. Dit is sodat ons $\mathbf{a}$ kan onderskei van sy *komponente* a_1 en a_2, wat net gewone getalle is (nie elemente van A nie).

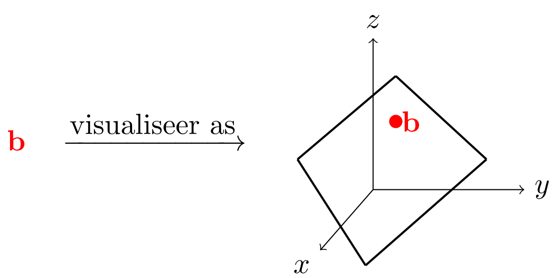
Ons kan ’n element $\mathbf{a}$ van A visualiseer as ’n punt in die Cartesiese vlak waarvan die x-koördinaat a_1 en die y-koördinaat a_2 is:



Die tweede versameling, B, word gedefinieer as die versameling van alle geordende reële drietalle (u_1, u_2, u_3), wat $u_1 - u_2 + u_3 = 0$ bevredig. In wiskundige simbole is dit soos volg:

$$B := \{(b_1, b_2, b_3) : b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R} \text{ en } b_1 - b_2 + b_3 = 0\}. \tag{1.2}$$

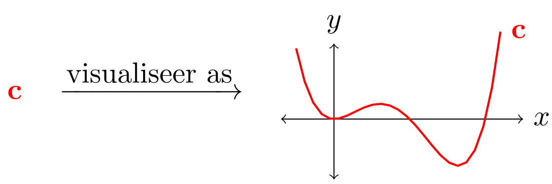
Byvoorbeeld, $(2, 3, 1) \in B$, maar $(1, 1, 1) \notin B$. Ons kan ’n element $\mathbf{b}$ van B visualiseer as ’n punt in die vlak in 3-dimensionele ruimte wat deur die vergelyking $x - y + z = 0$ daargestel word:



Die derde versameling, C, is die versameling van alle vierdegraadse polinome. Omgesit in wiskundige simbole, ,

$$C := \{\text{polinome met graad} \leq 4\}. \tag{1.3}$$

Onthou dat die *graad* van ’n polinoom is die grootse mag van x wat daarin verskyn. Byvoorbeeld, $\mathbf{c} = x^4 - 3x^3 + 2x^2$ is ’n vierdegraadse polinoom; so ook is $\mathbf{p} = 2x^3 + \pi x$. So $\mathbf{c}$ en $\mathbf{p}$ is elemente van C. Maar $\mathbf{r} = 8x^5 - 7$ en $\mathbf{s} = \sin(x)$ is nie elemente van C nie. Ons kan ’n element $\mathbf{c} \in C$ (i.e. ’n vierdegraadse polinoom) met sy *grafiek* visualiseer. Byvoorbeeld, die polinoom $\mathbf{c} = x^4 - 3x^3 + 2x^2 \in C$ word soos volg visualiseer:



Daar het jy dit. Ek het drie versamelings definieer: A, B en C, en ek het verduidelik hoe elkeen visualiseer kan word. Die drie versamelings lyk aanvanklik redelik verskillend. Elemente van A is arbitrêre punte in $\mathbb{R}^2$. Elemente van B is punte in $\mathbb{R}^3$ wat 'n sekere vergelyking bevredig. Elemente van C is almal polinome.

Watter kenmerke het hierdie versamelings in gemeen?

1.1.2 Gedeelde kenmerke van die versamelings

Ek wil fokus op twee kenmerke wat versamelings in A, B en C in gemeen het.

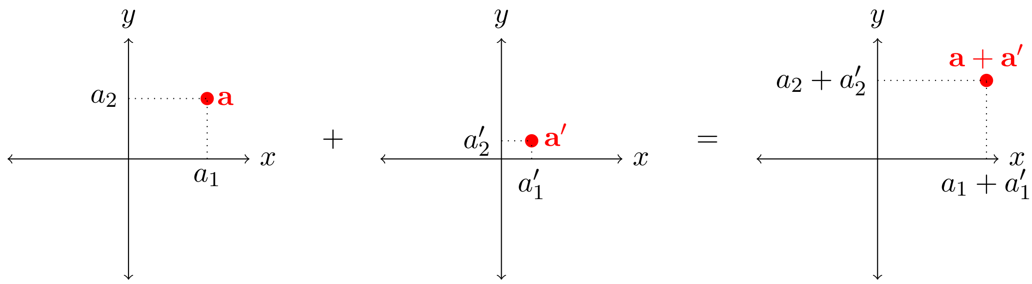
Sommering

Eerstens het aldrie hierdie versamelings 'n natuurlike *sommeringsbewerking*. Ons kan twee elemente in 'n versameling bymekaar tel om 'n derde element in dieselfde versameling te kry.

In Versameling A kan ons twee elmente $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ en $\mathbf{a}' = (a_1', a_2')$ bymekaar tel deur hulle onderskeie komponente bymekaar te tel om 'n nuwe element $\mathbf{a} + \mathbf{a}' \in A$ te vorm:

$$\underbrace{(a_1, a_2)}_{\mathbf{a}} + \underbrace{(a_1', a_2')}_{\mathbf{a}'} := \underbrace{(a_1 + a_1', a_2 + a_2')}_{\mathbf{a}+\mathbf{a}'} \tag{1.4}$$

Byvoorbeeld, $(1, 3) + (2, -1.6) = (3, 1.4)$. Ons kan die sommeringsbewerking soos volg visualiseer:



Ons kan 'n soortgelyke benadering in versameling B volg. Versonderstel ons het twee elemente van B, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ en $\mathbf{b}' = (b_1', b_2', b_3')$. Let daarop dat, omdat $\mathbf{b} \in B$, bevredig $\mathbf{b}$ se komponente die vergelyking $b_1 - b_2 + b_3 = 0$. So bevredig b' ook $b_1' - b_2' + b_3' = 0$. Ons kan $\mathbf{b}$ en $\mathbf{b}'$ saamtel om 'n nuwe element $\mathbf{b} + \mathbf{b}'$ van B te kry, deur hulle komponente saam te tel soos tevore:

$$\underbrace{(b_1, b_2, b_3)}_{\mathbf{b}} + \underbrace{(b_1', b_2', b_3')}_{\mathbf{b}'} := \underbrace{(b_1 + b_1', b_2 + b_2', b_3 + b_3')}_{\mathbf{b}+\mathbf{b}'} \tag{1.5}$$

Nou moet ons versigtig wees. Hoe weet ons dat die uitdrukking aan die regterkant regtig 'n element van B is? Ons moet seker maak dat dit die vergelyking 'die eerste komponent minus die tweede komponent plus die derde komponent is gelyk aan nul' bevredig. Kom ons doen dit formeel:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{b}+\mathbf{b}')_1 - (\mathbf{b}+\mathbf{b}')_2 + (\mathbf{b}+\mathbf{b}')_3 &= (b_1+b'_1) - (b_2+b'_2) + (b_3+b'_3) \\
. &= (b_1 - b_2 + b_3) + (b'_1 - b'_2 + b'_3) \\
&= 0 + 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

B kan op die selfde manier as A visualiseer word.

Daar is ook 'n sommeringsbewerking in die versameling C. Ons kan twee polinome algebraïes bymekaartel deur hulle ooreenstemmende koëffisiënte bymekaar te tel:

$$\begin{aligned}
&[c_4x^4 + c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x^1 + c_0] + [d_4x^4 + d_3x^3 + d_2x^2 + d_1x^1 + d_0] \\
&:= (c_4+d_4)x^4 + (c_3+d_3)x^3 + (c_2+d_2)x^2 + (c_1+d_1)x^1 + (c_0+d_0) \qquad (1.6)
\end{aligned}$$

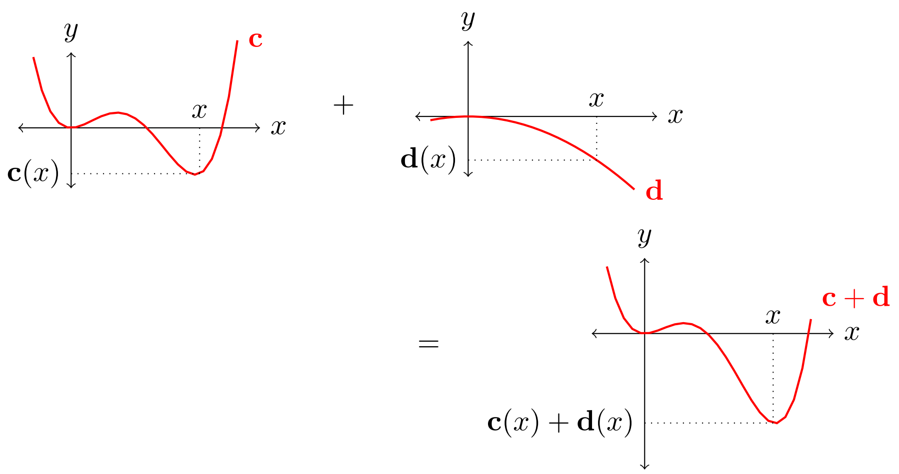
Byvoorbeeld,

$$[2x^4 + x^2 - 3x + 2] + [2x^3 - 7x^2 + x] = 2x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 2x + 2.$$

Daar is nog 'n manier om aan die sommering van polinome te dink. Elke polinoom $\mathbf{c}$ kan gesien word as 'n *funksie*, in die sin dat ons 'n arbitrêre waarde x in die polinoom $\mathbf{c}$ in kan vervang, en dit sal 'n waarde $\mathbf{c}(x)$ voortbring. Byvoorbeeld, as $\mathbf{c}(x) = 3x^2 - 1$, dan is $\mathbf{c}(2) = 11$. As ons polinome as funksies beskou, dan kan aan die som $\mathbf{c}+\mathbf{d}$ van twee polinome gedink word as 'n nuwe funksie wat, wanneer 'n getal x invervang word, dit die waarde $\mathbf{c}(x) + \mathbf{d}(x)$ teruggee. Wiskundig geskryf,

$$(\mathbf{c}+\mathbf{d})(x) := \mathbf{c}(x) + \mathbf{d}(x) \qquad (1.7)$$

Deur so te dink, kan ons die grafiek van $\mathbf{c}+\mathbf{d}$ as die som van die grafieke van $\mathbf{c}$ en $\mathbf{d}$ voorstel:



Nul-element

In aldrie versamelings A, B en C, bestaan daar 'n spesifieke element (die *nul-element*) $\mathbf{0}$ wat, as dit by 'n ander element getel word, lewer dit weer dieselfde element onveranderd terug.

In A word die nul-element $\mathbf{0}$ definieer deur

$$\mathbf{0} := (0, 0) \in A. \tag{1.8}$$

Wanneer jy hierdie punt by 'n ander punt $(a_1,\, a_2) \in A$ tel, gebeur niks nie!

$$(0,\, 0) + (a_1,\, a_2) = (a_1,\, a_2).$$

Moenie die nul-element $\mathbf{0} \in A$ met die reële getal nul ($0 \in \mathbb{R}$) verwar nie. Dit is nog 'n rede hoekom ek vetdruk gebruik! (Jy moet elemente van A onderstreep om die onderskeid te tref.)

$(0, 0, 0) \in B$ is die nul-element $\mathbf{0}$ in B. As jy dit by 'n ander punt $(u_1, u_2, u_3) \in B$ tel, gebeur niks nie!

$$(0,\, 0,\, 0) + (u_1,\, u_2,\, u_3) = (u_1,\, u_2,\, u_3).$$

In C is die *nul-polinoom* die nul-element $\mathbf{0}$. Algebraïes is dit die vierdegraadse polinoom waarvan die koëffisiënte almal nul is:

$$\mathbf{0} = 0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0 \tag{1.9}$$

As ons aan die polinoom as 'n funksie dink, dan is die nul-polinoom $\mathbf{0}$ die funksie wat vir alle waardes van x nul is, i.e. $\mathbf{0}(x) = 0$ vir alle x. Hoe ons ookal daaraan dink, as ons die nul-polinoom by 'n ander polinoom tel, gebeur niks nie!

$$\begin{aligned}[0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0] + [c_4x^4 + c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0]& \\ = [c_4x^4 + c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0]&\end{aligned}$$

Skalaarvermenigvuldiging

Die laaste kenmerk wat A, B en C in gemeen het is dat met elke versameling, hul elemente met reële getalle *vermenigvuldig* kan word en steeds in die versameling sal wees.

Byvoorbeeld, as $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ 'n elment van A is, dan kan ons dit met 'n arbitrêre reële getal, sê maar 9, vermenigvuldig, om 'n nuwe element $9 \cdot a$ van A te kry. Hierdie vermenigvuldiging word komponentgewys gedoen:

$$9 \cdot (a_1,\, a_2) := (9a_1,\, 9a_2). \tag{1.10}$$

In die algemeen, as $k \in \mathbb{R}$ 'n arbitrêre reële getal is, dan kan ons 'n arbitrêre element $\mathbf{a} \in A$ met k vermenigvuldig om 'n nuwe element $k \cdot \mathbf{a} \in A$ te kry deur elke komponent van $\mathbf{a}$ met k te vermenigvuldig:

$$\underbrace{k \cdot (a_1, a_2)}_{\text{Vermenigvuldig 'n vektor met 'n skalaar}} := (\underbrace{ka_1}_{\text{Vermenigvuldig twee getalle}}, ka_2)$$

Wees versigtig om te onderskei tussen skalaarvermenigvuldiging $k \cdot \mathbf{a}$ (aangedui met $\cdot$) en gewone vermenigvuldiging van reële getalle ka_1 (aangedui sonder enige simbool, die twee simbole word bloot langs mekaar geplaas). Later gaan ons 'n kortpad neem en ophou om die $\cdot$ eksplisiet uit te skryf — wees gewaarsku!

Visueel *skaleer* die vermenigvuldigingsbewerking $\mathbf{a}$ met 'n faktor van k. Dit is hoekom ons dit *skalaarvermenigvuldiging* noem.

Daar is 'n soortgelyke skalaarvermenigvuldigingsbewerking in B:

$$k(u_1, u_2, u_3) := (ku_1, ku_2, ku_3) \tag{1.11}$$

Daar is ook 'n skalaarvermenigvuldigingsbewerking in C. Ons vermenigvuldig elke koëffisient van 'n polinoom $\mathbf{c} \in C$ met k:

$$k \cdot [c_4x^4 + c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0] = kc_0x^4 + kc_3x^3 + kc_2x^2 + kc_1x + kc_0 \tag{1.12}$$

As ons aan 'n polinoom $\mathbf{c}$ as 'n funksie dink, dan korrespondeer dit met vertikale *skalering* van die grafiek met 'n faktor van k.

1.1.3 Kenmerkse wat die versamelings *nie* het nie

Kom on noem 'n paar kenmerke wat die versamelings *nie* het nie, of ten minste nie in gemeen het nie.

- Die versameling $A = \mathbb{R}^2$ het 'n *vermenigvuldigingsbewerking*. Dit is omdat ons $\mathbb{R}^2$ as die komplekse vlak $\mathbb{C}$ kan beskou; ons weet hoe om komplekse getalle kan vermenigvuldig. Daar is geen duidelike kandidaat vir 'n vermenigvuldigingsbewerking op B nie. Dieselfde geld vir C: as jy twee vierdegraadse polinome in C vermenigvuldig, eindig jy met 'n agtstegraadse polinoom, wat nie in C is nie!
- Daar is 'n *'bereken die afgeleide'*-bewerking op C,

  $$\mathbf{c} \mapsto \frac{d}{dx}\mathbf{c}$$

  wat ons later weer sal teëkom. Let op dat die wanneer die afgeleide bereken word, die graad van 'n polinoom met 1 afneem, so die resultaat bly in C, wat beteken dat dit 'n goedgedefinieerde afbeelding van C na C is. Daar is geen ooreenstemmende bewerking hiervoor in A en B nie.

> Let daarop dat daar geen *integrasie*-afbeelding van C na C is nie, want integrasie van 'n polinoom *verhoog* die graad met 1, so die resultaat mag dalk 'n polinoom van graad 5 wees, wat nie in C is nie!

1.1.4 Reëls

Ons het gevind dat elk van ons drie versamelings A, B en C 'n *sommeringsbewerking* $+$, 'n *nul-element* $\mathbf{0}$ en 'n *skalaarvermenigvuldigingsbewerking* $\cdot$ het. Kan ons enige reëls identifiseer waaraan hierdie bewerkings in al drie versamelings moet voldoen?

Byvoorbeeld, ons kan aan die sommeringsbewerking in A dink as 'n funksie wat aan elke elementpaar $\mathbf{a}$ en $\mathbf{a}'$ in A 'n nuwe element $\mathbf{a} + \mathbf{a}'$ in A toeken. Voldoen hierdie bewerking aan enige reëls?

Kom ons kyk. Laat $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ en $\mathbf{a}' = (a_1', a_2')$ elemente van A wees. Ons kan hulle in twee verskillende volgordes bymekaar tel,

$$\mathbf{a} + \mathbf{a}' = (a_1 + a_1', a_2 + a_2')$$

en

$$\mathbf{a}' + \mathbf{a} = (a_1' + a_1, a_2' + a_2).$$

Kom dit op dieselfde neer? In ander woorde, geld

$$\mathbf{a} + \mathbf{a}' = \mathbf{a}' + \mathbf{a} \tag{1.13}$$

as 'n reël? Die antwoord is *ja*, maar hoekom? Om na te gaan of twee elemente van A dieselfde is, moet ons nagaan of elkeen van hulle komponente gelyk is. Die eerste komponent van $\mathbf{a} + \mathbf{a}'$ is $a_1 + a_1'$. Die eerste komponent van $\mathbf{a}' + \mathbf{a}$ is $a_1' + a_1$. Is $a_1 + a_1' = a_1' + a_1$? Ja — want beide is net gewone reële getalle (nie elemente van A nie), en ons weet dat vir gewone reële getalle kan jy in enige orde saamtel met dieselfde resultaat. So die eerste komponent van $\mathbf{a} + \mathbf{a}'$ is gelyk aan die eerste komponent van $a' + a$. Net so kan ons nagaan dat die tweede komponent van $\mathbf{a} + \mathbf{a}'$ gelyk is aan die tweede komponent van $\mathbf{a}' + \mathbf{a}$. So all die komponente van $\mathbf{a} + \mathbf{a}'$ is gelyk aan al die ooreenstemmende komponente van $\mathbf{a}' + \mathbf{a}$. So, uiteindelik kan ons tot die gevolgtrekking kom dat $\mathbf{a} + \mathbf{a}' = \mathbf{a}' + \mathbf{a}$.

Geld hierdie reël (1.13) ook vir sommeringsoperators in B en C? Ja. Byvoorbeeld, kom ons gaan na dat dit vir C geld. Veronderstel dat $\mathbf{c}$ en $\mathbf{c}'$ polinome in C is. Geld die reël

$$\mathbf{c} + \mathbf{c}' = \mathbf{c}' + \mathbf{c} \tag{1.14}$$

steeds?

Die linker- en regterkante van (1.14) is elemente van C. En alle elemente van C is polinome. Om na te gaan of twee polinome gelyk is, moet ons nagaan of hulle gelyk is *as funksies*, met ander woorde, of jy identiese resultate uitkry vir enige moontlike insetwaarde van x wat invervang word.

By 'n arbitrêre insetwaarde x is die linkerkant $(\mathbf{c}+\mathbf{c}')(x) = \mathbf{c}(x)+\mathbf{c}'(x)$. Aan die anderkant is die regterkant $(\mathbf{c}'+\mathbf{c})(x) = \mathbf{c}'(x)+\mathbf{c}(x)$. Nou, let op dat $\mathbf{c}(x)$ en $\mathbf{c}'(x)$ gewone getalle is (en nie polinome nie). So $\mathbf{c}(x)+\mathbf{c}'(x) = \mathbf{c}'(x)+\mathbf{c}(x)$, want dit is waar vir gewone getalle. So vir elke insetwaarde x, $(\mathbf{c}+\mathbf{c}')(x) = (\mathbf{c}'+\mathbf{c})(x)$. Daarom is die polinome $\mathbf{c}$ en $\mathbf{c}'$ en $\mathbf{c}'+\mathbf{c}$ gelyk, hulle uitsetwaarde is dieselfde vir alle getalle x.

Daar is ander reëls wat ook vir al drie versamelings geld. Byvoorbeeld, in al drie versamelings geld die reël

$$(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z} = \mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z}) \tag{1.15}$$

vir alle elemente $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ en $\mathbf{z}$. Kan jy ander reëls identifiseer wat vir al drie versamelings geld?

1.2 Definisie van 'n abstrakte vektorruimte

Wiskunde behels die identifisering van patrone. Ons het drie versamelings gevind, A, B en C, wat aanvanklik baie soortgelyk voorkom maar baie in gemeen het. In elke versamiling is daar 'n sommeringsbewerking, 'n nulvektor en 'n skalaarvermenigvuldigingbewerking. Verder geld dieselfde reëls vir hierdie bewerkings. Kom ons noteer hierdie patroon deur dit 'n naam te gee en die reëls eksplisiet neer te pen.

Definisie 1. A *vektorruimte* is 'n versameling V wat met die volgende data toegerus is:

D1. 'n *Sommeringsbewerking.* (I.e. vir elke elementpaar $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V$, word 'n nuwe element $\mathbf{v}+\mathbf{v}'$ definieer.)

D2. 'n *Nul-vektor.* (I.e. 'n spesiale vektor $\mathbf{0} \in V$ word bepaal.)

D3. 'n *Skalaarvermenigvuldigingsbewerking.* (I.e., vir elke reëele getal k en elke element $\mathbf{v} \in V$ word 'n nuwe element $k \cdot \mathbf{v} \in V$ definieer.)

Hierdie data moet aan die volgende reëls vir alle $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ in V en vir alle reëele getalle k en l voldoen:

R1. $\mathbf{v}+\mathbf{w} = \mathbf{w}+\mathbf{v}$

R2. $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w} = \mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$

R3. $\mathbf{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v}$ and $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$

R4. $k \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = k \cdot \mathbf{v} + k \cdot \mathbf{w}$

R5. $(k + l) \cdot \mathbf{v} = k \cdot \mathbf{v} + l \cdot \mathbf{v}$

R6. $k \cdot (l \cdot \mathbf{v}) = (kl) \cdot \mathbf{v}$

R7. $1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$

R8. $0 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$

Ons noem elemente van 'n vektorruimte *vektore* en ons skryf hulle in vetdruk, bv. $\mathbf{v} \in V$. Dit is om vektore van reële getalle te onderskei, wat ons *skalare* noem en wat nie in vetdruk geskryf word nie. Dit is moeilik om vetdruk met handskrif uit te druk, so jy kan hulle onderstreep, soos volg: $\underline{v}$.

In hierdie hoofstuk sal ons skalaarvermenigvuldiging met 'n $\cdot$ skryf, byvoorbeeld $k \cdot \mathbf{v}$, maar in hieropvolgende hoofstukke sal on doodgewoon $k\mathbf{v}$ skryf, so weer versigtig!

Om te bewys dat 'n gegewe versameling 'n vektorruimte is, moet 'n mens die volgende doen:

1. Definieer die versameling V.
2. Definieer die data van 'n sommeringsbewerking (D1), 'n nulvektor (D2) en 'n skalaarvermenigvuldigingsbewerking (D3) op V.
3. Gaan na dat hierdie data aan reëls (R1) - (R8) voldoen.

1.3 Eerste voorbeeld van 'n vektorruimte

Ons is na die definisie (Definisie 1) van 'n abstrakte vektorruimte gelei deur die eienskappe van versamelings A, B en C in Afdeling **??** te bestudeer. Kom ons gaan na dat B wel 'n abstrakte vektorruimte is soos gedifineer in Definisie 1. Die ander versamelings word as oefeninge aan jou oorgelaat.

Voorbeeld 1.1. Die versameling B is 'n vektorruimte.

1. Definieer 'n versameling B

Ons definieer

$$B := \{(u_1,\, u_2,\, u_3) : u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R} \text{ and } u_1 - u_2 + u_3 = 0\}. \tag{1.16}$$

2. Definieer sommering, die nul-vektor en skalaarvermenigvuldiging.

D1. Ons definieer sommering soos volg. Veronderstel $\mathbf{u} = (u_1,\, u_2,\, u_3)$ en $\mathbf{v} = (v_1, , v_2,\, v_3)$ is elemente van B. Let op dat dit beteken $u_1 - u_2 + u_3 = 0$ en $v_1 - v_2 + v_3 = 0$. Ons definieer $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ as:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} := (u_1 + v_1,\, u_2 + v_2,\, u_3 + v_3). \tag{1.17}$$

Ons moet nagaan dat dit sin maak. Ons behoort te vind dat $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ ook 'n element van B is. Ons kan nie bloot enige definisie neerskryf nie! Om na te gaan of $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ 'n element van$B$ is, moet ons nagaan of dit vergelyking (1.16) bevredig. Kom ons kyk:

$$\begin{aligned}
&(u_1 + v_1) - (u_2 + v_2) + (u_3 + v_3) \\
&= (u_1 - u_2 + u_3) + (v_1 - v_2 + v_3) \quad && \text{(Hierdie algebraïese stap is waar vir gewone getalle)} \\
&= 0 + 0 && \text{(want } \mathbf{u} \text{ en } \mathbf{v} \text{ is in } B\text{)} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Daarom het ons dat $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ inderdaad 'n element van B is, so ons het ons eie goed-gedefinieerde? sommeringsbewerking op B definieer, wat twee arbitrêre elemente van B neem en weer 'n element van B teruggee.

D2. Ons definieer die nulvektor $\mathbf{0} \in B$ as

$$\mathbf{0} := (0, 0, 0). \tag{1.18}$$

Ons moet seker maak dat dit sin maak. Is $(0, 0, 0)$ regtig 'n element van B, oftewel, bevredig dit vergelyking (1.16)? Ja, omdat $0 - 0 + 0 = 0$. So ons het 'n goed-gedefinieerde nul-vektor.

D3. Ons definieer skalaarvermenigvuldiging soos op B soos volg. Laat k 'n reële getal en$\mathbf{u} = (u_1,\, u_2,\, u_3)$ 'n element van B wees. Ons definieer

$$k \cdot \mathbf{u} := (ku_1,\, ku_2,\, ku_3). \tag{1.19}$$

Ons moet seker maak dat dit sinmaak. As ek 'n vektor $\mathbf{v}$ in B met 'n skalaar k vermenigvuldig, dan moet die resultaat $k \cdot \mathbf{u}$ 'n element van B

wees. Behoort (ku_1, ku_2, ku_3) werklik aan B? Kom ons kyk of dit die definiërende vergelyking (1.16) bevredig:

$$\begin{aligned}
&ku_1 - ku_2 + ku_3 \\
&= k(u_1 - u_2 + u_3) && \text{(Hierdie algebraïese stap is waar vir gewone getalle)} \\
&= k0 && \text{(want } \mathbf{u} \text{ is in } B\text{)} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Daarom is $k \cdot \mathbf{u}$ wel 'n element van B, so ons het 'n goed-gedefinieerde skalaarvermenigvuldigingsbewerking op B gevind.

3. Maak seker die data bevredig die reëls

Ons moet seker maak dat ons dataD1, D2 en D3 reëls R1 – R8 bevredig. So, veronderstel $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ en $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ is in B en veronderstel dat k en l reële getalle is.

R1. Ons gaan na:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{v} + \mathbf{w} && \text{(R1.)} \\
&= (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3) && \text{(definisie van sommering in } B\text{)} \\
&= (w_1 + v_1, w_2 + v_2, w_3 + v_3) && \text{(want } x + y = y + x \text{ is waar vir reële getalle)} \\
&= \mathbf{w} + \mathbf{v}. && \text{(definisie van sommering in } B\text{)}
\end{aligned}$$

R2. Ons gaan na:

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} \\
&= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3) + \mathbf{w} && \text{(definisie van sommering in } B\text{)} \\
&= ((u_1 + v_1) + w_1, (u_2 + v_2) + w_2, (u_3 + v_3) + w_3) && \text{(definisie van sommering in } B\text{)} \\
&= (u_1 + (v_1 + w_1), u_2 + (v_2 + w_2), u_3 + (v_3 + w_3)) && \text{(want } (x+y)+z = x+(y+z) \text{ is waar vir reële getalle)} \\
&= \mathbf{u} + (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3) && \text{(definisie van sommering in } B\text{)} \\
&= \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) && \text{(definisie van sommering in } B\text{).}
\end{aligned}$$

R3. Ons gaan na:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{0} + \mathbf{v} \\
&= (0, 0, 0) + (v_1, v_2, v_3) && \text{(definisie van die nul-vektor in} B \\
&= (0 + v_1, 0 + v_2, 0 + v_3) && \text{(definisie van sommering in } B\text{)} \\
&= (v_1, v_2, v_3) && \text{(want } x + 0 = x \text{ is waar vir reële getalle)} \\
&= \mathbf{v}.
\end{aligned}$$

Met dieselfde benadering, gaan ons na dat $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$.

R4. Ons gaan na:

$$
\begin{aligned}
&k \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \\
&= k \cdot (v_1 + w_1,\, v_2 + w_2,\, v_3 + w_3) && \text{(definisie van sommering in } B\text{)} \\
&= (k(v_1 + w_1,\, k(v_2 + w_2),\, k(v_3 + w_3)) && \text{(definisie van skalaarvermenigvuldiging in} B\text{)} \\
&= (kv_1 + kw_1,\, kv_2 + kw_2,\, kv_3 + kw_3) && \text{(want } k(x+y) = kx + ky \text{ vir reële getalle } x, y\text{)} \\
&= (kv_1,\, kv_2,\, kv_3) + (kw_1,\, kw_2,\, kw_3) && \text{(definisie van sommering in } B\text{)} \\
&= k \cdot \mathbf{v} + k \cdot \mathbf{w} && \text{(definisie van skalaarvermenigvuldiging in } B\text{)}
\end{aligned}
$$

R5. Ons gaan na:

$$
\begin{aligned}
&(k + l) \cdot \mathbf{v} \\
&= ((k + l)v_1,\, (k + l)v_2,\, (k + l)v_3) && \text{(definisie van skalaarvermenigvuldiging in } B\text{)} \\
&= (kv_1 + lv_1,\, kv_2 + lv_2,\, kv_3 + lv_3) && \text{(want } (k + l)x = kx + lx \text{ vir reële getalle)} \\
&= (kv_1,\, kv_2,\, kv_3) + (lv_1,\, lv_2,\, lv_3) && \text{(definisie van sommering in } B\text{)} \\
&= k \cdot \mathbf{v} + l \cdot \mathbf{v} && \text{(definisie van skalaarvermenigvuldiging in } B\text{)}
\end{aligned}
$$

R6. Ons gaan na:

$$
\begin{aligned}
&k \cdot (l \cdot \mathbf{v}) \\
&= k \cdot (lv_1,\, lv_2,\, lv_3) && \text{(definisie van skalaarvermenigvuldiging in } B\text{)} \\
&= (k(lv_1),\, k(lv_2),\, k(lv_3)) && \text{(definisie van skalaarvermenigvuldiging in } B\text{)} \\
&= ((kl)v_1,\, (kl)v_2,\, (kl)v_3) && \text{(want } k(lx) = (kl)x \text{ vir reële getalle)} \\
&= (kl) \cdot \mathbf{v} && \text{(definisie van skalaarvermenigvuldiging in } B\text{).}
\end{aligned}
$$

R7. Ons gaan na:

$$
\begin{aligned}
1 \cdot \mathbf{v} &= (1v_1,\, 1v_2,\, 1v_3) && \text{(definisie van skalaarvermenigvuldiging in } B\text{)} \\
&= (v_1,\, v_2,\, v_3) && \text{(want } 1x = x \text{ vir reële getalle } x\text{)} \\
&= \mathbf{v}.
\end{aligned}
$$

R8. Ons gaan na:

$$
\begin{aligned}
0 \cdot \mathbf{v} &= (0v_1,\, 0v_2,\, 0v_3) && \text{(definisie van skalaarvermenigvuldiging in in } B\text{)} \\
&= (0,\, 0,\, 0) && \text{(want } 0x = 0 \text{ vir reële getalle} \\
&= \mathbf{0} && \text{(definisie van die nul-vektor in } B\text{).}
\end{aligned}
$$

Verdere oefeninge vir 1.3

Oefening 1. Bewys dat versameling A uit Afdeling **??** saam met die sommeringsbewerking (1.4), die nul-vektor (1.8) en die skalaarvermenigvuldigingsbewerking (1.10) 'n vektorruimte vorm.

Oefening 2. Bewys dat versameling C in Afdeling **??** saam met die sommeringsbewerking (1.7), die nul-vektor (1.9) en die skalaarvermenigvuldigingsbewerking (1.12) 'n vektorruimte vorm.

