Lineêre Algebra W214

Lineêre Algebra W214

Bruce Bartlett

0.1 Nota aan die student

Jou tweede ontmoeting met lineêre algebra lê tans voor jou. In die eerste jaar is daar gefokus op sisteme van lineêre vergelykings, matrikse en matriksdeterminane. Die kursus wat volg, keer terug na hierdie onderwerpe, maar met 'n meer abstrakte, wiskundige aanslag.

Moenie *abstraksie* vrees nie. Dit behels eenvoudig om ontslae te raak van oorbodige besonderhede en om jouself uitsluitlik met die mees belangrike kenmerke van 'n probleem te bemoei. Dit leen jou daartoe om die probleem beter te verstaan. Daar is minder dinge om jou oor te bekommer! Verder, as jy 'n ander probleem sou teëkom wat op eerste oogopslag anders lyk, maar dieselfde belangrike kenmerke met die oorskpronklike probleem deel, dan kan jy die probleem op dieselfde manier verstaan. Dít maak abstraksie baie kragtig.

In die studie van abstrakte wiskunde gebruik ons die taal van *definisies*, *stellings* en *bewyse*. Om aan hierdie denkwyse gewoond te raak (en abstrakte wiskundige denke te ontwikkel) kan aanvanklik oorweldigend voel. Maar volhard! Eendag sal jy dit 'snap' en jy sal besef dit is heelwat eenvoudiger as wat jy jou voorgestel het.

Wiskunde word nie gelees soos 'n roman nie. Jy benodig 'n *pen en notaboekie* byderhand en jy sal aktief by die materiaal *betrokke* moet raak. Byvoorbeeld, as jy 'n definisie teëkom, begin deur dit in jou notaboekie neer te skryf. Net die blote skryf daarvan kan terapeuties wees!

As jy 'n uitgewerkte voorbeeld behandel, skryf die voorbeeld self uit. Miskien probeer die voorbeeld vir jou wys dat A gelyk aan B is. Vra jouself af: Verstaan ek wat 'A' werklik beteken? En wat 'B' beteken? Slegs dan is jy gereed om te oorweeg of A gelyk aan B is!

Baie sterkte met hierdie nuwe fase van jou wiskundige opleiding. Geniet die reis!

Inhoudsopgawe

0.1 Nota aan die student v

1 Abstrakte vektorruimtes **1**
1.1 Inleiding 1
1.2 Definisie van 'n abstrakte vektorruimte 6
1.3 Eerste voorbeeld van 'n vektorruimte 7
1.4 Verdere voorbeelde en slaggate 10
1.5 'n Paar resultate rakende abstrakte vektorruimtes 16
1.6 Deelruimtes 18

2 Eindigdimensionele vektorruimtes **27**
2.1 Lineêre kombinasies en span 27
2.2 Lineêre onafhanklikheid 34
2.3 Basis en dimensie 39
2.4 Koördinaatvektore 47
2.5 Basisverandering 50

3 Matrikshersiening **55**

Bibliography **58**

Hoofstuk 1

Abstrakte vektorruimtes

1.1 Inleiding

1.1.1 Drie verskillende versamelings

Ons begin met 'n speletjie. In wiskunde is 'n *versameling* X maar net 'n kolleksie van onderskeibare objekte. Hierdie objekte word *elemente* van X genoem.

Ek gaan drie verskillende versamelings aan jou toon en jy moet sê watter eienskappe hulle in gemeen het.

Die eerste versameling, A, word gedefinieer as die versameling van alle geordende pare (x, y), waar x en y reële getalle is.

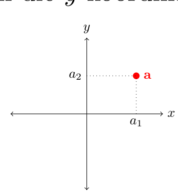
Kom ons stop hier vir 'n oomblik en vertaal die definisie van Afrikaans na wiskundige simbole. Die vertaling is:

$$A := \{(a_1,\, a_2) : a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}. \tag{1.1.1}$$

Die := staan vir 'is gedefinieer as'. Die { en } simbole staan vir 'die versalmeling van alle'. Die enkele dubbelpunt : staan vir 'waar' of 'sodat'. Die komma tussen a en b staan vir 'en'. Die $\in$ staan vir \`'n element van'. En $\mathbb{R}$ staan vir die versameling van alle reële getalle. Veels geluk! — jy gebruik die taal van wiskunde!

'n Element van A is 'n arbitrêre paar van reële getalle $\mathbf{a} = (a_1,\, a_2)$. Byvoorbeeld, $(1,\, 2) \in A$ en $(3.891,\, e^{\pi})$ is elemente van A. Let ook op dat ek 'n vetdruk $\mathbf{a}$ gebruik om na 'n element van A te verwys. Dit is sodat ons $\mathbf{a}$ kan onderskei van sy *komponente* a_1 en a_2, wat net gewone getalle is (nie elemente van A nie).

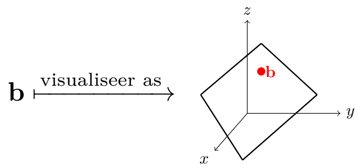
Ons kan 'n element $\mathbf{a}$ van A visualiseer as 'n punt in die Cartesiese vlak waarvan die x-koördinaat a_1 en die y-koördinaat a_2 is:

$\mathbf{a} \xmapsto{\text{visualiseer as}}$ 

Die tweede versameling, B, word gedefinieer as die versameling van alle geordende reële drietalle $(u_1,\, u_2,\, u_3)$, wat $u_1 - u_2 + u_3 = 0$ bevredig. In wiskundige simbole is dit soos volg:

$$B := \{(b_1,\, b_2,\, b_3) : b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R} \text{ en } b_1 - b_2 + b_3 = 0\}. \tag{1.1.2}$$

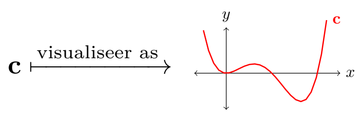
Byvoorbeeld, $(2,3,1) \in B$, maar $(1,1,1) \notin B$. Ons kan 'n element $\mathbf{b}$ van B visualiseer as 'n punt in die vlak in 3-dimensionele ruimte wat deur die vergelyking $x - y + z = 0$ daargestel word:



Die derde versameling, C, is die versameling van alle vierdegraadse polinome. Omgesit in wiskundige simbole, ,

$$C := \{\text{polinome met graad} \leq 4\}. \tag{1.1.3}$$

Onthou dat die *graad* van 'n polinoom is die grootse mag van x wat daarin verskyn. Byvoorbeeld, $\mathbf{c} = x^4 - 3x^3 + 2x^2$ is 'n vierdegraadse polinoom; so ook is $\mathbf{p} = 2x^3 + \pi x$. So $\mathbf{c}$ en $\mathbf{p}$ is elemente van C. Maar $\mathbf{r} = 8x^5 - 7$ en $\mathbf{s} = \sin(x)$ is nie elemente van C nie. Ons kan 'n element $\mathbf{c} \in C$ (i.e. 'n vierdegraadse polinoom) met sy *grafiek* visualiseer. Byvoorbeeld, die polinoom $\mathbf{c} = x^4 - 3x^3 + 2x^2 \in C$ word soos volg visualiseer:



Daar het jy dit. Ek het drie versamelings definieer: A, B en C, en ek het verduidelik hoe elkeen visualiseer kan word. Die drie versamelings lyk aanvanklik redelik verskillend. Elemente van A is arbitrêre punte in $\mathbb{R}^2$. Elemente van B is punte in $\mathbb{R}^3$ wat 'n sekere vergelyking bevredig. Elemente van C is almal polinome.

Watter kenmerke het hierdie versamelings in gemeen?

1.1.2 Gedeelde kenmerke van die versamelings

Ek wil fokus op twee kenmerke wat versamelings in A, B en C in gemeen het.

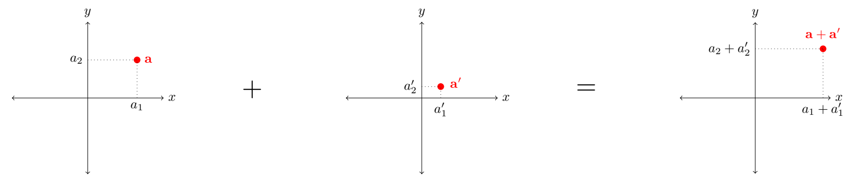
1.1.2.1 Sommering

Eerstens het aldrie hierdie versamelings 'n natuurlike *sommeringsbewerking*. Ons kan twee elemente in 'n versameling bymekaar tel om 'n derde element in dieselfde versameling te kry.

In Versameling A kan ons twee elmente $\mathbf{a} = (a_1,\, a_2)$ en $\mathbf{a}' = (a_1',\, a_2')$ bymekaar tel deur hulle onderskeie komponente bymekaar te tel om 'n nuwe element $\mathbf{a} + \mathbf{a}' \in A$ te vorm:

$$\underbrace{(a_1,\, a_2)}_{\mathbf{a}} + \underbrace{(a_1',\, a_2')}_{\mathbf{a}'} := \underbrace{(a_1 + a_1',\, a_2 + a_2')}_{\mathbf{a}+\mathbf{a}'} \tag{1.1.4}$$

Byvoorbeeld, $(1,\, 3) + (2,\, -1.6) = (3,\, 1.4)$. Ons kan die sommeringsbewerking soos volg visualiseer:



Ons kan 'n soortgelyke benadering in versameling B volg. Versonderstel ons het twee elemente van B, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ en $\mathbf{b}' = (b'_1, b'_2, b'_3)$. Let daarop dat, omdat $\mathbf{b} \in B$, bevredig $\mathbf{b}$ se komponente die vergelyking $b_1 - b_2 + b_3 = 0$. So bevredig b' ook $b'_1 - b'_2 + b'_3 = 0$. Ons kan $\mathbf{b}$ en $\mathbf{b}'$ saamtel om 'n nuwe element $\mathbf{b} + \mathbf{b}'$ van B te kry, deur hulle komponente saam te tel soos tevore:

$$\underbrace{(b_1, b_2, b_3)}_{\mathbf{b}} + \underbrace{(b'_1, b'_2, b'_3)}_{\mathbf{b}'} := \underbrace{(b_1 + b'_1, b_2 + b'_2, b_3 + b'_3)}_{\mathbf{b}+\mathbf{b}'} \tag{1.1.5}$$

Nou moet ons versigtig wees. Hoe weet ons dat die uitdrukking aan die regterkant regtig 'n element van B is? Ons moet seker maak dat dit die vergelyking 'die eerste komponent minus die tweede komponent plus die derde komponent is gelyk aan nul' bevredig. Kom ons doen dit formeel:

$$\begin{aligned}(\mathbf{b} + \mathbf{b}')_1 - (\mathbf{b} + \mathbf{b}')_2 + (\mathbf{b} + \mathbf{b}')_3 &= (b_1 + b'_1) - (b_2 + b'_2) + (b_3 + b'_3)\\ . &= (b_1 - b_2 + b_3) + (b'_1 - b'_2 + b'_3)\\ &= 0 + 0\\ &= 0.\end{aligned}$$

B kan op die selfde manier as A visualiseer word.

Daar is ook 'n sommeringsbewerking in die versameling C. Ons kan twee polinome algebraïes bymekaartel deur hulle ooreenstemmende koëffisiënte bymekaar te tel:

$$\begin{aligned}&[c_4x^4 + c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x^1 + c_0] + [d_4x^4 + d_3x^3 + d_2x^2 + d_1x^1 + d_0]\\ &:= (c_4 + d_4)x^4 + (c_3 + d_3)x^3 + (c_2 + d_2)x^2 + (c_1 + d_1)x^1 + (c_0 + d_0)\end{aligned} \tag{1.1.6}$$

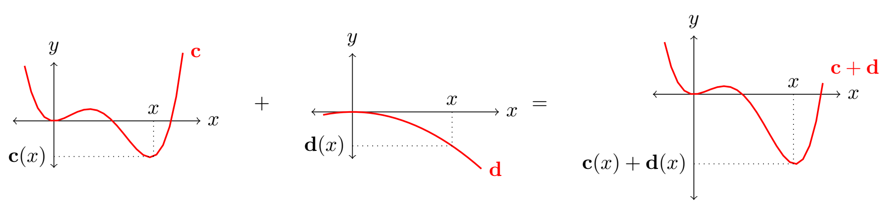
Byvoorbeeld,

$$[2x^4 + x^2 - 3x + 2] + [2x^3 - 7x^2 + x] = 2x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 2x + 2.$$

Daar is nog 'n manier om aan die sommering van polinome te dink. Elke polinoom $\mathbf{c}$ kan gesien word as 'n *funksie*, in die sin dat ons 'n arbitrêre waarde x in die polinoom $\mathbf{c}$ in kan vervang, en dit sal 'n waarde $\mathbf{c}(x)$ voortbring. Byvoorbeeld, as $\mathbf{c}(x) = 3x^2 - 1$, dan is $\mathbf{c}(2) = 11$. As ons polinome as funksies beskou, dan kan aan die som $\mathbf{c} + \mathbf{d}$ van twee polinome gedink word as 'n nuwe funksie wat, wanneer 'n getal x invervang word, dit die waarde $\mathbf{c}(x) + \mathbf{d}(x)$ teruggee. Wiskundig geskryf,

$$(\mathbf{c} + \mathbf{d})(x) := \mathbf{c}(x) + \mathbf{d}(x) \tag{1.1.7}$$

Deur so te dink, kan ons die grafiek van $\mathbf{c} + \mathbf{d}$ as die som van die grafieke van $\mathbf{c}$ en $\mathbf{d}$ voorstel:



1.1.2.2 Nul-element

In aldrie versamelings A, B en C, bestaan daar 'n spesifieke element (die *nul-element*) $\mathbf{0}$ wat, as dit by 'n ander element getel word, lewer dit weer dieselfde element onveranderd terug.