1.4 Verdere voorbeelde en slaggate

Voorbeeld 1.2 (Nie 'n vektor-ruimte nie)**.** Definieer die versameling V deur

$$V := \{a, b\}. \tag{1.20}$$

Definieer die sommeringsbewerking deur

$$\mathbf{a} + \mathbf{a} := \mathbf{a} \qquad \mathbf{a} + \mathbf{b} := \mathbf{a} \tag{1.21}$$

$$\mathbf{b} + \mathbf{a} := \mathbf{b} \qquad \mathbf{b} + \mathbf{b} := \mathbf{c} \tag{1.22}$$

Om na te gaan of dit 'n goed-gedefinieerde bewerking is, moet ons nagaan dat die sommering van enige twee elemente van V 'n goed-gedefinieerde element van V lewer. Maar $\mathbf{v} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$, so die som van $\mathbf{b} \in V$ met homself lewer iets ($\mathbf{c}$) wat nie 'n element van V is nie. So V is nie 'n vektorruimte nie want dit het nie 'n goed-gedefinieerde sommeringsbewerking nie.

Voorbeeld 1.3 (Weereens nie 'n vektor-ruimte nie)**.** Definieer die versameling V deur

$$V := \{a, b\}. \tag{1.23}$$

Definieer die sommeringsbewerking as

$$\mathbf{a} + \mathbf{a} := \mathbf{a} \qquad \mathbf{a} + \mathbf{b} := \mathbf{b} \tag{1.24}$$

$$\mathbf{b} + \mathbf{a} := \mathbf{b} \qquad \mathbf{b} + \mathbf{b} := \mathbf{a} \tag{1.25}$$

Dit is 'n goed-gedefinieerde bewerking, omdat enige twee elemente van V se som n goedgedefinieerde element van V lewer.

Definieer die nul-vektor deur

$$\mathbf{0} := \mathbf{a}. \tag{1.26}$$

Dit is goed-gedefinieerd, want $\mathbf{a}$ is 'n element van V.

Definieer skalaarvermenigvuldiging met 'n reële getal $k \in \mathbb{R}$ as

$$k \cdot \mathbf{a} := \mathbf{a} \quad \text{en} \quad k \cdot \mathbf{b} := \mathbf{b}. \tag{1.27}$$

Dit is 'n goed-gedefinieerde skalaarvermenigvuldigingsbewerking, want dit laat skalaarvermenigvuldiging met enige skalaar k toe en gee 'n goed-gedefinieerde element $k \cdot \mathbf{v} \in V$ terug.

movebackintoexample

Oefening 3. Wys dat hierdie bewerkings R1, R2, R3, R4, R6 en R7 bevredig, maar nie R5 en R8 nie.

Voorbeeld 1.4 (Die nul-vektorruimte)**.** Definieer die versameling Z as

$$Z := \{\mathbf{z}\}. \tag{1.28}$$

Let op dat dit net 'n enkele element bevat, $\mathbf{z}$. Definieer sommering as

$$\mathbf{z} + \mathbf{z} := \mathbf{z} \tag{1.29}$$

Definieer die nul-element as

$$\mathbf{0} := z. \tag{1.30}$$

Laastens, definieer skalaarvermenigvuldiging met 'n skalaar $k \in \mathbb{R}$ as:

$$k \cdot \mathbf{z} := \mathbf{z}. \tag{1.31}$$

movebackintoexample

Oefening 4. Wys dat hierdie data reëls R1 tot R8 bevredig.

Voorbeeld 1.5 ($\mathbb{R}^n$)**.** Definieer die versameling $\mathbb{R}^n$ as

$$\mathbb{R}^n := \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R} \text{ vir alle } i = 1 \ldots n\}. \tag{1.32}$$

Definieer sommering as

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n). \tag{1.33}$$

Definieer die nul-element as

$$\mathbf{0} := (0, 0, \ldots, 0). \tag{1.34}$$

Definieer skalaarvermenigvuldiging as

$$k \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) := (kx_1, kx_2, \ldots, kx_n). \tag{1.35}$$

movebackintoexample

Oefening 5. Wys dat hierdie data reëls R1 tot R8 bevredig.

Voorbeeld 1.6 ($\mathbb{R}^\infty$)**.** Definieer die versameling $\mathbb{R}^\infty$ as

$$\mathbb{R}^\infty := \{(x_1, x_2, x_3, \ldots,) : x_i \in \mathbb{R} \text{ vir alle } i = 1, 2, 3, \ldots\} \tag{1.36}$$

So 'n element $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^\infty$ is 'n oneindige ry van reële getalle. Definieer die sommeringsbewerking komponentgewys:

$$(x_1, x_2, x_3, \ldots) + (y_1, y_2, y_3, \ldots) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \ldots). \tag{1.37}$$

Definieer die nul-element as

$$\mathbf{0} := (0, 0, 0, \ldots), \tag{1.38}$$

die oneindige reeks waarvan alle komponente nul is. Laastens, definieer skalaarvermenigvuldiging komponentgewys:

$$k \cdot (x_1, x_2, x_3, \ldots) := (kx_1, kx_2, kx_3, \ldots) \tag{1.39}$$

Die studie van oneindigheid is 'n belangrike deel van wiskunde. Het jy al die fliek *The man who knew infinity* wat oor my gaan, gesien?

movebackintoexample

Oefening 6. Wys dat hierdie data reëls R1 tot R8 bevredig.

Voorbeeld 1.7 (Funksies op 'n versameling)**.** Laat X enige versameling wees. Definieer die versameling Fun(X) van *reële getal-funksies op* X as

$$\text{Fun}(X) := \{\mathbf{f} : X \to \mathbb{R}\}. \tag{1.40}$$

Let op dat die funksies arbitrêr kan wees; daar is geen vereiste dat hulle kontinu of differensieerbaar moet wees nie. So 'n vereiste maak nie sin nie, aangesien X 'n arbitrêre versameling kan wees. Byvoorbeeld, X kan die versameling $\{a, b, c\}$ wees — sonder enige verdere inligting maak dit nie sin om te sê dat die funksie $\mathbf{f} : X \to \mathbb{R}$ kontinu is nie.

Definieer die sommeringsbewerking as

$$(\mathbf{f} + \mathbf{g})(x) := \mathbf{f}(x) + \mathbf{g}(x), \quad x \in X \tag{1.41}$$

Maak seker dat jy verstaan wat hierdie formule sê! Ons begin met twee funksies$\mathbf{f}$ en $\mathbf{g}$, en ons definieer hulle som $\mathbf{f} + \mathbf{g}$. Dit is veronderstel om self 'n funksie van X te wees. Om 'n funksie op X te definieer, moet ek vir elke $x \in X$ neerskryf watter waarde die funksie lewer. En dit is wat die formule sê: die waarde wat die funksie $\mathbf{f} + \mathbf{g}$ aan die element $x \in X$ toeken, word defnieer as die waarde $\mathbf{f}(x)$ plus die getal $\mathbf{g}(x)$. Onthou: $\mathbf{f}$ is 'n funksie, terwyl $\mathbf{f}(x)$ 'n getal is!

Definieer die nul-vektor $\mathbf{0}$ as die funksie wat die getal 0 lewer vir elke insetwaarde $x \in X$:

$$\mathbf{0}(x) := 0 \quad \text{vir alle } x \in X. \tag{1.42}$$

Definieer skalaarvermenigvuldiging as

$$(k \cdot \mathbf{f})(x) := k\mathbf{f}(x). \tag{1.43}$$

movebackintoexample (all 3)

Oefening 7. Notasie-uitdaging! Sê of die volgende kombinasie van simbole 'n reële waarde of 'n funksie voorstel.

1. $\mathbf{f}$
2. $\mathbf{f}(x)$
3. $k \cdot \mathbf{f}$
4. $(k \cdot \mathbf{f})(x)$

Oefening 8. Laat $X = \{a, b, c\}$.

1. Skryf drie verskillende funksies$\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h}$ in Fun(X) neer.
2. Vir die funksies wat jy in (1) geskryf het, bereken $\mathbf{f} + \mathbf{g}$, asook $3 \cdot \mathbf{h}$.

Oefening 9. Wys dat die data hierbo reëls R1 tot R8 bevredig, i.e. dat Fun(X) 'n vektorruimte is.

Voorbeeld 1.8 (Matrikse)**.** Onthou dat 'n $n \times m$-*matriks* A 'n reghoekigge skikking getalle is, met n rye en m kolomme:

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} \mathsf{A}_{11} & \mathsf{A}_{12} & \cdots & \mathsf{A}_{1m} \\ \mathsf{A}_{21} & \mathsf{A}_{22} & \cdots & \mathsf{A}_{2m} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathsf{A}_{n1} & \mathsf{A}_{n2} & \cdots & \mathsf{A}_{nm} \end{bmatrix}$$

Twee $n \times m$ matrikse A en B kan saamgetel word, om 'n nuwe $n \times m$-matriks $\mathsf{A} + \mathsf{B}$ te kry:

$$(\mathsf{A} + \mathsf{B})_{ij} := \mathsf{A}_{ij} + \mathsf{B}_{ij}$$

Daar is die *null-$n \times m$-matriks*:

$$\mathsf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Jy kan ook 'n $n \times m$-matriks A met 'n skalaar k vermenigvuldig om 'n nuwe $n \times m$-matrik $k\mathsf{A}$ te kry:

$$(k\mathsf{A})_{ij} := k\mathsf{A}_{ij}$$

movebackintoexample

Oefening 10. Wys dat met hierdie bewerkings vorm die versameling $\mathrm{Mat}_{n,m}$ van alle $n \times m$-matrikse 'n vektorruimte.

Voorbeeld 1.9. Ons sal Col_n skryf vir die vektorruimte$\mathrm{Mat}_{n,1}$ van n-dimensionele *kolomvektore*,

$$\mathrm{Col}_n = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} : x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

So, Col_n 'is' net $\mathbb{R}^n$, maar ons beklemtoon dat die komponente in kolomme gerangskik word.

Verdere oefeninge vir 1.4

Oefening 11. Definieer 'n sommeringsbewerking op die versameling $X := \{\mathbf{0}, \mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ met die volgende tabel:

$+$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{a}$	$\mathbf{b}$
$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{a}$	$\mathbf{b}$
$\mathbf{a}$	$\mathbf{a}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{a}$
$\mathbf{b}$	$\mathbf{b}$	$\mathbf{a}$	$\mathbf{0}$

Die tabel werk soos volg. Vir die berekening $\mathbf{b} + \mathbf{a}$, vind die kruising van ry $\mathbf{b}$ en kolom $\mathbf{a}$. ons sien dat $\mathbf{b} + \mathbf{a} := \mathbf{a}$.

Bewys dat hierdie sommeringsbewerking R1 bevredig.

Oefening 12. Bewys dat die sommeringsoperasie van Oefening 11 nie R2 bevredig nie.

Oefening 13. Definieer 'n snaakse sommeringsbewerking$\hat{+}$ op $\mathbb{R}$ as

$$x \hat{+} y := x - y$$

Bevredig $\hat{+}$ R2? Indien wel, bewys dit. Indien nie, gee 'n teenvoorbeeld.

Oefening 14. Laat $\mathbb{R}^+$ 'n versameling van positiewe reële getalle wees. Definieer 'n sommeringsbewerking, 'n nul-vektor en 'n skalaarvermenigvuldiging op $\mathbb{R}^+$ as

$$\begin{aligned} \mathbf{x} + \mathbf{y} &:= \mathbf{x}\mathbf{y} \\ \mathbf{0} &:= 1 \\ k \cdot \mathbf{x} &:= \mathbf{x}^k \end{aligned}$$

waar $\mathbf{x}$ en $\mathbf{y}$ positiewe reële getalle is en k 'n skalaar is (i.e. 'n arbitrêre reële getal).

1. Gaan na dat hierdie bewerkings goed-gedefinieerd is. Byvoorbeeld, is $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathbb{R}^+$, soos dit hoort?

2. Gaan na dat hulle R1 tot R8 bevredig, sodat$\mathbb{R}^+$ 'n vektorruimte met hierdie bewerkings vorm.

1.5 'n Paar resultate rakende abstrakte vektorruimtes

Dit is tyd om die reëls van vektorruimtes te gebruik om 'n paar algemene resultate te bewys.

Ons is op die punt om on eerste formele bewys in die kursus te doen!

Lemma 2. *Veronderstel V is 'n vektor-ruimte met nul-vektor $\mathbf{0}$. As $\mathbf{0}'$ 'n ander vektor is wat reël R3(a) bevredig,*

$$\mathbf{0}' + \mathbf{v} = \mathbf{v} \ \ \textit{vir alle } \mathbf{v} \in V \tag{1.44}$$

dan volg dit dat $\mathbf{0} = \mathbf{0}'$.

Bewys.

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \mathbf{0}' + \mathbf{0} && \text{(gebruik (1.44) vir } \mathbf{v} = \mathbf{0}) \\ &= \mathbf{0}' && \text{(gebruik R3(b) vir } \mathbf{v} = \mathbf{0}') \end{aligned}$$

□

Definisie 3. Laat V 'n vektorruimte wees; ons definieer die *sommeringsinverse* van 'n vektor $\mathbf{v} \in V$ as

$$-\mathbf{v} := (-1) \cdot \mathbf{v}$$

Lemma 4. *As V 'n vektorruimte is, dan vir alle $\mathbf{v} \in V$,*

$$-\mathbf{v} + \mathbf{v} = \mathbf{0} \ \ \textit{en} \ \ \mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}. \tag{1.45}$$

Bewys.

$$\begin{aligned} -\mathbf{v} + \mathbf{v} &= (-1) \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} && \text{(Definisie van } -\mathbf{v}) \\ &= (-1 + 1) \cdot \mathbf{v} && \text{(R5)} \\ &= 0 \cdot \mathbf{v} \\ &= \mathbf{0} && \text{(R8)} \end{aligned}$$

Verder,

$$\begin{aligned} \mathbf{v} + (-\mathbf{v}) &= -\mathbf{v} + \mathbf{v} && \text{(R1)} \\ &= \mathbf{0} && \text{(deur vorige bewys)} \end{aligned}$$

□

Lemma 5. *Veronderstel twee vektore* $\mathbf{w}$ *en* $\mathbf{v}$ *in 'n vektor-ruimte bevredig* $\mathbf{w}+\mathbf{v}=\mathbf{0}$. *Dan volg dit dat* $\mathbf{w}=-\mathbf{v}$.

Bewys.

$$\begin{aligned}
\mathbf{w} &= \mathbf{w}+\mathbf{0} && \text{(R3b)}\\
&= \mathbf{w}+(\mathbf{v}+-\mathbf{v}) && \text{(Lemma 4)}\\
&= (\mathbf{w}+\mathbf{v})+-\mathbf{v} && \text{(R2)}\\
&= \mathbf{0}+-\mathbf{v} && \text{(volgens aanname)}\\
&= -\mathbf{v} && \text{(R3a).}
\end{aligned}$$

□

Voorbeeld 1.10. Kom ons oefen die gebruik van die reëls van vektorruimtes om alledaagse berekeninge uit te voer. Byvoorbeeld, veronderstel dat ons vir die vektor $\mathbf{x}$ in die volgende vergelyking wil oplos:

$$\mathbf{v}+7\cdot\mathbf{x}=\mathbf{w} \tag{1.46}$$

Ons gaan te werk met die reëls soos volg:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}+7\cdot\mathbf{x} &= \mathbf{w} && \\
\therefore -\mathbf{v}+(\mathbf{v}+7\cdot\mathbf{x}) &= -\mathbf{v}+\mathbf{w} && \text{(tel $-\mathbf{v}$ aan beide kante by)}\\
\therefore (-\mathbf{v}+\mathbf{v})+7\cdot\mathbf{x} &= -\mathbf{v}+\mathbf{w} && \text{(gebruik R2 aan LK)}\\
\therefore \mathbf{0}+7\cdot\mathbf{x} &= -\mathbf{v}+\mathbf{w} && \text{(gebruik Lemma 4 aan LK)}\\
\therefore 7\cdot\mathbf{x} &= -\mathbf{v}+\mathbf{w} && \text{(gebruik R3a aan LK)}\\
\therefore \frac{1}{7}\cdot(7\cdot\mathbf{x}) &= \frac{1}{7}\cdot(-\mathbf{v}+\mathbf{w}) && \text{(skalaarvermenigvuldig aan beide kante met $\tfrac{1}{7}$)}\\
\therefore (\frac{1}{7}7)\cdot\mathbf{x} &= \frac{1}{7}\cdot(-\mathbf{v}+\mathbf{w}) && \text{(gebruik R6 aan LK)}\\
\therefore 1\cdot\mathbf{x} &= \frac{1}{7}\cdot(-\mathbf{v}+\mathbf{w}) && \text{(vermenigvuldig $\tfrac{1}{7}$ met 7)}\\
\therefore \mathbf{x} &= \frac{1}{7}\cdot(-\mathbf{v}+\mathbf{w}) && \text{(R7)}
\end{aligned}$$

Soos die kursus vorder sal ons hierdie stappe uitlaat. Maar dit is belangrik dat jy hulle almal kan weergee, as dit van jou gevra sou word!

Ons het een finale lemma nodig.

Lemma 6. *Veronderstel dat* $\mathbf{v}$ *'n vektor in 'n vektorruimte* V *is en dat* k *'n skalaar is. Dan volg dit dat*

$$k\cdot\mathbf{v}=\mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad k=0 \text{ of } \mathbf{v}=\mathbf{0}.$$

Bewys. (Bewys van $\Leftarrow$). Veronderstel $k = 0$. Dan $k \cdot \mathbf{v} = 0 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$ deur R8 van 'n vektor-ruimte. Aan die ander kant, veronderstel $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Dan $k \cdot \mathbf{v} = k \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ deur Oefening 16.

(Bewys van $\Rightarrow$). Veronderstel $k \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Daar is twee moontlikhede: óf $k = 0$, óf $k \neq 0$. As $k = 0$, dan is ons klaar. As $k \neq 0$, dan bestaan $\frac{1}{k}$ en ons vermenigvuldig albei kante daardeur:

$$
\begin{aligned}
k \cdot \mathbf{v} &= \mathbf{0} && \\
\therefore \frac{1}{k} \cdot (k \cdot \mathbf{v}) &= \frac{1}{k} \cdot \mathbf{0} && \text{(Vermenigvuldig beide kante met } \tfrac{1}{k}\text{)} \\
\therefore (\frac{1}{k} k) \cdot \mathbf{v} &= \mathbf{0} && \text{(R6 aan LK. Gebruik Oefening 16 aan die RK.)} \\
\therefore 1 \cdot \mathbf{v} &= \mathbf{0} && \text{(gebruik } \tfrac{1}{k}k = 1\text{)} \\
\therefore \mathbf{v} &= \mathbf{0} && \text{(R7)}
\end{aligned}
$$

Daarom, in die geval waar $k \neq 0$ dit volg dat $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, wat ons in die eerste plek wou bewys. □

Verdere oefeninge vir 1.5

Oefening 15. Bewys dat, vir alle vektore v in 'n vektorruimte, $-(-\mathbf{v}) = \mathbf{v}$.

Oefening 16. Laat V 'n vektorruimte wees met nul-vektor $\mathbf{0}$. Bewys dat vir alle skalare k, $k \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Oefening 17. Veronderstel dat twee vektore $\mathbf{x}$ en $\mathbf{w}$ in 'n vektorruimte $2\mathbf{x} + 6\mathbf{w} = \mathbf{0}$ bevredig. Los op vir $\mathbf{x}$, maar wys eksplisiet hoe jy die reëls van 'n vektorruimte gebruik het, soos in Voorbeeld 1.10.

1.6 Deelruimtes

Die konsep van 'n deelruimte sal ons toelaat om vinnig nuwe voorbeelde van vektorruimtes te vind.

Definisie 7. 'n deelversameling $U \subseteq V$ van 'n vektor-ruimte V is 'n *deelruimte van V* as:

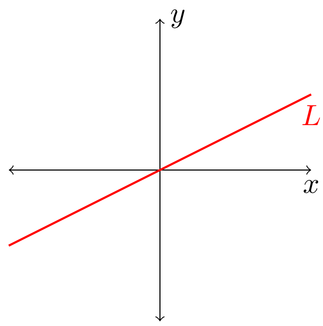
- Vir alle $\mathbf{u}, \mathbf{u}' \in U$, $\mathbf{u} + \mathbf{u}' \in U$
- $\mathbf{0} \in U$
- Vir alle skalare k en alle vektore $\mathbf{u} \in U$, $k \cdot \mathbf{u} \in U$

Lemma 8. *As U 'n deelruimte van 'n vektorruimte V is, dan is U ook 'n vektorruimte, toegerus met dieselfde sommeringsbewerking, nul-vektor en skalaarvermenigvuldigingsbewerking as V.*

Bewys. Aangesien U 'n deelruimte is, weet ons dat dit sin maak om dit "toe te rus met dieselfde sommeringsbewerking, nul-vektor en skalaarvermenigvuldigingsbewerking as V". (As U *nie* 'n deelruimte was nie, dan sou ons byvoorbeeld kon vind dat $\mathbf{u}, \mathbf{u}' \in U$ maar $\mathbf{u} + \mathbf{u}' \notin U$, So die sommeringsbewerking sou nie sin maak nie.)

So ons moet net reëls R1 tot R8 nagaan. Aangesien die reëls geld vir alle vektore $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ in V, Sal hulle beslis geld vir alle vektore $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ in U. So reëls R1 tot R8 word bevredig. □

Voorbeeld 1.11 (Lyn in $\mathbb{R}^2$)**.** 'n Lyn L deur die oorsprong in $\mathbb{R}^2$ is 'n deelruimte van $\mathbb{R}^2$:



(1.47)

Onthou dat lyn L gespesifiseer kan word deur 'n homogene lineêre vergelyking van die form:

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by = 0\} \tag{1.48}$$

vir konstantes a en b. So, as $\mathbf{v} = (x, y)$ en $\mathbf{v}' = (x', y')$ op L lê, dan lê hulle som $\mathbf{v} + \mathbf{v}' = (x + x', y + y')$ ook op L, want hul komponente bevredig die definiërende vergelyking (1.48):

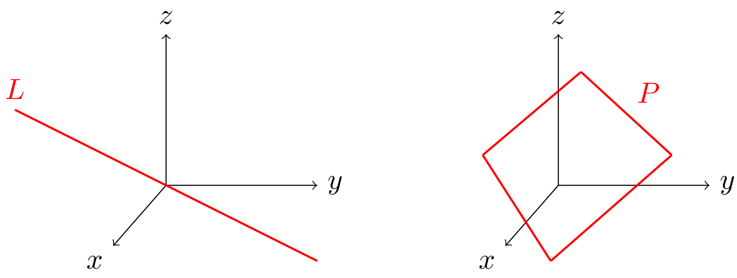
$$\begin{aligned}
&a(x + x') + b(y + y') \\
&= (ax + by) + (ax' + by') \\
&= 0 + 0 && \text{(want } ax + by = 0 \text{ en } ax' + by' = 0\text{)} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Dit maak ook meetkundig sin: As jy na beeld (1.47) kyk, sal jy sien dat die som van twee vektore $\mathbf{v}, \mathbf{v}'$ op L met die kop-op-stert-metode 'n verdere vektor op L tot gevolg sal hê.

movebackintoexample

Oefening 18. Voltooi die bewys dat L 'n deelruimte van $\mathbb{R}^2$ is deur na te gaan dat die nul-vektor op lyn L is en dat die vermenigvuldiging van 'n vektor in L met 'n skalaar 'n vektor op L lewer.

Voorbeeld 1.12 (Lyne en vlakke in $\mathbb{R}^3$)**.** 'n Lyn L en 'n vlak P deur die oorsprong in $\mathbb{R}^3$ is ook 'n deelruimte van $\mathbb{R}^3$:



(1.49)

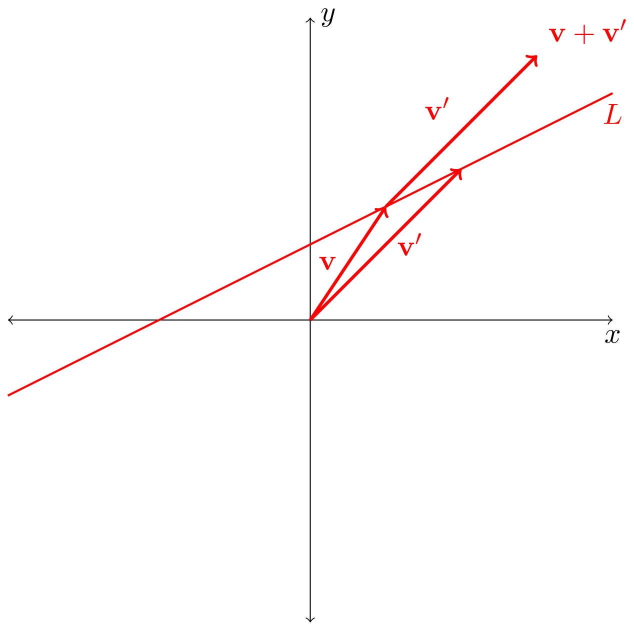
Voorbeeld 1.13 (Nul-vektorruimte)**.** As V 'n vektorruimte is, dan is die versameling $\{\mathbf{0}\} \subseteq V$ wat slegs die nul-vektor $\mathbf{0}$ 'n deelruimte van V.

movebackintoexample

Oefening 19. Gaan na dat dit waar is.

Voorbeeld 1.14 (Nie 'n vektorruimte nie: 'n Lyn nie deur die oorsprong nie)**.** Wees versigtig — nie *elke* lyn $L \subset \mathbb{R}^2$ vorm 'n deelruimte van $\mathbb{R}^2$ nie. As L nie deur die oorsprong loop nie, dan vind ons dat $\mathbf{0} \notin L$, so L is nie 'n deelruimte nie.

Nog 'n rede dat L nie 'n deelruimte is nie is dat dit nie geslote onder sommering is nie: As ons twee nie-nul vektore $\mathbf{v}$ en $\mathbf{v}'$ op L bymekaar tel, kry ons 'n vektor $\mathbf{v} + \mathbf{v}'$ wat nie op L lê nie:



(1.50)

Voorbeeld 1.15 (Kontinue funksies as 'n deelruimte)**.** Die versameling

$$\mathrm{Cont}(I) := \{\mathbf{f} : I \to \mathbb{R}, \ \mathbf{f} \text{ kontinu}\}$$

van alle kontinue funksies op die interval I is 'n deelruimte van die versameling $\mathrm{Fun}(I)$ van *alle* funksies op I. Kom ons bevestig dat dit die definisie bevredig. Jy weet reeds van vorige kursusse dat:

- As $\mathbf{f}$ en $\mathbf{g}$ kontinue funksies op I is, dan is $\mathbf{f} + \mathbf{g}$ ook 'n kontinue funksie.
- Die nul-funksie $\mathbf{0}$ gedefinieer as $\mathbf{0}(x) = 0$ vir alle $x \in I$ is 'n kontinue funksie.
- As $\mathbf{f}$ 'n kontinue funksie is en k 'n skalaar is, dan is $k \cdot \mathbf{f}$ ook kontinu.

Daarom, deur Lemma 8, is $\mathrm{Cont}(I)$ 'n vektorruimte in eie reg.

Voorbeeld 1.16 (Differensieerbare funksies as 'n deelruimte)**.** So ook is die versameling

$$\mathrm{Diff}(I) := \{\mathbf{f} : (0,1) \to \mathbb{R},\, \mathbf{f}\text{differensieerbaar}\}$$

van differensieerbare fuksies op die oop interval I 'n deelruimte van $\mathrm{Fun}(I)$.

movebackintoexample

Oefening 20. Bevestig dit. Ook, is $\mathrm{Diff}(I)$ 'n deelruimte van $\mathrm{Cont}(I)$?

Voorbeeld 1.17 (Vektorruimtes van polinome)**.** 'n *Polinoom* is 'n funksie $\mathbf{p} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ van die vorm

$$\mathbf{p}(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0. \tag{1.51}$$

vir onveranderlike reële koëffisiënte $a_0, \ldots, a_n$. Twee polinome $\mathbf{p}$ en $\mathbf{q}$ is *gelyk* as hulle *as funksies* gelyk is, m.a.w. as $\mathbf{p}(x) = \mathbf{q}(x)$ vir alle $x \in \mathbb{R}$. Die *graad* van 'n polinoom is die hoogste mag van x wat in die formule voorkom.

Byvoorbeeld, $2x^3 - x + 7$ is 'n polinoom van graad 3, terwyl $x^5 - 2$ 'n polinoom van graad 5 is.

Die versameling van *alle* polinome word as Poly geskryf en die versameling van alle polinome van 'n graad kleiner of gelyk aan n word as Poly_n geskryf.

movebackintoexample

Oefening 21. Gaan na dat Poly en Poly_n wel deelruimtes van $\mathrm{Cont}(\mathbb{R})$ is.

Voorbeeld 1.18 (Trigonometriese polinome)**.** 'n *Trigonometriese polinoom* is 'n funksie $\mathbf{T} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ van die vorm

$$\begin{aligned}\mathbf{T}(x) = a_0 + a_1\cos(x) + b_1\sin(x) + a_2\cos(2x) + b_2\sin(2x) + \cdots \\ + a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\,.\end{aligned} \tag{1.52}$$

Die *graad* van 'n trigonometriese polinoom is die grootste veelvoud van x wat binne een van die sinusse of kosinusse in die formule voorkom.

Byvoorbeeld,

$$3 - \cos(x) + 6\sin(3x)$$

is 'n trigonometriese polinoom van graad 3. Ons skryf die versameling van *alle* trigonometriese polinome as Trig en die versameling van alle trigonometriese polinome van graad kleiner of gelyk aan n as Trig_n.

Oefening 22. Wys dat Trig en Trig_n deelruimtes van $\mathrm{Cont}(\mathbb{R})$ is.

Oefening 23. Oorweeg die funksie $\mathbf{f}(x) = \sin^3(x)$. Wys dat $\mathbf{f} \in \mathrm{Trig}_3$ deur dit in die vorm (1.52) te skryf. Wenk: gebruik die identiteite

$$\begin{aligned}
\sin(A)\sin(B) &= \frac{1}{2}(\cos(A-B) - \cos(A+B)) \\
\sin(A)\cos(B) &= \frac{1}{2}(\sin(A-B) + \sin(A+B)) \\
\cos(A)\cos(B) &= \frac{1}{2}(\cos(A-B) + \cos(A+B))
\end{aligned}$$

wat maklik volg uit die sommeringsformules

$$\begin{aligned}
\sin(A \pm B) &= \sin A \cos B \pm \cos A \sin B \\
\cos(A \pm B) &= \cos A \cos B \mp \sin A \sin B.
\end{aligned}$$

Voorbeeld 1.19 (Oplossings van die lineêre differensiële vergelykings)**.** Laat a, b en c konstantes wees. Laat $V \subseteq \mathrm{Diff}(\mathbb{R})$ die versameling van alle oplossings vir die volgende differensiële vergelyking wees:

$$a\frac{d^2 f}{dx^2} + b\frac{df}{dx} + cf = 0$$

movebackintoexample

Oefening 24. Wys dat V 'n deelruimte van $\mathrm{Diff}(\mathbb{R})$ is.

Verdere oefeninge vir 1.6

Oefening 25. Wys dat die versameling

$$V := \{(a, -a, b, -b) : a, b \in \mathbb{R}\}$$

'n deelruimte van $\mathbb{R}^4$ is.

Oefening 26. Wys dat die versameling

$$V := \{\text{polinome van die vorm } \mathbf{p}(x) = ax^3 + bx^2 - cx + a,\ a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

'n deelruimte van Poly_3 is.

Oefening 27. Laat $b \in \mathbb{R}$. Bewys dat

$$V := \{(x_1,\, x_2,\, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = b\}$$

'n deelruimte van $\mathbb{R}^3$ is as en slegs as $b = 0$. (Onthou dat as en slegs as beteken dat die vorentoe- *en* die terug-implikasie bewys moet word.)

Oefening 28. Beskou die versameling

$$V := \{\mathbf{f} \in \mathrm{Diff}((-1, 1)) : f'(0) = 2\}.$$

Is V 'n deelruimte van $\mathrm{Diff}((-1, 1))$? As jy dink dat dit is, *bewys* dat dit so is. As jy dink dit is nie, *bewys* dat dit nie is nie!

Oefening 29. Beskou die versameling

$$V := \{(x_1,\, x_2,\, x_3,\, \ldots) \in \mathbb{R}^\infty : \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}.$$

Is V 'n deelruimte van $\mathbb{R}^\infty$? As jy dink dit is wel, *bewys* dat dit so is. As jy dink dit is nie, *bewys* dat dit nie is nie!

Oefening 30. Is $\mathbb{R}^+ := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R} : \mathbf{x} \geq 0\}$ 'n deelruimte van $\mathbb{R}$? As jy dink dit is wel, *bewys* dat dit so is. As jy dink dit is nie, *bewys* dat dit nie is nie!

Oefening 31. Gee 'n voorbeeld van 'n nie-leë deelversameling U van $\mathbb{R}^2$ wat geslote is onder sommering en die vind van sommeringsinverses (i.e. as $\mathbf{u}$ in U is, dan is $-\mathbf{u}$ in V), maar nié 'n deelruimte van $\mathbb{R}^2$ is nie.

Oefening 32. Gee 'n voorbeeld van 'n nie-leë deelversameling V van $\mathbb{R}^2$ wat geslote onder skalaarvermenigvuldiging is, maar nié 'n deelruimte van $\mathbb{R}^2$ is nie.

Hoofstuk 2

Eindigdimensionele vektorruimtes

In hierdie kursus konsentreer ons op *eindigdimensionele* vektorruimtes, wat ons in hierdie hoofstuk sal definieer.

Waarskuwing: Van hier af verder gaan ek verkorte notasie vir skalaarvermenigvuldiging gebruik en $k \cdot \mathbf{v}$ bloot as $k\mathbf{v}$ skryf!

2.1 Lineêre kombinasie en span

Ons begin met 'n paar basiese definisies.

Definisie 9. 'n *Lineêre kombinasie* van 'n eindige kolleksie vektore $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ in 'n vektorruimte V is 'n vektor van die vorm

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_b\mathbf{v}_n \tag{2.1}$$

waar $a_1, a_2, \ldots, a_n$ skalare is. As al die skalare a_i gelyk aan nul is, dan sê ons dat dit die *triviale lineêre kombinasie* is.

Voorbeeld 2.1. In $\mathbb{R}^3$ is $(6, 2, -14)$ 'n lineêre kombinasie van $(-3, 1, 2)$ en $(-2, 0, 3)$, want

$$(6, 2, -14) = 2(-3, 1, 2) - 6(-2, 0, 3).$$

Voorbeeld 2.2. In $\mathbb{R}^4$, is $\mathbf{v} = (2, -1, 3, 0)$ nie 'n lineêre kombinasie van

$$\mathbf{v}_1 = (1, 3, 2, 0),\ \mathbf{v}_2 = (2, 1, 2, 0),\ \mathbf{v}_3 = (-1, 0, 2, 1)$$

nie. As dit *wel* was, dan sou ons vind dat

$$(-2, -1, 3, 0) = a_1(1, 3, 2, 0) + a_2(5, 1, 2, 4) + a_3(-1, 0, 2, 1)$$

vir sekere skalare a_1, a_2, a_3. In ander woorde, ons sou vind dat

$$(-2, -1, 3, 0) = (a_1 + a_2 + a_3,\ 3a_1 + a_2,\ 2a_1 + 2a_2 + 2a_3,\ 4a_2 + a_3)$$

wat ekwivalent is aan die sisteem van vergelykings:

$$\begin{cases} a_1 + 5a_2 - \ \ a_3 = -2 \\ 3a_1 + \ \ a_2 \qquad\ \ = -1 \\ 2a_1 + 2a_2 + 2a_3 = 3 \\ \qquad 4a_2 + \ \ a_3 = 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

Oefening 33. Bevestig dat die sisteem van vergelykings (2.2) geen oplossing het nie. Dus is $\mathbf{v}$ nie 'n lineêre kombinasie van $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ nie.

Voorbeeld 2.3. Definieer die funksies $f, f_1, f_2 \in \text{Fun}(\mathbb{R})$ as

$$f(x) = \cos^3 x, \quad f_1(x) = \cos(x), \quad f_2(x) = \cos(3x).$$

Dan is f 'n lineêre kombinasie van f_1 en f_2, vanweë die identiteit

$$\cos^3 x = \frac{1}{4}(3\cos x + \cos(3x)).$$

(Jy hoef nie hierdie identiteit te ken nie! Maar dit kan maklik afgelei word uit die identitet $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$). Met ander woorde,

$$f = \frac{3}{4}f_1 + \frac{1}{4}f_2.$$

Let op dat hierdie voorbeeld wys dat f ook 'n trigonometriese polinoom is (sien Voorbeeld 1.18 , selfs al is die oorspronklike formule $f(x) = \cos(3x)$ nie van die form (1.52) nie.

Definisie 10. Ons sê dat die lys vektore $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ in 'n vektorruimte V V *span* as elke vektor $\mathbf{v} \in V$ 'n lineêre kombinasie van $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ is.

Voorbeeld 2.4. $\mathbb{R}^2$ word deur

$$\mathbf{e}_1 := (1,\, 0),\ \ \mathbf{e}_2 := (0, 1)$$

gespan, want elke vektor $\mathbf{v} = (a_1,\, a_2)$ kan as 'n lineêre kombinasie

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2$$

uitgedruk word.

Voorbeeld 2.5. $\mathbb{R}^2$ word ook deur

$$\mathbf{f}_1 := (-1, 2),\ \mathbf{f}_2 := (1, 1),\ \mathbf{f}_3 := (2, -1)$$

gespan. Sien Figuur 2.1. Let daarop dat elke vektor $\mathbf{v}$ geskryf kan vord as 'n lineêre kombinasie van $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ op meer as een manier (oneindig baie maniere, as't ware). Byvoorbeeld,

$$(2, 3) = 3\mathbf{f}_1 - \frac{1}{3}\mathbf{f}_2 + \frac{8}{3}\mathbf{f}_3 \tag{2.3}$$

$$(2, 3) = 2\mathbf{f}_1 + \frac{2}{3}\mathbf{f}_2 + \frac{5}{3}\mathbf{f}_3 \tag{2.4}$$

movebackintoexample

Oefening 34. Bevestig dat vergelykings (2.3) en (2.4) korrek is.

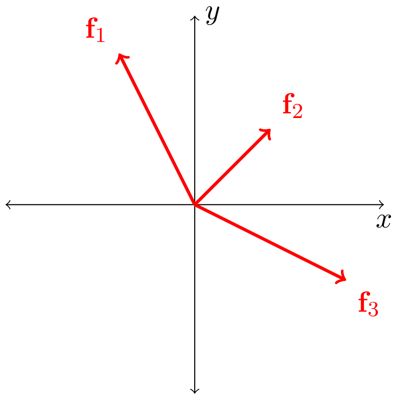
Voorbeeld 2.6. $\mathbb{R}^n$ word deur

$$\mathbf{e}_1 := (1, 0, \ldots, 0),\ \ \mathbf{e}_2 := (0, 1, \ldots, 0),\ \ \ldots,\ \ \mathbf{e}_n := (0, 0, \ldots, 0, 1) \tag{2.5}$$

gespan, want elke vektor $\mathbf{v} = (a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_n)$ kan as 'n lineêre kombinasie

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \cdots + a_n\mathbf{e}_n. \tag{2.6}$$

uitgedruk word.



Figuur 2.1: 'n Lys vektore wat $\mathbb{R}^2$ span.

Oefening 35. Bevestig die korrektheid van (2.6).

Verdere oefeninge vir 2.1

Oefening 36. Beskou die volgende polinome in Poly_2:

$$\mathbf{r}_1(x) := 3x^2 - 2,\ \mathbf{r}_2(x) := x^2 + x,\ \mathbf{r}_3(x) := x + 1,\ \mathbf{r}_4(x) := x - 1$$

1. Kan die polinoom $\mathbf{p}$ met $\mathbf{p}(x) = x^2 + 1$ as 'n lineêre kombinasie van $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$, $\mathbf{r}_4$ geskryf word?
2. Indien wel, in *hoeveel verskillende maniere* kan dit gedoen word?

Oefening 37. Veronderstel die vektore $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ en $\mathbf{e}_4$ span 'n vektorruimte V. Wys dat die vektore $\mathbf{f}_1 := \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1$, $\mathbf{f}_2 := \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2$, $\mathbf{f}_3 := \mathbf{e}_4 - \mathbf{e}_3$, $\mathbf{f}_4 := \mathbf{e}_4$ ook V span.

Oefening 38. Wys dat die polinome

$$\mathbf{q}_0(x) := 1,\ \ \mathbf{q}_1(x) := x,\ \ \mathbf{q}_2(x) := 2x^2 - 1,\ \ \mathbf{q}_3(x) := 4x^3 - 3x$$

Poly_3 span.

2.2 Lineêre onafhanklikheid

Definisie 11. 'n Lys van vektore $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ in 'n vektorruimte V is *lineêr onafhanklik* as die vergelyking

$$k_1\mathbf{e}_1 + k_2\mathbf{e}_2 + \cdots k_n\mathbf{e}_n = \mathbf{0} \tag{2.7}$$

slegs die triviale oplossing $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$ het. Andersins word die lys vektore $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ *lineêr afhanklik* genoem.

Opmerking 12. Veronderstel een van die vektore in die versameling $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_n$ is die nul-vektor $\mathbf{0}$; byvoorbeeld, veronderstel $\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$. Dan moet die lys vektore lineêr afhanklik wees, omdat vergelyking (2.7) die nie-triviale oplossing $k_1 = 1$, $k_2 = k_2 = \cdots = k_n = 0$ het.

Opmerking 13. Die kriteria vir 'n lys vektore $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ om lineêr onafhanklik te wees,

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots k_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$$

is duidelik ekwivalent aan die kriteria dat

> Al die vektore $\mathbf{v}_i$ nie nul is nie en geen een as 'n nie-triviale lineêre kombinasie van die ander uitgedruk kan word nie.

Oefening 39. Bewys opmerking 13.

Voorbeeld 2.7. Die lys van vektore $\mathbf{f}_1 = (-1, 2)$ en $\mathbf{f}_2 = (1, 1)$ uit Voorbeeld 2.5 is lineêr onafhanklik, omdat die vergelyking

$$k_1(-1, 2) + k_2(1, 1) = (0, 0)$$

ekwivalent is aan die sisteem van vergelykings

$$\begin{cases} -k_1 + k_2 = 0 \\ 2k_1 + k_2 = 0 \end{cases} \tag{2.8}$$

wat slegs die trivale oplossing $k_1 = 0$ en $k_2 = 0$ het.

movebackintoexample

Oefening 40. Bevestig dat (2.8) slegs die triviale oplossing het.

Voorbeeld 2.8. Die vektore $\mathbf{f}_1 = (-1, 2)$, $\mathbf{f}_2 = (1, 1)$, $\mathbf{f}_3 = (2, -1)$ uit Voorbeeld 2.5 is lineêr afhanklik, want die vergelyking

$$k_1(-1, 2) + k_2(1, 1) + k_3(2, -1) = (0, 0) \tag{2.9}$$

is ekwivalent aan die sisteem van vergelykings

$$\begin{cases} -k_1 + k_2 + 2k_3 = 0 \\ 2k_1 + k_2 - k_3 = 0 \end{cases} \tag{2.10}$$

wat 'n een-dimensionele vektorruimte van oplossings het wat deur t parameteriseer word,

$$k_1 = t,\ k_2 = -t,\ k_3 = t, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2.11}$$

Byvoorbeeld, vir $t = 2$, is

$$2(-1,\ 2) - 2(1,\ 1) + 2(2,\ -1) = (0,\ 0)$$

sodat (2.9) non-triviale oplossings het.

movebackintoexample

Oefening 41. Wys dat (2.10) die oplossingsversameling (2.11) het.

Voorbeeld 2.9. Die lys polinome

$$\mathbf{q}_0(x) := 1,\ \mathbf{q}_1(x) := x,\ \mathbf{q}_2(x) := 2x^2 - 1,\ \mathbf{q}_3(x) := 4x^3 - 3x$$

uit Voorbeeld 38 is lineêr onafhanklik in Poly_3. Dit is omdat die vergelyking

$$k_0\mathbf{q}_0 + k_1\mathbf{q}_1 + k_2\mathbf{q}_2 + k_3\mathbf{q}_3 = \mathbf{0}$$

vereenvoudig as die volgende polinoomvergelyking:

$$4k_3x^3 + 2k_2x^2 + (-3k_3 + k_1)x + (-k_2 + k_0) = 0$$

Hierdie is ekwivalent aan die volgende stelsel vergelykings,

$$\begin{cases} & & & & 4k_3 = 0 \\ & & 2k_2 & & = 0 \\ & k_1 & & - & 3k_3 = 0 \\ k_0 & - & k_2 & & = 0 \end{cases}$$

wat slegs die triviale oplossing $k_0 = k_1 = k_2 = k_3 = 0$ het.

Op die oomblik is die definisie van lineêre afhanklikheid van vektore dat hulle nie lineêr onafhanklik is nie. Dit kan baie verwarrend wees! Hier is 'n meer direkte manier om aan lineêre afhanklikheid van vektore te dink.

Proposisie 14 (Lineêre kombinase van voorafgaande vektore)**.** *Laat* $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\ldots$, $\mathbf{v}_n$ *'n lys vektore in 'n vektorruimte* V *wees. Die volgende stellings is ekwivalent:*

1. *Die lys vektore* $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_n$ *is lineêr afhanklik.*
2. *Óf* $\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$*, óf vir 'n* $r \in \{2, 3, \ldots, n\}$*, is* $\mathbf{v}_r$ *'n lineêre kombinasie van* $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_{r-1}$.

Bewys. (1) $\Rightarrow$ (2). Veronderstel die lys $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_n$ is lineêr afhanklik. Dit beteken dat daar skalare. k_1, k_2, ..., k_n bestaan, waarvan nie almal nul is nie, sodat

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}. \tag{2.12}$$

Laat $r \in \{1, 2, \ldots, n\}$ die grootste index wees sodat $k_r \neq 0$. (Ons weet dat nie alle k_i is nul nie, so dit maak sin.) As $r = 1$, dan is (2.12) eenvoudig die vergelyking

$$k_1\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}, \quad \text{waar } k_1 \neq 0.$$

Daarom is $\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$ volgens Lemma 6 en ons is klaar. Andersins, veronderstel $r \neq 1$. Dan word (2.12) die vergelyking

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_r\mathbf{v}_r = \mathbf{0}, \quad \text{waar } k_r \neq 0.$$

Deur met k_r te deel, kan ons nou vir $\mathbf{v}_r$ oplos in terme van die voorafgaande vektore $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_{r-1}$:

$$\therefore \mathbf{v}_r = -\frac{k_1}{k_r}\mathbf{v}_1 - \frac{k_2}{k_r}\mathbf{v}_2 - \cdots - \frac{k_{r-1}}{k_r}\mathbf{v}_{r-1}\,.$$

(2) $\Rightarrow$ (1). As $\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$, dan is die lys vektore $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_n$ sonder twyfel lineêr afhanklik deur Opmerking 12. Andersins, veronderstel dat vir 'n $r \in \{2, 3, \ldots, n\}$ is $\mathbf{v}_r$ 'n lineêre kombinasie van die voorafgaande vektore, dit is

$$\mathbf{v}_r = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{r-1}\mathbf{v}_{r-1}.$$

Dan volg dit duidelik dat

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{r-1}\mathbf{v}_{r-1} - \mathbf{v}_r + 0\mathbf{v}_{r+1} + \cdots + 0\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

wat wys dat die vektore $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_n$ nie lineêr onafhanklik is nie, aangesien nie al die koëffisiënte nul is nie — in besonder is die koëffisiënt van $\mathbf{v}_r$ gelyk aan -1. □

Ek noem dit die 'Lineêre Kombinasie van Voorafgaande Vektore Proposisie'. Jy moet al jou stellings name gee, dit sal joyu help om hulle te onthou en hulle beter te leer ken.

Voorbeeld 2.10. Ons het in Voorbeeld 2.8 gesien dat die lys vektore $\mathbf{f}_1 = (-1,\ 2)$, $\mathbf{f}_2 = (1,\ 1)$, $\mathbf{f}_3 = (2,\ -1)$ in $\mathbb{R}^3$ lineêr afhanklik is. Daarom, deur Proposisie 14, het ons óf:

- $\mathbf{f}_1 = \mathbf{0}$ (nie waar nie), óf
- $\mathbf{f}_2$ is 'n skalaarveelvoud van $\mathbf{f}_1$ (nie waar nie), óf
- $\mathbf{f}_3$ is 'n lineêre kombinasie van $\mathbf{f}_1$ en $\mathbf{f}_2$, wat waar is:

$$\mathbf{f}_3 = -\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2$$

Proposisie 15 (Afstampproposisie)**.** *Veronderstel* $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \ldots, \mathbf{l}_m$ *is 'n lineêr onafhanklike lys vektore in 'n vektorruimte* V *en dat* $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_n$ V *span. Dan is* $m \leq n$*.*

Bewys. Begin met die oorspronglike lys vektore

$$\mathcal{S} = \{\ L_0 :\ \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_n\} \tag{2.13}$$

wat V span en oorweeg die 'opgeblase' lys

$$\mathcal{S}' = \{\ \mathbf{l}_1, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \cdots, \mathbf{s}_n.\} \tag{2.14}$$

Omdat $\mathbf{l}_1$ 'n lineêre kombinasie van $\mathbf{s}_i$ is, is hierdie lys lineêr afhanklik volgens Opmerking 13. Dus, deur Proposisie14 (Lineêre Kombinasie van Voorafgaande Vektore), kan een van die $\mathbf{s}$-vektore, sê $\mathbf{s}_r$, uitgedruk word as 'n lineêre kombinasie van die voorafgaande vektore. Ons kan dan $\mathbf{s}_r$ uit die lys verwyder ('afstamp'), en die resulterende lys

$$\mathcal{S}_1 := \{\ \mathbf{l}_1, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \cdots, \hat{\mathbf{s}_r}, \cdots, \mathbf{s}_n\} \qquad (\mathbf{s}_r \text{ weggelaat}) \tag{2.15}$$

span steeds V. Ons kan so aangaan en elke keer 'n $\mathbf{l}$-vektor oorplaas op dieselfde manier, om elke keer by 'n nuwe lys L_2, L_3, L_4, en so voorts uit te kom, waar lys L_k $(n-k)$ $\mathbf{s}$-vektore bevat.

Veronderstel $m > n$. Dan sal die lys L_n slegs $\mathbf{l}$-vektore bevat,

$$\mathcal{S}_n :\ \mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \ldots, \mathbf{l}_n$$

en dit span V volgens konstruksie. Maar daar bly not 'n paar $\mathbf{l}$-vektore $\mathbf{l}_{n+1}, \ldots \mathbf{l}_m$ oor! Dit dui daarop dat $\mathbf{l}_{n+1}$ 'n lineêre kombinasie van vektore in L_n is, wat in teenstelling is met die feit dat die lys vektore $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \ldots, \mathbf{l}_m$ lineêr onafhanklik is. So dit kan nie wees dat $m > n$, daarom is $m \leq n$. □

Verdere oefeninge vir 2.2

Oefening 42. Wys dat die lys vektore (2, 3, 1), (1, −1, 2), (7, 3, c) lineêr afhanklik in $\mathbb{R}^3$ is as en slegs as $c = 8$.

Oefening 43. Die lys vektore in $\mathrm{Mat}_{2,2}$ gegee deur

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

is lineêr onafhanklik (ons sal dit in Oefening 52 bewys, maar ter wille van hierdie vraag kan jy aanvaar dat dit waar is). Herhaal dieselfde stappe as in Voorbeeld 2.10 om die eerste vektor in die lys te vind wat of die nulvektor of ’n lineêre kombinasie van die voorafgaande vektore is.

2.3 Basis en dimensie

Definisie 16. ’n Lys vektore $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, …, $\mathbf{e}_n$ in ’n vektorruimte V word ’n *basis* van V genoem as dit lineêr onafhanklik is en V span.

Daar is ’n meer direkte manier om oor ’n basis te dink.

Proposisie 17 (Basisse gee koördinate)**.** *’n Lys vektore* $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, …, $\mathbf{e}_n$ *in ’n vektorruimte* V *is ’n basis van* V *as en slegs as elke vektor* $\mathbf{v} \in V$ *op presies* een *manier as ’n lineêre kombinasie*

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \cdots + a_n\mathbf{e}_n \tag{2.16}$$

geskryf kan word. Dit is, vir elke $\mathbf{v} \in V$ **bestaan** *daar skalare* a_1, a_2, …, a_n *wat* (2.16) *bevredig en verder is hierdie skalare* **uniek**.

Dit is belangrik om die wiskundige frase ‘daar bestaan ’n unieke X wat Y bevredig’ te verstaan. Dit beteken twee dinge. Eerstens, daar *bestaan* ’n X wat Y bevredig. Tweedens, daar *geen ander* X wat Y bevredig nie.

Ons noem die skalare $a_1, a_2, \ldots, a_n$ in (2.16) die *koördinate* van $\mathbf{v}$ in die basis $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$.

Bewys. $\Rightarrow$. Veronderstel dat die lys vektore $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ 'n basis vir V vorm. Veronderstel $\mathbf{v} \in V$. Omdat die lys vektore V span, weet ons dat ons $\mathbf{v}$ as 'n lineêre kombinasie van vektore in die lys op ten minste een manier *kan* skryf,

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \cdots + a_n\mathbf{e}_n. \tag{2.17}$$

Ons moet wys dat dit die *enigste* manier is om $\mathbf{v}$ as 'n lineêre kombinasie van die vektore $\mathbf{e}_i$ uit te druk. Veronderstel ons het ook

$$\mathbf{v} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + \cdots + b_n\mathbf{e}_n. \tag{2.18}$$

Die verskil van die twee vergelykings lewer

$$\mathbf{0} = (a_1 - b_1)\mathbf{e}_1 + (a_2 - b_2)\mathbf{e}_2 + \cdots + (a_n - b_n)\mathbf{e}_n.$$

Omdat die lys vektore $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ lineêr onafhanklik is, kom ons tot die gevolgtrekking dat

$$a_1 - b_1 = 0,\ a_2 - b_2 = 0,\ \cdots,\ a_n - b_n = 0.$$

Dit is, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, ensovoorts tot en met $a_n = b_n$ en daarom is (2.17) uniek.

$\Leftarrow$. Aan die ander kant, veronderstel dat elke vektor $\mathbf{v}$ as 'n unieke lineêre kombinasie

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \cdots + a_n\mathbf{e}_n$$

geskryf kan word. Die feit dat elke $\mathbf{v}$ as 'n lineêre kombinasie van $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ geskryf *kan* word, beteken hulle span V. Ons moet steeds wys dat hulle lineêr onafhanklik is. So, veronderstel daar bestaan skalare b_1, b_2, ..., b_n, sodat

$$b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + \cdots + b_n\mathbf{e}_n = \mathbf{0}. \tag{2.19}$$

Ons moet wys dat b_i almal nul moet wees. Ons weet reeds van *een* moontlike oplossing van (2.19) : stel elke $b_i = 0$. Maar ons weet ook dat elke vektor (spesifiek, die vektor $\mathbf{0}$) op presies een manier as 'n lineêre kombinasie van vektore $\mathbf{e}_i$ uitgedurk kan word. Daarom moet dit die enigste oplossing wees, i.e. ons vind dat $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$, en daarom is die lys vektore $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ lineêr onafhanklik. □

Stelling 18 (Konstantheid van dimensie)**.** *As* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ *en* $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ *basisse van 'n vektorruimte* V *is, dan is* $m = n$.

Bewys. Dit is 'n gevolg van Proposisie 15 (die afstampproposisie). Aangesien die $\mathbf{e}$-vectore V lineêr onfafhanklik is en die $\mathbf{f}$-vektore V span, het ons $m \leq n$. Aan die ander kant, omdat die $\mathbf{f}$-vektore linêr onfahanklik is en die $\mathbf{e}$-vektore V span, het ons $n \leq m$. Daarom is $m = n$. □

Definisie 19. ’n Vektorruimte V is *eindigdimensioneel* as dit ’n eindige basis het. In daardie geval is die *dimensie* van V die aantal elemente in ’n basis vir V. ’n Vektorruimte is *oneindigdimensioneel* as dit nie eindigdimensioneel is nie.

Let op dat die konsep van die ‘dimensie van ’n vektorruimte’ slegs goedgedefinieerd is as gevolg van Stelling 18.

Voorbeeld 2.11 (Standaard basis vir $\mathbb{R}^n$)**.** Die lys vektore

$$\mathbf{e}_1 := (1, 0, \dots, 0), \ \ \mathbf{e}_2 := (0, 1, \dots, 0), \ \ \dots, \ \ \mathbf{e}_n := (0, 0, \dots, 0, 1)$$

is ’n basis vir $\mathbb{R}^n$. Ons het reeds in Voorbeeld 2.6 gesien dat die lys $\mathbb{R}^n$ span. Ons moet seker maak dat die lys lineêr onafhanklik is. So, suppose that

$$a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \cdots + a_n\mathbf{e}_n = \mathbf{0}.$$

Uitbreiding van die linkerkant na komponente volgens die definisie van die standaard basisvektore $\mathbf{e}_i$ lewer die vergelyking

$$(a_1, 0, 0, \dots, 0) + (0, a_2, 0, \dots, 0) + \cdots + (0, 0, 0, \dots, a_n) = (0, 0, 0, \dots, 0).$$

Met ander woorde, ons het dat

$$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) = (0, 0, 0, \dots, 0)$$

wat beteken dat $a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_n = 0$, presies wat ons moes bewys. Gevolglik is die lys vektore $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ lineêr onafhanklik en daarom is dit ’n basis vir $\mathbb{R}^n$. So $\mathbb{R}^n$ het dimensie n.

Voorbeeld 2.12. Die lys polinome

$$\mathbf{p}_0(x) := 1, \ \mathbf{p}_1(x) := x, \ \mathbf{p}_2(x) := x^2, \ \dots, \ \mathbf{p}_n(x) := x^n$$

is ’n basis vir Poly_n, so $\dim \mathrm{Poly}_n = n + 1$. Duidelik span hierdie lys Poly_n per definisie, so ons moet net seker maak dat hulle lineêr onafhanklik is. Veronderstel dat

$$a_0\mathbf{p}_0 + a_1\mathbf{p}_1 + a_2\mathbf{p}_2 + \cdots + a_n\mathbf{p}_n = \mathbf{0}.$$

Dit is 'n vergelyking van funksies, so dit geld vir alle $x \in \mathbb{R}$! Met ander woorde, vir *alle* $x \in \mathbb{R}$ het ons het die vergelyking

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = 0. \tag{2.20}$$

Maar, ons weet uit algebra dat 'n polinoom van die vorm (2.20) met nie-nul koëffisiënte *meestens n* wortels $x_1, x_2, \ldots, x_n$ het . So, die koëffisiënte moet nul wees, i.e. $a_0 = a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$, wat is wat ons moes bewys.

Voorbeeld 2.13. Veronderstel X is 'n eindige versameling. Dan is $\text{Fun}(X)$ eindig-dimensioneel, met dimensie $|X|$, waar die basis gegee word deur die funksies $\mathbf{f}_a$, $a \in X$, gedefinieer deur:

$$\mathbf{f}_a(x) := \begin{cases} 1 & \text{if } x = a \\ 0 & \text{andersins} \end{cases} \tag{2.21}$$

Ons sal dit in 'n reeks oefeninge bewys.

Die formule aan die regterkant van (2.21) kom so gereeld in wiskunde voor dat ons dit 'n spesiale simbool gee, naamlik δ_{ab} (die 'Kronecker-delta'). Hierdie simbool staan vir die formule: "As $a = b$, gee die waarde 1. As $a \neq b$, gee die waarde 0". In hierdie taal kan ons die definisie van die funksies$\mathbf{f}_a$ as

$$\mathbf{f}_a(x) := \delta_{ax} \tag{2.22}$$

herskryf.

movebackintoexample (both)

Oefening 44. Veronderstel $X = \left\{ \text{𓄿}, \text{𓁹}, \text{𓏴} \right\}$.

1. Evalueer die funksie $\mathbf{f}_{\text{𓄿}}$ vir elke $x \in X$.
2. Wys dat elke funksie $\mathbf{f} \in \text{Fun}(X)$ as 'n lineêre kombinasie van $\mathbf{f}_{\text{𓄿}}$, $\mathbf{f}_{\text{𓁹}}$ en $\mathbf{f}_{\text{𓏴}}$ geskryf kan word.

Oefening 45. Nou, laat X 'n arbitrêre eindige versameling wees. Oorweeg die versameling funksies

$$\mathbf{f}_a,\ a \in X$$

Wys dat hierdie versameling (i) $\mathrm{Fun}(X)$ span en (ii) lineêr onafhanklik is.

Voorbeeld 2.14. Trig_n is $(2n+1)$-dimensioneel, met basis

$$\mathbf{T}_0(x) := 1,\ \ \mathbf{T}_1(x) := \cos x,\ \mathbf{T}_2(x) := \sin x,\ \mathbf{T}_3(x) := \cos 2x,$$
$$\mathbf{T}_4(x) := \sin 2x,\ \ldots,\ \mathbf{T}_{2n-1}(x) := \cos nx,\ \mathbf{T}_{2n}(x) := \sin nx. \quad (2.23)$$

Hierdie funksies span Trig_n per definisie. Hulle is ook lineêr onafhanklik, alhoewel ons dit nie sal bewys nie.

Voorbeeld 2.15. Die dimensie van $\mathrm{Mat}_{n,m}$ is nm. 'n Basis word gegee deur die matrikse

$$\mathsf{E}_{ij}, \quad i = 1\ldots n,\ j = 1\ldots m$$

wat 'n 1 in ry i en kolom j het, en nulle orals elders.

Normaalweg is A 'n matriks en A_{ij} is die element van die matriks in die posisie (i,j). Maar nou is E_{ij} 'n matriks in eie reg! 'n Element in posisie (k,l) sal geskryf word as $(\mathsf{E}_{ij})_{kl}$. Ek hoop jy vind dit nie te verwarrend nie. Trouens, ons kan 'n elegante formule vir die elemente van E_{ij} neerskryf deur gebruik te maak van die Kronecker delta-simbool:

$$(\mathsf{E}_{ij})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl} \quad (2.24)$$

***

movebackintoexample ***

Oefening 46. Kontroleer dat (A.1) wel die korrekte formule vir die matrikselemente van E_{ij} gee.

Voorbeeld 2.16. Die standaard basis van $\mathrm{Mat}_{2,2}$ is

$$\mathsf{E}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathsf{E}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathsf{E}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathsf{E}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Voorbeeld 2.17. Die standaard basis van Col_n is

$$\mathbf{e}_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \mathbf{e}_n := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ons gaan nou deelruimtes van vektorruimtes se dimensie bestudeer.

Proposisie 20. *Laat W 'n deelruimte van 'n eindig-dimensionele vektorruimte V wees. Dan is W eindig-dimensioneel, en* $\mathrm{Dim}(W) \leq \mathrm{Dim}(V)$.

Bewys. Laat $n = \mathrm{Dim}(V)$. As $W = \{\mathbf{0}\}$, dan is die stelling duidelik waar. Veronderstel $W \neq \{\mathbf{0}\}$. Kies 'n nie-nul vektor $\mathbf{e}_1 \in W$ en vorm die lys $\mathcal{B}_1 = \{\mathbf{e}_1\}$. As dit W span, dan is ons klaar. Indien nie, dan bestaan daar $\mathbf{e}_2 \in W$ wat nie 'n skalaarveelvoud van $\mathbf{e}_1$ is nie. Oorweeg nou die lys $\mathcal{B}_2 = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. As dit W span, dan is ons klaar. Indien nie, dan bestaan daar 'n vektor $\mathbf{e}_3 \in W$ wat nie 'n lineêre kombinasie van $\mathbf{e}_1$ en $\mathbf{e}_2$ is nie. Oorweeg die nuwe lys $\mathcal{B}_3 = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. En so voorts.

Hierdie proses moet uiteindelik termineer. Dit is, daar bestaan 'n $k \geq 1$, sodat $\mathcal{B}_k = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$ W span, en gevolglik 'n basis vir W is. Dit is omdat elke lys $\mathcal{B}_i$ lineêr onafhanklik is (volgens konstruksie is geen vektor 'n lineêre kombinasie van die voorafgaande vektore nie). En dit is onmoonltik om 'n lineêr onafhanklik lys vektore in W (en daarom in V) saam te stel wat meer as n elemente het nie, volgens die Afstampproposisie. Dit wys dat $k \leq n$. □

Dit is goed om 'n voorbeeld van 'n oneindig-dimensionele vektorruimte te hê.

Proposisie 21. Poly *is oneindigdimensioneel.*

Bewys. Veronderstel Poly is eindigdimensioneel. Dit beteken daar bestaan 'n eindige versameling polinome $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$ wat Poly span. Maar, laat d

die hoogste graad van al die polinome in die lys $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$ wees. Dan is $\mathbf{p} := x^{d+1}$ 'n polinoom wat nie in die span van $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$ is nie, want die sommering en skalaarvermenigvuldiging van polinome kan nooit die graad verhoog nie. Ons het 'n teenstelling bereik. So ons aanvanklike aanname kan nie waar wees nie, i.e. Poly kan nie eindigdimensioneel wees nie. □

Voorbeeld 2.18. Ons sal dit nie hier bewys nie, maar die volgende vektorruimtes is ook eindigdimensioneel:

- $\mathbb{R}^\infty$,
- $\mathrm{Fun}(X)$ waar X 'n eindige versameling is,
- $\mathrm{Cont}(I)$ vir enige nie-leë interval I en
- $\mathrm{Diff}(I)$ vir enige oop interval I.