In A word die nul-element $\mathbf{0}$ definieer deur

$$\mathbf{0} := (0, 0) \in A. \tag{1.1.8}$$

Wanneer jy hierdie punt by 'n ander punt $(a_1, a_2) \in A$ tel, gebeur niks nie!

$$(0,\, 0) + (a_1,\, a_2) = (a_1,\, a_2).$$

Moenie die nul-element $\mathbf{0} \in A$ met die reële getal nul $(0 \in \mathbb{R})$ verwar nie. Dit is nog 'n rede hoekom ek vetdruk gebruik! (Jy moet elemente van A onderstreep om die onderskeid te tref.)

$(0, 0, 0) \in B$ is die nul-element $\mathbf{0}$ in B. As jy dit by 'n ander punt $(u_1, u_2, u_3) \in B$ tel, gebeur niks nie!

$$(0,\, 0,\, 0) + (u_1,\, u_2,\, u_3) = (u_1,\, u_2,\, u_3).$$

In C is die *nul-polinoom* die nul-element $\mathbf{0}$. Algebraïes is dit die vierdegraadse polinoom waarvan die koëffisiënte almal nul is:

$$\mathbf{0} = 0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0 \tag{1.1.9}$$

As ons aan die polinoom as 'n funksie dink, dan is die nul-polinoom $\mathbf{0}$ die funksie wat vir alle waardes van x nul is, i.e. $\mathbf{0}(x) = 0$ vir alle x. Hoe ons ookal daaraan dink, as ons die nul-polinoom by 'n ander polinoom tel, gebeur niks nie!

$$\begin{aligned}&[0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0] + [c_4x^4 + c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0] \\ &\quad = [c_4x^4 + c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0]\end{aligned}$$

1.1.2.3 Skalaarvermenigvuldiging

Die laaste kenmerk wat A, B en C in gemeen het is dat met elke versameling, hul elemente met reële getalle *vermenigvuldig* kan word en steeds in die versameling sal wees.

Byvoorbeeld, as $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ 'n elment van A is, dan kan ons dit met 'n arbitrêre reële getal, sê maar 9, vermenigvuldig, om 'n nuwe element $9 \cdot a$ van A te kry. Hierdie vermenigvuldiging word komponentgewys gedoen:

$$9 \cdot (a_1,\, a_2) := (9a_1,\, 9a_2). \tag{1.1.10}$$

In die algemeen, as $k \in \mathbb{R}$ 'n arbitrêre reële getal is, dan kan ons 'n arbitrêre element $\mathbf{a} \in A$ met k vermenigvuldig om 'n nuwe element $k \cdot \mathbf{a} \in A$ te kry deur elke komponent van $\mathbf{a}$ met k te vermenigvuldig:

$$\underbrace{k.(a_1,\, a_2)}_{\text{Skalaarvermenigvuldiging}} := (\underbrace{ka_1}_{\text{Vermenigvuldig twee getalle}},\, \underbrace{ka_2})$$

Wees versigtig om te onderskei tussen skalaarvermenigvuldiging $k \cdot \mathbf{a}$ (aangedui met $\cdot$) en gewone vermenigvuldiging van reële getalle ka_1 (aangedui sonder enige simbool, die twee simbole word bloot langs mekaar geplaas). Later gaan ons 'n kortpad neem en ophou om die $\cdot$ eksplisiet uit te skryf — wees gewaarsku!

Visueel *skaleer* die vermenigvuldigingsbewerking $\mathbf{a}$ met 'n faktor van k. Dit is hoekom ons dit *skalaarvermenigvuldiging* noem.

Daar is 'n soortgelyke skalaarvermenigvuldigingsbewerking in B:

$$k(u_1, u_2, u_3) := (ku_1, ku_2, ku_3) \tag{1.1.11}$$

Daar is ook 'n skalaarvermenigvuldigingsbewerking in C. Ons vermenigvuldig elke koëffisient van 'n polinoom $\mathbf{c} \in C$ met k:

$$k \cdot [c_4x^4 + c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0] = kc_0x^4 + kc_3x^3 + kc_2x^2 + kc_1x + kc_0 \tag{1.1.12}$$

As ons aan 'n polinoom $\mathbf{c}$ as 'n funksie dink, dan korrespondeer dit met vertikale *skalering* van die grafiek met 'n faktor van k.

1.1.3 Kenmerkse wat die versamelings *nie* het nie

Kom on noem 'n paar kenmerke wat die versamelings *nie* het nie, of ten minste nie in gemeen het nie.

- Die versameling $A = \mathbb{R}^2$ het 'n *vermenigvuldigingsbewerking*. Dit is omdat ons $\mathbb{R}^2$ as die komplekse vlak $\mathbb{C}$ kan beskou; ons weet hoe om komplekse getalle kan vermenigvuldig. Daar is geen duidelike kandidaat vir 'n vermenigvuldigingsbewerking op B nie. Dieselfde geld vir C: as jy twee vierdegraadse polinome in C vermenigvuldig, eindig jy met 'n agtstegraadse polinoom, wat nie in C is nie!
- Daar is 'n *'bereken die afgeleide'*-bewerking op C,

  $$\mathbf{c} \mapsto \frac{d}{dx}\mathbf{c}$$

  wat ons later weer sal teëkom. Let op dat die wanneer die afgeleide bereken word, die graad van 'n polinoom met 1 afneem, so die resultaat bly in C, wat beteken dat dit 'n goedgedefinieerde afbeelding van C na C is. Daar is geen ooreenstemmende bewerking hiervoor in A en B nie.

  > Let daarop dat daar geen *integrasie*-afbeelding van C na C is nie, want integrasie van 'n polinoom *verhoog* die graad met 1, so die resultaat mag dalk 'n polinoom van graad 5 wees, wat nie in C is nie!

1.1.4 Reëls

Ons het gevind dat elk van ons drie versamelings A, B en C 'n *sommeringsbewerking* $+$, 'n *nul-element* $\mathbf{0}$ en 'n *skalaarvermenigvuldigingsbewerking* $\cdot$ het. Kan ons enige reëls identifiseer waaraan hierdie bewerkings in al drie versamelings moet voldoen?

Byvoorbeeld, ons kan aan die sommeringsbewerking in A dink as 'n funksie wat aan elke elementpaar $\mathbf{a}$ en $\mathbf{a}'$ in A 'n nuwe element $\mathbf{a} + \mathbf{a}'$ in A toeken. Voldoen hierdie bewerking aan enige reëls?

Kom ons kyk. Laat $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ en $\mathbf{a}' = (a'_1, a'_2)$ elemente van A wees. Ons kan hulle in twee verskillende volgordes bymekaar tel,

$$\mathbf{a} + \mathbf{a}' = (a_1 + a'_1, a_2 + a'_2)$$

en

$$\mathbf{a}' + \mathbf{a} = (a_1' + a_1,\, a_2' + a_2).$$

Kom dit op dieselfde neer? In ander woorde, geld

$$\mathbf{a} + \mathbf{a}' = \mathbf{a}' + \mathbf{a} \tag{1.1.13}$$

as 'n reël? Die antwoord is *ja*, maar hoekom? Om na te gaan of twee elemente van A dieselfde is, moet ons nagaan of elkeen van hulle komponente gelyk is. Die eerste komponent van $\mathbf{a} + \mathbf{a}'$ is $a_1 + a_1'$. Die eerste komponent van $\mathbf{a}' + \mathbf{a}$ is $a_1' + a_1$. Is $a_1 + a_1' = a_1' + a_1$? Ja — want beide is net gewone reële getalle (nie elemente van A nie), en ons weet dat vir gewone reële getalle kan jy in enige orde saamtel met dieselfde resultaat. So die eerste komponent van $\mathbf{a} + \mathbf{a}'$ is gelyk aan die eerste komponent van $a' + a$. Net so kan ons nagaan dat die tweede komponent van $\mathbf{a} + \mathbf{a}'$ gelyk is aan die tweede komponent van $\mathbf{a}' + \mathbf{a}$. So all die komponente van $\mathbf{a} + \mathbf{a}'$ is gelyk aan al die ooreenstemmende komponente van $\mathbf{a}' + \mathbf{a}$. So, uiteindelik kan ons tot die gevolgtrekking kom dat $\mathbf{a} + \mathbf{a}' = \mathbf{a}' + \mathbf{a}$.

Geld hierdie reël (1.1.13) ook vir sommeringsoperators in B en C? Ja. Byvoorbeeld, kom ons gaan na dat dit vir C geld. Veronderstel dat $\mathbf{c}$ en $\mathbf{c}'$ polinome in C is. Geld die reël

$$\mathbf{c} + \mathbf{c}' = \mathbf{c}' + \mathbf{c} \tag{1.1.14}$$

steeds?

Die linker- en regterkante van (1.1.14) is elemente van C. En alle elemente van C is polinome. Om na te gaan of twee polinome gelyk is, moet ons nagaan of hulle gelyk is *as funksies*, met ander woorde, of jy identiese resultate uitkry vir enige moontlike insetwaarde van x wat invervang word.

By 'n arbitrêre insetwaarde x is die linkerkant $(\mathbf{c} + \mathbf{c}')(x) = \mathbf{c}(x) + \mathbf{c}'(x)$. Aan die anderkant is die regterkant $(\mathbf{c}' + \mathbf{c})(x) = \mathbf{c}'(x) + \mathbf{c}(x)$. Nou, let op dat $\mathbf{c}(x)$ en $\mathbf{c}'(x)$ gewone getalle is (en nie polinome nie). So $\mathbf{c}(x) + \mathbf{c}'(x) = \mathbf{c}'(x) + \mathbf{c}(x)$, want dit is waar vir gewone getalle. So vir elke insetwaarde x, $(\mathbf{c} + \mathbf{c}')(x) = (\mathbf{c}' + \mathbf{c})(x)$. Daarom is die polinome $\mathbf{c} + \mathbf{c}'$ en $\mathbf{c}' + \mathbf{c}$ gelyk, hulle uitsetwaarde is dieselfde vir alle getalle x.

Daar is ander reëls wat ook vir al drie versamelings geld. Byvoorbeeld, in al drie versamelings geld die reël

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) \tag{1.1.15}$$

vir alle elemente $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ en $\mathbf{z}$. Kan jy ander reëls identifiseer wat vir al drie versamelings geld?

1.2 Definisie van 'n abstrakte vektorruimte

Wiskunde behels die identifisering van patrone. Ons het drie versamelings gevind, A, B en C, wat aanvanklik baie soortgelyk voorkom maar baie in gemeen het. In elke versamiling is daar 'n sommeringsbewerking, 'n nulvektor en 'n skalaarvermenigvuldigingbewerking. Verder geld dieselfde reëls vir hierdie bewerkings. Kom ons noteer hierdie patroon deur dit 'n naam te gee en die reëls eksplisiet neer te pen.

Definisie 1.2.1 A **vektorruimte** is 'n versameling V wat met die volgende data toegerus is:

D1. 'n *Sommeringsbewerking*. (I.e. vir elke elementpaar $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V$, word 'n nuwe element $\mathbf{v} + \mathbf{v}'$ definieer.)

D2. 'n *Nul-vektor.* (I.e. 'n spesiale vektor $\mathbf{0} \in V$ word bepaal.)