2.3.1 Sifting

As ons die bewys van Proposisie 15 (die 'Afstampproposisie') noukeurig bestudeer, vind ons dat dit van 'n *sif-algoritme* gebruik maak. Hierdie algoritme kan op *enige* lys vektore $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ in 'n vektorruimte toegepas word. Beskou elke vektor $\mathbf{v}_i$ in so 'n lys opeenvolgend. As $\mathbf{v}_i$ die nul-vektor is, of as dit 'n lineêre kombinasie van die voorafgaande vektore $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}$ is, verwyder dit van die lys.

Voorbeeld 2.19. Sif die volgende lys vektore in $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} &\mathbf{v}_1 = (1, 2, -1), && \mathbf{v}_2 = (0, 0, 0), && \mathbf{v}_3 = (3, 6, -3) \\ &\mathbf{v}_4 = (1, 0, 5), && \mathbf{v}_5 = (5, 4, 13), && \mathbf{v}_6 = (1, 1, 0). \end{aligned}$$

Ons begin met $\mathbf{v}_1$. Aangesien dit nie die nul-vektor is nie en nie 'n lineêre kombinasie van enige voorafgaande vektore is nie, bly dit in die lys. Nou beweeg ons aan na $\mathbf{v}_2$, wat nul is, so ons verwyder dit. Ons skuif aan na $\mathbf{v}_3$, wat ons deur inspeksie vasstel dat dit as$3\mathbf{v}_1$ geskryf kan word, so ons verwyder dit. Ons beweeg aan na $\mathbf{v}_4$. Dit is nie nul nie, en dit kan nie as 'n veelvoud van $\mathbf{v}_1$ uitgedruk word nie (bevestig dit vir jouself), so dit bly in die lys. Ons beweeg aan na $\mathbf{v}_5$. Ons kyk of dit as die lineêre kombinasie

$$\mathbf{v}_5 = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_4$$

geskryf kan word en vind die oplossing $a = 2, b = 3$ (bevestig self), so ons verwyder dit. Uiteindelik kom ons by $\mathbf{v}_6$. Ons ondersoek of dit as 'n lineêre kombinasie

$$\mathbf{v}_6 = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_4$$

geskryf kan word en vind geen oplossings nie (bevestig self), so dit bly in die lys. Ons finale gesifte lys is

$$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_6.$$

movebackintoexample

Oefening 47. Doen die drie 'bevestig self'-bewerkings hierbo.

Die volgende resultate wys dat sifting a baie nuttige manier is om 'n basis vir 'n vektorruimte te konstrueer!

Lemma 22. *As 'n lys vektore* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ *'n vektorruimte* V *span, dan sal sifting van die lys in 'n basis vir* V *resulteer.*

Bewys. By elke stap vind ons dat 'n vektor wat uit die lys verwyder word óf die nul-vektor is, óf 'n lineêre kombinasie van die voorafgaande vektore is wat nié uit die lys verwyder word nie. So as ons die vektor uit die lys verwyder, sal die oorblywende vektore steeds V span. Daarom span die vektore in die finale lys steeds V.

Om te sien dat die finale gesifte lys lineêr onafhanklik is, pas ons Proposisie 14 toe. Deur konstruksie is geen vektor in die finale lys 'n lineêre kombinasie van die voorafgaande vektore nie (ander sou dit verwyder gewees het!). Daarom is die finale lys nie lineêr afhanklik nie, so dit moet lineêr onafhanklik wees! □

Gevolgtrekking 23. *Enige lineêr onafhanklike lys vektore* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ *in 'n eindig-dimensionele vektorruimte* V *kan uitgebrei word tot 'n basis van* V*.*

Bewys. Aangesien V eindig-dimensioneel is, het dit 'n basis $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$. Oorweeg nou die lys

$$L : \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$$

wat duidelik V span. Deur die lys te sif, sal ons 'n basis vir V kry, volgens Lemma 22. Sommige van die $\mathbf{e}$-vektore mag dalk verwyder wees in die proses. Maar geeneen van die $\mathbf{v}$-vektore sal verwyder word nie, aangesien dit sou beteken dat sommige vektore $\mathbf{v}_i$ 'n lineêre kombinasie van die voorafgaande vektore $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}$ is, wat onmoontlik is, omdat $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ 'n lineêr onafhanklike lys is. Dus ná sifting van die lys L brei ons ons die oorspronklike lys $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ uit na 'n basis van V. □

Gevolgtrekking 24. *As $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ 'n lineêr onafhanklike lys van n vektore in 'n n-dimensionele vektorruimte V is, dan is dit 'n basis.*

Bewys. Volgens Gevolgtrekking 23 kan ons $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ uitbrei tot 'n basis van V. Maar V het dimensie n, so die basis moet slegs n vektore bevat volgens Stelling 18 (Onveranderlikheid van Dimensie). Gevolglike het ons geen vektore bygevoeg nie, en ons oorspronklike lys is reeds 'n basis. □

Voorbeeld 2.20. In Voorbeeld 2.9 het ons gewys dat die lys polinome

$$\mathbf{q}_0(x) := 1, \;\; \mathbf{q}_1(x) := x, \;\; \mathbf{q}_2(x) := 2x^2 - 1, \;\; \mathbf{q}_3(x) := 4x^3 - 3x$$

lineêr onafhanklik in Poly_3 is. Aangesien $\dim \text{Poly}_3 = 4$, sien ons dat dit 'n basis vir Poly_3 is.

In Oefening 38 het jy gewys dat $\mathbf{q}_0, \ldots, \mathbf{q}_3$ 'n basis vir Poly_3 is deur 'n 'brute krag' benadering. Hierdie nuwe metode is *verskillend*!

Verdere oefeninge vir 2.3

Oefening 48. Sif die lys vektore

$$\begin{array}{lll} \mathbf{v}_1 = (0,0,0), & \mathbf{v}_2 = (1,0,-1), & \mathbf{v}_3 = (1,2,3) \\ \mathbf{v}_4 = (3,4,5), & \mathbf{v}_5 = (4,8,12), & \mathbf{v}_6 = (1,1,0). \end{array}$$

Oefening 49. Laat V 'n vektorruimte van dimensie n wees. Besluit (en skryf jou besluit neer!) of die volgende bewerings waar of onwaar is. As dit waar is, bewys dit. Indien nie, gee 'n teenvoorbeeld.

(a) Enige lineêr onafhanklike lys vektore in V bevat hoogstens n vektore.

(b) Enige lys vektore wat V span bevat ten minste n vektore.

Oefening 50. Laat $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ 'n lineêr onafhanklike lys vektore in 'n vektorruimte V wees. Veronderstel dat $\mathbf{v}$ 'n vektor in V is wat nie as 'n lineêre kombinasie van die vektore uit $\mathcal{B}$ geskryf kan word nie. Toon aan dat die lys $\mathcal{B}' = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}\}$ lineêr onafhanklik is. (Wenk: Gebruik die Lineêre Kombinasie van Voorafgaande Vektore Proposisie.)

Oefening 51. Voltooi die bewys van die volgende Lemma.

Lemma. Veronderstel dat V 'n vektorruimte van dimensie n is. Dan is enige lineêr onafhanklike lys van n vektore in V 'n basis vir V.

Bewys. Laat $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ 'n lineêr onafhanklike lys vektore in V wees.

Veronderstel dat $\mathcal{B}$ *nie* 'n basis vir V is nie.

Daarom span $\mathcal{B}$ nie V nie, want... (a)

Daarom bestaan daar $\mathbf{v} \in V$ sodanig dat ... (b)

Voeg nou $\mathbf{v}$ by die lys $\mathcal{B}$ om 'n nuwe lys te vorm, $\mathcal{B}' :=$ ... (c)

Die nuwe lys $\mathcal{B}'$ is lineêr onafhanklik omdat ... (d)

Dit is 'n teenstelling, omdat ... (e)

Dus $\mathcal{B}$ moet 'n basis vir V wees.

Oefening 52. Gebruik Oefening 49(a) om aan te toon dat die lys matrikse in $\mathrm{Mat}_{2,2}$ vanaf Oefening 43 lineêr onafhanklik is.

Oefening 53. In elke geval, gebruik die resultate uit Oefeninge 49 en 51 om te bepaal of $\mathcal{B}$ 'n basis vir V is:

(a) $V = \mathrm{Poly}_2$, $\mathcal{B} = \{2 + x^2,\ 1 - x,\ 1 + x - 3x^2,\ x - x^2\}$

(b) $V = \mathrm{Mat}_{2,2}$, $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \right\}$

(c) $V = \mathrm{Trig}_2$, $\mathcal{B} = \left\{\sin^2 x,\ \cos^2 x,\ 1 - \sin 2x,\ \cos 2x + 3\sin 2x\right\}$

Oefening 54. Laat $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ 'n lineêr onafhanklike lys vektore in 'n vektorruimte V wees. Skryf neer of die volgende bewerings waar of onwaar is. As dit waar is, bewys dit. As dit onwaar is, gee 'n teenvoorbeeld. Wenk: Gebruik die definisie van lineêre onafhanklikheid.

(a) Die lys $\{\mathbf{u} + \mathbf{v},\ \mathbf{v} + \mathbf{w},\ \mathbf{u} + \mathbf{w}\}$ is lineêr onafhanklik.

(b) Die lys $\{\mathbf{u} - \mathbf{v},\ \mathbf{v} - \mathbf{w},\ \mathbf{u} - \mathbf{w}\}$ is lineêr onafhanklik.

Oefening 55. Vir elkeen van die volgende, toon aan dat V 'n deelruimte van Poly_2 is, vind 'n basis vir V, en bereken $\dim V$.

(a) $V = \{p \in \mathrm{Poly}_2 : p(2) = 0\}$

(b) $V = \{p \in \mathrm{Poly}_2 : xp'(x) = p(x)\}$

2.4 Koördinaatvektore

Definisie 25. Laat $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ 'n basis vir vektorruimte V wees, en laat $\mathbf{v} \in V$. Skryf

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{b}_1 + a_2\mathbf{b}_2 + \cdots + \mathbf{a}_n\mathbf{b}_n\,.$$

Dan word die kolomvektor

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} := \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathrm{Col}_n$$

die *koördinaatvektor van* $\mathbf{v}$ *met betrekking tot basis* $\mathcal{B}$ genoem.

Ek dui aan dat 'n kolleksie objekte 'n *lys* is (waar volgorde van belang is) en nie bloot 'n *versameling* nie (waar dit nie van belang is nie) deur van my eie tuisgemaakte simbole { en } gebruik te maak. 'n BAsis $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n\}$ is 'n lys van vektore. Die volgorde van die vektore is van belang want dit affekteer die koördinaatvektor $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$.

Voorbeeld 2.21. Vind die koördinaatvektor van $\mathbf{p} = 2x^2 - 2x + 3$ met betrekking tot die basis $\mathcal{B} = \{1 + x, x^2 + x - 1, x^2 + x + 1\}$ van Poly_3.

Oplossing. Ons skryf $\mathbf{p}$ as 'n lineêre kombinasie van polinome van die basis $\mathcal{B}$:

$$2x^2 - 2x + 3 = -4(1 + x) - \frac{5}{2}(x^2 + x - 1) + \frac{9}{2}(x^2 + x + 1)$$

***

$$[\mathbf{p}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -4 \\ -\frac{5}{2} \\ \frac{9}{2} \end{bmatrix}$$

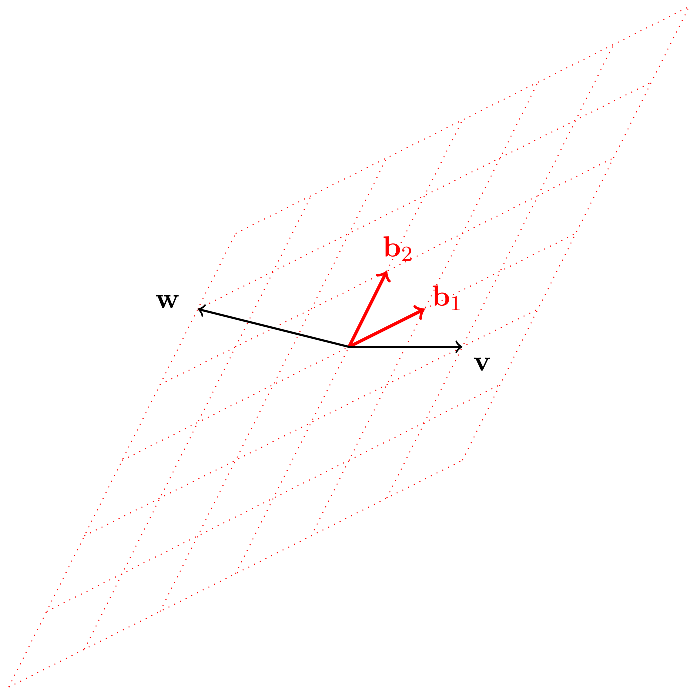
***movebackintoexample

Oefening 56. Bevestig dit!

Voorbeeld 2.22. Vind die koördinaatvektore van $\mathbf{v}$ en $\mathbf{w}$ in Figuur 2.2 met betrekking tot die basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$.

Oplossing. Deur inspeksie sien ons dat $\mathbf{v} = 2\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2$, sodat

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$



Figuur 2.2: Die basis B vir $\mathbb{R}^2$.

Ook deur inspeksie sien ons dat $\mathbf{w} = -3\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2$, sodat

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Voorbeeld 2.23. Vind die koördinaatvektor van die funksie $\mathbf{f}$ gegee deur

$$\mathbf{f}(x) = \sin^2 x - \cos^3 x$$

met betrekking tot die standaard basis

$$\mathcal{S} = \{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos 3x, \sin 3x\}$$

van Trig_3.

Oplossing. Met die sommeringsformules vir sin en cos soos in Oefening 23 bereken ons

$$\sin^2 x - \cos^3 x = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\cos x - \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{4}\cos 3x.$$

*** Gevolglik

$$[\mathbf{f}]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \end{bmatrix}$$

.

***movebackintoexample

Oefening 57. Bevestig hierdie berekeninge!

Lemma 26. *Laat $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ 'n basis vir 'n vektorruimte V wees. Dan het ons dat vir alle vektore $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ en alle skalare k*

(a) $[\mathbf{v} + \mathbf{w}]_{\mathcal{B}} = [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} + [\mathbf{w}]_{\mathcal{B}}$

(b) $[k\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = k[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$

Bewys. (a) Veronderstel dat

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \cdots + a_n\mathbf{e}_n$$

en

$$\mathbf{w} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + \cdots + b_n\mathbf{e}_n\,.$$

Dan, deur van die reëls van 'n vektorruimte gebruik te maak, bereken ons

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (a_1 + b_1)\mathbf{e}_1 + (a_2 + b_2)\mathbf{e}_2 + \cdots + (a_n + b_n)\mathbf{e}_n\,.$$

Van hier af lees ons dat

$$[\mathbf{v} + \mathbf{w}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{bmatrix}.$$

Die bewys van (b) is soortgelyk. □

Verdere oefeninge vir 2.4

Oefening 58. Bewys Lemma 26(b) in die geval waar V twee-dimensioneel is, sodat $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. Verduidelik elke stap met die toepaslike reël van 'n vektorruimte.

Oefening 59. Laat $\mathcal{B}$ die volgende basis van $\mathrm{Mat}_{2,2}$ wees:

$$\mathsf{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathsf{B}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathsf{B}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathsf{B}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Bereken $[\mathsf{A}]_{\mathcal{B}}$, waar

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Oefening 60. In Oefening 53 is jy gevra om 'n basis $\mathcal{B}$ vir die vektorruimte

$$V := \{p \in \mathrm{Poly}_2 : p(2) = 0\}$$

te bepaal. Beskou $p(x) = x^2 + x - 6$.

(a) Toon aan dat $p \in V$.

(b) Bereken die koördinaatvektor van p met betrekking tot jou basis $\mathcal{B}$. Met ander woorde, bereken $[p]_{\mathcal{B}}$.

2.5 Basisverandering

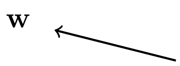
2.5.1 Koördinaatvektore verskil in verskillende basisse

Veronderstel dat $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ en $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\}$ twee verskillende basisse vir $\mathbb{R}^2$ is, geïllustreer soos volg:

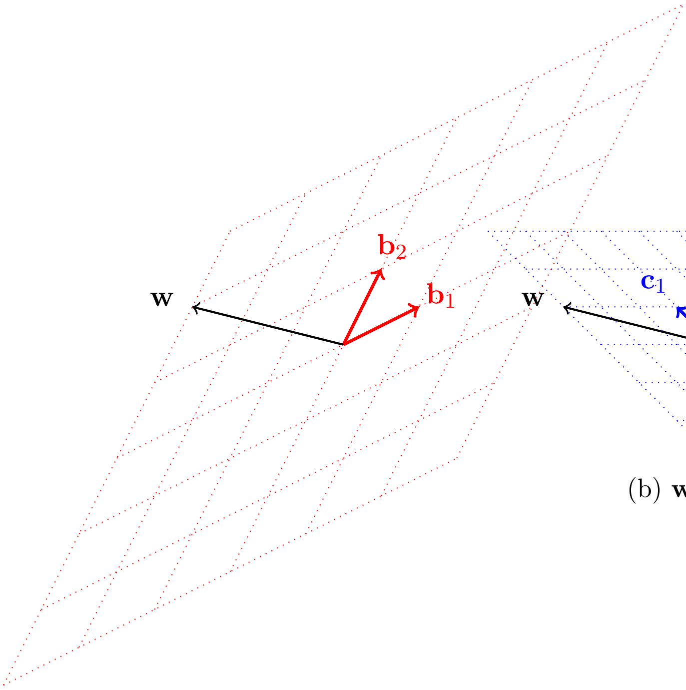
(a) Die basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ (b) Die basis $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\}$

Figuur 2.3: Twee verskillende basisse vir $\mathbb{R}^2$

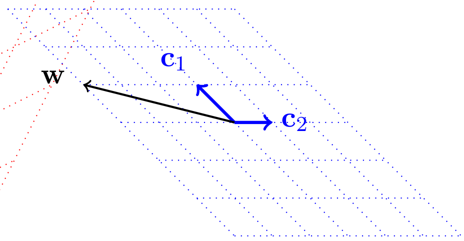
Veronderstel ons word 'n vektor $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ gegee:



Ons wil die koördinaatvektor van *dieselfde* vektor $\mathbf{w}$ relatief tot twee verskillende basisse $\mathcal{B}$ en $\mathcal{C}$ bereken.



(a) $\mathbf{w} = -3\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2$



(b) $\mathbf{w} = \mathbf{c}_1 - 3\mathbf{c}_2$

Met hierdie spesifieke vektor **w**, uit Figuur**??**(a) sien ons dat in die basis $\mathcal{B}$ het ons

$$\mathbf{w} = -3\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 \qquad \therefore\ [\mathbf{w}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}. \tag{2.25}$$

Aan die anderkant, in basis $\mathcal{C}$ het ons

$$\mathbf{w} = \mathbf{c}_1 - 3\mathbf{c}_2 \qquad \therefore\ [\mathbf{w}]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}. \tag{2.26}$$

So *dieselfde* vektor **w** het verskillende koördinaatvektore $[\mathbf{w}]_{\mathcal{B}}$ en $[\mathbf{w}]_{\mathcal{C}}$ relatief tot die basisse $\mathcal{B}$ en $\mathcal{C}$!

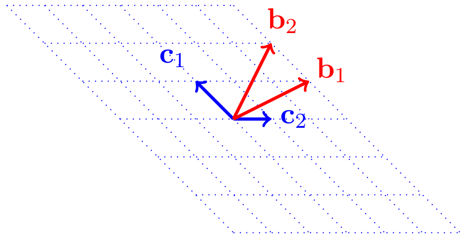
2.5.2 Omskakeling van een basis na 'n ander

Veronderstel nou ons het slegs $[\mathbf{w}]_{\mathcal{B}}$, die koördinaatvektor van **w** in basis $\mathcal{B}$. Met ander woorde, veronderstel ons weet net dat

$$[\mathbf{w}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix},$$

dit is, $\mathbf{w} = -3\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2$. Hoe kan ons $[\mathbf{w}]_{\mathcal{C}}$, die koördinaatvektor van **w** in die basis $\mathcal{C}$ bereken?

Die beste benadering is om elke vektor in $\mathcal{B}$ as 'n lineêre kombinasie van die basisvektore in $\mathcal{C}$ uit te druk. In die volgende figuur word die vektore $\mathbf{b}_1$ en $\mathbf{b}_2$ uitgebeeld teen die agtergrond van die basis $\mathcal{C}$:



Ons lees af dat:

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{c}_1 + 3\mathbf{c}_2 \tag{2.27}$$
$$\mathbf{b}_2 = 2\mathbf{c}_1 + 3\mathbf{c}_2 \tag{2.28}$$

Daarom bereken ons:

$$\begin{aligned}\mathbf{w} &= -3\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2\\ &= -3(\mathbf{c}_1 + 3\mathbf{c}_2) + 2(2\mathbf{c}_1 + 3\mathbf{c}_2)\\ &= \mathbf{c}_1 - 3\mathbf{c}_2\end{aligned}$$

Hiervan lees ons af dat

$$[\mathbf{w}]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} \tag{2.29}$$

Wat die korrekte antwoord is, soos ons weet uit (2.26).

Hierdie berekening kan in terme van matrikse uitgedruk word.

Definisie 27. Laat $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ en $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n\}$ basisse vir 'n vektorruimte V wees. Die *basisomskakelingsmatriks van $\mathcal{B}$ na $\mathcal{C}$* is die $n \times n$-matriks waarvan die kolomme die koördinaatvektore $[\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}}, \ldots, [\mathbf{b}_n]_{\mathcal{C}}$ is:

$$\mathsf{P}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} := \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \end{bmatrix}_{\mathcal{C}} & \begin{bmatrix} \mathbf{b}_2 \end{bmatrix}_{\mathcal{C}} & \cdots & \begin{bmatrix} \mathbf{b}_n \end{bmatrix}_{\mathcal{C}} \end{bmatrix}$$

Voorbeeld 2.24. In die deurlopende voorbeeld, sien ons uit (2.27) en (2.28) dat

$$[\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{b}_2]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Daarom is die basisomskakelingsmatriks van $\mathcal{B}$ na $\mathcal{C}$

$$\mathsf{P}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Voordat ons verder gaan, hersien ons 'n aspek van matriksvermenigvuldiging. Veronderstel ons groepeer m kolomvektore saam om 'n matriks te vorm:

$$\begin{bmatrix} \boxed{\mathsf{C}_1} & \boxed{\mathsf{C}_2} & \cdots & \boxed{\mathsf{C}_m} \end{bmatrix}$$

(Ons basisomskakelingsmatriks $\mathsf{P}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ is so gevorm.) Dan word die produk van hierdie matriks met 'n kolomvektor soos volg bereken:

$$\begin{bmatrix} \boxed{\mathsf{C}_1} & \boxed{\mathsf{C}_2} & \cdots & \boxed{\mathsf{C}_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = a_1 \boxed{\mathsf{C}_1} + a_2 \boxed{\mathsf{C}_2} + \cdots + a_n \boxed{\mathsf{C}_m} \tag{2.30}$$

Oefening 61. Bewys die bostaande formule!

Ons kan nou die volgende stelling bewys.

Stelling 28 (Basisomskakeling)**.** *Veronderstel dat* $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ *en* $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n\}$ *basisse vir 'n vektorruimte* V *is, en laat* $\mathsf{P}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ *die basiskomskakelingsmatriks van* $\mathcal{B}$ *na* $\mathcal{C}$ *wees. Dan, vir alle vektore* $\mathbf{v}$ *in* V*,*

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} = \mathsf{P}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}. \tag{2.31}$$

Bewys. Laat $\mathbf{v} \in V$. Brei $\mathbf{v}$ uit in die basis $\mathcal{B}$:

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{b}_1 + a_2\mathbf{b}_2 + \cdots + a_n\mathbf{b}_n, \quad \text{i.e. } [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

Dan,

$$\begin{aligned}
[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} &= [a_1\mathbf{b}_1 + \cdots + a_n\mathbf{b}_n]_{\mathcal{C}} \\
&= a_1[\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}} + \cdots + a_n[\mathbf{b}_n]_{\mathcal{C}} && \text{(volgens Lemma 26)} \\
&= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ \mathbf{b}_1 \\ \\ \end{bmatrix}_{\mathcal{C}} & \begin{bmatrix} \\ \mathbf{b}_2 \\ \\ \end{bmatrix}_{\mathcal{C}} & \cdots & \begin{bmatrix} \\ \mathbf{b}_n \\ \\ \end{bmatrix}_{\mathcal{C}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} && \text{(volgens (2.30))} \\
&= \mathsf{P}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}\,.
\end{aligned}$$

□

Voorbeeld 2.25. In ons deurlopende voorbeeld, sê die stelling dat vir *enige* vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$,

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}.$$

Dit geld dan ook vir ons vektor $\mathbf{w}$, waarvan die koördinate in die basis $\mathbf{B}$ is:

$$[\mathbf{w}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

So in hierdie geval sê die stelling dat

$$[\mathbf{w}]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

wat met ons vorige berekening (2.29) ooreenstem!

Verdere oefeninge vir 2.5

Oefening 62. Dit is 'n voortsetting van Oefening 59. Beskou die volgende twee basisse vir $\mathrm{Mat}_{2,2}$:

$$\mathcal{B} = \left\{ \mathsf{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathsf{B}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \mathsf{B}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathsf{B}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{C} = \left\{ \mathsf{C}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathsf{C}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathsf{C}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathsf{C}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right\}$$

(a) Bereken die basisomskakelingmatrikse $\mathsf{P}_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$ en $\mathsf{P}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}$.

(b) Bereken $[\mathsf{A}]_{\mathcal{B}}$ en $[\mathsf{A}]_{\mathcal{C}}$, waar

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

(c) Gaan na dat $[\mathsf{A}]_{\mathcal{C}} = \mathsf{P}_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}[\mathsf{A}]_{\mathcal{B}}$ en dat $[\mathsf{A}]_{\mathcal{B}} = \mathsf{P}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}[\mathsf{A}]_{\mathcal{C}}$.

Oefening 63. Bereken die basisomskakelingmatriks $\mathsf{P}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{S}}$ van die standaardbasis

$$\mathcal{S} = \{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x\}$$

van Trig_2 na die basis

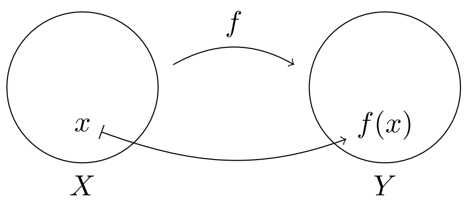
$$\mathcal{B} = \{1, \cos x, \sin x, \cos^2 x, \sin^2 x\}.$$

Hoofstuk 3

Lineêre afbeeldings

3.1 Definisie en Voorbeelde

Herinner jouself daaraan dat 'n *funksie* (of 'n *afbeelding*) $f : X \to Y$ van 'n versameling X na 'n versameling Y maar net 'n reël is wat aan elke element van X 'n element $f(x)$ van Y toeken. Ons skryf $x \mapsto f(x)$ om aan te dui dat 'n element $x \in X$ op $f(x) \in Y$ afbeeld deur die funksie f. Sien Figuur 3.1. Twee funksies $f, g : X \to Y$ is *gelyk* as $f(x) = g(x)$ vir alle x in X.



Figuur 3.1: 'n Funksie $f : X \to Y$.

Definisie 29. Laat V en W vektorruimtes wees. 'n *lineêre afbeelding* van V na W is 'n funksie $T : V \to W$ wat die volgende bevredig:

- $T(\mathbf{v} + \mathbf{v}') = T(\mathbf{v}) + T(\mathbf{v}')$ vir alle vektore $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V$
- $T(k\mathbf{v}) = kT(\mathbf{v})$ vir alle vektore $\mathbf{v} \in V$ en skalare $k \in \mathbb{R}$

'n Ander naam vir 'n lineêre afbeelding is 'n *lineêre transformasie*.

Voorbeeld 3.1 (Identiteitsafbeelding)**.** Laat V 'n vektorruimte wees. Die funksie

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_V : V &\to V \\ \mathbf{v} &\mapsto \mathbf{v} \end{aligned}$$

word die *identiteitsafbeelding* op V genoem. Die is duidelik 'n lineêre afbeelding, omdat

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_V(\mathbf{v}+\mathbf{w}) &= \mathbf{v}+\mathbf{w} \\ &= \mathrm{id}_V(\mathbf{v}) + \mathrm{id}_V(\mathbf{w}) \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_V(k\mathbf{v}) &= k\mathbf{v} \\ &= k\,\mathrm{id}_V(\mathbf{v}). \end{aligned}$$

Voorbeeld 3.2 (Projeksie)**.** Die funksie

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto x \end{aligned}$$

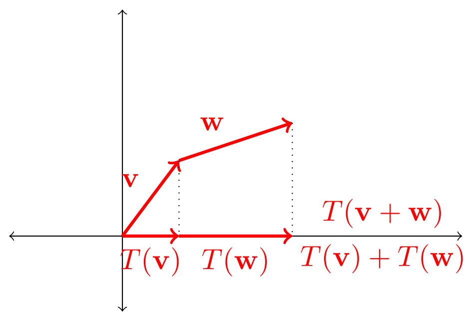
wat vektore op die x-as projekteer is 'n lineêre afbeelding.

Kom ons bevestig sommering algebraïes:

$$T\left((x_1,y_1)) + ((x_2,y_2)\right) \stackrel{?}{=} T\left((x_1,y_1)\right) + T\left((x_2,y_2)\right)$$

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= T\left((x_1+x_2, y_1+y_2)\right) \\ &= x_1 + x_2 \end{aligned} \qquad\qquad \text{RHS} = x_1 + x_2$$

Hier is 'n grafiese weergawe van hierdie bewys:



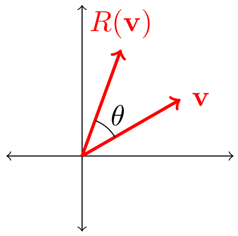
movebackintoexampel

Oefening 64. Bewys algebraïes dat $T(k\mathbf{v}) = kT(\mathbf{v})$, sodat T 'n lineêre afbeelding is.

Voorbeeld 3.3 (Rotasie)**.** Neem 'n vaste hoek θ. Die funksie

$$\begin{aligned} R : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ \mathbf{v} &\mapsto \text{rotasie van } \mathbf{v} \text{ anti-kloksgewys met 'n hoek } \theta \end{aligned}$$

is 'n lineêre afbeelding, met 'n soortgelyke grafiese argument as in Voorbeeld 3.2.



Voorbeeld 3.4. (Kruisproduk met 'n vaste vektor) Neem 'n vaste vektor $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Die funksie

$$\begin{aligned} C : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{v} &\mapsto \mathbf{w} \times \mathbf{v} \end{aligned}$$

is 'n lineêre afbeelding as gevolg van die eienskappe van die kruisproduk,

$$\begin{aligned} \mathbf{w} \times (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) &= \mathbf{w} \times \mathbf{v}_1 + \mathbf{w} \times \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{w} \times (k\mathbf{v}) &= k\mathbf{w} \times \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Voorbeeld 3.5. (Dotproduk met 'n vaste vektor) Neem 'n vaste vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$. Die funksie

$$\begin{aligned} D : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R} \\ \mathbf{v} &\mapsto \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \end{aligned}$$

(hier is $\cdot$ die dotproduk van vektore, nie skalaarvermenigvuldiging nie!) is 'n lineêre afbeelding, vanweë die eienskappe

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{u} \times \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{u} \cdot (k\mathbf{v}) &= k\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Ons sal binnekort sien dat *alle* lineêre afbeeldings $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ (inderwaarheid alle lineêre afbeeldings $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$) van hierdie vorm is.

Voorbeeld 3.6. (Differensiasie) Die bewerking 'neem die afgeleide' kan as 'n lineêre afbeelding

$$\begin{aligned} D : \mathrm{Poly}_n &\to \mathrm{Poly}_{n-1} \\ \mathbf{p} &\mapsto \mathbf{p}' \end{aligned}$$

interpreteer word. Byvoorbeeld, $D(2x^3 - 6x + 2) = 6x - 6$.

movebackintoexample

Oefening 65. (a) Hoekom is D 'n afbeelding van Poly_n na Poly_{n-1}? (b) Bevestig dat D lineêr is.

Voorbeeld 3.7. (Anti-afgeleide) Die operasie 'find die unieke anti-afgeleide met nul as konstante term' kan as 'n lineêre afbeelding

$$\begin{aligned} A : \mathrm{Poly}_n &\to \mathrm{Poly}_{n+1} \\ \mathbf{p} &\mapsto \int_0^x \mathbf{p}(t)\, dt \end{aligned}$$

interpreteer word. Byvoorbeeld, $A(2x^3 - 6x + 2) = 4x^4 - 3x^2 + 2x$.

movebackintoexample

Oefening 66. (a) Bevestig die korrektheid van die laaste sin. (b) Hoekom is A 'n afbeelding vanaf Poly_n na Poly_{n+1}? (c) Bevestig dat A lineêr is.

Voorbeeld 3.8 (Skuifafbeelding)**.** Definieer die 'skuif aan met 1'-afbeelding

$$\begin{aligned} S : \mathrm{Poly}_n &\to \mathrm{Poly}_n \\ \mathbf{p} &\mapsto S(\mathbf{p}) \end{aligned}$$

as $S(\mathbf{p})(x) = \mathbf{p}(x-1)$.

movebackintoexample (both)

Oefening 67. Gaan na dat S 'n lineêre afbeelding is.

Oorweeg die geval $n = 3$. In terme van die standaard basis

$$\mathbf{p}_0(x) = 1,\ \mathbf{p}_1(x) = x,\ \mathbf{p}_2(x) = x^2,\ \mathbf{p}_3(x) = x^3$$

van Poly_3, het ons:

$$\begin{aligned} S(\mathbf{p}_0) &= \mathbf{p}_0 \\ S(\mathbf{p}_1) &= \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0 \\ S(\mathbf{p}_2) &= \mathbf{p}_2 - 2\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_0 \\ S(\mathbf{p}_3) &= \mathbf{p}_3 - 3\mathbf{p}_2 + 3\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0 \end{aligned}$$

Oefening 68. Bevestig dit.

Voorbeeld 3.9 (Matrikse dien as lineêre afbeeldings)**.** Elke $n \times m$-matriks A induseer 'n *lineêre afbeelding*

$$\begin{aligned} T_{\mathsf{A}} : \mathrm{Col}_m &\to \mathrm{Col}_n \\ \mathbf{v} &\mapsto \mathsf{A}\mathbf{v}\,. \end{aligned}$$

Dit is, $T_{\mathsf{A}}(\mathbf{v}) := \mathsf{A}\mathbf{v}$ is die matriksproduk van A met die kolomvektor $\mathbf{v}$. Die feit dat T_{A} wel 'n lineêre afbeelding is volg vanuit die lineariteit van matriksvermenigvuldiging (Proposisien 69 deel 2 en3).

Let daarop dat 'n $n \times m$-matriks 'n lineêre afbeelding vanaf Col_m na Col_n is!

Lemma 30. *Veronderstel $T : V \to W$ is 'n lineêre afbeelding. Dan volg dit dat*

1. $T(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$
2. $T(-\mathbf{v}) = -T(\mathbf{v})$ *vir alle vektore* $\mathbf{v} \in V$.

Bewys. Ons werk soos volg:

1.

$$\begin{aligned} T(\mathbf{0}_V) &= T(0\mathbf{0}_V) && \text{(R8 toegepas op } \mathbf{v} = \mathbf{0}_V \in V) \\ &= 0T(\mathbf{0}_V) && \text{(T is lineêr)} \\ &= \mathbf{0}_W && \text{(R8 toegepas op } \mathbf{v} = T(\mathbf{0}_V) \in W) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} T(-\mathbf{v}) &= T((-1)\mathbf{v}) && \text{(defn van } -\mathbf{v} \text{ in } V) \\ &= (-1)T(\mathbf{v}) && \text{(T is lineêr)} \\ &= -T(\mathbf{v}) && \text{(defn van } -T(\mathbf{v}) \text{ in } W) \end{aligned}$$

□

Die volgende resultaat is baie belangrik. Dit wys dat as ons weet hoe 'n lineêre afbeelding op 'n basis tewerk gaan, dan weet ons hoe dit optree op die hele vektorruimte (dit is waar 'uniekheid' inkom). Verder kan ons willekeurig 'n formule opmaak vir wat T met die basisvektore doen en ons is gewaarborg dat dit sal uitbrei tot 'n lineêre afbeelding wat op die hele vektorruimte gedefinieer is (dit is waarna die 'bestaan' deel verwys).

Proposisie 31 (Voldoende om 'n lineêre afbeelding op 'n basis te definieer)**.** *Veronderstel $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m\}$ is 'n basis vir V en $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m$ is vektore in W. Dan bestaan daar 'n unieke lineêre afbeelding $T : V \to W$ sodat*

$$T(\mathbf{e}_i) = \mathbf{w}_i, \quad i = 1 \dots m.$$

Bewys. Bestaansbewys. Om 'n lineêre afbeelding T tedefinieer, moet ons $T(\mathbf{v})$ vir elke vektor $\mathbf{v}$ definieer. Ons kan $\mathbf{v}$ in terme van sy koördinaatvektor $[\mathbf{v}]_\mathcal{B}$ met betrekking tot die basis $\mathcal{B}$ as

$$\mathbf{v} = [\mathbf{v}]_{\mathcal{B},1}\mathbf{e}_1 + \dots + [\mathbf{v}]_{\mathcal{B},m}\mathbf{e}_m \tag{3.1}$$

skryf, waar $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B},i}$ die inskrywing in ry i van die koördinaatvektor $[\mathbf{v}]_\mathcal{B}$ is. Ons definieer

$$T(\mathbf{v}) := [\mathbf{v}]_{\mathcal{B},1}\mathbf{w}_1 + [\mathbf{v}]_{\mathcal{B},2}\mathbf{w}_2 + \cdots [\mathbf{v}]_{\mathcal{B},m}\mathbf{w}_m. \tag{3.2}$$

Duidelik het ons $T(\mathbf{e}_i) = \mathbf{w}_i$. Om die bestaansbewys te voltooi, moet ons wys dat T lineêr is:

$$\begin{aligned}
T(\mathbf{v}+\mathbf{v}') &= [\mathbf{v}+\mathbf{v}']_{\mathcal{B},1}\mathbf{w}_1 + \cdots + [\mathbf{v}+\mathbf{v}']_{\mathcal{B},m}\mathbf{w}_m \\
&= \big([\mathbf{v}]_{\mathcal{B},1} + [\mathbf{v}']_{\mathcal{B},1}\big)\mathbf{w}_1 + \cdots + \big([\mathbf{v}]_{\mathcal{B},m} + [\mathbf{v}']_{\mathcal{B},m}\big)\mathbf{w}_m \quad ([\mathbf{v}+\mathbf{v}']_{\mathcal{B}} = [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} + [\mathbf{v}']_{\mathcal{B}}) \\
&= [\mathbf{v}]_{\mathcal{B},1}\mathbf{w}_1 + \cdots + [\mathbf{v}]_{\mathcal{B},m}\mathbf{w}_m + \\
&\qquad [\mathbf{v}']_{\mathcal{B},1}\mathbf{w}_1 + \cdots + [\mathbf{v}']_{\mathcal{B},m}\mathbf{w}_m \\
&= T(\mathbf{v}) + T(\mathbf{w}).
\end{aligned}$$

Net so kan ons bevestig dat $T(k\mathbf{v}) = kT(\mathbf{v})$, wat die bestaansbewys voltooi.

Uniekheidsbewys. Veronderstel dat $S, T : V \to W$ lineêre afbeeldings is met

$$S(\mathbf{e}_i) = \mathbf{w}_i, \quad \text{en} \quad T(\mathbf{e}_i) = \mathbf{w}_i, \quad i = 1 \ldots m. \tag{3.3}$$

Dan,

$$\begin{aligned}
S(\mathbf{v}) &= S\big([\mathbf{v}]_{\mathcal{B},1}\mathbf{e}_1 + \cdots + [\mathbf{v}]_{\mathcal{B},m}\mathbf{e}_m\big) \\
&= [\mathbf{v}]_{\mathcal{B},1}S(\mathbf{e}_1) + \cdots + [\mathbf{v}]_{\mathcal{B},m}S(\mathbf{e}_m) && (S \text{ is lineêr}) \\
&= [\mathbf{v}]_{\mathcal{B},1}\mathbf{w}_1 + \cdots + [\mathbf{v}]_{\mathcal{B},m}\mathbf{w}_m && (\text{want } S(\mathbf{e}_i) = \mathbf{w}_i) \\
&= [\mathbf{v}]_{\mathcal{B},1}T(\mathbf{e}_1) + \cdots + [\mathbf{v}]_{\mathcal{B},m}T(\mathbf{e}_m) && (\text{want } T(\mathbf{e}_i) = \mathbf{w}_i) \\
&= T([\mathbf{v}]_{\mathcal{B},1}\mathbf{e}_1 + \cdots + [\mathbf{v}]_{\mathcal{B},m}\mathbf{e}_m) && (T \text{ is lineêr}) \\
&= T(\mathbf{v}).
\end{aligned}$$

Gevolglik $S = T$, met ander woorde, die lineêre afbeelding wat (3.3) bevredig is uniek. □

Voorbeeld 3.10. As 'n voorbeeld van Proposisie 31, definieer ons die 'n lineêre afbeelding

$$T\,\mathrm{Col}_2 \qquad \to \mathrm{Fun}(\mathbb{R})$$

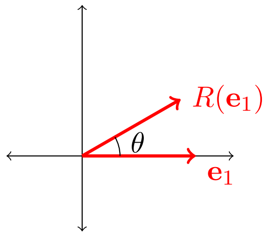
bloot deur die werking op die standaard basis van Col_2 te definieer. Byvoorbeeld, ons bepaal

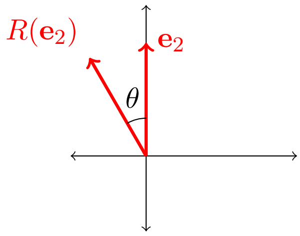
$$\begin{aligned}
\mathsf{e}_1 &\to f_1 \\
\mathsf{e}_2 &\to f_2
\end{aligned}$$

Die punt is dat ons vry is om e_1 en e_2 na *enige funksies* f_1 en f_2 wat ons wil te stuur, en ons is gewaarborg dat dit 'n goed-gedefinieerde lineêre afbeelding $T : \mathrm{Col}_2 \to \mathrm{Fun}(\mathbb{R})$ sal gee. Byvoorbeeld, ons stel $f_1(x) = \sin x$ en $f_2(x) = |x|$. Dan is die algemene formule vir T

$$T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right)(x) = a \sin x + b|x|$$

Voorbeeld 3.11 (Rotasie-afbeelding op die standaard basis)**.** Kom ons bereken die aksie van die 'anti-kloksgewyse rotasie met θ'-afbeelding R van Voorbeeld 3.3 met betrekking tot die standaard basis $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ van $\mathbb{R}^2$.





Vanuit die figuur het ons:

$$R(\mathbf{e}_1) = (\cos\theta, \sin\theta) \qquad\qquad R(\mathbf{e}_2) = (-\sin\theta, \cos\theta)$$

sodat

$$R(\mathbf{e}_1) = \cos\theta\,\mathbf{e}_1 + \sin\theta\,\mathbf{e}_2, \quad R(\mathbf{e}_2) = -\sin\theta\,\mathbf{e}_1 + \cos\theta\,\mathbf{e}_2.$$

Nou wat ons die aksie van R op die standaard basisvektore verstaan, kan ons die aksie op 'n arbitrêre vektor $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ bereken:

$$\begin{aligned} R\left((x, y)\right) &= R(x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2) \\ &= xR(\mathbf{e}_1) + yR(\mathbf{e}_2) \\ &= x(\cos\theta, \sin\theta) + y(-\sin\theta, \cos\theta) \\ &= (x\cos\theta - y\sin\theta,\ x\sin\theta + y\cos\theta). \end{aligned}$$

Verdere oefeninge vir 3.1

Oefening 69. Laat V 'n vektorruimte wees en laat $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ 'n vaste vektor wees. Definieer die afbeelding T soos volg:

$$\begin{aligned} T : V &\to V \\ \mathbf{v} &\mapsto \mathbf{a} + \mathbf{v} \end{aligned}$$

(a) Is T 'n lineêre afbeelding? (Ja of nee)

(b) Bewys jou antwoord vir (a).

Oefening 70. Beskou die afbeelding $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ wat deur $T\left((x, y, z)\right) = (z, x, y)$ gegee word.

(a) Is T 'n lineêre afbeelding? (Ja of nee)

(b) Bewys jou antwoord vir (a).

Oefening 71. Definieer die 'vermenigvuldig met x^2'-afbeelding

$$\begin{aligned} M : \mathrm{Poly}_n &\to \mathrm{Poly}_{n+2} \\ \mathbf{p} &\mapsto M(\mathbf{p}) \end{aligned}$$

waar $M(\mathbf{p})(x) = x^2\mathbf{p}(x)$.

(a) Hoekom beeld M Poly_n op Poly_{n+2} af?

(b) Bewys dat M lineêr is.

(c) Bereken die aksie van M op die standaard basis vir Poly_3, soos in Voorbeeld 3.8.

Oefening 72. Definieer die 'integreer oor die interval $[-1, 1]$'-afbeelding

$$\begin{aligned} I : \mathrm{Poly}_n &\to \mathbb{R} \\ \mathbf{p} &\mapsto \int_{-1}^{1} \mathbf{p}(x)\, dx \end{aligned}$$

(a) Bewys dat I lineêr is.

(b) Bereken die aksie van I met betrekking tot die standaard basis $\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_3$ vir Poly_3.

(c) Bereken die aksie van I met betrekking tot die basis $\mathbf{q}_0, \ldots, \mathbf{q}_3$ vir Poly_3 uit Voorbeeld 2.9.

Oefening 73. Bereken die aksie van die differensiasie-afbeelding $D : \mathrm{Poly}_4 \to \mathrm{Poly}_3$ uit Voorbeeld 3.6 met betrekking tot die standaard basisse van die twee vektorruimtes.

Oefening 74. Beskou die kruisproduk-lineêre afbeelding $C : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uit Voorbeeld 3.4 in die geval $\mathbf{w} = (1, 2, 3)$. Bereken die aksie van C met betrekking tot die standaard basis van $\mathbb{R}^3$.

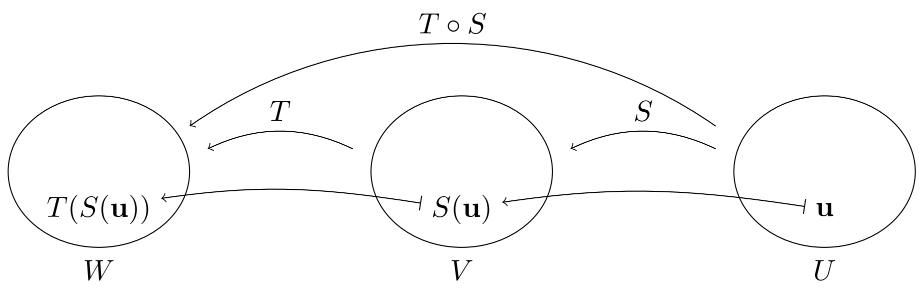
3.2 Komposisie van lineêre afbeeldings

Definisie 32. As $S : U \to V$ en $T : V \to W$ lineêre afbeeldings is, dan is die *komposisie van T met S* die afbeelding $T \circ S : U \to W$ gedefinieer as

$$(T \circ S)(\mathbf{u}) := T(S(\mathbf{u}))$$

waar $\mathbf{u}$ in U is.

Sien Figuur 3.2.



Figuur 3.2: Komposisie van lineêre afbeeldings.

Volgens wiskundige konvensie skryf ons die evaluering van funksies van regs na links, bv. $f(x)$. Dit wil sê, jy begin met die regterkantste simbool, x, dan pas jy f daarop toe. Daarom is die mees natuurlike manier om hierdie prentjies te teken van regs na links!

Voorbeeld 3.12. Laat $S : \mathbb{R}^3 \to \mathrm{Poly}_2$ en $T : \mathrm{Poly}_2 \to \mathrm{Poly}_4$ lineêre afbeeldings wees wat soos volg gedefinieer word:

$$S((a, b, c)) := ax^2 + (a - b)x + c, \quad T(p(x)) = x^2 p(x).$$

Dan kan $T \circ S$ soos volg bereken word:

$$\begin{aligned}(T \circ S)((a, b, c)) &= T(S((a, b, c))) \\ &= T(ax^2 + (a - b)x + c) \\ &= x^2(ax^2 + (a - b)x + c) \\ &= ax^4 + (a - b)x^3 + cx^2.\end{aligned}$$

Proposisie 33. *As $S : U \to V$ en $T : V \to W$ lineêre afbeeldings is, dan is $T \circ S : U \to W$ ook 'n lineêre afbeelding.*

Bewys. Laat $\mathbf{u_1}, \mathbf{u}_2 \in U$. Dan:

$$\begin{aligned}(T \circ S)(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) &= T(S(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2)) && (\text{defn van } T \circ S) \\ &= T(S(\mathbf{u}_1) + S(\mathbf{u}_2)) && (S \text{ is lineêr}) \\ &= T(S(\mathbf{u}_1)) + T(S(\mathbf{u}_2)) && (T \text{ is lineêr}) \\ &= (T \circ S)(\mathbf{u}_1) + (T \circ S)(\mathbf{u}_2) && (\text{defn van } T \circ S)\end{aligned}$$

Op soortgelyke wyse het ons

$$\begin{aligned}(T \circ S)(k\mathbf{u}) &= T(S(k\mathbf{u})) && \text{(defn van } T \circ S) \\ &= T(kS(\mathbf{u})) && (S \text{ is lineêr}) \\ &= kT(S(\mathbf{u})) && (T \text{ is lineêr}) \\ &= k(T \circ S)(\mathbf{u}) && \text{(defn van } T \circ S)\end{aligned}$$

□

Voorbeeld 3.13. Oorweeg as lineêre afbeeldings die anti-afgeleide (A) en die afgeleide (D)

$$\begin{aligned} A &: \mathrm{Poly}_n \to \mathrm{Poly}_{n+1} \\ D &: \mathrm{Poly}_{n+1} \to \mathrm{Poly}_n \,. \end{aligned}$$

Is $D \circ A = \mathrm{id}_{\mathrm{Poly}_n}$?

Oplossing. Ons bereken die aksie van $D \circ A$ op die basis x^k, $k = 0 \ldots n$ van Poly_n:

$$x^k \overset{A}{\mapsto} \frac{x^{k+1}}{k+1} \overset{D}{\mapsto} \frac{k+1}{k+1} x^k = x^k$$

Daarom, vir $k = 0 \ldots n$,

$$\begin{aligned}(D \circ A)(x^k) &= x^k \\ &= \mathrm{id}_{\mathrm{Poly}_n}(x^k).\end{aligned}$$

Omdat $D \circ A$ en $\mathrm{id}_{\mathrm{Poly}_n}$ op 'n basis van Poly_n ooreenstem, stem hulle ooreen met alle vektore $\mathbf{p} \in \mathrm{Poly}_n$ volgens Proposisie 31. Daarom is $D \circ A = \mathrm{id}_{\mathrm{Poly}_n}$.

Om die waarheid te sê, die stelling dat $D \circ A = \mathrm{id}_{\mathrm{Poly}_n}$ is presies Deel I van die Fundamentele Stelling van Calculus, toegepas op die spesiale geval van polinome!

movebackintoexample

Oefening 75. Is $A \circ D = \mathrm{id}_{\mathrm{Poly}_{n+1}}$? As dit is, bewys dit. Indien nie, gee 'n eksplisiete teenvoorbeeld.

Verdere oefeninge vir 3.2

Oefening 76. Laat $R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die 'rotasie met θ'-afbeelding van Voorbeeld 3.11 wees,

$$R((x, y)) = (x \cos\theta - y \sin\theta,\ xsin\theta + y \cos\theta).$$

Gaan algebraïes na dat $R_\phi \circ R_\theta = R_{\phi+\theta}$ deur die aksie van die lineêre afbeeldings op beide kante van die vergelyking op 'n arbitrêre vektor $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ te bereken.

Oefening 77. Laat $M : \mathrm{Poly}_3 \to \mathrm{Poly}_4$ die 'vermenigvuldig met x'-afbeelding wees, $M(p)(x) = xp(x)$. Laat $S : \mathrm{Poly}_4 \to \mathrm{Poly}_4$ die afbeelding $S(p(x)) = p(x - 1)$ wees. Net so, laat $T : \mathrm{Poly}_3 \to \mathrm{Poly}_3$ die afbeelding $T(p(x)) = p(x - 1)$ wees. Bereken $S \circ M$ en $M \circ T$. Is hulle gelyk?

3.3 Isomorfismes van vektorruimtes

Veronderstel jy het twee versamelings,

$$A = \{\text{voël}, \text{oog}, \text{persoon}\} \quad \text{en} \quad B = \left\{\text{鸟}, \text{目}, \text{人}\right\}.$$

Die elemente van A en B is nie *dieselfde* nie, so A is nie *gelyk* aan B nie. Maar dit is nie heeltemal bevredigend nie — duidelik is die elemente van A net die Afrikaanse beskrywings van die Sjinese simbole in B. Hoe kan ons dit noukeurig wiskundig beskryf?

Ons kan twee afbeeldings definieer, byvoorbeeld

$$\begin{aligned} S : A &\to B \\ \text{voël} &\mapsto \text{鸟} \\ \text{oog} &\mapsto \text{目} \\ \text{persoon} &\mapsto \text{人} \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} T : B &\to A \\ \text{鸟} &\mapsto \text{voël} \\ \text{目} &\mapsto \text{oog} \\ \text{人} &\mapsto \text{persoon}. \end{aligned}$$

Dan neem ons waar dat

$$T \circ S = \mathrm{id}_A \quad \text{and} \quad S \circ T = \mathrm{id}_B\,. \tag{3.4}$$

’n Paar afbeeldings $S : A \to B$ en $T : B \to A$ wat (3.4) bevredig word ’n *isomorfisme van versamelings* tussen A en B genoem. As jy wil, kan jy T as S^{-1} herdoop, omdat $S^{-1} \circ S = \mathrm{id}_A$ en $S \circ S^{-1} = \mathrm{id}_B$. (Om T van die begin af S^{-1} te noem sou voortydig gewees het. Ek moes dit eers definieer en seker maak dat dit (3.4) bevredig. Slegs dan het ek die reg om dit S^{-1} te noem!)

Dalk is jy ’n ietwat spaarsamige persoon. Jy sien die nut van die Afrikaans-na-Sjinese afbeelding S, maar nie die nut van die Sjinees-na-Afrikaanse afbeelding T nie. Buitendien, aangesien geen twee verskillende Afrikaanse woorde in A na dieselfde Sjinese simbool in B afgebeeld word nie (‘S is een-tot-een’) en elke Sjinese simbool $y \in B$ is gelyk aan $S(x)$ vir een of ander $x \in A$ (‘S is *op*’), het ons nie T nodig nie. Dit is oorbodig!

Hierop sou ek reageer soos volg: jy is reg, maar is dit nie nuttig om ’n eksplisiete Sjinees-na-Afrikaanse afbeelding T te hê nie? In boekwinkels word woordeboeke in pare geskep, in ’n enkele volume. Buitendien, as mens die Afrikaanse woord vir 鸟 wil opsoek, sal dit lastig wees om deur die hele Afrikaans-na-Sjinese woordeboek te werk, om die Afrikaanse woord vir 鸟 te vind!

Dit lei tot die volgende definisie.

Definisie 34. Ons sê dat ’n lineêre afbeelding $S : V \to W$ ’n *isomorfisme* is as daar ’n lineêre afbeelding $T : W \to V$ bestaan, sodat

$$T \circ S = \mathrm{id}_V \quad \text{en} \quad S \circ T = \mathrm{id}_W \,. \tag{3.5}$$

Lemma 35 (Inverses is Uniek)**.** *As $S : V \to W$ ’n isomorfisme is en $T, T' : W \to V$ bevredig albei*

$$T \circ S = \mathrm{id}_V, \qquad S \circ T = \mathrm{id}_W \tag{3.6}$$

$$T' \circ S = \mathrm{id}_V, \qquad S \circ T' = \mathrm{id}_W \tag{3.7}$$

dan is $T = T'$.

Hierdie lemma laat ons toe om T *die* inverse van S te noem (teenoor *’n* inverse van S), en ons kan $T = S^{-1}$ skryf.

Bewys. Om te wys dat $T = T'$, moet ons wys dat vir alle $\mathbf{w} \in W$, $T(\mathbf{w}) =$

$T'(\mathbf{w})$. Inderdaad:

$$\begin{aligned}
T(\mathbf{w}) &= T(\mathrm{id}_W(\mathbf{w})) && \text{(Defn van } \mathrm{id}_W) && (3.8)\\
&= T((S \circ T')(\mathbf{w})) && (S \circ T' = \mathrm{id}_W) && (3.9)\\
&= T(S(T'(\mathbf{w}))) && \text{(Defn van } S \circ T') && (3.10)\\
&= (T \circ S)(T'(\mathbf{w})) && \text{(Defn van } T \circ S) && (3.11)\\
&= \mathrm{id}_V(T'(\mathbf{w})) && (T \circ S = \mathrm{id}_V) && (3.12)\\
&= T'(\mathbf{w}) && \text{(Defn van } \mathrm{id}_V). && (3.13)
\end{aligned}$$

□

Definisie 36. Ons sê twee vektorruimtes V en W is *isomorfies* as daar 'n isomorfisme tussen hulle bestaan.

Voorbeeld 3.14. Wys dat $\mathbb{R}^n$ isomorfies aan Poly_{n-1} is.

Oplossing. Ons definieer 'n paar lineêre afbeeldings

$$S : \mathbb{R}^n \rightleftarrows \mathrm{Poly}_{n-1} : T$$

soos volg:

$$\begin{aligned}
(a_1, a_2, \ldots, a_n) &\overset{S}{\mapsto} a_1 + a_2x + \cdots + a_nx^{n-1}\\
(a_1, a_2, \ldots, a_n) &\overset{T}{\hookleftarrow} a_1 + a_2x + \cdots + a_nx^{n-1}
\end{aligned}$$

*** Ons het duidelik dat $T \circ S = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ en $S \circ T = \mathrm{id}_{\mathrm{Poly}_{n-1}}$.

***movebackintoexample

Oefening 78. Maak seker dat hierdie afbeeldings lineêr is.

Ons sal nou wys dat tot op die vlak van isomorfisme, bestaan daar net een vektorruimte van elke dimensie!

Stelling 37. *Twee eindigdimensionele vektorruimtes V en W is isomorfies as en slegs as hulle dieselfde dimensie het.*

Bewys. $\Rightarrow$. Veronderstel V en W is isomorfies, d.m.v. 'n paar lineêre afbeeldings $S : V \rightleftarrows W : T$. Laat $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m\}$ 'n basis vir V wees. Dan maak ek die bewering dat $\mathcal{C} = \{S(\mathbf{e}_1), \ldots, S(\mathbf{e}_m)\}$ 'n basis vir W is. Die lys vektore $\mathcal{C}$ is inderdaad lineêr onafhanklik , want as

$$a_1S(\mathbf{e}_1) + a_2S(\mathbf{e}_2) + \cdots + a_mS(\mathbf{e}_m) = \mathbf{0}_W,$$

dan lewer die toepassing van T aan beide kante

$$\begin{aligned}
T(a_1S(\mathbf{e}_1) + a_2S(\mathbf{e}_2) + \cdots + a_mS(\mathbf{e}_m)) &= T(\mathbf{0}_W) \\
\therefore a_1T(S(\mathbf{e}_1)) + a_2T(S(\mathbf{e}_2)) + \cdots + a_mT(S(\mathbf{e}_m)) &= \mathbf{0}_V && (T \text{ is lineêr}) \\
\therefore a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \cdots + a_m\mathbf{e}_m &= \mathbf{0}_V && (T \circ S = \mathrm{id}_V)
\end{aligned}$$

wat impliseer dat $a_1 = a_2 = \cdots = a_m = 0$, aangesien $\mathcal{B}$ lineêr onafhanklik is. Verder span die lys vektore $\mathcal{C}$ vir W, want as $\mathbf{w} \in W$, met T daarop toegepas, dan kan ons

$$T(\mathbf{w}) = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \cdots + a_m\mathbf{e}_m$$

skryf vir skalare a_i aangesien$\mathcal{B}$ V span. Maar dan

$$\begin{aligned}
\mathbf{w} &= S(T(\mathbf{w})) && (\text{since } S \circ T = \mathrm{id}_W) \\
&= S(a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \cdots + a_m\mathbf{e}_m) \\
&= a_1S(\mathbf{e}_1) + a_2S(\mathbf{e}_2) + \cdots + a_mS(\mathbf{e}_m) && (S \text{ is lineêr})
\end{aligned}$$

sodat $\mathcal{C}$ W span. Daarom is $\mathcal{C}$ 'n basis vir V, so $\dim V$ = aantal vektore in $\mathcal{B}$ $= n$, terwyl $\dim W$ = aantal vektore in $\mathcal{C} = n$.

$\Leftarrow$. Veronderstel $\dim V = \dim W$. Laat $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m$ 'n basis vir V wees, en laat $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m$ 'n basis vir W wees. (Ons weet dat die aantal basisvektore dieselfde is, want $\dim V = \dim W$.)

Om lineêre afbeeldings te definieer

$$S : V \rightleftarrows W : T$$

is dit voldoende, volgens Proposisie 31 (Voldoende om 'n Lineêre Afbeelding te Definieer op 'n Basis), om die aksie van S en T op die basisvektore te definieer. Ons pen neer:

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_i &\overset{S}{\mapsto} \mathbf{f}_i \\
\mathbf{e}_i &\overset{T}{\mapsfrom} \mathbf{f}_i
\end{aligned}$$

Duidelik het ons $T \circ S = \mathrm{id}_V$ en $S \circ T = \mathrm{id}_W$. □

Voorbeeld 3.15. Wys dat $\mathrm{Mat}_{n,m}$ isomorfies aan $\mathbb{R}^{mn}$ is.

Oplossing. Ons observeer volgens Voorbeeld 2.15, $\dim \mathrm{Mat}_{n,m} = mn$, terwyl uit Voorbeeld 2.11, is $\dim \mathbb{R}^{mn}$ ook gelyk aan mn.

Daar is een baie belangrike isomorfisme wat ons herhaaldelik gaan gebruik. Laat V 'n vektorruimte weest met 'n basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m\}$. Oorweeg die afbeelding

$$\begin{aligned} [\cdot]_{\mathcal{B}} : V &\to \mathrm{Col}_m \\ \mathbf{v} &\mapsto [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

, wat 'n vektor $\mathbf{v} \in V$ na sy ooreenstemmende koördinaatvektor$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} \in \mathrm{Col}_m$ stuur. Lemma 26 sê presies dat $[\cdot]_{\mathcal{B}}$ 'n lineêre afbeelding is. Ons gaan nou die inverse beskryf.

Definisie 38. Laat V 'n m-dimensionele vektorruimte wees met basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m\}$. Laat $\mathsf{c} \in \mathrm{Col}_m$ 'n m-dimensionele kolomvektor wees. Dan is die *vektor in V wat ooreenstem aan c relatief tot die basis $\mathcal{B}$*

$$\mathbf{vec}_{V,\mathcal{B}}(\mathsf{c}) := \mathsf{c}_1\mathbf{e}_1 + \mathsf{c}_2\mathbf{e}_2 + \cdots + \mathsf{c}_m\mathbf{e}_m.$$

Voorbeeld 3.16. Die polinome $\mathcal{B} = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$ waar

$$\mathbf{p}_1 := 1 + x, \quad \mathbf{p}_2 := 1 + x + x^2, \mathbf{p}_3 := 1 - x^2$$

is 'n basis vir Poly_2 (bevestig dit self). Dan, byvoorbeeld,

$$\begin{aligned} \mathbf{vec}_{\mathrm{Poly}_3,\mathcal{B}}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}\right) &= 2(1+x) - 3(1+x+x^2) + 3(1-x^2) \\ &= 2 - x - 6x^2 \in \mathrm{Poly}_3\ . \end{aligned}$$

Oefening 79. Wys dat:

(a) $\mathbf{vec}_{V,\mathcal{B}}(\mathsf{c} + \mathsf{c}') = \mathbf{vec}_{V,\mathcal{B}}(\mathsf{c}) + \mathbf{vec}_{V,\mathcal{B}}(\mathsf{c}')$

(b) $\mathbf{vec}_{V,\mathcal{B}}(k\mathsf{c}) = k\,\mathbf{vec}_{V,\mathcal{B}}(\mathsf{c})$.

Dit beteken dat $\mathbf{vec}_{V,\mathcal{B}} : \mathrm{Col}_m \to V$ 'n lineêre afbeelding is.

Stelling 39. *Laat V 'n vektorruimte met basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m\}$ wees. Die afbeeldings*

$$\begin{aligned} [\cdot]_{\mathcal{B}} : V &\rightleftarrows \mathrm{Col}_m : \mathbf{vec}_{V,\mathcal{B}} \\ \mathbf{v} &\mapsto [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} \\ \mathbf{vec}_{V,\mathcal{B}}(\mathsf{c}) &\mapsfrom \mathsf{c} \end{aligned}$$

is 'n isomorfisme van vektorruimtes.