D3. 'n *Skalaarvermenigvuldigingsbewerking.* (I.e., vir elke reële getal k en elke element $\mathbf{v} \in V$ word 'n nuwe element $k \cdot \mathbf{v} \in V$ definieer.)

Hierdie data moet aan die volgende reëls vir alle $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ in V en vir alle reële getalle k en l voldoen:

R1. $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$

R2. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$

R3a. $\mathbf{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v}$

R3b. $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$

R4. $k \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = k \cdot \mathbf{v} + k \cdot \mathbf{w}$

R5. $(k + l) \cdot \mathbf{v} = k \cdot \mathbf{v} + l \cdot \mathbf{v}$

R6. $k \cdot (l \cdot \mathbf{v}) = (kl) \cdot \mathbf{v}$

R7. $1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$

R8. $0 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$

$\Diamond$

Ons noem elemente van 'n vektorruimte *vektore* en ons skryf hulle in vetdruk, bv. $\mathbf{v} \in V$. Dit is om vektore van reële getalle te onderskei, wat ons *skalare* noem en wat nie in vetdruk geskryf word nie. Dit is moeilik om vetdruk met handskrif uit te druk, so jy kan hulle onderstreep, soos volg: $\underline{v}$.

In hierdie hoofstuk sal ons skalaarvermenigvuldiging met 'n $\cdot$ skryf, byvoorbeeld $k \cdot \mathbf{v}$, maar in hieropvolgende hoofstukke sal on doodgewoon $k\mathbf{v}$ skryf, so weer versigtig!

Om te bewys dat 'n gegewe versameling 'n vektorruimte is, moet 'n mens die volgende doen:

1. Definieer die versameling V.
2. Definieer die data van 'n sommeringsbewerking (D1), 'n nul-vektor (D2) en 'n skalaarvermenigvuldigingsbewerking (D3) op V.
3. Gaan na dat hierdie data aan reëls (R1) - (R8) voldoen.

1.3 Eerste voorbeeld van 'n vektorruimte

Ons is na die definisie (Definisie 1.2.1) van 'n abstrakte vektorruimte gelei deur die eienskappe van versamelings A, B en C in Afdeling 1.1 te bestudeer. Kom ons gaan na dat B wel 'n abstrakte vektorruimte is soos gedifineer in Definisie 1.2.1. Die ander versamelings word as oefeninge aan jou oorgelaat.

Voorbeeld 1.3.1 Die versameling B is 'n vektorruimte.. ***1. Definieer 'n versameling*** B

Ons definieer

$$B := \{(u_1, u_2, u_3) : u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R} \text{ and } u_1 - u_2 + u_3 = 0\}. \tag{1.3.1}$$

2. Definieer sommering, die nul-vektor en skalaarvermenigvuldiging.

D1. Sommering Ons definieer sommering soos volg. Veronderstel $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ en $\mathbf{v} = (v_1, , v_2, v_3)$ is elemente van B. Let op dat dit beteken $u_1 - u_2 + u_3 = 0$ en $v_1 - v_2 + v_3 = 0$. Ons definieer $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ as:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} := (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3). \tag{1.3.2}$$

Ons moet nagaan dat dit sin maak. Ons behoort te vind dat $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ ook 'n element van B is. Ons kan nie bloot enige definisie neerskryf nie! Om na te gaan of $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ 'n element van$B$ is, moet ons nagaan of dit vergelyking (1.3.1) bevredig. Kom ons kyk:

$$\begin{aligned}
&(u_1 + v_1) - (u_2 + v_2) + (u_3 + v_3) \\
&= (u_1 - u_2 + u_3) + (v_1 - v_2 + v_3) && \text{(Hierdie algebraïese stap is waar vir gewone getalle)} \\
&= 0 + 0 && \text{(want } \mathbf{u} \text{ en } \mathbf{v} \text{ is in } B\text{)} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Daarom het ons dat $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ inderdaad 'n element van B is, so ons het ons eie goed-gedefinieerde? sommeringsbewerking op B definieer, wat twee arbitrêre elemente van B neem en weer 'n element van B teruggee.

D2. Nulvektor Ons definieer die nulvektor $\mathbf{0} \in B$ as

$$\mathbf{0} := (0, 0, 0). \tag{1.3.3}$$

Ons moet seker maak dat dit sin maak. Is $(0, 0, 0)$ regtig 'n element van B, oftewel, bevredig dit vergelyking (1.3.1)? Ja, omdat $0-0+0 = 0$. So ons het 'n goed-gedefinieerde nul-vektor.

D3. Skalaarvermenigvuldiging Ons definieer skalaarvermenigvuldiging soos op B soos volg. Laat k 'n reëele getal en$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ 'n element van B wees. Ons definieer

$$k \cdot \mathbf{u} := (ku_1, ku_2, ku_3). \tag{1.3.4}$$

Ons moet seker maak dat dit sinmaak. As ek 'n vektor $\mathbf{v}$ in B met 'n skalaar k vermenigvuldig, dan moet die resultaat $k \cdot \mathbf{u}$ 'n element van B wees. Behoort (ku_1, ku_2, ku_3) werklik aan B? Kom ons kyk of dit die definiërende vergelyking (1.3.1) bevredig:

$$\begin{aligned}
&ku_1 - ku_2 + ku_3 \\
&= k(u_1 - u_2 + u_3) && \text{(Hierdie algebraïese stap is waar vir gewone getalle)} \\
&= k0 && \text{(want } \mathbf{u} \text{ is in } B\text{)} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Daarom is $k \cdot \mathbf{u}$ wel 'n element van B, so ons het 'n goed-gedefinieerde skalaarvermenigvuldigingsbewerking op B gevind.

3. Maak seker die data bevredig die reëls.

Ons moet seker maak dat ons data D1, D2 en D3 reëls R1 — R8 bevredig. So, veronderstel $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ en $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ is in B en veronderstel dat k en l reëlle getalle is.

R1 Ons gaan na:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{v}+\mathbf{w} && \text{(R1.)}\\
&=(v_1+w_1,\, v_2+w_2,\, v_3+w_3) && \text{(definisie van sommering in } B\text{)}\\
&=(w_1+v_1,\, w_2+v_2,\, w_3+v_3) && \text{(want } x+y=y+x \text{ is waar vir reële getalle)}\\
&=\mathbf{w}+\mathbf{v}. && \text{(definisie van sommering in } B\text{)}
\end{aligned}$$

R2 Ons gaan na:

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w} &&\\
&=(u_1+v_1,\, u_2+v_2,\, u_3+v_3)+\mathbf{w} && \text{(definisie van sommering in } B\text{)}\\
&=((u_1+v_1)+w_1,\, (u_2+v_2)+w_2,\, (u_3+v_3)+w_3) && \text{(definisie van sommering in } B\text{)}\\
&=(u_1+(v_1+w_1),\, u_2+(v_2+w_2),\, u_3+(v_3+w_3)) && \text{(want } (x+y)+z=x+(y+z) \text{ is waar vir reële g}\\
&=\mathbf{u}+(v_1+w_1,\, v_2+w_2,\, v_3+w_3) && \text{(definisie van sommering in } B\text{)}\\
&=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w}) && \text{(definisie van sommering in } B\text{).}
\end{aligned}$$

R3 Ons gaan na:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{0}+\mathbf{v} &&\\
&=(0,\, 0,\, 0)+(v_1,\, v_2,\, v_3) && \text{(definisie van die nul-vektor in} B\\
&=(0+v_1,\, 0+v_2,\, 0+v_3) && \text{(definisie van sommering in } B\text{)}\\
&=(v_1,\, v_2,\, v_3) && \text{(want } x+0=x \text{ is waar vir reële getalle)}\\
&=\mathbf{v}. &&
\end{aligned}$$

Met dieselfde benadering, gaan ons na dat $\mathbf{v}+\mathbf{0}=\mathbf{v}$.

R4 Ons gaan na:

$$\begin{aligned}
&k\cdot(\mathbf{v}+\mathbf{w}) &&\\
&=k\cdot(v_1+w_1,\, v_2+w_2,\, v_3+w_3) && \text{(definisie van sommering in } B\text{)}\\
&=(k(v_1+w_1,\, k(v_2+w_2),\, k(v_3+w_3)) && \text{(definisie van skalaarvermenigvuldiging in} B\text{)}\\
&=(kv_1+kw_1,\, kv_2+kw_2,\, kv_3+kw_3) && \text{(want } k(x+y)=kx+ky \text{ vir reële getalle } x,y\text{)}\\
&=(kv_1,\, kv_2,\, kv_3)+(kw_1,\, kw_2,\, kw_3) && \text{(definisie van sommering in } B\text{)}\\
&=k\cdot\mathbf{v}+k\cdot\mathbf{w} && \text{(definisie van skalaarvermenigvuldiging in } B\text{)}
\end{aligned}$$

R5 Ons gaan na:

$$\begin{aligned}
&(k+l)\cdot\mathbf{v} &&\\
&=((k+l)v_1,\, (k+l)v_2,\, (k+l)v_3) && \text{(definisie van skalaarvermenigvuldiging in } B\text{)}\\
&=(kv_1+lv_1,\, kv_2+lv_2,\, kv_3+lv_3) && \text{(want } (k+l)x=kx+lx \text{ vir reële getalle)}\\
&=(kv_1,\, kv_2,\, kv_3)+(lv_1,\, lv_2,\, lv_3) && \text{(definisie van sommering in } B\text{)}\\
&=k\cdot\mathbf{v}+l\cdot\mathbf{v} && \text{(definisie van skalaarvermenigvuldiging in } B\text{)}
\end{aligned}$$

R6 Ons gaan na:

$$\begin{aligned}
&k\cdot(l\cdot\mathbf{v}) &&\\
&=k\cdot(lv_1,\, lv_2,\, lv_3) && \text{(definisie van skalaarvermenigvuldiging in } B\text{)}\\
&=(k(lv_1),\, k(lv_2),\, k(lv_3)) && \text{(definisie van skalaarvermenigvuldiging in } B\text{)}\\
&=((kl)v_1,\, (kl)v_2,\, (kl)v_3) && \text{(want } k(lx)=(kl)x \text{ vir reële getalle)}\\
&=(kl)\cdot\mathbf{v} && \text{(definisie van skalaarvermenigvuldiging in } B\text{).}
\end{aligned}$$

R7 Ons gaan na:

$$\begin{aligned} 1 \cdot \mathbf{v} &= (1v_1,\, 1v_2,\, 1v_3) && \text{(definisie van skalaarvermenigvuldiging in } B\text{)} \\ &= (v_1,\, v_2,\, v_3) && \text{(want } 1x = x \text{ vir reële getalle } x\text{)} \\ &= \mathbf{v}. \end{aligned}$$

R8 Ons gaan na:

$$\begin{aligned} 0 \cdot \mathbf{v} &= (0v_1,\, 0v_2,\, 0v_3) && \text{(definisie van skalaarvermenigvuldiging in in } B\text{)} \\ &= (0,\, 0,\, 0) && \text{(want } 0x = 0 \text{ vir reële getalle} \\ &= \mathbf{0} && \text{(definisie van die nul-vektor in } B\text{).} \end{aligned}$$

□

Oefeninge

1. Bewys dat die versameling A ui Afdeling 1.1 toegerus met die sommeringsbewerking (1.1.4), die nulvektor (1.1.8) en die skalaarvermenigsvuldigingsbewerking (1.1.10) 'n vektorruimte is.

2. Bewys dat die versameling C uit Afdeling 1.1 toegerus met die sommeringsbewerking (1.1.6), die nulvektor (1.1.9) en die skalaarvermenigsvuldingsbewerking (1.1.12) 'n vektorruimte is.

3. Defineer C' as die versameling van alle polinome met graad *presies* gelyk aan 4. Toon aan dat as C' die sommeringsbewerking (1.1.6), die nulvektor (1.1.9) en die skalaarvermenigvuldigingsbewerking (1.1.12) gegee word, dan is C' *nie* 'n vektorruimte nie.

Wenk. Gee 'n teenvoorbeeld!

4. Beskou die versameling

$$X := \{(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 : a_1 \geq 0, a_2 \geq 0\}$$

toegerus met dieselfde sommeringsbewerking (1.1.4), nulvektor (1.1.8) en skalaarvermenigvuldigingsbewerking (1.1.10) as in A. Is X 'n vektorruimte? Indien nie, hoekom nie?