Bewys. Gegee $\mathbf{v} \in V$, brei dit in die basis $\mathcal{B}$ uit:

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{e}_1 + \ldots + a_m\mathbf{e}_m.$$

Dan,

$$\begin{aligned}
(\mathbf{vec}_{V,\mathcal{B}} \circ [\cdot]_{\mathcal{B}})(\mathbf{v}) &= \mathbf{vec}_{V,\mathcal{B}}([\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}) \\
&= \mathbf{vec}_{V,\mathcal{B}}\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}\right) \\
&= a_1\mathbf{e}_1 + \cdots + a_m\mathbf{e}_m \\
&= \mathbf{v}
\end{aligned}$$

sodat $\mathbf{vec}_{V,\mathcal{B}} \circ [\cdot]_{\mathcal{B}} = \mathrm{id}_V$. Aan die ander kant, gegee

$$\mathsf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} \in \mathrm{Col}_m,$$

dan het ons

$$\begin{aligned}
([\cdot]_{\mathcal{B}} \circ \mathbf{vec}_{V,\mathcal{B}})(\mathsf{c}) &= [\mathbf{vec}_{V,\mathcal{B}}(\mathsf{c})]_{\mathcal{B}} \\
&= [\mathsf{c}_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \mathsf{c}_m\mathbf{e}_m] \\
&= \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} \\
&= \mathsf{c}
\end{aligned}$$

waar die tweede laaste stap die *definisie* van die koördinaatvektor van $\mathbf{v} = \mathsf{c}_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \mathsf{c}_m\mathbf{e}_m$ gebruik. Gevolglik $[\cdot]_{\mathcal{B}} \circ \mathbf{vec}_{V,\mathcal{B}} = \mathrm{id}_{\mathrm{Col}_m}$. □

Die bostaande resultaat is baie belangrik in lineêre algebra. Dit sê dat, as ons 'n basis vir 'n abstrakte eindigdimensionele vektorruimte V gekies het, dan kan ons die elemente van V behandel asof hulle kolomvektore is!

Verdere oefeninge vir 3.3

Oefening 80. Is die volgende vektorruimtes isofmorfies?

$$V = \left\{ \mathsf{v} \in \mathrm{Col}_4 : \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathsf{v} = \mathsf{0} \right\}$$

$$W = \left\{ p \in \mathrm{Poly}_2 : \int_0^2 p(x)dx = 0 \right\}.$$

As hulle is, gee 'n eksplisiete isomorfisme tussen hulle. Indien nie, bewys dat hulle nie isofmorfies is nie.

Oefening 81. Is die volgende vektorruimtes isomorfies?

$$V = \{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{v} \times (1, 2, 3) = \mathbf{0} \}$$

$$W = \left\{ M \in \mathrm{Mat}_{2,2} : M^T = -M \right\}.$$

As hulle is, gee 'n eksplisiete isomorfisme tussen hulle. Indien nie, bewys dat hulle nie isomorfies is nie.

3.4 Lineêre afbeeldings en matrikse

Definisie 40. Laat $T : V \to W$ 'n lineêre afbeelding vanaf 'n vektorruimte V na 'n vektorruimte W wees. Laat $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m\}$ 'n basis vir V en $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n\}$ 'n basis vir W wees. Die *matriks van T relatief tot die basisse $\mathcal{B}$ en $\mathcal{C}$* is definieer as die $n \times m$-matriks waarvan die kolomme die koördinaatvektore van $T(\mathbf{b}_i)$ relatief tot die basis $\mathcal{C}$ is:

$$[T]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} := \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ T(\mathbf{b}_1) \\ \\ \end{bmatrix}_{\mathcal{C}} & \begin{bmatrix} \\ T(\mathbf{b}_2) \\ \\ \end{bmatrix}_{\mathcal{C}} & \cdots & \begin{bmatrix} \\ T(\mathbf{b}_m) \\ \\ \end{bmatrix}_{\mathcal{C}} \end{bmatrix}$$

Verstaan jy hoekom $[T]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$ 'n $n \times m$-matriks is?

Voorbeeld 3.17. Example from class!

Stelling 41. *Laat $T : V \to W$ 'n lineêre afbeelding vanaf 'n vektorruimte V na 'n vektorruimte W wees. Laat $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m\}$ 'n basis vir V en $\mathcal{C}$ 'n basis vir W wees. Dan vir alle vektore $\mathbf{v}$ in V,*

$$[T(\mathbf{v})]_{\mathcal{C}} = [T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} \tag{3.14}$$

Bewys. Die bewys is soortgelyk aan dié van die Basisveranderingstelling (Stelling **??**). Laat $\mathbf{v} \in V$. Brei dit uit in die basis $\mathcal{B}$:

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{b}_1 + a_2\mathbf{b}_2 + \cdots + a_n\mathbf{b}_n, \quad \text{i.e. } [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}.$$

Dan,

$$\begin{aligned}
[T(\mathbf{v})]_{\mathcal{C}} &= [T(a_1\mathbf{b}_1 + \cdots + a_m\mathbf{b}_m)]_{\mathcal{C}} \\
&= [a_1T(\mathbf{b}_1) + \cdots + a_nT(\mathbf{b}_m)]_{\mathcal{C}} && (T \text{ is lineêr}) \\
&= a_1[T(\mathbf{b}_1)]_{\mathcal{C}} + \cdots + a_n[T(\mathbf{b}_m)]_{\mathcal{C}} && (\text{Lemma 26}) \\
&= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ T(\mathbf{b}_1) \\ \\ \end{bmatrix}_{\mathcal{C}} & \begin{bmatrix} \\ T(\mathbf{b}_2) \\ \\ \end{bmatrix}_{\mathcal{C}} & \cdots & \begin{bmatrix} \\ T(\mathbf{b}_m) \\ \\ \end{bmatrix}_{\mathcal{C}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} && (\text{volgens (2.30)}) \\
&= [T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}\,.
\end{aligned}$$

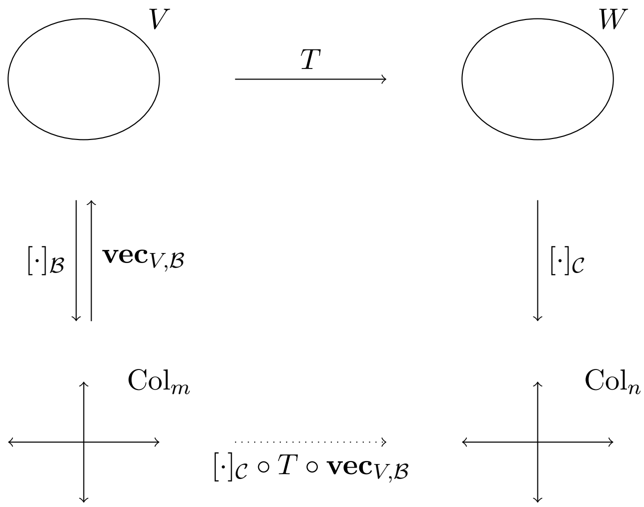
□

As ons hierdie stelling 'n naam moes gee, sou dit "Die verhouding tussen Lineêre Afbeeldings, Koördinaatvektore en Matriksvermenigvuldiging van Kolomvektore-Stelling" wees!

Voorbeeld 3.18. Voortsetting van klasvoorbeeld.

Ons kan Stelling 41 in 'n meer abstrakte manier interpreteer soos volg.

Ons het die volgende diagram van lineêre afbeeldings van vektorruimtes:



Die boonste afbeelding is die lineêre afbeelding $T : V \to W$. Die afbeelding links van V na Col_m is die koördinaatvektorafbeelding $[\cdot]_{\mathcal{B}}$ wat met die basis $\mathcal{B}$ assosieer word. Sy inverse afbeelding $\mathbf{vec}_{V,\mathcal{B}} : \mathrm{Col}_m \to V$ word ook geteken. Die afbeelding aan die regterkant is die koördinaatvektorafbeedling $[\cdot]_{\mathcal{C}}$ vanaf W na Col_n wat met basis C assosieer word. Die stippelpyl heel onder is die komposisieafbeelding, en kan soos volg eksplisiet bereken word.

Lemma 42. *Die komposisieafbeelding*

$$[\cdot]_{\mathcal{C}} \circ T \circ \mathbf{vec}_{V,\mathcal{B}} : \mathrm{Col}_m \to \mathrm{Col}_n$$

is matriksvermenigvuldiging met $[T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$. *Dit is, vir alle kolomvektore* u *in* Col_m*,*

$$\left([\cdot]_{\mathcal{C}} \circ T \circ \mathbf{vec}_{V,\mathcal{B}}\right)(\mathsf{u}) = [T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}\,\mathsf{u}.$$

Bewys. Definieer $\mathbf{v} := \mathbf{vec}_{V,\mathcal{B}}(\mathsf{u})$. Dan is $\mathbf{v}$ die vektor in V waarvan die koördinaatvektor met betrekking tot basis $\mathcal{B}$ u is. Dit is, $\mathsf{u} = [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$. So,

$$\begin{aligned}
\left([\cdot]_{\mathcal{C}} \circ T \circ \mathbf{vec}_{V,\mathcal{B}}\right)(\mathsf{c}) &= [\cdot]_{\mathcal{C}}\left(T\left(\mathbf{vec}_{V,\mathcal{B}}(\mathsf{u})\right)\right) && \text{(Defn van komposisieafbeelding)}\\
&= [\cdot]_{\mathcal{C}}(T(\mathbf{v})) && \text{(Defn van } \mathbf{v}\text{)}\\
&= [T(\mathbf{v})]_{\mathcal{C}} && \text{(Defn van } [\cdot]_{\mathcal{C}}\text{)}\\
&= [T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} && \text{(Stelling 41).}
\end{aligned}$$

□

Voor ons aanbeweeg, moet ons nog iets van matrikse hersien. Veronderstel A is 'n matriks met n rye. Laat

$$\mathsf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \mathsf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \mathsf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

die standaard basis vir Col_n wees. Dan kan die $i$de kolom van A verkry word deur A met e_i te vermenigvuldig:

$$i\text{de kolom van } \mathsf{A} = A\mathsf{e}_i. \tag{3.15}$$

Oefening 82. Bevestig dit!

Nou kan ons die volgende stelling bewys.

Stelling 43 (Funktorialiteit van die Matriks-Lineêre Afbeelding)**.** *Laat $S : U \to V$ en $T : V \to W$ lineêre afbeeldings tussen eindigdimensionele vektorruimtes wees. Laat $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ en $\mathcal{D}$ basisse vir U, V en W onderskeidelik wees. Dan,*

$$[T \circ S]_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{C}}[S]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$$

waar die regterkant die matriksproduk van $[T]_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{C}}$ en $[S]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ is.

Bewys. Ons het:

$$\begin{aligned}
&i\text{de kolommn van } [T \circ S]_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{B}} \\
&\qquad = [(T \circ S)(\mathbf{b}_i)]_{\mathcal{D}} && (\text{Defn van } [T \circ S]_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{B}}) \\
&\qquad = [T(S(\mathbf{b}_i))]_{\mathcal{D}} && (\text{Defn van } T \circ S) \\
&\qquad = [T]_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{C}}\,[S(\mathbf{b}_i]_{\mathcal{C}} && (\text{Stelling 41}) \\
&\qquad = [T]_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{C}}\,[S]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}\,[\mathbf{b}_i]_{\mathcal{B}} && (\text{Stelling 41}) \\
&\qquad = [T]_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{C}}\,[S]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}\,\mathsf{e}_i && \begin{pmatrix} \text{want } [\mathbf{b}_i]_{\mathcal{B}} = \mathsf{e}_i, \text{ die } i\text{de} \\ \text{standaard basis} \\ \text{kolomvektor.} \end{pmatrix} \\
&\qquad = i\text{de kolom van } [T]_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{C}}[S]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} && (\text{volgens (3.15)}).
\end{aligned}$$

□

Gevolgtrekking 44. *Laat $T : V \to W$ 'n lineêre afbeelding wees, en veronderstel $\mathcal{B}$ is 'n basis vir V, en $\mathcal{C}$ is 'n basis vir W. Dan*

$$T \text{ is 'n isomorfisme} \iff [T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} \text{ is inverteerbaar.}$$

Bewys. $\Rightarrow$. Veronderstel die lineêre afbeelding T is 'n isomorfisme. Dit beteken daar bestaan 'n lineêre afbeelding $S : W \to V$ sodat

$$S \circ T = \mathrm{id}_V \quad \text{and} \quad T \circ S = \mathrm{id}_W\ /$$

Daarom,

$$[S \circ T]_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}} = [\mathrm{id}_V]_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}} \quad \text{en} \quad [T \circ S]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{C}} = [\mathrm{id}_W]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{C}}.$$

Daarom, volgens die Funktorialiteit van die Matriks van 'n Lineêre Afbeelding (Stelling 43),

$$[S]_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}[T]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = I \quad \text{en} \quad [T]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}[S]_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}} = I$$

Daarom is die matriks $[T]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$ inverteerbaar, met inverse

$$[T]^{-1}_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = [S]_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}.$$

$\Leftarrow$. Veronderstel die matriks $[T] \equiv [T]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$ is inverteerbaar. Definieer die lineêre afbeelding

$$S : W \to V$$

deur eerstens dit op die basisvektore in $\mathcal{C}$ te definieer as

$$S(\mathbf{c}_i) := \sum_{p=1}^{\dim V} [T]^{-1}_{pi} \lfloor_p$$

en dit dan tot die hele W deur lineariteit uit te brei. Dan het ons

$$\begin{aligned}
(T \circ S)(\rfloor_i) &= T(S(\rfloor_i)) \\
&= T\left(\sum_{p=1}^{\dim V} [T]^{-1}_{pi} \mathbf{b}_p\right) \\
&= \sum_{p=1}^{\dim V} \sum_{q=1}^{\dim W} [T]^{-1}_{pi} [T]_{qp} \mathbf{c}_q \\
&= \sum_{q=1}^{\dim W} \left(\sum_{p=1}^{\dim V} [T]_{qp} [T]^{-1}_{pi}\right) \mathbf{c}_q \\
&= \sum_{q=1}^{\dim W} \left([T][T]^{-1}\right)_{qi} \mathbf{c}_q \\
&= \sum_{q=1}^{\dim W} I_{qi} \mathbf{c}_q \\
&= \sum_{q=1}^{\dim W} \delta_{qi} \mathbf{c}_q \\
&= \mathbf{c_i}.
\end{aligned}$$

Daarom, $T \circ S = \mathrm{id}_W$. Op 'n soortgelyke manier kan ons bewys dat $S \circ T = \mathrm{id}_V$. Daarom is die lineêre afbeelding T 'n isomorfisme, met inverse $T^{-1} = S$. □

Ons kan dit nog verder verfyn, naamlik, 'die inverse van die matriks van 'n lineêre afbeelding is gelyk aan die matriks van die inverse van die lineêre afbeelding.'

Gevolgtrekking 45. *Veronderstel $\mathcal{B}$ en $\mathcal{C}$ is basisse vir vektorruimtes V en W onderskeidelik. Veronderstel 'n lineêre afbeelding $T : V \to W$ het inverse $T^{-1} : W \to V$. Dan*

$$[T]^{-1}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = [T^{-1}]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}.$$

Bewys. Ons het

$$\begin{aligned}
[T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[T^{-1}]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}} &= [T \circ T^{-1}]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{C}} && \text{(deur Stelling 43)}\\
&= [\mathrm{id}_W]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{C}} && (T \circ T^{-1} = \mathrm{id}_W)\\
&= I
\end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned}
[T^{-1}]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}[T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} &= [T^{-1} \circ T]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}} && \text{(deur Stelling 43)}\\
&= [\mathrm{id}_V]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}} && (T^{-1} \circ T = \mathrm{id}_V)\\
&= I.
\end{aligned}$$

□

Die volgende Lemma sê dat die 'basisveranderingsmatriks' in Afdeling **??** is net die matriks van die identiteitslineêre afbeelding met betrekking tot die betrokke basisse.

Lemma 46. *Laat $\mathcal{B}$ en $\mathcal{C}$ basisse vir 'n m-dimensionele vektorruimte V wees. Dan*

$$\mathsf{P}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = [\mathrm{id}]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}.$$

Bewys.

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} &= [[\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}} \cdots [\mathbf{b}_m]_{\mathcal{C}}] && (\text{Defn van } \mathsf{P}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}})\\
&= [[\mathrm{id}(\mathbf{b}_1)]_{\mathcal{C}} \cdots [\mathrm{id}(\mathbf{b}_m)]_{\mathcal{C}}]\\
&= [\mathrm{id}]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}. && (\text{Defn van } [\mathrm{id}]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}})
\end{aligned}$$

□

Die volgende Stelling sê vir ons hoe die matriks van 'n lineêre bewerking verander as ons die basis verander waarmee ons die matriks bereken.

Stelling 47. *Laat $\mathcal{B}$ en $\mathcal{C}$ basisse vir 'n vektorruimte V wees, en laat $T : V \to V$ 'n lineêre bewerking op V wees. Dan*

$$[T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{C}} = \mathsf{P}^{-1}[T]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}}P$$

waar $P \equiv P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$.

Bewys.

$$\begin{aligned}
\text{RHS} &= \mathsf{P}^{-1}[T]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}}P \\
&= [\text{id}]^{-1}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}[T]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}}[\text{id}]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}} && \text{(Lemma 46)} \\
&= [\text{id}]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}}[\text{id}]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}} && \text{(Corollary 45)} \\
&= [\text{id} \circ T \circ \text{id}]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{C}} && \text{(Stelling 43)} \\
&= [T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{C}} \\
&= \text{LHS.}
\end{aligned}$$

□

Verdere oefeninge vir 3.4

Oefening 83. Laat

$$T : \text{Trig}_1 \to \text{Trig}_2$$

die 'vermenigvuldig met $\sin x$'-lineêre afbeelding wees, $T(f)(x) = \sin x f(x)$. Bereken $[T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ met betrekking tot die standaard basis $\mathcal{B}$ van Trig_1 en $\mathcal{C}$ van Trig_2.

Oefening 84. Laat

$$S : \text{Trig}_2 \to \text{Trig}_2$$

die 'skuif met $\frac{\pi}{6}$'-afbeelding wees, $S(f)(x) = f(x - \frac{\pi}{6})$. Bereken $[S]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{C}}$ met betrekking tot die standaardbasis $\mathcal{C}$ van Trig_2.

Oefening 85. Bevestig Stelling 41 vir die lineêre afbeelding $S : \text{Mat}_{2,2} \to \text{Mat}_{2,2}$ gegee deur $S(\mathsf{M}) = \mathsf{M}^T$, met behulp van die volgende basisse van $\text{Mat}_{2,2}$:

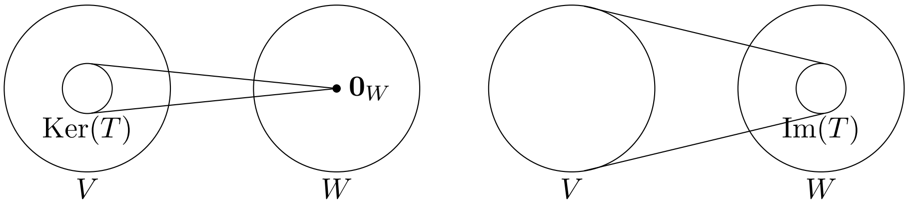
$$\mathcal{B} = \mathcal{C} = \{\mathsf{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \mathsf{M}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathsf{M}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathsf{M}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\}.$$

Oefening 86. Maak seker dat die lineêre afbeeldings T en S van Oefeninge 83 en 84 $[S \circ T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = [S]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ bevredig.

3.5 Kern en waardeversameling van 'n lineêre afbeelding

Definisie 48. Laat $T : V \to W$ 'n lineêre afbeelding tussen vektorruimtes V en W wees. Die *kern* van T, geskryf $\text{Ker}(T)$, is die versameling van alle vektore $\mathbf{v} \in V$ wat deur T op $\mathbf{0}_W$ afgebeeld word. Dit is,

$$\text{Ker}(T) := \{\mathbf{v} \in V : T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_W\}.$$



(a) Kern van T (b) Beeld van T

Figuur 3.3

Die *beeld* van T, geskryf $\mathrm{Im}(T)$, is die versameling van alle vektore $\mathbf{w} \in W$ sodat $\mathbf{w} = T(\mathbf{v})$ vir een of ander $\mathbf{v} \in V$. Dit is,

$$\mathrm{Im}(T) := \{\mathbf{w} \in W : \mathbf{w} = T(\mathbf{v}) \text{ vir 'n } \mathbf{v} \in V\}$$

Sien Figuur 3.3 vir 'n skematiese voorstelling.

Soms, om absoluut duidelik te wees, sal ek 'n onderskrif op die nulvektor sit om aan te dui aan watter vektorruimte dit behoort, bv. $\mathbf{0}_W$ verwys na die nulvektor in W, terwyl $\mathbf{0}_V$ na die nulvektor in V verwys.

Nog 'n naam vir die kern van T is die *nulruimte* van T, en nog 'n naam vir die beeld van T is die *waardeversameling* van T.

Lemma 49. *Laat $T : V \to W$ 'n lineêre afbeelding wees.. Dan:*

(i) $\mathrm{Ker}(T)$ *is 'n deelruimte van* V

(ii) $\mathrm{Im}(T)$ *is 'n deelruimte van* W

Bewys. (i) Ons moet seker maak dat die drie vereistes van 'n deelruimte bevredig word.

a. $\mathrm{Ker}(T)$ is geslote onder sommering.

Veronderstel $\mathbf{v}$ en $\mathbf{v}'$ is in $\mathrm{Ker}(T)$. Met ander woorde, $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ en $T(\mathbf{v}') = \mathbf{0}$. Ons moet wys dat $\mathbf{v} + \mathbf{v}'$ in $\mathrm{Ker}(T)$ is, met ander woorde, dat$T(\mathbf{v} + \mathbf{v}') = \mathbf{0}$. Inderdaad,

$$T(\mathbf{v} + \mathbf{v}') = T(\mathbf{v}) + T(\mathbf{v}') = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

b. $\mathbf{0}_V \in \mathrm{Ker}(T)$.

Om te wys dat $\mathbf{0}_V$ in $\mathrm{Ker}(T)$ is, moet ons wys dat $T(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$. Inderdaad, dit is waar want T is 'n lineêre afbeelding, volgens Lemma **??**.

c. $\mathrm{Ker}(T)$ is geslote onder skalaarvermenigvuldiging.

Veronderstel $\mathbf{v} \in \mathrm{Ker}(T)$ en $k \in \mathbb{R}$ is 'n skalaar. Ons moet wys dat $k\mathbf{v} \in \mathrm{Ker}(T)$, dit is, ons moet wys dat $T(k\mathbf{v}) = \mathbf{0}$. Inderdaad,

$$T(k\mathbf{v}) = kT(\mathbf{v}) = k\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

(ii) Weereens moet ons die drie vereistes van 'n deelruimte nagaan.

a. $\mathrm{Im}(T)$ is geslote onder sommering.

Veronderstel $\mathbf{w}$ en $\mathbf{w}'$ is in $\mathrm{Im}(T)$. Met ander woorde, daar bestaan vektore $\mathbf{v}$ en $\mathbf{v}'$ in V sodat $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$ en $T(\mathbf{v}') = \mathbf{w}'$. Ons moet wys dat $\mathbf{w}+\mathbf{w}'$ ook in $\mathrm{Im}(T)$ is, met ander woorde, dat daar 'n vekor $\mathbf{u}$ in V bestaan, sodat $T(\mathbf{u}) = \mathbf{w} + \mathbf{w}'$. Inderdaad, stel $\mathbf{u} := \mathbf{v} + \mathbf{v}'$. Dan,

$$T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v} + \mathbf{v}') = T(\mathbf{v}) + T(\mathbf{v}') = \mathbf{w} + \mathbf{w}'.$$

b. $\mathbf{0}_W \in \mathrm{Im}(T)$.

Om te wys dat $\mathbf{0}_W \in \mathrm{Im}(T)$, moet ons wys dat daar 'n $\mathbf{v} \in V$ bestaan, sodat $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_W$. Inderdaad, kies $\mathbf{v} = \mathbf{0}_V$. Dan is $T(\mathbf{v}) = T(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$ volgens Lemma **??**.

c. $\mathrm{Im}(T)$ is geslote onder skalaarvermenigvuldiging.

Veronderstel $\mathbf{w} \in \mathrm{Im}(T)$ en k is 'n skalaar. Ons moet wys dat $k\mathbf{w} \in \mathrm{Im}(T)$. Die feit dat $\mathbf{w}$ in $\mathrm{Im}(T)$ is, beteken dat daar 'n $\mathbf{v}$ in V bestaan, sodat $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$. Ons moet wys dat daar 'n $\mathbf{u} \in V$ bestaan, sodat $T(\mathbf{u}) = k\mathbf{w}$. Inderdaad, stel $\mathbf{u} := k\mathbf{v}$. Dan

$$T(\mathbf{u}) = T(k\mathbf{v}) = kT(\mathbf{v}) = k\mathbf{w}.$$

□

Nou dat ons weet dat die kern en beeld van 'n lineêre afbeelding deelruimtes is en dus vektorruimtes in eie reg, kan ons die volgende definisie gee.

Definisie 50. Laat $T : V \to W$ 'n lineêre afbeelding vanaf 'n eindig-dimensionele vektorruimte V na 'n vektorruimte W wees. Die *nulheidsgraad* van T is die dimensie van $\text{Ker}(T)$, en die *rang* van T is die dimensie van $\text{Im}(T)$:

$$\begin{aligned} \text{Nullity}(T) &:= \text{Dim}(\text{Ker}(T)) \\ \text{Rank}(T) &= \text{Dim}(\text{Im}(T)) \end{aligned}$$

Die 'dimensie van $\text{Ker}(T)$' maak sin, want $\text{Ker}(T)$ is 'n deelruimte van 'n eindig-dimensionele vektorruimte V, en daarom is dit eindig-dimensioneel volgens Proposisie 20. Ons weet nog nie dat $\text{Im}(T)$ eindig-dimensioneel is nie, maar dit sal volg uit die Rang-Nulheidgraad-stelling (Stelling 51).

Voorbeeld 3.19. Laat $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ 'n konstante nie-nul vektor wees. Oorweeg die 'kruisproduk met $\mathbf{a}$'-lineêre afbeelding van Voorbeeld 3.4,

$$\begin{aligned} C : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{v} &\mapsto \mathbf{a} \times \mathbf{v} \end{aligned}$$

Bepaal die kern, beeld en nulheidsgraad van C.

Oplossing. Die kern van C is die deelruimte van $\mathbb{R}^3$ wat uit al die vektore $\mathbf{v} \in V$ bestaan, sodat $\mathbf{a} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Uit die meetkundige formule van die kruisproduk,

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{a}||\mathbf{v}| \sin \theta$$

waar θ die hoek van $\mathbf{a}$ tot $\mathbf{v}$ is, sien ons dat

$$\mathbf{a} \times \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ of } \theta = 0 \text{ of } \theta = \pi.$$

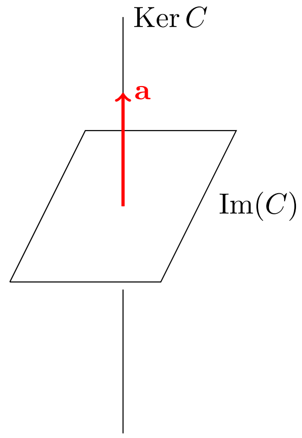
Met ander woorde, $\mathbf{v}$ moet 'n skalaarveelvoud van $\mathbf{a}$ wees. So,

$$\text{Ker}(C) = \{k\mathbf{a}, k \in \mathbb{R}\}.$$

Ek beweer dat die *beeld* van C die deelruimte van *alle* vektore loodreg op $\mathbf{a}$ is, i.e.

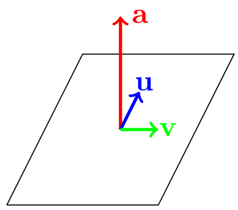
$$\text{Im}(C) := \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{u} \cdot \mathbf{a} = 0\}. \tag{3.16}$$

As jy my glo, dan is die prentjie soos volg:



Laat ek vergelyking (3.16) bewys. Per definisie is die beeld van C die deelruimte van $\mathbb{R}^3$ bestaande uit alle vektore $\mathbf{w}$ van die vorm $\mathbf{w} = \mathbf{a} \times \mathbf{v}$ vir een of ander $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Dit impliseer dat $\mathbf{w}$ loodreg op $\mathbf{a}$ is. Dit was die 'maklike' deel. Die 'moeliker' deel is om die ander rigting te bewys. Dit is, ons moet wys dat as $\mathbf{u}$ loodreg op $\mathbf{a}$ is, dan is $\mathbf{u}$ in die beeld van C, i.e. daar bestaan 'n vektor $\mathbf{v}$ sodat $C(\mathbf{v}) = \mathbf{u}$.

Ons kan inderdaad $\mathbf{v}$ kies om die vektor te wees wat verkry word deur $\mathbf{u}$ met 90 grade kloksgewys te roteer in die vlak I, en dit soos nodig te skaleer:



In terme van 'n formule het ons

$$\mathbf{v} = \frac{|\mathbf{u}|}{|\mathbf{a}|}\mathbf{u} \times \mathbf{a}.$$

Let daarop dat dit nie die *enigste* vektor $\mathbf{v}$ is waarvoor $C(\mathbf{v}) = \mathbf{u}$ nie. Inderdaad, as ons by $\mathbf{v}$ enige vektor op die lyn deur$\mathbf{a}$ tel, sal die resulterende vektor

$$\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v} + k\mathbf{a}$$

ook $C(\tilde{\mathbf{v}}) = \mathbf{u}$ bevredig, want

$$C(\tilde{\mathbf{v}}) = C(\mathbf{v} + k\mathbf{a}) = C(\mathbf{v}) + C(k\mathbf{a}) = \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}.$$

Voorbeeld 3.20. Bepaal die kern, beeld en nulheidsgraad van die lineêre afbeelding

$$I : \mathrm{Trig}_2 \to \mathbb{R} \tag{3.17}$$
$$T \mapsto \int_0^\pi T(x)dx. \tag{3.18}$$

Oplossing. Die kern van I bestaan uit alle tweede graadse trigonometriese polinome

$$T(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x$$

sodat

$$\int_0^\pi (a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x)\, dx = 0.$$

Deur die integrale te bereken, word die vergelyking

$$\pi a_0 + 2b_1 = 0$$

met geen beperkings op die ander konstantes a_1, a_2, b_2 nie. Met ander woorde,

$$\mathrm{Ker}(I) = \left\{ \begin{array}{l} \text{alle trigonometriese polinome van die vorm} \\ a_0(1 - \frac{\pi}{2}\sin x) + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x, \\ \text{waar } a_0, a_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}. \end{array} \right\}$$

Daarom is Nullity(I) = Dim(Ker(I)) = 4.

Die beeld van I bestaan uit alle reële getalle $p \in \mathbb{R}$, sodat daar 'n $T \in \mathrm{Trig}_2$ bestaan waarvoor $I(T) = p$. Ek beweer dat

$$\mathrm{Im}(I) = \mathbb{R}.$$

Inderdaad, gegee $p \in \mathbb{R}$, dan kies ons $T(x) = \frac{p}{2}\sin x$, want

$$I(T) = \frac{p}{2}\int_0^\pi \sin x\, dx = p.$$

Daarom is Im$(I) = \mathbb{R}$, en Rank$(I) = 1$.

Let daarop dat die keuse van $T(x) = \frac{p}{2}\sin(x)$ wat $I(T) = p$ bevredig nie uniek is nie. Ons kan sê $\tilde{T} = T + S$ waar $S \in \mathrm{Ker}(I)$ en ons sal steeds hê dat $I(\tilde{T}) = p$:

$$I(\tilde{T}) = I(T + S) = I(T) + I(S) = p + 0 = p.$$

Voorbeeld 3.21. Oorweeg die funksie

$$\begin{aligned} T : \mathrm{Poly}_2 &\to \mathbb{R}^2 \\ p &\mapsto (p(1), p'(1)). \end{aligned}$$

Wys dat T 'n lineêre afbeelding is, en bepaal T se kern, beeld, rang en nulheidsgraad.

Oplossing. Ons wys eers dat T 'n lineêre afbeelding is. Laat $p, q \in \mathrm{Poly}_2$. Dan

$$\begin{aligned} T(p+q) &= ((p+q)(1),\, (p+q)'(1)) && \text{(Defn van } T\text{)} \\ &= (p(1)+q(1),\, (p+q)'(1)) && \text{(Defn van die funksie } p+q\text{)} \\ &= (p(1)+q(1),\, (p'+q')(1)) && ((p+q)' = p'+q') \\ &= (p(1)+q(1),\, p'(1)+q'(1)) && \text{(Defn van die funksie } p'+q'\text{)} \\ &= (p(1),\, p'(1)) + (q(1),\, q'(1)) && \text{(Defn van sommering in } \mathbb{R}^2\text{)} \\ &= T(p)+T(q). \end{aligned}$$

Die bewys van $T(kp) = kT(p)$ is soortgelyk.

Die kern van T is die versameling van alle polinome

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

sodat $T(p) = (0, 0)$. Dit vertaal in die vergelyking

$$(a_0 + a_1 + a_2,\, a_1 + 2a_2) = (0, 0).$$

Dit lei verder na die vergelykings:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 0 \\ \phantom{a_0 + {}} a_1 + 2a_2 = 0 \end{cases}$$

waarvan die vergelyking $a_2 = t$, $a_1 = -2t$, $a_0 = -t$ is, waar $t \in \mathbb{R}$. Daarom

$$\mathrm{Ker}(T) = \left\{ \begin{matrix} \text{alle polinome van die vorm} \\ -t - 2tx + tx^2 \text{ waar } t \in \mathbb{R} \end{matrix} \right\}.$$

Daarom is $\mathrm{Nullity}(T) = 1$.

Die beeld van T is die versameling van alle $(v, w) \in \mathbb{R}^2$ sodat daar 'n polinoom $p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ in Poly_2 bestaan waarvoor $T(p) = (v, w)$. So, (v, w) is in die beeld van T as en slegs as ons 'n polinoom $p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ kan vind sodat

$$(a_0 + a_1 + a_2, a_1 + 2a_2) = (v, w).$$

Met ander woorde, (v, w) is in die beeld van T as en slegs as die vergelykings

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = v \\ \qquad a_1 + 2a_2 = w \end{cases}$$

'n oplossing het vir een of ander a_0, a_1, a_2. Maar hierdie vergelykings het *altyd* 'n oplossing, vir *alle* $(v, w) \in \mathbb{R}^2$. Byvoorbeeld, een oplossing is

$$a_2 = 0,\ a_1 = w,\ a_0 = v - w$$

wat ooreenstem met die polinoom

$$p(x) = v - w + wx. \tag{3.19}$$

Let daarop dat $T(p) = (v, w)$. Daarom,

$$\operatorname{Im}(T) = \{\text{all } (v, w) \in \mathbb{R}^2\} = \mathbb{R}^2.$$

Daarom is $\operatorname{Rank}(T) = \operatorname{Dim}(\operatorname{Im}(T)) = 2$.

Let daarop dat die keuse van die polinoom $p(x) = v - w + wx$ van (3.19) wat $T(p) = (v, w)$ bevredig nie die *enigste* moontlike keuse is nie. Inderdaad, enige polinoom van die vorm $\tilde{p} = p + q$ waar $q \in \operatorname{Ker}(T)$ sal $T(\tilde{p}) = (v, w)$ ook bevredig, want

$$T(\tilde{p}) = T(p + q) = T(p) + T(q) = (v, w) + (0, 0) = (v, w).$$

Stelling 51 (Rang-Nulheidsgraadstelling)**.** *Laat $T : V \to W$ 'n lineêre afbeelding vanaf 'n eindigdimensionele vektorruimte V na 'n vektorruimte W wees. Dan*

$$\operatorname{Nullity}(T) + \operatorname{Rank}(T) = \operatorname{Dim}(V).$$

Bewys. Laat $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$ 'n basis vir $\operatorname{Ker}(T)$ wees. Omdat $\mathcal{B}$ 'n lys onafhanklike vektore in V is, kan ons dit uitbrei na 'n basis $\mathcal{C} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k, \mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_p\}$ vir V, volgens Gevolgtrekking 23. Ek beweer dat

$$\mathcal{D} := \{T(\mathbf{f}_1), \ldots, T(\mathbf{f}_p)\}$$

'n basis vir $\operatorname{Im}(T)$ is. As ek dit kan bewys, sal ons klaar wees, want dan het ons

$$\begin{aligned} \operatorname{Nullity}(T) + \operatorname{Rank}(T) &= k + p \\ &= \operatorname{Dim}(V). \end{aligned}$$

Kom ons bewys dat $\mathcal{D}$ 'n basis vir $\operatorname{Im}(T)$ is.

$\mathcal{D}$ is lineêr onafhanklik. Veronderstel

$$b_1 T(\mathbf{f}_1) + \cdots + b_p T(\mathbf{f}_p) = \mathbf{0}_W.$$

Ons herken die linkerkant as $T(b_1\mathbf{f}_1 + \cdots + b_p\mathbf{f}_p)$. Daarom

$$b_1\mathbf{f}_1 + \cdots + b_p\mathbf{f}_p \in \mathrm{Ker}(T)$$

wat beteken ons kan dit as 'n lineêre kombinasie van vektore in $\mathcal{B}$ skryf,

$$b_1\mathbf{f}_1 + \cdots + b_p\mathbf{f}_p = a_1\mathbf{e}_1 + \cdots + a_k\mathbf{e}_k.$$

Deur al die terme aan eenkant te versamel, word dit die vergelyking

$$-a_1\mathbf{e}_1 - \cdots - a_k\mathbf{e}_k + b_1\mathbf{f}_1 + \cdots + b_p\mathbf{f}_p = \mathbf{0}_V.$$

Ons herken die linkerkant as 'n lineêre kombinasie van die $\mathcal{C}$-basisvektore. Aangesien hulle lineêr onafhanklik is, moet al die skalare nul wees. Onder andere, $b_1 = \cdots = b_p = 0$, wat is wat ons wou bewys.

$\mathcal{D}$ span W. Veronderstel $\mathbf{w} \in \mathrm{Im}(T)$. Ons moet wys dat $\mathbf{w}$ 'n lineêre kombinasie van vektore in $\mathcal{D}$ is. Aangesien $\mathbf{w}$ in die beeld van T is, bestaan daar 'n $\mathbf{v} \in V$ sodat $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$. Omdat $\mathcal{C}$ 'n basis vir V is, kan ons skryf

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{e}_1 + \cdots + a_k\mathbf{e}_k + b_1\mathbf{f}_1 + \cdots + b_p\mathbf{f}_p$$

vir skalare $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_p$. Dan

$$\begin{aligned}\mathbf{w} &= T(\mathbf{v}) \\ &= T(a_1\mathbf{e}_1 + \cdots + a_k\mathbf{e}_k + b_1\mathbf{f}_1 + \cdots + b_p\mathbf{f}_p) \\ &= a_1T(\mathbf{e}_1) + \cdots + a_kT(\mathbf{e}_k) + b_1T(\mathbf{f}_1) + \cdots + b_pT(\mathbf{f}_p) \\ &= b_1T(\mathbf{f}_1) + \cdots + b_pT(\mathbf{f}_p) && (\mathbf{e}_i \in \mathrm{Ker}(T))\end{aligned}$$

sodat $\mathbf{w}$ wel 'n lineêre kombinasie van die vektore in $\mathcal{D}$ is. □

Verdere oefeninge vir 3.5

Oefening 87. Verifieer die Rang-Nulheidgraad-stelling vir die volgende lineêre afbeeldings. D.w.s., vir elke afbeelding T, (a) bepaal $\mathrm{Ker}(T)$ en $\mathrm{Im}(T)$ eksplisiet, (b) bepaal die dimensie van $\mathrm{Ker}(T)$ en $\mathrm{Im}(T)$, (c) maak seker dat die getalle die Rang-Nulheidsgraad-stelling bevredig.

1. Die identiteitsafbeelding $\mathrm{id}_V : V \to V$ op 'n eindig-dimensionele vektorruimte V.

2. Die nul-afbeelding

$$\begin{aligned} Z : V &\to V \\ \mathbf{v} &\mapsto \mathbf{0} \end{aligned}$$

   op 'n eindig-dimensionele vektorruimte V.

3. Die afbeelding

$$\begin{aligned} T : \mathrm{Poly}_3 &\to \mathrm{Col}_3 \\ p &\mapsto \begin{bmatrix} p(1) \\ p(2) \\ p(3) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

4. Die afbeelding

$$\begin{aligned} S : \mathrm{Trig}_2 &\to \mathrm{Col}_2 \\ f &\mapsto \begin{bmatrix} \displaystyle\int_0^\pi f(x)\cos x dx \\ \displaystyle\int_0^\pi f(x)\sin x dx \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Oefening 88. Gee 'n voorbeeld van 'n lineêre afbeelding $T : \mathrm{Col}_4 \to \mathrm{Col}_4$ sodat $\mathrm{Rank}(T) = \mathrm{Nullity}(T)$.

Oefening 89. Vir elk van die volgende bewerings, sê of dit **waar** of **onwaar** is. As dit waar is, bewys dit. Indien nie, bewys dit.

1. Daar bestaan 'n lineêre afbeelding $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ sodat

$$\mathrm{Ker}(T) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : x_1 = 3x_2 \text{ en } x_3 = x_4 = x_5\}.$$

2. Daar bestaan 'n lineêre afbeelding $F : \mathrm{Trig}_3 \to \mathrm{Trig}_3$ sodat $\mathrm{Rank}(T) = \mathrm{Nullity}(T)$.

Oefening 90. Laat $f(x, y, z)$ 'n funksie op $\mathbb{R}^3$ wees en laat $\mathbf{p} = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ 'n konstante punt wees. Vir elke vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$, kan ons die afgeleide van f in die rigting van $\mathbf{u}$ by $\mathbf{p}$ as 'n afbeelding

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{p}} : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R} \\ \mathbf{u} &\mapsto (\nabla f)(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{u}. \end{aligned}$$

sien.

1. Wys dat $D_{\mathbf{p}}$ soos hierbo gedefinieer 'n lineêre afbeelding is.

2. Beskou die voorbeeld van $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Bepaal $\operatorname{Ker}(D_{\mathbf{p}})$ vir alle punte $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$.

Oefening 91. Gee, met behulp van die Rang-Nulheidgraad-stelling, 'n ander bewys van die feit dat die beeld van die afbeelding C in Voorbeeld 3.19 $\{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{u} \cdot \mathbf{a} = 0\}$ is.

3.6 Injektiewe en surjektiewe lineêre afbeeldings

Definisie 52. 'n Funksie $f : X \to Y$ vanaf 'n versameling X na 'n versameling Y word *een-tot-een* (of *injektief*) genoem as wanneer $f(x) = f(x')$ vir $x, x' \in X$ dit noodwendig volg dat $x = y$. Die funksie f word "*op*" (of *surjektief*) genoem as, vir alle $y \in Y$ daar 'n $x \in X$ bestaan sodat $f(x) = y$.

As f 'n *lineêre afbeelding* tussen vektorruimtes is (en nie bloot 'n arbitrêre funksie tussen versamelings is nie), dan bestaan daar 'n eenvoudige manier om na te gaan of f injektief is.

Lemma 53. *Laat $T : V \to W$ tussen vektorruimtes. Dan:*

$$T \textit{ is injektief} \Longleftrightarrow \operatorname{Ker}(T) = \{\mathbf{0}_V\}.$$

Bewys. $\Rightarrow$. Veronderstel $T : V \to W$ is een-tot-een. Ons weet reeds van een element in $\operatorname{Ker}(T)$, naamlik $\mathbf{0}_V$, aangesien $T(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$, want T is lineêr. Aangesien T een-tot-een is, moet dit die enigste element in $\operatorname{Ker}(T)$ wees.

$\Leftarrow$. Veronderstel $\operatorname{Ker}(T) = \{\mathbf{0}_V\}$. Nou, veronderstel dat

$$T(\mathbf{v}) = T(\mathbf{v}')$$

vir vektore $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V$. Dan het ons $T(\mathbf{v}) - T(\mathbf{v}') = \mathbf{0}_W$, en aangesien T lineêr is, beteken dit $T(\mathbf{v} - \mathbf{v}') = \mathbf{0}_W$. Gevolglik $\mathbf{v} - \mathbf{v}' \in \operatorname{Ker}(T)$, en so $\mathbf{v} - \mathbf{v}' = \mathbf{0}_V$, met ander woorde, $\mathbf{v} = \mathbf{v}'$, wat is wat ons wou wys. $\square$

'n Verdere vereenvoudiging kom voor as T 'n lineêre afbeelding vanaf 'n vektorruimte V na V is (i.e. T is 'n lineêre bewerking op V), en V eindig-dimensioneel is.

Lemma 54. *Laat $T : V \to V$ 'n lineêre afbeelding op 'n eindigdimensionele vektorruimte V wees. Dan:*

$$T \textit{ is injektief} \Longleftrightarrow T \textit{ is surjektief.}$$

Bewys. $\Rightarrow$. Veronderstel T is injektief.

$$\begin{aligned}
&\therefore \mathrm{Ker}(T) = \{\mathbf{0}_V\} && \text{(deur Lemma 53)}\\
&\therefore \mathrm{Nullity}(T) = 0 &&\\
&\therefore \mathrm{Rank}(T) = \mathrm{Dim}(V) && \text{(deur Rang-Nulheidsgraad-stelling)}\\
&\therefore \mathrm{Im}(T) = V && \text{(deur Gevolgtrekking 24)}
\end{aligned}$$

Daarom is T surjektief.

$\Leftarrow$. Veronderstel T is surjektief.

$$\begin{aligned}
&\therefore \mathrm{Im}(T) = V &&\\
&\therefore \mathrm{Rank}(T) = \mathrm{Dim}(V) &&\\
&\therefore \mathrm{Nullity}(T) = 0 && \text{(deur Rang-Nulheidsgraad-stelling)}\\
&\therefore \mathrm{Ker}(T) = \{\mathbf{0}_V\} &&\\
&\therefore T \text{ is injektief.} && \text{(deur Lemma 53)}
\end{aligned}$$

□

Proposisie 55. *'n Lineêre afbeelding $T : V \to W$ is 'n isomorfisme as en slegs as T injektief en surjektief is.*

Bewys. $\Rightarrow$. Veronderstel V en W is isomorfies. Dit is, daar bestaan 'n paar lineêre afbeeldings $T : V \rightleftarrows W : S$ sodat $T \circ S = \mathrm{id}_W$ en $S \circ T = \mathrm{id}_C$. Ons sal wys dat T injektief en surjektief is.

$$\begin{aligned}
\text{Veronderstel dat } T(\mathbf{v}_1) &= T(\mathbf{v}_2).\\
\therefore S(T(\mathbf{v}_1)) &= S(T(\mathbf{v}_2))\\
\therefore \mathrm{id}_V(\mathbf{v}_1) &= \mathrm{id}_V(\mathbf{v}_2) \quad (\text{want } S \circ T = \mathrm{id}_V)\\
\therefore \mathbf{v}_1 &= \mathbf{v}_2
\end{aligned}$$

wat wys dat T injektief is. Om te wys dat T surjektief is, laat $\mathbf{w} \in W$. Ons moet wys dat daar$\mathbf{v} \in V$ bestaan sodat $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$. Inderdaad, stel $\mathbf{v} := S(\mathbf{w})$. Dan

$$\begin{aligned}
T(\mathbf{v}) &= T(S(\mathbf{w}))\\
&= \mathrm{id}_W(\mathbf{w}) \quad (\text{deur } T \circ S = \mathrm{id}_W)\\
&= \mathbf{w}.
\end{aligned}$$

$\Leftarrow$. Veronderstel dat daar 'n lineêre afbeelding $T : V \to W$ bestaan wat injektief en surjektief is. Ons wil wys dat daar 'n lineêre afbeelding $S : W \to V$ bestaan sodat $S \circ T = \mathrm{id}_V$ en $T \circ S = \mathrm{id}_W$, wat sal bewys dat V en W isomorfies is.

Ons definieer die inverse-afbeelding S soos volg:

$$\begin{aligned} S : W &\to V \\ \mathbf{w} &\mapsto \text{die unieke } \mathbf{v} \in V \text{ sodat } T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}. \end{aligned}$$

Hierdie afbeelding is goed-gedefinieer. Inderdaad, gegee $\mathbf{w} \in W$, die feit dat T surjektief is beteken daar bestaan *ten minste een* $\mathbf{v} \in V$ sodat $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$. Die feit dat T injektief is impliseer dat $\mathbf{v}$ uniek is. Want, as daar nog 'n $\mathbf{v}' \in V$ bestaan met $S(\mathbf{v}') = \mathbf{w}$, dan het ons $\mathbf{v}' = \mathbf{v}$, want T is injektief.

Nou het ons 'n goed-gedefinieerde *funksie* $S : W \to V$ wat $T \circ S = \mathrm{id}_W$ en $S \circ T = \mathrm{id}_V$ bevredig. Ons moet slegs nagaan dat S lineêr is.

Laat $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in W$. Dan

$$\begin{aligned} S(a\mathbf{w}_1 + b\mathbf{w}_2) &= S\big(aT(S(\mathbf{w}_1)) + bT(S(\mathbf{w}_2))\big) && (\text{deur } T \circ S = \mathrm{id}_W) \\ &= S\big(aT(\mathbf{v}_1) + bT(\mathbf{v}_2)\big) && \begin{pmatrix}\text{stel } \mathbf{v}_1 := S(\mathbf{w}_1), \\ \mathbf{v}_2 := S(\mathbf{w}_2)\end{pmatrix} \\ &= S\big(T(a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2)\big) && (T \text{ is lineêr}) \\ &= a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 && (S \circ T = \mathrm{id}_V) \end{aligned}$$

Gevolglik is S lineêr, wat die bewys voltooi. □

Proposisie 56. *Laat $T : V \to V$ 'n lineêre bewerking op 'n eindig-dimensionele vektorruimte V wees. Die volgende stellings is ekwivalent:*

1. *T is injektief.*
2. *T is surjektief.*
3. *T is 'n isomorfisme.*

Bewys. (1) is ekwivalent aan (2) deur Lemma 54. Aan die ander kant is (1) en (2) ekwivalent aan (3) volgens Proposisie 55. □

Hoofstuk 4

Eiewaardes en eievektore

4.1 Definisie en Voorbeelde

Definisie 57. Laat $T : V \to V$ 'n lineêre bewerking op 'n vektorruimte V wees. Ons sê dat $\lambda \in \mathbb{R}$ is 'n *eiewaarde van* T as daar 'n nie-nul vektor $\mathbf{v} \in V$ bestaan, sodat $T(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$.

Proposisie 58. *Veronderstel $T : V \to V$ is 'n lineêre afbeelding, en V is eindig-dimensioneel. Dan is die volgende ekwivalent:*

1. *λ is 'n eiewaarde van T.*

2. *$T - \lambda\,\mathrm{id}_V$ is nie injektief nie.*

3. *$T - \lambda\,\mathrm{id}_V$ is nie surjektief nie.*

4. *$T - \lambda\,\mathrm{id}_V$ is nie inverteerbaar nie.*

Ek hoop jy verstaan die notasie hier. As $S, T : V \to W$ lineêre afbeeldings is, kan ons hulle *saamtel* om 'n nuwe lineêre afbeelding

$$S + T : V \to W$$

te verkry wat gedefinieer word as $(S+T)(\mathbf{v}) := S(\mathbf{v}) + T(\mathbf{v})$. So as ek skryf '$T - \lambda\,\mathrm{id}_V$', verwys ek na die lineêre afbeelding $V \to V$ gedefineer deur

$$(T - \lambda\,\mathrm{id}_V)(\mathbf{v}) := T(\mathbf{v}) - \lambda\,\mathrm{id}_V(\mathbf{v}).$$

Bewys. (1) $\Rightarrow$ (2). Veronderstel λ is 'n eiewaarde van T.

$$\begin{aligned}
&\therefore \text{Daar bestaan 'n nie-nul } \mathbf{v} \in V \text{, sodat } T(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}.\\
&\therefore T(\mathbf{v}) - \lambda\mathbf{v} = \mathbf{0}\\
&\therefore (T - \lambda\,\mathrm{id}_V)(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\\
&\therefore \mathbf{v} \in \mathrm{Ker}(T - \lambda\,\mathrm{id}_V)
\end{aligned}$$

Maar $\mathbf{v}$ is nie-nul. So ons het 'n nie-nul vektor in die kern van $T - \lambda\,\mathrm{id}_V$, so $T - \lambda\,\mathrm{id}_V$ is nie injektief nie, volgens Lemma 53.

(2) $\Rightarrow$ (1). Veronderstel $T - \lambda\,\mathrm{id}_V$ is nie injektief nie.

$$\begin{aligned}
&\therefore \mathrm{Ker}(T - \lambda\,\mathrm{id}_V) \neq \{\mathbf{0}\} && \text{(deur Lemma 53)}\\
&\therefore \text{daar bestaan 'n nie-nul } \mathbf{v} \in V \text{, sodat}\\
&\quad (T - \lambda\,\mathrm{id}_V)(\mathbf{v}) = \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

Dit is, $T(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$, so λ is 'n eiewaarde van T.

Duidelik het ons (2) $\Leftrightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (4) deur Proposisie 56. $\square$

Daar is 'n eenvoudige toets vir wanneer 'n *matriks* A inverteerbaar is: bereken die determinant $\det(A)$. As $\det(A) = 0$, Dan is die matriks *nie* inverteerbaar *nie*. As $\det(A) \neq 0$, dan is die matriks inverteerbaar.

Dit is inderwaarheid waar die woord 'determinant' vandaan kom!. Dit *bepaal/'determineer'* of die matriks inverteerbaar is, aldan nie.

Maar hoe weet ons of 'n *lineêre bewerking* inverteerbaar is?

Definisie 59. Die *determinant* van 'n lineêre bewerking $T : V \to V$ op 'n eindig-dimensionele vektorruimte V is die determinant van die matriks van T met betrekking tot enige basis $\mathcal{B}$ van V. Dit is,

$$\det(T) := \det\left([T]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}}\right), \quad \mathcal{B} \text{ enige basis vir } V.$$

Lemma 60. *Die determinant van 'n lineêre operator, soos hierbo gedefinieer, is goed-gedefinieerd. Dit is, as $\mathcal{B}$ en $\mathcal{C}$ basisse vir V is, dan*

$$\det\left([T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{C}}\right) = \det\left([T]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}}\right).$$

Bewys. Ons weet vanaf Stelling 47 dat

$$[T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{C}} = \mathsf{P}^{-1}[T]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}}\mathsf{P}$$

waar $\mathsf{P} = \mathsf{P}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$. Daarom,

$$\begin{aligned}
\det\left([T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{C}}\right) &= \det\left(\mathsf{P}^{-1}[T]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}}\mathsf{P}\right) \\
&= \det(\mathsf{P}^{-1})\det\left([T]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}}\right)\det(\mathsf{P}) \quad (\det(\mathsf{AB}) = \det(\mathsf{A})\det(\mathsf{B})) \\
&= \frac{1}{\det(\mathsf{P})}\det\left([T]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}}\right)\det(\mathsf{P}) \\
&= \det\left([T]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}}\right).
\end{aligned}$$

□

Nou dat ons weet hoe om die determinant van 'n lineêre bewerking te definieer, kan ons die volgende definisie gee.

Definisie 61. Die *karakteristieke polinoom* χ_T van 'n lineêre bewerking $T : V \to V$ op 'n eindig-dimensionele vektorruimte V word gedefinieer as

$$\chi_T(\lambda) := \det(\lambda\,\mathrm{id} - T).$$

Die rede dat χ_T 'n *polinoom* is (en nie bloot 'n arbitrêre funksie is nie) spruit uit die formule vir die determinant. Meer hieroor volg later.

Om op te som, sien ons dat λ 'n eiewaarde van 'n lineêre bewerking T is as en slegs as λ 'n wortel van die karakteristieke polinoom van T is. Kom ons noteer dit formeel as 'n uitbreiding van Proposisie 58.

Proposisie 62. *Laat T 'n lineêre bewerking op 'n eindig-dimensionele vektorruimte V wees, en $\lambda \in \mathbb{R}$. Dan is die volgende stellings ekwivalent:*

1. *λ is an eiewaarde van T.*
2. *$\lambda\,\mathrm{id} - T$ is nie inverteerbaar nie.*
3. *$\chi_T(\lambda) = 0$.*

Bewys. Die enigste ding wat ons moet wys is dat (2) $\Leftrightarrow$ (3). Inderdaad, as $\mathcal{B}$ 'n basis vir V is, dan

$\lambda\,\mathrm{id} - T$ is nie inverteerbaar nie

$\Leftrightarrow$ die matriks $[\lambda\,\mathrm{id} - T]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}}$ is nie inverteerbaar nie (Gevolgtrekking 44)

$\Leftrightarrow \det\left([\lambda\,\mathrm{id} - T]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}}\right) = 0$ (Eienskap van det)

$\Leftrightarrow \chi_T(\lambda) = 0$ (Defn van $\chi_T(\lambda)$)

□

Voorbeeld 4.1. Vind die eiewaardes van die lineêre bewerking

$$T : \mathrm{Poly}_2 \to \mathrm{Poly}_2$$

gedefinieer deur

$$T(p)(x) := p(2x+3)$$

Oplossing. Ons moet eers die matriks van T relatief tot 'n basis vir Poly_2 bereken. Laat

$$\mathcal{B} := \{p_0, p_1, p_2\}$$

die standaardbasis vir Poly_2 wees, dit is

$$p_0(x) = 1, \quad p_1(x) = x, \quad p_2(x) = x^2.$$

Dan

$$\begin{aligned} T(p_0)(x) &= p_0(2x+3) \\ &= 1 \\ \therefore T(p_0) &= p_0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned} T(p_1)(x) &= p_1(2x+3) \\ &= 2x+3 \\ \therefore T(p_1) &= 3p_0 + 2p_1 \end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned} T(p_2)(x) &= p_2(2x+3) \\ &= (2x+3)^2 \\ &= 4x^2 + 12x + 9 \\ \therefore T(p_2) &= 9p_0 + 12p_1 + 4p_0. \end{aligned} \tag{4.3}$$

So die matriks van T relatief tot $\mathcal{B}$ is

$$[T]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

So die karakteristieke polinoom van T is

$$\begin{aligned}
\chi_T(\lambda) &= \det(\lambda \operatorname{id} - T) && \text{(defn van } \chi_T\text{)} \quad (4.4)\\
&= \det\left([\lambda \operatorname{id} - T]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}}\right) && \text{(defn van det)} \quad (4.5)\\
&= \det\left([\lambda \operatorname{id}]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}} - [T]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}}\right) && (4.6)\\
&= \det\left(\begin{bmatrix} \lambda - 1 & -3 & -9 \\ 0 & \lambda - 2 & -12 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}\right) && (4.7)\\
&= (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 4). && (4.8)
\end{aligned}$$

Die eiewaardes van T is die wortels van die karakteristieke polinoom van T. So die eiewaardes van T is 1, 2 en 4.

As ons van die eiewaardes en eievektore van 'n $n \times n$ *matriks* A praat, verwys ons na die eiewaardes en eievektore van die geassosieerde lineêre bewerking

$$\begin{aligned} T_{\mathsf{A}} : \operatorname{Col}_n &\to \operatorname{Col}_n \\ \mathbf{v} &\mapsto \mathsf{A}\mathbf{v}. \end{aligned}$$

Nou, Col_n het die standaard basis

$$\mathsf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \mathsf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots, \mathsf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Die matriks van T_{A} met betrekking tot hierdie standaardbasis $\mathcal{B} = \{\mathsf{e}_1, \ldots, \mathsf{e}_n\}$ is bloot A self.

Oefening 92. Bevestig dit. Met ander woorde, gaan na dat 'n $n \times n$-matriks A, $[T_{\mathsf{A}}]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}} = \mathsf{A}$.

So die eiewaardes van 'n matriks A is maar net die oplossings van die vergelyking $\det(\lambda I - \mathsf{A}) = 0$.

Die volgende voorbeelde kom van die aanlyn Desmos-werkblad van eiewaardes by `student.desmos.com`, klaskode `RGJ93S`. In die Desmos-werkblad kry jy die eiewaardes grafies, deur inspeksie. Werk deur daardie werkblad eerste, en doen dan eers daarna die volgende algebraïese metode soos hieronder aangetoon.

Voorbeeld 4.2. Vind die eiewaardes van $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$.

Oplossing. Die karakteristieke polinoom van A is

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \det\left(\begin{bmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \lambda - \frac{5}{2} \end{bmatrix}\right) \\ &= (\lambda - 2)(\lambda - \frac{5}{2}) - \frac{1}{2} \\ &=\Leftrightarrow \lambda^2 - \frac{9}{2}\lambda + \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

Die eiewaardes is die wortels van die karakteristieke polinoom. So:

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) = 0 &\Leftrightarrow (\lambda - \frac{3}{2})(\lambda - 3) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda = \frac{3}{2} \text{ of } \lambda = 3. \end{aligned}$$

So die eiewaardes van A is $\lambda = \frac{3}{2}$ en $\lambda = 3$. Dit kan visueel in Desmos nagegaan word: vir sekere vektore $\mathbf{v}$, $A\mathbf{v} = \frac{3}{2}\mathbf{v}$ en vir sekere ander vektore $\mathbf{v}$, $A\mathbf{v} = 3\mathbf{v}$.

Voorbeeld 4.3. Vind die eiewaardes van $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$.

Oplossing. Die karakteristieke polinoom van A is

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 3 \\ \lambda + 2 & 2 \end{bmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 8.$$

Die vergelyking vir eiewaardes is daarom

$$\lambda^2 - 3\lambda + 8 = 0$$

wat geen reële wortels het nie. So A het geen eiewaardes nie. Dit kan visueel op Desmos gesien word: rofweg, $A\mathbf{v}$ roteer die vektor $\mathbf{v}$ kloksgewys met 'n sekere hoek. So $A\mathbf{v}$ kan nooit 'n veelvoud van $\mathbf{v}$ wees nie.

4.2 Eievektore

In die vorige afdeling het ons opp eiewaardes gefokus. Nou gaan ons eievektore bestudeer.

Definisie 63. 'n *Eievektor* van 'n lineêre bewerking $T : V \to V$ is 'n nie-nul vektor $\mathbf{v} \in V$, sodat $T(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$ vir een of ander skalaar $\lambda \in \mathbb{R}$ (die gepaardgaande eiewaarde).

Let daarop dat ons daarop aandring dat $\mathbf{v}$ nie-nul moet wees om 'n eievektor van T genoem te word. Die rede hiervoor is dat, andersins sal die nulvektor vir *elke* bewerking T 'n eievektor (met eiewaarde 0) wees, aangesien $T(\mathbf{0}) = 0\mathbf{0}$ altyd waar is. In daardie geval sal dit minder betekenis dra om 'n eievektor van T te wees.

Dit is geen probleem vir nul om 'n emphPeiewaarde van T te wees nie. Maar die konvensie is dat 'n *eievektor* nie die nulvektor kan wees nie.

In plaas daarvan om 'n *enkele* vektor $\mathbf{v} \in V$ waarvoor $T(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$ te oorweeg, maak dit meer sin om *alle* sodanige vektore te bestudeer.

Definisie 64. Laat $T : V \to V$ 'n lineêre bewerking op 'n vektorruimte V wees, en laat λ 'n eiewaarde van T wees. Die *eieruimte van T wat ooreenstem met λ* is die versameling

$$E_\lambda := \{\mathbf{v} \in V : T(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}.\}$$

Let daarop dat asλ 'n eiewaarde van T is, dan is die nulvektor $\mathbf{0}$ *wel* in die eieruimte E_λ van T wat met λ gepaardgaan. Maar dit is nie 'n *eievektor* van T nie. Dit is hoe die terminologie gedefinieer is.

Let daarop dat ons E_λ as

$$E_\lambda = \operatorname{Ker}(\lambda \operatorname{id} - T) \tag{4.9}$$

kan uitdruk, want $T(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$ is ekwivalent daaraan om te sê dat $(\lambda \operatorname{id} - T)(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$.