1.4 Verdere voorbeelde en slaggate

Voorbeeld 1.4.1 Nie 'n vektor-ruimte nie. Definieer die versameling V deur

$$V := \{a, b\}. \tag{1.4.1}$$

Definieer die sommeringsbewerking deur

$$\begin{aligned} \mathbf{a} + \mathbf{a} &:= \mathbf{a} & \qquad \mathbf{a} + \mathbf{b} &:= \mathbf{a} \\ \mathbf{b} + \mathbf{a} &:= \mathbf{b} & \qquad \mathbf{b} + \mathbf{b} &:= \mathbf{c} \end{aligned}$$

Om na te gaan of dit 'n goed-gedefinieerde bewerking is, moet ons nagaan dat die sommering van enige twee elemente van V 'n goed-gedefinieerde element van V lewer. Maar $\mathbf{v} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$, so die som van $\mathbf{b} \in V$ met homself lewer iets ($\mathbf{c}$) wat nie 'n element van V is nie. So V is nie 'n vektorruimte nie want dit het nie 'n goed-gedefinieerde sommeringsbewerking nie. □

Voorbeeld 1.4.2 Weereens nie 'n vektor-ruimte nie. Definieer die versameling V deur

$$V := \{a, b\}. \tag{1.4.2}$$

Definieer die sommeringsbewerking as

$$\begin{aligned} \mathbf{a}+\mathbf{a} &:= \mathbf{a} & \qquad \mathbf{a}+\mathbf{b} &:= \mathbf{b} \\ \mathbf{b}+\mathbf{a} &:= \mathbf{b} & \qquad \mathbf{b}+\mathbf{b} &:= \mathbf{a} \end{aligned}$$

Dit is 'n goed-gedefinieerde bewerking, omdat enige twee elemente van V se som n goedgedefinieerde element van V lewer.

Definieer die nul-vektor deur

$$\mathbf{0} := \mathbf{a}. \tag{1.4.3}$$

Dit is goed-gedefinieerd, want $\mathbf{a}$ is 'n element van V.

Definieer skalaarvermenigvuldiging met 'n reële getal $k \in \mathbb{R}$ as

$$k \cdot \mathbf{a} := \mathbf{a} \text{ en } k \cdot \mathbf{b} := \mathbf{b}. \tag{1.4.4}$$

Dit is 'n goed-gedefinieerde skalaarvermenigvuldigingsbewerking, want dit laat skalaarvermenigvuldiging met enige skalaar k toe en gee 'n goed-gedefinieerde element $k \cdot \mathbf{v} \in V$ terug. □

Verstaanpunt 1.4.3 Wys dat hierdie bewerkings R1, R2, R3, R4, R6 en R7 bevredig, maar nie R5 en R8 nie.

Oplossing. R1: Ons moet kontrolleer of $\mathbf{v}+\mathbf{w} = \mathbf{w}+\mathbf{v}$ vir alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$. Duidelik is $\mathbf{a}+\mathbf{a} = \mathbf{a}+\mathbf{a}$ en soortgelyk vir $\mathbf{b}$. Finaalweg $\mathbf{b} = \mathbf{a}+\mathbf{b} = \mathbf{b}+\mathbf{a}$.

R2: Ons moet kontrolleer of $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w} = \mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$ vir alle $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$. Dit vereis dat ons 8 vergelykings in totaal kontrolleer. Ons sal net die oplossing vir een van hulle aandui, die res is soortgelyk. Ons kontrolleer of

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{b} = \mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{b}$$

Beskou:

$$\begin{aligned} \text{LK} &= (\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{b} \\ &= \mathbf{b}+\mathbf{b} \\ &= \mathbf{a}. \end{aligned}$$

Deur 'n soortgelyke metode,

$$\begin{aligned} \text{RK} &= \mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{b}) \\ &= \mathbf{a}+\mathbf{a} \\ &= \mathbf{a} \\ \therefore LK &= RK. \end{aligned}$$

R3, R4, R6, en R7 volg almal in dieselfde manier.

Ons sal aantoon hoekom R5 nie bevredig is nie. Ons sal 'n teenvoorbeeld gee. Vat $k = 2 = l, \mathbf{v} = \mathbf{b}$. Dan is:

$$\begin{aligned} \text{LK} &= (2+2).\mathbf{b} \\ &= 4.\mathbf{b} \\ &= \mathbf{b} \end{aligned}$$

maar

$$\text{RK} = 2.\mathbf{b}+2.\mathbf{b}$$

$$= \mathbf{b} + \mathbf{b}$$
$$= \mathbf{a}$$

Omdat LK $\neq$ RK in hierdie geval nie, kan R5 nie in algemeen waar wees nie.

Voorbeeld 1.4.4 Die nul-vektorruimte. Definieer die versameling Z as

$$Z := \{\mathbf{z}\}. \tag{1.4.5}$$

Let op dat dit net 'n enkele element bevat, $\mathbf{z}$. Definieer sommering as

$$\mathbf{z} + \mathbf{z} := \mathbf{z} \tag{1.4.6}$$

Definieer die nul-element as

$$\mathbf{0} := z. \tag{1.4.7}$$

Laastens, definieer skalaarvermenigvuldiging met 'n skalaar $k \in \mathbb{R}$ as:

$$k \cdot \mathbf{z} := \mathbf{z}. \tag{1.4.8}$$

□

Verstaanpunt 1.4.5 Wys dat hierdie data reëls R1 tot R8 bevredig.

Voorbeeld 1.4.6 $\mathbb{R}^n$. Definieer die versameling $\mathbb{R}^n$ as

$$\mathbb{R}^n := \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R} \text{ vir alle } i = 1 \ldots n\}. \tag{1.4.9}$$

Definieer sommering as

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n). \tag{1.4.10}$$

Definieer die nul-element as

$$\mathbf{0} := (0, 0, \ldots, 0). \tag{1.4.11}$$

Definieer skalaarvermenigvuldiging as

$$k \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) := (kx_1, kx_2, \ldots, kx_n). \tag{1.4.12}$$

□

Verstaanpunt 1.4.7 Wys dat hierdie data reëls R1 tot R8 bevredig.

Voorbeeld 1.4.8 $\mathbb{R}^\infty$. Definieer die versameling $\mathbb{R}^\infty$ as

$$\mathbb{R}^\infty := \{(x_1, x_2, x_3, \ldots,) : x_i \in \mathbb{R} \text{ vir alle } i = 1, 2, 3, \ldots\} \tag{1.4.13}$$

So 'n element $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^\infty$ is 'n oneindige ry van reële getalle. Definieer die sommeringsbewerking komponentgewys:

$$(x_1, x_2, x_3, \ldots) + (y_1, y_2, y_3, \ldots) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \ldots). \tag{1.4.14}$$

Definieer die nul-element as

$$\mathbf{0} := (0, 0, 0, \ldots), \tag{1.4.15}$$

die oneindige reeks waarvan alle komponente nul is. Laastens, definieer skalaarvermenigvuldiging komponentgewys:

$$k \cdot (x_1, x_2, x_3, \ldots) := (kx_1, kx_2, kx_3, \ldots) \tag{1.4.16}$$

Die studie van oneindigheid is 'n belangrike deel van wiskunde. Het jy al die fliek *The man who knew infinity* wat oor my gaan, gesien?

□

Verstaanpunt 1.4.9 Wys dat hierdie data die reëls R1 tot R8 bevredig.

Oplossing. Ons sal net R4 kontrolleer, die res is soortgelyk.

R4 :Laat

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= (v_1, v_2, v_3, \ldots)\\ \mathbf{w} &= (w_1, w_2, w_3, \ldots)\end{aligned}$$

Ons moet kontrolleer of $k.(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = k.\mathbf{v} + k.\mathbf{w}$.

$$\begin{aligned}\text{LK} &= k.(\mathbf{v} + \mathbf{w})\\ &= k.\left[(v_1, v_2, v_3, \ldots) + (w_1, w_2, w_3, \ldots)\right]\\ &= k.\left(v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3, \ldots\right)\\ &= (k(v_1 + w_1), k(v_2 + w_2), k(v_3 + w_3), \ldots)\\ &= (kv_1 + kw_1, kv_2 + kw_2, kv_3 + kw_3, \ldots)\\ &= (kv_1, kv_2, kv_3, \ldots) + (kw_1, kw_2, kw_3, \ldots)\\ &= k.(v_1, v_2, v_3, \ldots) + k.(w_1, w_2, w_3, \ldots)\\ &= k.\mathbf{v} + k.{=}w\\ &= \text{RK}\end{aligned}$$

Voorbeeld 1.4.10 Funksies op 'n versameling. Laat X enige versameling wees. Definieer die versameling $\text{Fun}(X)$ van *reële getal-funksies op* X as

$$\text{Fun}(X) := \{\mathbf{f} : X \to \mathbb{R}\}. \tag{1.4.17}$$

Let op dat die funksies arbitrêr kan wees; daar is geen vereiste dat hulle kontinu of differensieerbaar moet wees nie. So 'n vereiste maak nie sin nie, aangesien X 'n arbitrêre versameling kan wees. Byvoorbeeld, X kan die versameling $\{a, b, c\}$ wees — sonder enige verdere inligting maak dit nie sin om te sê dat die funksie $\mathbf{f} : X \to \mathbb{R}$ kontinu is nie.

Definieer die sommeringsbewerking as

$$(\mathbf{f} + \mathbf{g})(x) := \mathbf{f}(x) + \mathbf{g}(x), x \in X \tag{1.4.18}$$

Maak seker dat jy verstaan wat hierdie formule sê! Ons begin met twee funksies**f** en **g**, en ons definieer hulle som $\mathbf{f} + \mathbf{g}$. Dit is veronderstel om self 'n funksie van X te wees. Om 'n funksie op X te definieer, moet ek vir elke $x \in X$ neerskryf watter waarde die funksie lewer. En dit is wat die formule sê: die waarde wat die funksie $\mathbf{f} + \mathbf{g}$ aan die element $x \in X$ toeken, word defnieer as die waarde $\mathbf{f}(x)$ plus die getal $\mathbf{g}(x)$. Onthou: **f** is 'n funksie, terwyl $\mathbf{f}(x)$ 'n getal is!

Definieer die nul-vektor **0** as die funksie wat die getal 0 lewer vir elke insetwaarde $x \in X$:

$$\mathbf{0}(x) := 0 \text{ vir alle } x \in X. \tag{1.4.19}$$

Definieer skalaarvermenigvuldiging as

$$(k.\mathbf{f})(x) := k\mathbf{f}(x). \tag{1.4.20}$$

□

Verstaanpunt 1.4.11 Notasie-uitdaging! Sê of die volgende kombinasie van simbole 'n reële waarde of 'n funksie voorstel.

1. $\mathbf{f}$
2. $\mathbf{f}(x)$
3. $k \cdot \mathbf{f}$
4. $(k \cdot \mathbf{f})(x)$

Oplossing.

1. Funksie
2. Reële getal
3. Funksie
4. Reële getal

Verstaanpunt 1.4.12 Laat $X = \{a, b, c\}$.

1. Skryf drie verskillende funksies$\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h}$ in $\text{Fun}(X)$ neer.
2. Vir die funksies wat jy in Item 1.4.12.1 geskryf het, bereken $\mathbf{f} + \mathbf{g}$, asook $3 \cdot \mathbf{h}$.

Verstaanpunt 1.4.13 Wys dat die data hierbo reëls R1 tot R8 bevredig, i.e. dat $\text{Fun}(X)$ 'n vektorruimte is.

Oplossing.

1.
$$\begin{aligned} f(a) &= 4 \\ f(b) &= 0 \\ f(c) &= 2 \\ \\ g(a) &= 1 \\ g(b) &= 1 \\ g(c) &= 1 \\ \\ h(a) &= 0 \\ h(b) &= 3 \\ h(c) &= 0 \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} (f+g)(a) &= 5 \\ (f+g)(b) &= 1 \\ (f+g)(c) &= 3 \\ \\ (3.h)(a) &= 0 \\ (3.h)(b) &= 9 \\ (3.h)(c) &= 0 \end{aligned}$$

Voorbeeld 1.4.14 Matrikse. Die versameling $\mathrm{Mat}_{n,m}$ van alle $n \times m$ matrikse is 'n vektorruimte. Sien Appendix 3 om matrikse te hersien. $\square$

Verstaanpunt 1.4.15 Wys dat met hierdie bewerkings vorm die versameling $\mathrm{Mat}_{n,m}$ van alle $n \times m$-matrikse 'n vektorruimte.