Proposisie 65. *E_λ is 'n deelruimte van V.*

Bewys. Dit volg direk uit die feit (vergelyking (4.9)) dat ons E_λ as 'n kern van 'n lineêre bewerking kan skryf. Die kern van enige lineêre bewerking op V is 'n deelruimte van V, volgens Lemma 49. $\square$

Proposisie 66. *Laat $T : V \to V$ 'n lineêre bewerking van 'n eindig-dimensionele vektorruimte V wees, en veronderstel dat $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ eievektore van T met verskillende eiewaardes $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ onderskeidelik is. Dan is $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ lineêr onafahanklik.*

Bewys. Veronderstel $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ is *nie* lineêr onafhanklik nie, met andewr woorde, dit is lineêr afhanklik. Dan, volgens die Lineêre Kombinasie van Voorafgaande Vektore-stelling (Stelling 14), is óf $\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$ (onmoontlik, want eievektore kan nie die nul-vektor wees nie), óf een van die $\mathbf{v}_i$ is 'n lineêre kombinasie van die voorafgaande vektore. Laat i die *kleinste* indeks wees waarvoor dit waar is. So, vir 'n i met $2 \leq i \leq k$, het ons

$$\mathbf{v}_i = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{i-1}\mathbf{v}_{i-1} \tag{4.10}$$

vir skalare $a_1, \ldots, a_{i-1}$, nie almal nul nie, en verder is die lys vektore

$$\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}\}$$

lineêr onafhanklik (andersins sou i nie die *kleinste* indeks wees waarvoor $\mathbf{v}_i$ 'n lineêre kombinasie van die voorafgaande vektore is nie). Deur T aan beide kante van (4.10) toe te pas, kry ons 'n nuwe vergelyking:

$$\begin{aligned} T(\mathbf{v}_i) &= T(a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{i-1}\mathbf{v}_{i-1}) \\ &= a_1T(\mathbf{v}_1) + a_2T(\mathbf{v}_2) + \cdots + a_{i-1}T(\mathbf{v}_{i-1}) \quad (T \text{ is lineêr}) \\ \therefore \lambda_i\mathbf{v}_i &= a_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + a_2\lambda_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{i-1}\lambda_{i-1}\mathbf{v}_{i-1} \qquad (T(\mathbf{v}_r) = \lambda_r\mathbf{v}_r) \quad (4.11) \end{aligned}$$

Deur vergelyking (4.10) met λ_i te vermenigvuldig en (4.11) af te trek, kry ons:

$$\mathbf{0} = (\lambda_i - \lambda_1)a_1\mathbf{v}_1 + (\lambda_i - \lambda_2)a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + (\lambda_i - \lambda_{i-1})a_{i-1}\mathbf{v}_{i-1}.$$

Aangesien die lys vektore $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}\}$ lineêr afhanklik is, het ons

$$(\lambda_i - \lambda_1)a_1 = 0,\ (\lambda_i - \lambda_2)a_2 = 0\ \ldots,\ (\lambda_i - \lambda_{i-1})a_{i-1} = 0.$$

Alle eiewaardes is verskillend (volgens aanname), so dit kan nie wees dat $\lambda_i - \lambda_r = 0$ vir $r \neq i$ nie. Daarom $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, …, $a_{i-1} = 0$. Maar dit is in teenstelling met (4.10) wat impliseer het dat die skalare *nie* almal nul is nie. So ons oorpronklike aanname moes vals wees. Daarom is $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ lineêr afhanklik. $\square$

Voorbeeld 4.4. Bepaal die eiewaardes en ooreenstemmende eieruimtes vir dei lineêre bewerking

$$T : \mathrm{Poly}_4 \to \mathrm{Poly}_4$$
$$T(p)(x) = x^2 \frac{d^2}{dx^2}(p).$$

Oplossing. Ons bereken die aksie van T op die standaard basis van Poly_2,

$$p_0(x) = 1,\ p_1(x) = x,\ p_2(x) = x^2,\ p_3(x) = x^3,\ p_4(x) = x^4$$

soos volg:

$$\begin{aligned} p_0 &\mapsto 0 \\ p_1 &\mapsto 0 \\ p_2 &\mapsto 2p_2 \\ p_3 &\mapsto 6p_3 \\ p_4 &\mapsto 12p_4 \end{aligned}$$

Deur inspeksie, sien ons dat p_0 en p_1 eievektore is met eiewaarde 0, p_1 'n eievektore met eiewaarde 2 is, p_3 'n eievektor met eiewaarde 6 is, en p_4 'n eievektor is met eiewaarde 12. So die eiewaardes en geassosieerde eieruimtes van T is:

$$\begin{aligned} \lambda = 0, &\qquad E_0 = \{sp_0 + tp_1,\ s, t \in \mathbb{R}\} \\ \lambda = 2, &\qquad E_1 = \{tp_2,\ t \in \mathbb{R}\} \\ \lambda = 6, &\qquad E_2 = \{tp_3,\ t \in \mathbb{R}\} \\ \lambda = 12, &\qquad E_1 2 = \{tp_4,\ t \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Voorbeeld 4.5. Bepaal die eieruimtes van die lineêre bewerking

$$T : \mathrm{Poly}_2 \to \mathrm{Poly}_2$$
$$T(p(x)) = p(2x+3)$$

van Voorbeeld 4.1.

Oplossing. Die eiewaardes van T is $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ en $\lambda_3 = 4$. Kom ons dink na vir 'n oomblik. Aangesien die eiewaardes almal verskillend is, dan as ons eievektore q_1, q_2 en q_3 met eiewaardes λ_1, λ_2 and λ_3 onderskeidelik vind, dan sal $\mathcal{Q} = \{q_1, q_2, q_3\}$ lineêr onafhanklik wees volgens Proposisie 66. Dit beteken dat die eieruimtes E_1, E_2 en E_4 wat met die eiewaardes gepaardgaan 1-dimensioneel sal wees. Dit is nuttige inligting. Ok, nou is ons gereed om eieruimtes te bereken.

- $\lambda = 1$:

  Ons soek polinome q sodat
  $$T(q) = 1q$$
  Deur inspeksie van die formules (4.1)-(4.2) vir hoe T werk, sien ons reeds ons eerste polinoom, naamlik $q = p_0$, aangesien $T(p_0) = p_0$. Aangesien E_1 een-dimensioneel is, kom ons tot die gevolgtrekking dat p_0 'nn basis vir E_1 is, so
  $$E_1 = \{tp_0,\, t \in \mathbb{R}\}.$$

- $\lambda = 2$:

  Ons soek polinome q sodat
  $$T(q) = 2q.$$
  Brei q met die standaard basis uit:
  $$q = a_0p_0 + a_1p_1 + a_2p_2.$$
  So ons soek skalare a_0, a_1, a_2 sodat
  $$T(a_0p_0 + a_1p_1 + a_2p_2) = 2(a_0p_0 + a_1p_1 + a_2p_2). \tag{4.12}$$
  Met die formules (4.9) vir hoe T op die standaard basis werk, word (4.14)
  $$(-a_0 + 3a_1 + 9a_2)p_0 + 12a_2p_1 + 2a_2p_2 = 0.$$
  Aangesien $\{p_0, p_1, p_2\}$ lineêr onafhanklik is, word dit die volgende stel vergelykings:
  $$\begin{cases} -a_0 + 3a_1 + \ \ 9a_2 = 0 \\ \qquad\qquad\quad 12a_2 = 0 \\ \qquad\qquad\quad\ \ 2a_2 = 0 \end{cases} \tag{4.13}$$
  Die algemene oplossing vir hierdie vergelykings is
  $$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ t \in \mathbb{R}.$$

Met ander woorde, 'n eievektor vir T met eiewaarde 2 is

$$q_2(x) = 3 + x,$$

en die hele eieruimte wat met die eiewaarde 2 gepaardgaan, is

$$E_2 = \{tq_2, \, t \in \mathbb{R}\}.$$

Kom ons gaan dit na. Oorweeg die berekening van $T(q_2)$ met behulp van die *definisie* van T, naamlik $T(p)(x) = p(2x+3)$ vir enige polinoom p. Dit gee vir ons:

$$\begin{aligned} T(q_2)(x) &= q_1(2x+3) \\ &= 3 + 3(2x+3) \\ &= 6 + 6x \\ &= 2(3+3x) \\ &= (2q_2)(x) \\ \therefore T(q_2) &= 2q_1 \text{ (soos verwag!)} \end{aligned}$$

- $\lambda = 4$:

Ons soek polinome q sodat

$$T(q) = 4q.$$

Brei q in die standaard basis uit soos volg:

$$q = a_0 p_0 + a_1 p_1 + a_2 p_2.$$

So ons benodig skalare a_0, a_1, a_2 sodat

$$T(a_0 p_0 + a_1 p_1 + a_2 p_2) = 4(a_0 p_0 + a_1 p_1 + a_2 p_2).. \tag{4.14}$$

Met behulp van die formules (4.9) vir hoe T op die standaard basis tewerk gaan, word (4.14)

$$(-3a_0 + 3a_1 + 9a_2)p_0 + (-2a_1 + 12a_2)p_1 + 0p_2 = 0.$$

Aangesien $\{p_0, p_1, p_2\}$ lineêr onafhanklik is, word dit die volgende stel vergelykings:

$$\begin{cases} -3a_0 + 3a_1 + 9a_2 = 0 \\ - 2a_1 + 12a_2 = 0 \end{cases} \tag{4.15}$$

Die algemene oplossing vir hierdie vergelykings is

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}, \, t \in \mathbb{R}.$$

Met ander woorde, 'n eievektor van T met eiewaarde 4 is

$$q_4(x) = 9 + 6x + x^2,$$

en die hele eieruimte wat met die eiewaarde 4 gepaardgaan, is

$$E_2 = \{tq_4,\, t \in \mathbb{R}\}.$$

Kom ons gaan dit na. Oorweeg die berekening van $T(q_4)$ met die *definisie* van T, naamlik $T(p)(x) = p(2x+3)$ vir enige polinoom p. Dit lewer:

$$\begin{aligned} T(q_4)(x) &= q_4(2x+3) \\ &= 9 + 6(2x+3) + (2x+3)^2 \\ &= 36 + 24x + 4x^2 \\ &= 4(9 + 6x + x^2) \\ &= (4q_4)(x) \\ \therefore T(q_4) &= 4q_4 \text{ (soos verwag!)} \end{aligned}$$

Voorbeeld 4.6. Bepaal die eieruimtes van die matriks

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

vanuit Voorbeeld 4.2.

Oplossing. Vanuit (4.9), het ons dat die eieruimte E_λ as volg bereken kan word

$$E_\lambda = \mathrm{Ker}(\mathsf{A} - \lambda I) = \mathrm{Ker}\left(\begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} - \lambda \end{bmatrix}\right)$$

Die eiewaardes van A is $\lambda = \frac{3}{2}$ en $\lambda = 3$.

- $\lambda = \frac{3}{2}$: Ons moet soos volg bereken

$$E_{\frac{3}{2}} = \mathrm{Ker}\left(\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}\right).$$

Met ander woorde, ons moet die kolomvektore $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ vind waarvoor

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dit kom neer op die enkele vergelyking

$$\frac{1}{2}v_1 + v_2 = 0$$

wat die algemene oplossing $v_2 = t$, $v_1 = -2t$, $t \in \mathbb{R}$ het. Daarom,

$$E_{\frac{3}{2}} = \left\{ t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Jy kan visueel verifieer dat hierdie lyn wel 'n eieruimte van A met gepaardgaande eiewaarde $\frac{3}{2}$ is deur inspeksie van die Desmos-werkblad. Wanneer jy vektore op hierdie lyn met A vermenigvuldig, word hulle met 'n faktor $\frac{3}{2}$ skaleer.

- $\lambda = 3$: Ons moet bereken

$$E_3 = \text{Ker}\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \right).$$

Met ander woorde, ons moet die kolomvektore $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ vind waarvoor

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dit kom opp die enkele vergelyking

$$-v_1 + v_2 = 0$$

neer wat die algemene oplossing $v_2 = t$, $v_1 = t$, $t \in \mathbb{R}$ het. Daarom,

$$E_{\frac{3}{2}} = \left\{ t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Jy kan op die Desmos-werkblad visueel verifieer dat hierdie lyn wel 'n eieruimte van A met ooreenstemmende eiewaarde 3 is. As jy vektore op hierdie lyn met A vermenigvuldig, word hulle met 'n fatkor 3 vermenigvuldig.

Let daarop dat die 'kern van 'n matriks'-metode wat ons gebruik het om die eieruimtes in Voorbeeld 4.6 te bereken, gebruik kan word om die eievektore van *enige* lineêre operator te bereken.

Voorbeeld 4.7. Bepaal die eieruimtes van die lineêre bewerking T uit Voorbeeld 4.5 met die 'kern-van-'n-matriks'-metode.

Oplossing. Die eieruimte E_λ wat met die eiewaarde λ ooreenstem is die kern van die lineêre operator $T - \lambda\,\mathrm{id}$. Dit wil sê, ons benodig die polinome $q \in \mathrm{Poly}_2$ sodat

$$(T - \lambda\,\mathrm{id})(q) = 0. \tag{4.16}$$

Ons brei q in die standaard basis $\mathcal{B}$ uit:

$$q = a_0 p_0 + a_1 p_1 + a_2 p_2 \tag{4.17}$$

Ons bereken die matriks van T relatief tot die basis $\mathcal{B}$:

$$[T]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Dan kan vergelyking (4.16) in matriksvorm geskryf word:

$$[T - \lambda\,\mathrm{id}]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Met ander woorde, vir elke eiewaarde λ, verg die berekening van E_λ dat ons die kern van die *matriks*

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 3 & 9 \\ 0 & 2-\lambda & 12 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{bmatrix}$$

moet bereken en dan dat ons die resulterende kolomvektore as polinome herskryf, in die vorm (4.17).

- $\lambda = 1$:

  Ons benodig skalare a_0, a_1, a_2 sodat

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Die vergelyking het die algemene oplossing

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ t \in \mathbb{R}.$$

So,

$$E_1 = \{tp_0, \ t \in \mathbb{R}\}.$$

- $\lambda = 2$:

  Ons benodig skalare a_0, a_1, a_2 sodat

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

  Hierdie vergelyking het die algemene oplossing

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ t \in \mathbb{R}.$$

  So,

$$E_2 = \{tq_2, \ t \in \mathbb{R}\}$$

  waar $q_2(x) = 3 + x$.

- $\lambda = 4$:

  Ons benodig skalare a_0, a_1, a_2 sodat

$$\begin{bmatrix} -3 & 3 & 9 \\ 0 & -2 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

  Hierdie vergelyking het die algemene oplossing

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}, \ t \in \mathbb{R}.$$

  So,

$$E_2 = \{tq_4, \ t \in \mathbb{R}\}$$

  waar $q_4(x) = 9 + 6x + 1$.

Verdere oefeninge vir 4.2

Oefening 93. Bepaal die eiewaardes en eieruimtes van die lineêre bewerking

$$T : \mathrm{Poly}_2 \to \mathrm{Poly}_2$$
$$T(p)(x) := \frac{d^2}{dx^2} p(x^2 + x - 2).$$

Oefening 94. Bepaal die eiewaardes en eieruimtes van die lineêre bewerking

$$T : \mathrm{Poly}_2 \to \mathrm{Poly}_2$$
$$T(p)(x) := x^2 p\left(\frac{1}{x}\right)$$

4.3 Diagonalisering van matrikse

Definisie 67. Ons sê dat 'n $n \times n$-matriks A is *diagonaliseerbaar* as daar 'n inverteerbare $n \times n$-matriks P bestaan sodat $\mathsf{P}^{-1}\mathsf{A}\mathsf{P}$ 'n diagonaalmatriks is.

Voorbeeld 4.8. $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$ is diagonaliseerbaar, want as

$$\mathsf{P} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

dan

$$\mathsf{P}^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

en ons gaan na,

$$\begin{aligned} \mathsf{P}^{-1}\mathsf{A}\mathsf{P} &= -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ -3 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} -\frac{9}{2} & 0 \\ 0 & -9 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

wat wel 'n diagonaalmatriks is. Meer hieroor volg in die tweede semester! Vir nou is dit al wat jy moet weet.

Appendices

Appendix A

Matrikshersiening

Kom ons onthou 'n paar goed oor matrikse en stel vas watter notasie ons gaan gebruik.

'n $n \times m$-*matriks* A is maar net 'n reghoekige skikking van getalle, met n rye en m kolomme:

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} \mathsf{A}_{11} & \mathsf{A}_{12} & \cdots & \mathsf{A}_{1m} \\ \mathsf{A}_{21} & \mathsf{A}_{22} & \cdots & \mathsf{A}_{2m} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathsf{A}_{n1} & \mathsf{A}_{n2} & \cdots & \mathsf{A}_{nm} \end{bmatrix}$$

Ek sal altyd matrikse in '$\mathsf{sans\ serif}$'-lettertipe skryf, bv. A. Dit is moeilik om in handgeskrewe teks 'van lettertipe te verander,' maar ek moedig jou aan om ten minste die letters A, B, C, ens vir matrikse te reserveer, en om S, T, etc. vir lineêre afbeeldings te gebruik!

Twee $n \times m$ matrikse A en B kan bymekaargetel word, om n' nuwe $n \times m$ matriks $\mathsf{A} + \mathsf{B}$ te verkry:

$$(\mathsf{A} + \mathsf{B})_{ij} := \mathsf{A}_{ij} + \mathsf{B}_{ij}$$

Daar is die *nul* $n \times m$-*matriks*:

$$\mathsf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Jy kan ook ’n $n \times m$-matriks A met ’n skalaar k vermenigvuldig, om ’n nuwe $n \times m$ matriks $k\mathsf{A}$ te verkry:

$$(k\mathsf{A})_{ij} := k\mathsf{A}_{ij}$$

Lemma 68. *1. Saam met hierdie bewerkings is die versameling* $\mathrm{Mat}_{n,m}$ *van alle $n \times m$ matrikse ’n vektorruimte.*

2. Die dimensie van Mat_{nm} *is nm, met die matrikse*

$$\mathsf{E}_{ij}, \quad i = 1 \ldots n, \, j = 1 \ldots m$$

as basis, elk met ’n 1 in die $i$de ry en $j$de kolom en nulle orals anders.

Bewys. Die bewys word aan die leser as ’n oefening oorgelaat. ☐

Voorbeeld A.1. $\mathrm{Mat}_{2,2}$ het die basis

$$\mathsf{E}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathsf{E}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathsf{E}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathsf{E}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Gewoonlik is A ’n matriks, en is A_{ij} die element van die matriks by posisie (i, j). Maar nou is E_{ij} ’n matriks in eie reg! Sy element by posisie (k, l) sal geskryf word as $(\mathsf{E}_{ij})_{kl}$. Ek hoop dit is nie te verwarrend nie. Ons kan ’n elegante formule vir die elemente van E_{ij} skryf met die Kronecker-delta-simbool:

$$(\mathsf{E}_{ij})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl} \tag{A.1}$$

Oefening 95. Bevestig dat (A.1) wel die korrekte formule vir die matrikselemente van E_{ij} is.

Voorbeeld A.2. Ons skryf Col_n vir die vektorruimte $\mathrm{Mat}_{n,1}$ van n-dimensional *kolomvektore*, en ons sal die standaard basisvektore as E_{i1} van Col_n skryf, of nog eenvoudiger as $\mathbf{e}_i$:

$$\mathbf{e}_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \mathbf{e}_n := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vektore in Col_n sal in **vetdruk, sans-serif** geskryf word, bv. $\mathbf{\mathsf{v}} \in \mathrm{Col}_n$.

A.0.1 Matriksvermenigvuldiging

Toegerus met hierdie bewerkings, vorm die versameling $\mathrm{Mat}_{n,m}$ van alle $n \times m$ matrikse 'n vektorruimte (sien Voorbeeld 1.8), met dimensienm (sien Voorbeeld 2.15). Ons skryf Col_n vir die vektorruimte $\mathrm{Mat}_{n,1}$ van n-dimensionele *kolomvektore*.

Die belangrikste bewerking is *matriksvermenigvuldiging.* 'n $n\times k$-matriks A kan van regs met 'n $k \times m$-matriks B vermenigvuldig word om 'n $n \times m$-matriks AB te kry,

$$\begin{bmatrix} \mathsf{A}_{11} & \mathsf{A}_{12} & \cdots & \mathsf{A}_{1k} \\ \mathsf{A}_{21} & \mathsf{A}_{22} & \cdots & \mathsf{A}_{2k} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathsf{A}_{n1} & \mathsf{A}_{n2} & \cdots & \mathsf{A}_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathsf{B}_{11} & \mathsf{B}_{12} & \cdots & \mathsf{B}_{1m} \\ \mathsf{B}_{21} & \mathsf{B}_{22} & \cdots & \mathsf{B}_{2m} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathsf{B}_{k1} & \mathsf{B}_{k2} & \cdots & \mathsf{B}_{km} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathsf{AB})_{11} & (\mathsf{AB})_{12} & \cdots & (\mathsf{AB}_{1m} \\ (\mathsf{AB})_{21} & (\mathsf{AB})_{22} & \cdots & (\mathsf{AB})_{2m} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ (\mathsf{AB})_{k1} & (\mathsf{AB})_{k2} & \cdots & (\mathsf{AB})_{nm} \end{bmatrix}$$

deur die inskrywings van AB as

$$(\mathsf{AB})_{ij} := \mathsf{A}_{i1}\mathsf{B}_{1j} + \mathsf{A}_{i2}\mathsf{B}_{2j} + \cdots + \mathsf{A}_{ik}\mathsf{B}_{kj}$$

te definieer.

Proposisie 69. *Die bostaande bewerkings op matrikse bevredig die volgende reëls presies wanneer die somme en produkte goed-gedefinieer is:*

1. $(\mathsf{A} + \mathsf{B})\mathsf{C} = \mathsf{AC} + \mathsf{BC}$
2. $\mathsf{A}(\mathsf{B} + \mathsf{C}) = \mathsf{AB} + \mathsf{AC}$
3. $(k\mathsf{A})\mathsf{B} = \mathsf{A}(k\mathsf{B}) = k(\mathsf{AB})$
4. $(\mathsf{AB})\mathsf{C} = \mathsf{A}(\mathsf{BC})$

Bewys. Die bewyse van (1) - (3) is roetinewerk wat jy hopelik voorheen al gedoen het. Kom ons bewys (4), om te oefen om Σ-notasie te gebruik! Veronderstel A, B en C het groottes $n \times k$, $k \times r$ en $r \times m$ onderskeidelik, sodat die matriksprodukte sinmaak. Dan:

$$\begin{aligned}
((\mathsf{AB})\mathsf{C})_{ij} &= \sum_{p=1}^{r} (\mathsf{AB})_{ip}\mathsf{C}_{pj} \\
&= \sum_{p=1}^{r}\left(\sum_{q=1}^{k}\mathsf{A}_{iq}\mathsf{B}_{qp}\right)\mathsf{C}_{pj} \\
&= \sum_{p,q}\mathsf{A}_{iq}\mathsf{B}_{qp}\mathsf{C}_{pj} \\
&= \sum_{q=1}^{k}\mathsf{A}_{iq}\left(\sum_{p=1}^{r}\mathsf{B}_{qp}\mathsf{C}_{pj}\right) \\
&= \sum_{q=1}^{k}\mathsf{A}_{iq}(\mathsf{BC})_{qj} \\
&= (\mathsf{A}(\mathsf{BC}))_{ij}.
\end{aligned}$$

□

Ek hoop nie die Σ-notasie in die bostaande bewys is te verwarrend nie! Kom ek skryf presies dieselfde bewys uit *sonder* Σ-notasie, in die eenvoudige geval waar A, B en C almal 2×2-matrikse is en ons wil die inskrywing by posisie 11 uitwerk.

$$\begin{aligned}
((\mathsf{AB})\mathsf{C})_{11} &= (\mathsf{AB})_{11}\mathsf{C}_{11} + (\mathsf{AB})_{12}\mathsf{C}_{21} \\
&= (\mathsf{A}_{11}\mathsf{B}_{11} + \mathsf{A}_{12}\mathsf{B}_{21})\mathsf{C}_{11} + (\mathsf{A}_{11}\mathsf{B}_{12} + \mathsf{A}_{12}\mathsf{B}_{22})\mathsf{C}_{21} \\
&= \mathsf{A}_{11}\mathsf{B}_{11}\mathsf{C}_{11} + \mathsf{A}_{12}\mathsf{B}_{21}\mathsf{C}_{11} + \mathsf{A}_{11}\mathsf{B}_{12}\mathsf{C}_{21} + \mathsf{A}_{12}\mathsf{B}_{22}\mathsf{C}_{21} \\
&= \mathsf{A}_{11}(\mathsf{B}_{11}\mathsf{C}_{11} + \mathsf{B}_{12}\mathsf{C}_{21}) + \mathsf{A}_{12}(\mathsf{B}_{21}\mathsf{C}_{11} + \mathsf{B}_{22}\mathsf{C}_{21}) \\
&= \mathsf{A}_{11}(\mathsf{BC})_{11} + \mathsf{A}_{12}(\mathsf{BC})_{21} \\
&= (\mathsf{A}(\mathsf{BC}))_{11}.
\end{aligned}$$

Verstaan jy nou die Σ-notasie-bewys? Die kritieke stap (om van die tweede tot die vierde lyn te vorder) word *omruil van die sommeringsvolgorde* genoem.

Die *transponering* van ’n $n \times m$-matriks A is die $m \times n$-matriks A^T waarvan die inskrywings gegee word deur

$$(\mathsf{A}^T)_{ij} := \mathsf{A}_{ji}.$$

Appendix B

Hipervlakke

Definisie 70. Laat $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ 'n funksie wees. Die *nul-versameling* van f is die deelversameling $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ gegee deur

$$M := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} : f(\mathbf{x}) = 0\}.$$

Definisie 71. Ons sê 'n deelversameling $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ is 'n *n-dimensionele hipervlak* as daar 'n funksie $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ bestaan, sodat M die nulversameling van f is, en as vir alle $\mathbf{p} \in M$,

$$\nabla_{\mathbf{p}} f \text{ bestaan en is ongelyk aan } \mathbf{0}.$$

Voorbeeld B.1 (Hiperbool)**.** Laat $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die funksie

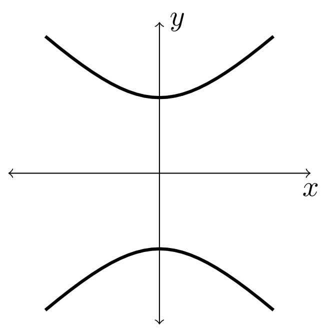
$$f(x, y) = y^2 - x^2 - 1$$

wees. Teken 'n prentjie van die nul-versameling M van f, en wys dat dit 'n hipervlak is.

Oplossing. Die nul-vlak-versameling van f is

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - x^2 - 1 = 0\}$$

wat 'n hiperbool is:



Om te wys dat M 'n hipervlak is, bereken ons eers die gradiënt van f by 'n algemene punt $\mathbf{r} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\nabla_{\mathbf{r}} f = (2y, -2x)$$

Die gradiënt bestaan duidelik oral. Verder, vir 'n punt $\mathbf{p} = (a, b)$ op M, het ons

$$\nabla_{\mathbf{p}} f = (2b, -2a) \quad \text{where } b^2 = 1 + a^2$$

Veronderstel $\nabla_{\mathbf{p}} f = (0, 0)$. Dan is, onder andere, $2b = 0$, sodat $b = 0$, wat beteken dat $0 = 1 + a^2$ volgens die vergelyking vir M. Dit is onmoontlik. Daarom $\nabla_{\mathbf{p}} f \neq (0, 0)$ vir alle $\mathbf{p} \in M$, sodat M 'n hipervlak is.

Voorbeeld B.2 (Twee-sfeer)**.** Laat $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die funksie

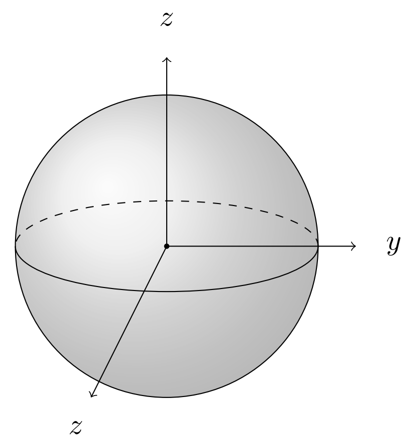
$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1.$$

wees. Teken 'n prentjie van M_f, en wys dat dit 'n differensieerbare hipervlak is.

Oplossing. Dan is die vlakversameling van f

$$M_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0\}$$

Dit word die *2-sfeer* genoem, en word hieronder uitgebeeld:



Om te wys dat dit 'n hipervlak is, bereken ons eers ∇f by 'n algemene punt $\mathbf{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\nabla_{\mathbf{r}} f = (2x, 2y, 2z)$$

Dit bestaan duidelik oral. Verder, vir 'n punt $\mathbf{p} = (a, b, c)$ op M, het ons

$$\nabla_{\mathbf{p}} f = (2a, 2b, 2c) \neq (0, 0, 0)$$

aangesien $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Daarom is M 'n hipervlak.

Voorbeeld B.3. Laat $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die funksie

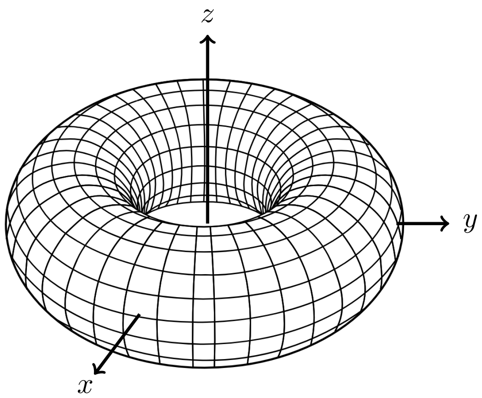
$$f(x, y, z) = (2 - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2 - 1.$$

wees. Teken 'n prentjie van die vlak-versameling M van f, en bewys dat dit 'n hipervlak is.

Oplossing. Die nul-versameling van f is

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (2 - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2 - 1 = 0\}$$

Dit is 'n *torus*, en word hieronder uitgebeeld:



Om te wys dat M 'n hipervlak is, moet ons eers ∇f by 'n algemene punt $\mathbf{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ bereken:

$$\nabla_{\mathbf{r}} f = \left(\frac{2x(2 - \sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{2y(2 - \sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 2z \right)$$

Let daarop dat ∇f nie *oral* in $\mathbb{R}^3$ bestaan nie, aangesien daar 'n probleem is as $x^2 + y^2 = 0$ (d.w.s. op die z-as). Maar vir 'n punt $\mathbf{p} = (a, b, c)$ op M, kan ons nie $a^2 + b^2 = 0$ kry nie, aangesien dit volgens die vergelyking vir M sou impliseer dat

$$(2 - \sqrt{0})^2 + c^2 - 1 = 0,$$

met ander woord, $c^2 = -3$, wat onmoontlik is. So $\nabla_{\mathbf{p}} f$ bestaan oral op M. Verder, veronderstel $\nabla_{\mathbf{p}} f = (0,0,0)$ en $\mathbf{p}$ lê op M. Dan, onder andere, is $2c = 0$ so $c = 0$, en daarom, volgens die vergelyking vir M,

$$(2 - \sqrt{a^2 + b^2})^2 = 1,$$

wat impliseer dat a en b nie albei nul kan wees nie. Dit is 'n teenstelling, daarom is $\nabla_{\mathbf{p}} \neq \mathbf{0}$ oral op M. So M is 'n hipervlak.

Definisie 72. Laat $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 'n hipervlak geassosieer met 'n funksie $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ wees. Die *raakruimte* van M at $\mathbf{p} \in M$ is:

$$T_{\mathbf{p}} M := \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ \nabla_{\mathbf{p}} f \cdot \mathbf{v} = 0\}$$

Uit Meerveranderlike Calculus, weet ons dat ons die raakruimte van M by p soos volg kan uitdruk:

$$\begin{aligned} T_{\mathbf{p}} M &= \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{p}) = 0\} \\ &= \left\{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(\mathbf{p} + t\mathbf{v}) = 0\right\} \end{aligned}$$

Lemma 73. *As M ....*

Voorbeeld B.4. Bereken 'n basis vir die raakruimte aan die hiperbool M in Voorbeeld B.1 by $\mathbf{p} = (1, \sqrt{2})$. Teken 'n prentjie om die resultaat te illustreer.

Oplossing. Ons het reeds die gradi(ë)nt van f by 'n punt $\mathbf{p} = (a,b) \in M$ bereken:

$$\nabla_{\mathbf{p}} = (2b, -2a) \qquad \text{where } b^2 = 1 + a^2.$$

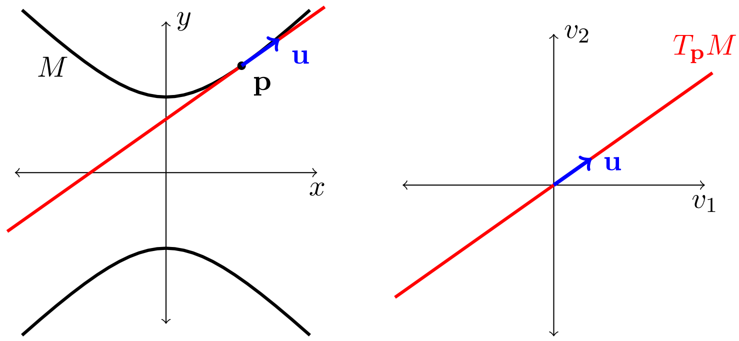
Gevolglik het ons by $\mathbf{p} = (1, \sqrt{2})$ dat

$$\nabla_{\mathbf{p}} f = (2\sqrt{2}, -2).$$

Daarom

$$\begin{aligned} T_{\mathbf{p}} M &= \{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 : \nabla_{\mathbf{p}} f \cdot (v_1, v_2) = 0\} \\ &= \{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 : 2\sqrt{2} v_1 - 2v_2 = 0\} \end{aligned}$$

'n Basis vir $T_{\mathbf{p}}M$ is $\mathbf{u} = (1, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Die visualisering is:



Die rooi lyn in die eerste beeld, wat vir illustrasiedoeleindes geteken is, is die raakruimte wat geskuif is sodat dit deur $\mathbf{p}$ loop. Die ware raakruimte $T_{\mathbf{p}}M$ loop deur die oorsprong soos in die tweede beeld.