Voorbeeld 1.4.16 Ons sal Col_n skryf vir die vektorruimte$\mathrm{Mat}_{n,1}$ van n-dimensionele *kolomvektore*,

$$\mathrm{Col}_n = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} : x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

So, Col_n 'is' net $\mathbb{R}^n$, maar ons beklemtoon dat die komponente in kolomme gerangskik word. $\square$

Oefeninge

1. Definieer 'n sommeringsbewerking op die versameling $X := \{\mathbf{0}, \mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ met die volgende tabel:

$+$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{a}$	$\mathbf{b}$
$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{a}$	$\mathbf{b}$
$\mathbf{a}$	$\mathbf{a}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{a}$
$\mathbf{b}$	$\mathbf{b}$	$\mathbf{a}$	$\mathbf{0}$

Die tabel werk soos volg. Vir die berekening $\mathbf{b} + \mathbf{a}$, vind die kruising van ry $\mathbf{b}$ en kolom $\mathbf{a}$. ons sien dat $\mathbf{b} + \mathbf{a} := \mathbf{a}$.

Bewys dat hierdie sommeringsbewerking R1 bevredig.

2. Bewys dat die sommeringsoperasie van Oefening 1.4.1 nie R2 bevredig nie.

3. Definieer 'n snaakse sommeringsbewerking$\hat{+}$ op $\mathbb{R}$ as

$$x \hat{+} y := x - y$$

Bevredig $\hat{+}$ R2? Indien wel, bewys dit. Indien nie, gee 'n teenvoorbeeld.

4. Laat $\mathbb{R}^+$ die versameling van positiewe reële getalle wees. Definieer 'n sommeringsbewerking $\oplus$, 'n nul-vektor z en 'n skalaarvermenigvuldigingsbewerking . op $\mathbb{R}^+$ as volg:

$$x + y := \mathbf{xy}$$
$$z := 1$$
$$k.x := x^k$$

waar $x, y \in \mathbb{R}^+$ en k 'n skalaar is (i.e. 'n arbitrêre reële getal).

(a) Gaan na dat hierdie bewerkings goed-gedefinieerd is. Byvoorbeeld, is $x + y \in \mathbb{R}^+$, soos dit hoort?

(b) Gaan na dat hulle R1 tot R8 bevredig, sodat$\mathbb{R}^+$ 'n vektorruimte met hierdie bewerkings vorm.

1.5 'n Paar resultate rakende abstrakte vektorruimtes

Dit is tyd om die reëls van vektorruimtes te gebruik om 'n paar algemene resultate te bewys.

> Ons is op die punt om on eerste formele bewys in die kursus te doen!

Hulpstelling 1.5.1 *Veronderstel V is 'n vektor-ruimte met nul-vektor $\mathbf{0}$. As $\mathbf{0}'$ 'n ander vektor is wat reël R3(a) bevredig,*

$$\mathbf{0}' + \mathbf{v} = \mathbf{v} \text{ vir alle } \mathbf{v} \in V \tag{1.5.1}$$

dan volg dit dat $\mathbf{0} = \mathbf{0}'$.

Bewys.

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \mathbf{0}' + \mathbf{0} && \text{gebruik (1.5.1) vir } \mathbf{v} = \mathbf{0} \\ &= \mathbf{0}' && (\text{ R3b }) \end{aligned}$$

■

Definisie 1.5.2 Laat V 'n vektorruimte wees; ons definieer die **sommeringsinverse** van 'n vektor $\mathbf{v} \in V$ as

$$-\mathbf{v} := (-1) \cdot \mathbf{v}$$

◊

Hulpstelling 1.5.3 *As V 'n vektorruimte is, dan vir alle $\mathbf{v} \in V$,*

$$-\mathbf{v} + \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ en } \mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}. \tag{1.5.2}$$

Bewys.

$$\begin{aligned} -\mathbf{v} + \mathbf{v} &= (-1).\mathbf{v} + \mathbf{v} && (\text{Definisie } -\mathbf{v}) \\ &= (-1).\mathbf{v} + 1.\mathbf{v} \\ &= (-1+1).\mathbf{v} && (\text{R5}) \\ &= 0.\mathbf{v} \\ &= \mathbf{0} && (\text{R8}) \end{aligned}$$

Verder,

$$\begin{aligned} \mathbf{v} + (-\mathbf{v}) &= -\mathbf{v} + \mathbf{v} && (\text{R1}) \\ &= \mathbf{0} && (\text{deur vorige bewys}) \end{aligned}$$

■

Hulpstelling 1.5.4 *Veronderstel twee vektore $\mathbf{w}$ en $\mathbf{v}$ in 'n vektor-ruimte bevredig $\mathbf{w} + \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Dan volg dit dat $\mathbf{w} = -\mathbf{v}$.*

Bewys.

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \mathbf{w} + \mathbf{0} && (\text{R3b}) \\ &= \mathbf{w} + (\mathbf{v} + -\mathbf{v}) && \text{Hulpstelling 1.5.3} \\ &= (\mathbf{w} + \mathbf{v}) + -\mathbf{v} && (\text{R2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \mathbf{0} + -\mathbf{v} && \text{(volgens aanname)} \\ &= -\mathbf{v} && \text{(R3a).} \end{aligned}$$

■

Laat ons twee meer hulpstellings bewys, net vir goeie oefening.

Hulpstelling 1.5.5 *Laat V 'n vektorruimte wees en k enige skalaar. Dan is*

$$k.\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

Bewys.

$$\begin{aligned} k.\mathbf{0} &= k.(0.\mathbf{0}) && (\text{R8 for } \mathbf{v} = \mathbf{0}) \\ &= ((k)(0)).\mathbf{0} && (\text{R6}) \\ &= 0.\mathbf{0} && ((k)(0) = 0 \text{ vir enige reële getal } k) \\ &= \mathbf{0} && (\text{R8 vir } \mathbf{v} = \mathbf{0}) \end{aligned}$$

■

Hulpstelling 1.5.6 *Veronderstel dat $\mathbf{v}$ 'n vektor in 'n vektorruimte V is en dat k 'n skalaar is. Dan volg dit dat*

$$k \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow k = 0 \textit{ of } \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Bewys. ***Bewys van*** $\Leftarrow$. Veronderstel $k = 0$. Dan $k \cdot \mathbf{v} = 0 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$ deur R8 van 'n vektor-ruimte. Aan die ander kant, veronderstel $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Dan $k \cdot \mathbf{v} = k \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ deur Oefening 1.5.2.

Bewys van $\Rightarrow$***)***. Veronderstel $k \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Daar is twee moontlikhede: óf $k = 0$, óf $k \neq 0$. As $k = 0$, dan is ons klaar. As $k \neq 0$, dan bestaan $\frac{1}{k}$ en ons vermenigvuldig albei kante daardeur:

$$\begin{aligned} k \cdot \mathbf{v} &= \mathbf{0} \\ \therefore \frac{1}{k} \cdot (k \cdot \mathbf{v}) &= \frac{1}{k} \cdot \mathbf{0} && (\text{Vermenigvuldig beide kante met } \tfrac{1}{k}) \\ \therefore \left(\frac{1}{k} k\right) \cdot \mathbf{v} &= \mathbf{0} && (\text{R6 aan LK. Gebruik Oefening 1.5.2 aan die RK.}) \\ \therefore 1 \cdot \mathbf{v} &= \mathbf{0} && (\text{gebruik } \tfrac{1}{k} k = 1) \\ \therefore \mathbf{v} &= \mathbf{0} && (\text{R7}) \end{aligned}$$

Daarom, in die geval waar $k \neq 0$ dit volg dat $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, wat ons in die eerste plek wou bewys. ■

Voorbeeld 1.5.7 Kom ons oefen die gebruik van die reëls van vektorruimtes om alledaagse berekeninge uit te voer. Byvoorbeeld, veronderstel dat ons vir die vektor $\mathbf{x}$ in die volgende vergelyking wil oplos:

$$\mathbf{v} + 7 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{w} \tag{1.5.3}$$

Ons gaan te werk met die reëls soos volg:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} + 7 \cdot \mathbf{x} &= \mathbf{w} \\ \therefore -\mathbf{v} + (\mathbf{v} + 7 \cdot \mathbf{x}) &= -\mathbf{v} + \mathbf{w} && (\text{tel } -\mathbf{v} \text{ aan beide kante by}) \\ \therefore (-\mathbf{v} + \mathbf{v}) + 7 \cdot \mathbf{x} &= -\mathbf{v} + \mathbf{w} && (\text{gebruik R2 aan LK}) \\ \therefore \mathbf{0} + 7 \cdot \mathbf{x} &= -\mathbf{v} + \mathbf{w} && (\text{gebruik Lemma 1.5.3 aan LK}) \\ \therefore 7 \cdot \mathbf{x} &= -\mathbf{v} + \mathbf{w} && (\text{gebruik R3a aan LK}) \\ \therefore \frac{1}{7} \cdot (7 \cdot \mathbf{x}) &= \frac{1}{7} \cdot (-\mathbf{v} + \mathbf{w}) && (\text{skalaarvermenigvuldig aan beide kante met } \tfrac{1}{7}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore (\frac{1}{7}7)\cdot\mathbf{x} &= \frac{1}{7}\cdot(-\mathbf{v}+\mathbf{w}) && \text{(gebruik R6 aan LK)}\\
\therefore 1\cdot\mathbf{x} &= \frac{1}{7}\cdot(-\mathbf{v}+\mathbf{w}) && \text{(vermenigvuldig } \tfrac{1}{7} \text{ met 7)}\\
\therefore \mathbf{x} &= \frac{1}{7}\cdot(-\mathbf{v}+\mathbf{w}) && \text{(R7)}
\end{aligned}$$

Soos die kursus vorder sal ons hierdie stappe uitlaat. Maar dit is belangrik dat jy hulle almal kan weergee, as dit van jou gevra sou word! □

Oefeninge

1. Bewys dat, vir alle vektore v in 'n vektorruimte, $-(-\mathbf{v}) = \mathbf{v}$.

2. Laat V 'n vektorruimte wees met nul-vektor $\mathbf{0}$. Bewys dat vir alle skalare k, $k\cdot\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

3. Laat V 'n vektorruimte wees. Veronderstel dat 'n vektor $\mathbf{v}\in V$ bevredig

$$5.\mathbf{v} = 2.\mathbf{v}. \tag{1.5.4}$$

Toon aan dat $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

4. Veronderstel dat twee vektore $\mathbf{x}$ en $\mathbf{w}$ in 'n vektorruimte $2\mathbf{x} + 6\mathbf{w} = \mathbf{0}$ bevredig. Los op vir $\mathbf{x}$, maar wys eksplisiet hoe jy die reëls van 'n vektorruimte gebruik het, soos in Voorbeeld 1.5.7.

5. Suppose V is a vector space which is not the zero vector space. Show that V contains infinitely many elements.

Wenk 1. Since V is not the zero vector space, there must exist a vector $\mathbf{v}\in V$ such that $\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$.

Wenk 2. Use the idea of the proof from Oefening 1.5.3.

True or False For each of the following statements, write down whether the statement is true or false, and prove your assertion. (In other words, if you say that it is true, prove that it is true, and if you say that it is false, prove that it is false, by giving an *explicit counterexample.*)

6. If $k.\mathbf{v} = \mathbf{0}$ in a vector space, then it necessarily follows that $k = 0$.

7. If $k.\mathbf{v} = \mathbf{0}$ in a vector space, then it necessarily follows that $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

8. The empty set can be equipped with data D1 , D2 , D3 satisfying the rules of a vector space.

9. Rule R3b of a vector space follows automatically from the other rules.

10. Rule R7 of a vector space follows automatically from the other rules.

1.6 Deelruimtes

In hierdie deel san ons die konsep van 'n *deelruimte* bekend stel. Dié konsep sal ons toelaat om vinnig nuwe voorbeelde van vektorruimtes te vind.

1.6.1 Definition of a subspace

Definisie 1.6.1 'n deelversameling $U\subseteq V$ van 'n vektor-ruimte V is 'n **deelruimte van** V as:

- Vir alle $\mathbf{u},\mathbf{u}'\in U$, $\mathbf{u}+\mathbf{u}'\in U$

- $\mathbf{0} \in U$
- Vir alle skalare k en alle vektore $\mathbf{u} \in U$, $k \cdot \mathbf{u} \in U$

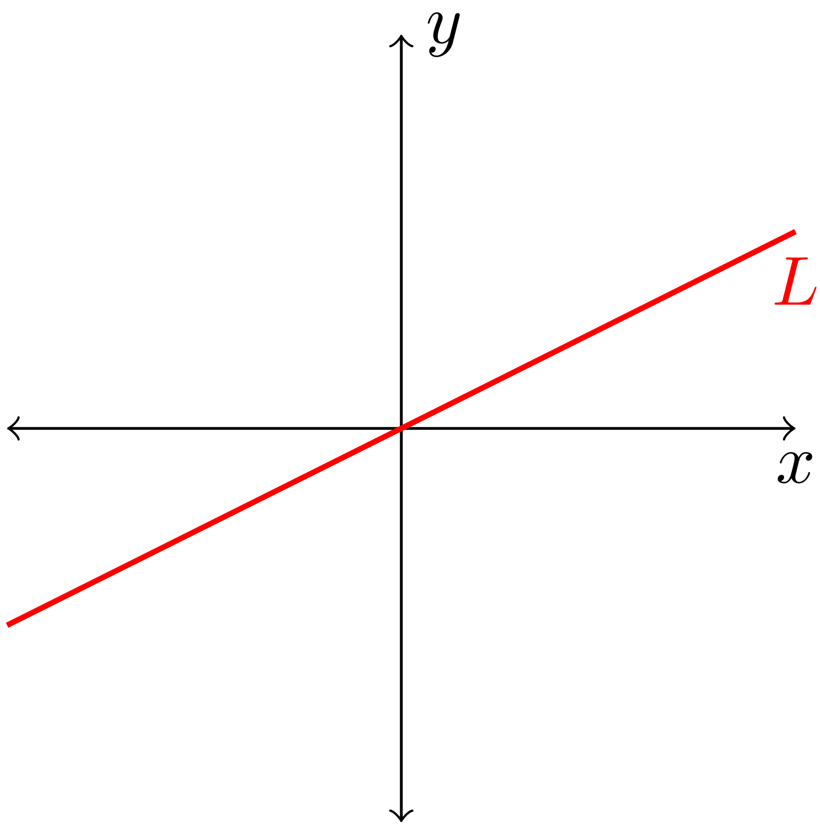
$\lozenge$

Hulpstelling 1.6.2 *As U 'n deelruimte van 'n vektorruimte V is, dan is U ook 'n vektorruimte, toegerus met dieselfde sommeringsbewerking, nul-vektor en skalaarvermenigvuldigingsbewerking as V.*

Bewys. Aangesien U 'n deelruimte is, weet ons dat dit sin maak om dit "toe te rus met dieselfde sommeringsbewerking, nul-vektor en skalaarvermenigvuldigingsbewerking as V". (As U *nie* 'n deelruimte was nie, dan sou ons byvoorbeeld kon vind dat $\mathbf{u}, \mathbf{u}' \in U$ maar $\mathbf{u} + \mathbf{u}' \notin U$, So die sommeringsbewerking sou nie sin maak nie.)

So ons moet net reëls R1 tot R8 nagaan. Aangesien die reëls geld vir alle vektore $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ in V, Sal hulle beslis geld vir alle vektore $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ in U. So reëls R1 tot R8 word bevredig. ∎

Voorbeeld 1.6.3 Lyn in $\mathbb{R}^2$. 'n Lyn L deur die oorsprong in $\mathbb{R}^2$ is 'n deelruimte van $\mathbb{R}^2$:



Figuur 1.6.4: A line through the origin in $\mathbb{R}^2$.

Onthou dat lyn L gespesifiseer kan word deur 'n homogene lineêre vergelyking van die form:

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by = 0\} \tag{1.6.1}$$

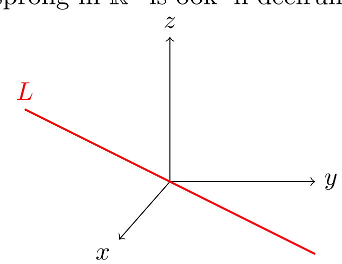
vir konstantes a en b. So, as $\mathbf{v} = (x, y)$ en $\mathbf{v}' = (x', y')$ op L lê, dan lê hulle som $\mathbf{v} + \mathbf{v}' = (x + x', y + y')$ ook op L, want hul komponente bevredig die definiërende vergelyking (1.6.1):

$$\begin{aligned}
&a(x + x') + b(y + y') \\
&= (ax + by) + (ax' + by') \\
&= 0 + 0 && \text{(want } ax + by = 0 \text{ en } ax' + by' = 0\text{)} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

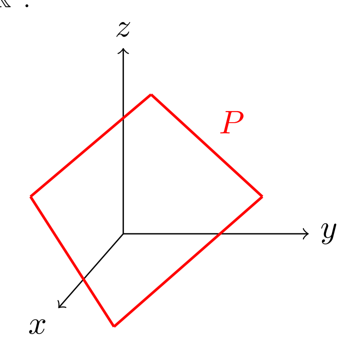
Dit maak ook meetkundig sin: As jy na beeld Figuur 1.6.4 kyk, sal jy sien dat die som van twee vektore $\mathbf{v}, \mathbf{v}'$ op L met die kop-op-stert-metode 'n verdere vektor op L tot gevolg sal hê. □

Verstaanpunt 1.6.5 Voltooi die bewys dat L 'n deelruimte van $\mathbb{R}^2$ is deur na te gaan dat die nul-vektor op lyn L is en dat die vermenigvuldiging van 'n vektor in L met 'n skalaar 'n vektor op L lewer.

Voorbeeld 1.6.6 Lyne en vlakke in $\mathbb{R}^3$. 'n Lyn L en 'n vlak P deur die oorsprong in $\mathbb{R}^3$ is ook 'n deelruimte van $\mathbb{R}^3$:



Figuur 1.6.7: A line through the origin in $\mathbb{R}^3$.



Figuur 1.6.8: A plane through the origin in $\mathbb{R}^3$.

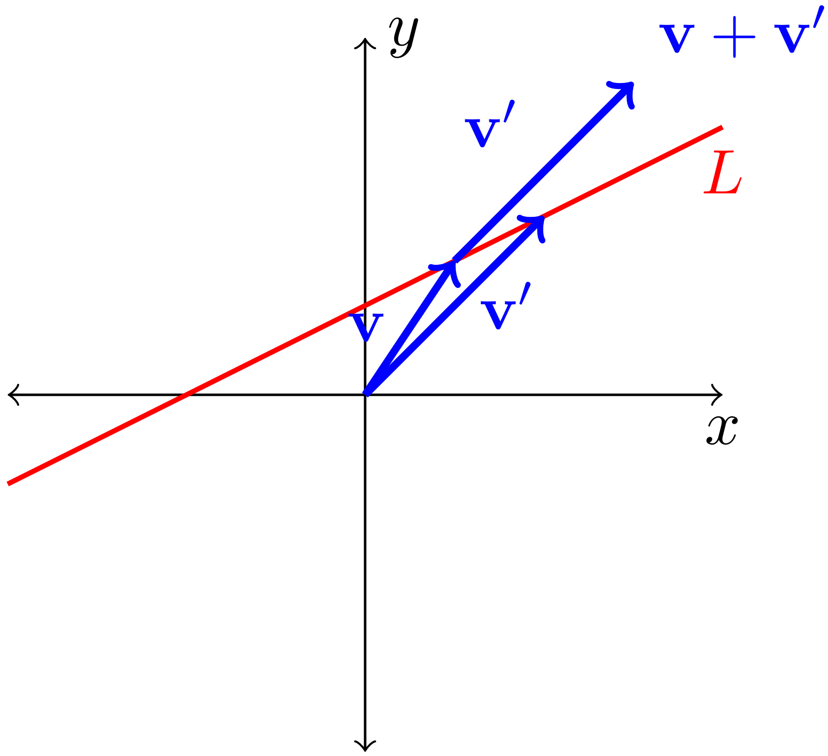
□

Voorbeeld 1.6.9 Nul-vektorruimte. As V 'n vektorruimte is, dan is die versameling $\{\mathbf{0}\} \subseteq V$ wat slegs die nul-vektor $\mathbf{0}$ 'n deelruimte van V. □

Verstaanpunt 1.6.10 Gaan na dat dit waar is.

Voorbeeld 1.6.11 Nie 'n vektorruimte nie: 'n Lyn nie deur die oorsprong nie. Wees versigtig — nie *elke* lyn $L \subset \mathbb{R}^2$ vorm 'n deelruimte van $\mathbb{R}^2$ nie. As L nie deur die oorsprong loop nie, dan vind ons dat $\mathbf{0} \notin L$, so L is nie 'n deelruimte nie.

Nog 'n rede dat L nie 'n deelruimte is nie is dat dit nie geslote onder sommering is nie: As ons twee nie-nul vektore $\mathbf{v}$ en $\mathbf{v}'$ op L bymekaar tel, kry ons 'n vektor $\mathbf{v} + \mathbf{v}'$ wat nie op L lê nie:



Figuur 1.6.12: A line which does not pass through the origin is not closed under addition.

□

1.6.2 Verder voorbeelde van deelruimtes

Voorbeeld 1.6.13 Kontinue funksies as 'n deelruimte. Die versameling

$$\mathrm{Cont}(I) := \{\mathbf{f} : I \to \mathbb{R},\ \mathbf{f} \text{ kontinu}\}$$

van alle kontinue funksies op die interval I is 'n deelruimte van die versameling $\mathrm{Fun}(I)$ van *alle* funksies op I. Kom ons bevestig dat dit die definisie bevredig. Jy weet reeds van vorige kursusse dat:

- As $\mathbf{f}$ en $\mathbf{g}$ kontinue funksies op I is, dan is $\mathbf{f}+\mathbf{g}$ ook 'n kontinue funksie.
- Die nul-funksie $\mathbf{0}$ gedefinieer as $\mathbf{0}(x) = 0$ vir alle $x \in I$ is 'n kontinue funksie.
- As $\mathbf{f}$ 'n kontinue funksie is en k 'n skalaar is, dan is $k \cdot \mathbf{f}$ ook kontinu.

Daarom, deur Lemma 1.6.2, is $\mathrm{Cont}(I)$ 'n vektorruimte in eie reg. □

Voorbeeld 1.6.14 Differensieerbare funksies as 'n deelruimte. So ook is die versameling

$$\mathrm{Diff}(I) := \{\mathbf{f} : (0,1) \to \mathbb{R},\ \mathbf{f}\text{differensieerbaar}\}$$

van differensieerbare fuksies op die oop interval I 'n deelruimte van $\mathrm{Fun}(I)$. □

Verstaanpunt 1.6.15 Bevestig dit. Ook, is $\mathrm{Diff}(I)$ 'n deelruimte van $\mathrm{Cont}(I)$?

Voorbeeld 1.6.16 Vektorruimtes van polinome. 'n *Polinoom* is 'n funksie $\mathbf{p} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ van die vorm

$$\mathbf{p}(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0. \tag{1.6.2}$$

vir onveranderlike reële koëffisiënte $a_0, \ldots, a_n$. Twee polinome $\mathbf{p}$ en $\mathbf{q}$ is *gelyk* as hulle *as funksies* gelyk is, m.a.w. as $\mathbf{p}(x) = \mathbf{q}(x)$ vir alle $x \in \mathbb{R}$. Die *graad* van 'n polinoom is die hoogste mag van x wat in die formule voorkom.

Byvoorbeeld, $2x^3 - x + 7$ is 'n polinoom van graad 3, terwyl $x^5 - 2$ 'n polinoom van graad 5 is.

Die versameling van *alle* polinome word as Poly geskryf en die versameling van alle polinome van 'n graad kleiner of gelyk aan n word as Poly_n geskryf. □

Verstaanpunt 1.6.17 Gaan na dat Poly en Poly_n wel deelruimtes van $\mathrm{Cont}(\mathbb{R})$ is.

Voorbeeld 1.6.18 Trigonometriese polinome. 'n *Trigonometriese polinoom* is 'n funksie $\mathbf{T} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ van die vorm

$$\mathbf{T}(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin(kx). \tag{1.6.3}$$

Die *graad* van 'n trigonometriese polinoom is die grootste veelvoud van x wat binne een van die sinusse of kosinusse in die formule voorkom. Byvoorbeeld,

$$3 - \cos(x) + 6\sin(3x)$$

is 'n trigonometriese polinoom van graad 3. Ons skryf die versameling van *alle* trigonometriese polinome as Trig en die versameling van alle trigonometriese polinome van graad kleiner of gelyk aan n as Trig_n. □

Verstaanpunt 1.6.19 Wys dat Trig en Trig_n deelruimtes van $\mathrm{Cont}(\mathbb{R})$ is.

Verstaanpunt 1.6.20 Oorweeg die funksie $\mathbf{f}(x) = \sin^3(x)$. Wys dat $\mathbf{f} \in \mathrm{Trig}_3$ deur dit in die vorm (1.6.3) te skryf. Wenk: gebruik die identiteite

$$\begin{aligned}
\sin(A)\sin(B) &= \frac{1}{2}(\cos(A-B) - \cos(A+B)) \\
\sin(A)\cos(B) &= \frac{1}{2}(\sin(A-B) + \sin(A+B)) \\
\cos(A)\cos(B) &= \frac{1}{2}(\cos(A-B) + \cos(A+B))
\end{aligned}$$

wat maklik volg uit die sommeringsformules

$$\begin{aligned}
\sin(A \pm B) &= \sin A \cos B \pm \cos A \sin B \\
\cos(A \pm B) &= \cos A \cos B \mp \sin A \sin B.
\end{aligned}$$

1.6.3 Solutions to homogenous linear differential equations

A homogenous nth order linear ordinary differential equation on an interval I is a differential equation of the form

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0, \quad x \in I \tag{1.6.4}$$

where $y^{(k)}$ means the nth derivative of y. A *solution* to the differential equation is just some function $y(x)$ defined on the interval I which satisfies (1.6.4).

Voorbeeld 1.6.21 An example of a 2nd order homogenous linear differential equation. For instance,

$$x^2y^{''} - 3xy' + 5y = 0, \quad x \in (0, \infty) \tag{1.6.5}$$

is a homogenous 2nd order linear differential equation on the interval $(0, \infty)$, and

$$y_1(x) = x^2 \sin(\log x) \tag{1.6.6}$$

is a solution to (1.6.5). Similarly,

$$y_2(x) = x^2 \cos(\log x) \tag{1.6.7}$$

is also a solution to (1.6.5).

We can use SageMath to check that these are indeed solutions to (1.6.5). Click the `Evaluate (Sage)` button --- it should output 'True', indicating that y_1 is indeed a solution to the differential equation.

```
def solves_de(y):
 return bool(x^2 *diff(y,x,2) -3*x*diff(y,x) + 5*y == 0)

y1 = x^2*sin(log(x))

solves_de(y1)
```

Edit the code above to check whether y_2 is a solution of the differential equation (1.6.5).

We can also plot the graphs of y_1 and y_2. Again, click on `Evaluate (Sage)`.

```
y1 = x^2*sin(log(x))
y2 = x^2*cos(log(x))

plot([y1, y2], (x, 0, 1), legend_label=['y1', 'y2'])
```

Play with the code above, and plot some different functions.

□

Verstaanpunt 1.6.22 Check by hand that (1.6.6) and (1.6.7) are indeed solutions of the differential equation (1.6.5).

Suppose we are given an nth order homogenous linear differential equation of the form (1.6.4) on some interval $I \subseteq \mathbb{R}$. Write V for the set of *all* solutions to the differential equation. That is,

$$V := \{y : a_n(x)y^{(n)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0\} \tag{1.6.8}$$

We can regard V as a subset of the set of *all* functions on the interval I:

$$V \subseteq \mathrm{Fun}(I)$$

Verstaanpunt 1.6.23 Show that V is a subspace of $\mathrm{Fun}(I)$.

So, by Hulpstelling 1.6.2, we conclude that *the set of solutions to a homogenous linear differential equation is a vector space.*

Voorbeeld 1.6.24 Continuation of Voorbeeld 1.6.21. Consider the differential equation from Voorbeeld 1.6.21. We saw that

$$y_1 = x^2 \sin(\log x), \quad y_2 = x^2 \cos(\log x)$$

are solutions. So, any linear combination of y_1 and y_2 is *also* a solution. For instance,

$$y = 2y_1 + 5y_2$$

is also a solution. Let us check this in SageMath.

```
def solves_de(y):
  return bool(x^2 *diff(y,x,2) -3*x*diff(y,x) + 5*y == 0)

y1 = x^2*sin(log(x))
y2 = x^2*sin(cos(x))

solves_de(2*y1 + 5*y2)
```

□

Voorbeeld 1.6.25 A non-example: Solutions to a nonlinear ODE. We saw in the previous example that linear ordinary differential equations (ODEs) are well-behaved - a linear combination of solutions is still a solution. This need not occur in the nonlinear case. For example, consider the nonlinear ODE

$$y' = y^2. \tag{1.6.9}$$

The general solution is given by

$$y_c = \frac{1}{c - x}$$

where c is a constant. For instance,

$$y_1 = \frac{1}{1-x}, \quad y_2 = \frac{1}{2-x}$$

are solutions.

Use the SageMath script below to check whether the linear combination $y_1 + y_2$ is also a solution.

```
y = function('y')(x)

def solves_de(f):
 return bool(diff(f,x) - f^2 == 0)

y1 = 1/(1-x)
y2 = 1/(2-x)

solves_de(y1+y2)
```

The answer is `False!` So linear combinations of solutions to the nonlinear differential equation (1.6.9) are no longer solutions, in general. □

Voorbeeld 1.6.26 Finding the general solution to a differential equation in SageMath. Let us use SageMath to find the general solution of the following ordinary differential equation

$$y'' + 2y' + y = 0. \tag{1.6.10}$$

We can do this as follows. Note that we need to be a bit more careful now, first defining our variable x and then declaring that y is a function of x.

```
var('x')
y = function('y')(x)

diff_eqn = diff(y,x,2) +2*diff(y,x,1) + 5*y == 0
  desolve(diff_eqn,y)

desolve(diff_eqn, y)
```

SageMath reports that the general solution is given in terms of two unspecified constants `_K1` and `_K2` as `(_K2*cos(2*x) + _K1*sin(2*x))*e^(-x)`.

If we set `_K1` equal to 1 and `_K2` equal to 0 in the general solution, we will get a particular solution y_1 of the differential equation.

```
var('x,␣_K1,␣_K2')
y = function('y')(x)

diff_eqn = diff(y,x,2) +2*diff(y,x,1) + 5*y == 0

my_soln = desolve(diff_eqn,y)

y1 = my_soln.substitute(_K1==1, _K2==0)

y1
```

SageMath is telling us that $y_1 = e^{-x}\sin(2x)$ is a particular solution.

Edit the code to set `_K2` equal to 0 and `_K1` equal to 1 in the general solution to get a different particular solution y_2. What is y_2?

□

1.6.4 Oefeninge

1. Wys dat die versameling

$$V := \{(a, -a, b, -b) : a, b \in \mathbb{R}\}$$

'n deelruimte van $\mathbb{R}^4$ is.

2. Wys dat die versameling

$$V := \{\text{polinome van die vorm } \mathbf{p}(x) = ax^3 + bx^2 - cx + a,\ a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

'n deelruimte van Poly_3 is.

3. Laat $b \in \mathbb{R}$. Bewys dat

$$V := \{(x_1,\, x_2,\, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = b\}$$

'n deelruimte van $\mathbb{R}^3$ is as en slegs as $b = 0$. (Onthou dat as en slegs as beteken dat die vorentoe- *en* die terug-implikasie bewys moet word.)

4. Beskou die versameling

$$V := \{\mathbf{f} \in \text{Diff}((-1,1)) : f'(0) = 2\}.$$

Is V 'n deelruimte van Diff$((-1,1))$? As jy dink dat dit is, *bewys* dat dit so is. As jy dink dit is nie, *bewys* dat dit nie is nie!

5. Beskou die versameling

$$V := \{(x_1, x_2, x_3, \ldots) \in \mathbb{R}^\infty : \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}.$$

Is V 'n deelruimte van $\mathbb{R}^\infty$? As jy dink dit is wel, *bewys* dat dit so is. As jy dink dit is nie, *bewys* dat dit nie is nie!

6. Is $\mathbb{R}^+ := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R} : \mathbf{x} \geq 0\}$ 'n deelruimte van $\mathbb{R}$? As jy dink dit is wel, *bewys* dat dit so is. As jy dink dit is nie, *bewys* dat dit nie is nie!

7. Gee 'n voorbeeld van 'n nie-leë deelversameling U van $\mathbb{R}^2$ wat geslote is onder sommering en die vind van sommeringsinverses (i.e. as $\mathbf{u}$ in U is, dan is $-\mathbf{u}$ in V), maar nié 'n deelruimte van $\mathbb{R}^2$ is nie.

8. Gee 'n voorbeeld van 'n nie-leë deelversameling V van $\mathbb{R}^2$ wat geslote onder skalaarvermenigvuldiging is, maar nié 'n deelruimte van $\mathbb{R}^2$ is nie.

The next 4 exercises will help acquaint the reader with the concept of the sum of two subspaces. First, we'll need a definition.

Definisie 1.6.27 Let V be a vector space. Suppose U and W are two subspaces of V. The sum $U + W$ of U and W is defined by

$$U + V = \{\mathbf{u} + \mathbf{w} \in V \ : \ \mathbf{u} \in U, \mathbf{w} \in W\}$$

$\Diamond$

In the exercises below, V, U, W will be as above.

9. Show that $U + V$ is a subspace of V.

10. Show that $U + V$ is, in fact, the smallest subspace of V containing both U and V.

11. If $W \subset U$ what is $U + W$?

12. Can you think of two subspaces of $\mathbb{R}^2$ whose sum is $\mathbb{R}^2$? Similarly, can you think of two subspaces of $\mathbb{R}^2$ whose sum is not all of $\mathbb{R}^2$?

Hoofstuk 2

Eindigdimensionele vektorruimtes

In hierdie kursus konsentreer ons op *eindigdimensionele* vektorruimtes, wat ons in hierdie hoofstuk sal definieer.

> *Waarskuwing*: Van hier af verder gaan ek verkorte notasie vir skalaarvermenigvuldiging gebruik en $k \cdot \mathbf{v}$ bloot as $k\mathbf{v}$ skryf!

2.1 Lineêre kombinasies en span

Ons begin met 'n paar basiese definisies.

Definisie 2.1.1 'n **Lineêre kombinasie** van 'n eindige kolleksie vektore $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ in 'n vektorruimte V is 'n vektor van die vorm

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_b\mathbf{v}_n \tag{2.1.1}$$

waar $a_1, a_2, \dots, a_n$ skalare is. As al die skalare a_i gelyk aan nul is, dan sê ons dat dit die **triviale lineêre kombinasie** is. ◊

Voorbeeld 2.1.2 In $\mathbb{R}^3$ is $(6, 2, -14)$ 'n lineêre kombinasie van $(-3, 1, 2)$ en $(-2, 0, 3)$, want

$$(6, 2, -14) = 2(-3, 1, 2) - 6(-2, 0, 3).$$

□

Voorbeeld 2.1.3 Checking if a vector is a linear combination of other vectors. In $\mathbb{R}^4$, is $\mathbf{v} = (2, -1, 3, 0)$ a linear combination of

$$\mathbf{v}_1 = (1, 3, 2, 0), \mathbf{v}_2 = (5, 1, 2, 4), \text{ and } \mathbf{v}_3 = (-1, 0, 2, 1)?$$

To check this, we need to check if the equation

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + a_3\mathbf{v}_3, \tag{2.1.2}$$

which is an equation in the unknowns a_1, a_2, a_3, has any solutions. Let us write out (2.1.2) explicitly:

$$(2, -1, 3, 0) = a_1(1, 3, 2, 0) + a_2(5, 1, 2, 4) + a_3(-1, 0, 2, 1) \tag{2.1.3}$$

$$\therefore (2, -1, 3, 0) = (a_1 + 5a_2 - a_3, 3a_1 + a_2, 2a_1 + 2a_2 + 2a_3, 4a_2 + a_3) \tag{2.1.4}$$

(2.1.4) is an equation between two vectors in $\mathbb{R}^4$. Two vectors in $\mathbb{R}^4$ are equal if and only if their corresponding coefficients are equal. So, (2.1.2) is equivalent to the following system of simultaneous linear equations:

$$a_1 + 5a_2 - a_3 = -2 \tag{2.1.5}$$
$$3a_1 + a_2 = -1 \tag{2.1.6}$$
$$2a_1 + 2a_2 + 2a_3 = 3 \tag{2.1.7}$$
$$4a_2 + a_3 = 0 \tag{2.1.8}$$

In other words, our question becomes: do equations (2.1.5)–(2.1.8) have a solution?

This is the kind of problem you already know how to solve by hand, from first year. We can also use SageMath to do it for us. We simply tell it what our unknown variables are, and then ask it to solve the equation. Press `Evaluate (Sage)` to see the result.

```
var('a1,␣a2,␣a3')

solve([a1 + 5*a2 - a3 == 2,
      3*a1 + a2 == -1,
      2*a1 + 2*a2 + 2*a3 ==3,
      4*a2 + a3 == 0],
      [a1, a2, a3])
```

SageMath returns an empty list `[]`. In other words, there are no solutions to equations (2.1.5)–(2.1.8). Therefore $\mathbf{v}$ cannot be expressed as a linear combination of $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$. □

Voorbeeld 2.1.4 Checking if a polynomial is a linear combination of other polynomials. In Poly_2, can $p = x^2 - 1$ be expressed as a linear combination of

$$p_1 = 1 + x^2,\ p_2 = x - 3,\ p_3 = x^2 + x + 1,\ p_4 = x^2 + x - 1?$$

To check this, we need to check if the equation

$$p = a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3 + a_4p_4, \tag{2.1.9}$$

which is an equation in the unknowns a_1, a_2, a_3, a_4, has any solutions. Let us write out (2.1.9) explicitly, grouping together powers of x:

$$\begin{aligned} p &= a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3 + a_4p_4 \\ \therefore x^2 - 1 &= a_1(1 + x^2) + a_2(x - 3) + a_3(x^2 + x + 1) + a_4(x^2 + x - 1) \\ \therefore -1 + x^2 &= (a_1 - 3a_2 + a_3 - a_4) + (a_2 + a_3 + a_4)x + (a_1 + a_3 + a_4)x^2 \end{aligned}$$

Now, two polynomials are equal if and only if all their coefficients are equal. So, (2.1.9) is equivalent to the following system of simultaneous linear equations:

$$a_1 - 3a_2 + a_3 - a_4 = -1 \tag{2.1.10}$$
$$a_2 + a_3 + a_4 = 0 \tag{2.1.11}$$
$$a_1 + a_3 + a_4 = 1 \tag{2.1.12}$$

In other words, our question becomes: do equations (2.1.10)–(2.1.12) have a solution? We ask SageMath.

```
var('a1,␣a2,␣a3,␣a4')

solve([a1 - 3*a2 + a3 - a4 == -1,
```

```
        a2 + a3 + a4 == 0,
        a1 + a3 - a4 == 1],
        [a1, a2, a3, a4])
```

```
[[a1 == 2*r1 + 2/3, a2 == (2/3), a3 == -r1 + 1/3, a4 == r1]]
```

Here, `r1` and `r2` are to be interpreted as free paramters. I'm going to call them s and t instead, because that's what we usually call our free parameters! So, equations (2.1.10)–(2.1.12) have *infinitely* many solutions, parameterized by two free parameters s and t. In particular, there exists *at least one* solution. For instance, if we take $s = 2$ and $t = 1$ (a totally arbitrary choice!), we get the following solution:

$$a_1 = \frac{8}{3}, \, a_2 = \frac{2}{3}, a_3 = -\frac{5}{3}, a_4 = 1 \tag{2.1.13}$$

$$\text{i.e. } p = \frac{8}{3}p_1 + \frac{2}{3}p_2 - \frac{5}{3}p_3 + p_4 \tag{2.1.14}$$

You should expand out the right hand side of (2.1.14) by hand and check that it indeed is equal to p.

We conclude that p can indeed be expressed as a linear combination of p_1, p_2, p_3 and p_4. □

Voorbeeld 2.1.5 Definieer die funksies $\mathbf{f}, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 \in \mathrm{Diff}$ as

$$\mathbf{f}(x) = \cos^3 x, \mathbf{f}_1(x) = \cos(x), \mathbf{f}_2(x) = \cos(3x).$$

Dan is $\mathbf{f}$ 'n lineêre kombinasie van $\mathbf{f}_1$ en $\mathbf{f}_2$, vanweë die identiteit $\cos(3x) = \frac{1}{4}(3\cos x + \cos(3x))$. Sien Voorbeeld 1.6.18. Met ander woorde,

$$\mathbf{f} = \frac{3}{4}\mathbf{f}_1 + \frac{1}{4}\mathbf{f}_2.$$

Hierdie voorbeeld wys dat $\mathbf{f}$ ook 'n trigonometriese polinoom is,selfs al is die oorspronklike formule $\mathbf{f}(x) = cos(3x)$ nie van die form (1.6.3) nie. □

Definisie 2.1.6 Ons sê dat die lys vektore $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ in 'n vektorruimte V V **span** as elke vektor $\mathbf{v} \in V$ 'n lineêre kombinasie van die vektore uit $\mathcal{B}$. ◊

Voorbeeld 2.1.7 $\mathbb{R}^2$ word deur

$$\mathbf{e}_1 := (1,\, 0), \;\; \mathbf{e}_2 := (0, 1)$$

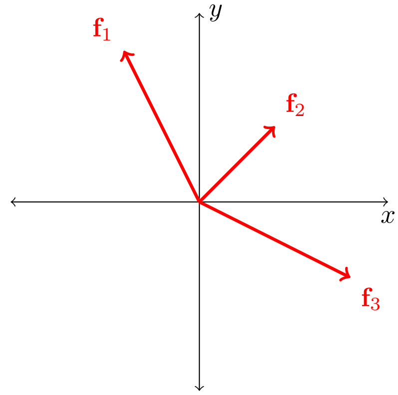
gespan, want elke vektor $\mathbf{v} = (a_1,\, a_2)$ kan as 'n lineêre kombinasie

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2$$

uitgedruk word. □

Voorbeeld 2.1.8 Checking if a list of vectors space the vector space. Is $\mathbb{R}^2$ spanned by the following list of vectors?

$$\mathbf{f}_1 := (-1, 2), \, \mathbf{f}_2 := (1, 1), \, \mathbf{f}_3 := (2, -1)$$



Figuur 2.1.9: A list of vectors which spans $\mathbb{R}^2$.

Oplossing. To check this, we need check if every vector $\mathbf{v} \in V$ can be written as a linear combination of $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ and $\mathbf{f}_3$.

So, let $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ be a fixed, but arbitrary, vector in $\mathbb{R}^2$. We need to check if the following equation has a solution for a_1, a_2, a_3:

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{f}_1 + a_2\mathbf{f}_2 + a_3\mathbf{f}_3 \tag{2.1.15}$$

Let us write this equation out explicitly:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= a_1\mathbf{f}_1 + a_2\mathbf{f}_2 + a_3\mathbf{f}_3 && (2.1.16)\\ \therefore (v_1, v_2) &= a_1(-1, 2) + a_2(1, 1) + a_3(2, -1) && (2.1.17)\\ \therefore (v_1, v_2) &= (-a_1 + a_2 + 2a_3, 2a_1 + a_2 - a_3) && (2.1.18) \end{aligned}$$

(2.1.18) is an equation between two vectors in $\mathbb{R}^2$. Two vectors in $\mathbb{R}^2$ are equal if and only if their corresponding coefficients are equal. So, (2.1.18) is equivalent to the following system of simultaneous linear equations:

$$\begin{aligned} -a_1 + a_2 + 2a_3 &= v_1 && (2.1.19)\\ 2a_1 + a_2 - a_3 &= v_2 && (2.1.20) \end{aligned}$$

In other words, the original question

Is $\mathbb{R}^2$ spanned by $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$?

is equivalent to the question

Can we always solve (2.1.19)–(2.1.20) for a_1, a_2, a_3, no matter what the fixed constants $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ are?

You already know how to solve simultaneous linear equations such as (2.1.19)–(2.1.20) by hand:

$$\begin{aligned} -a_1 + a_2 + 2a_3 &= v_1 && (2.1.21)\\ 2a_1 + a_2 - a_3 &= v_2 && (2.1.22)\\ & && (2.1.23)\\ \therefore -a_1 + a_2 + 2a_3 &= v_1 && (2.1.24) \end{aligned}$$

$$3a_2 + 3a_3 = 2v_1 + v_2 \qquad R2 \to R2 + 2R1 \tag{2.1.25}$$

$$\tag{2.1.26}$$

$$\text{Let } a_3 = t \tag{2.1.27}$$

$$\therefore a_2 = \frac{1}{3}(2v_1 + v_2) - t \tag{2.1.28}$$

$$\therefore a_1 = -\frac{1}{3}(-v_1 + v_2) + t \tag{2.1.29}$$

In other words, no matter what v_1, v_2 are, there are always infinitely many solutions (they are parameterized a free parameter t) to (2.1.19)–(2.1.20), and hence to our original equation (2.1.15). That is, we can express *any* $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ as a linear combination of the vectors $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$... and in fact there are *infinitely* many ways to do it, parameterized by a free parameter t!

For instance, suppose we try to write $\mathbf{v} = (2, 3)$ as a linear combination of $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$. If we take our general solution ((2.1.27)–(2.1.29)), and set $t = 0$, then we get

$$a_1 = \frac{1}{3},\ a_2 = \frac{7}{3},\ a_3 = 0$$
$$\text{i.e. } \mathbf{v} = \frac{1}{3}\mathbf{f}_1 + \frac{7}{3}\mathbf{f}_2$$

Or we could take, say, $t = 1$. Then our solution will be

$$a_1 = \frac{4}{3},\ a_2 = \frac{4}{3},\ a_3 = 1$$
$$\text{i.e. } \mathbf{v} = \frac{4}{3}\mathbf{f}_1 + \frac{4}{3}\mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3$$

There are infinitely many solutions. But the important point is that *there is always a solution to (2.1.15)*, no matter what $\mathbf{v}$ is. Therefore, the vectors $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ indeed span $\mathbb{R}^2$.

Finally, let us solve this problem using SageMath. Working by hand, we arrive at the simultanous linear equations (2.1.19)–(2.1.20), and then put it into a Sage cell:

```
var('a1, a2, a3, v1, v2')

solve([-a1 + a2 + 2*a3 == v1,
       2*a1 + a2 - a3  == v2],
       [a1, a2, a3])
```

Note that I needed to tell Sage that `v1` and `v2` are variables, and that I am asking it to solve for `a1`, `a2` and `a3`. On my computer, Sage outputs:

```
[[a1 == r1 - 1/3*v1 + 1/3*v2, a2 == -r1 + 2/3*v1 + 1/3*v2, a3 == r1]]
```

Here, `r1` is to be interpreted as our free parameter t. So Sage is giving us the same solution as we found by hand, (2.1.27)–(2.1.29). □

Voorbeeld 2.1.10 $\mathbb{R}^n$ word deur

$$\mathbf{e}_1 := (1, 0, \ldots, 0),\ \ \mathbf{e}_2 := (0, 1, \ldots, 0),\ \ \ldots,\ \ \mathbf{e}_n := (0, 0, \ldots, 0, 1) \tag{2.1.30}$$

gespan, want elke vektor $\mathbf{v} = (a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_n)$ kan as 'n lineêre kombinasie

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \cdots + a_n\mathbf{e}_n. \tag{2.1.31}$$

uitgedruk word. □

Verstaanpunt 2.1.11 Bevestig die korrektheid van (2.1.31).

Oefeninge

1. Recall from 1^{st} year that a function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is even if $f(-x) = f(x)$ and odd if $f(-x) = -f(x)$. Show that every vector in the vector space $\text{Fun}(\mathbb{R})$ is a linear combination of an even function and an odd function.

Oplossing. The solution is relatively straightforward. Define the following two functions:

$$f_{\text{even}}(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) + f(-x)\right), \quad f_{\text{odd}}(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) - f(-x)\right)$$

It is easy to see that, as the names suggest, f_{even} is an even function and $f_{\text{odd}}(x)$ is an odd function. We simply sum f_{even} and f_{odd}:

$$f_{\text{even}}(x) + f_{\text{odd}}(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) + f(-x)\right) + \frac{1}{2}\left(f(x) - f(-x)\right) = f(x).$$

2. Suppose $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ spans V. Prove that $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_4$ also spans V.

Oplossing. If we are given that $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ spans V then to show that any other collection of vectors in V spans V it suffices to show that each of $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ can be written has a linear combination of the new collection - you should try prove this yourself! With this observation in hand, the exercise has an easy solution.

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) + (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3) + (\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4) + \mathbf{v}_4 \\
\mathbf{v}_2 &= (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3) + (\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4) + \mathbf{v}_4 \\
\mathbf{v}_3 &= (\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4) + \mathbf{v}_4 \\
\mathbf{v}_4 &= \mathbf{v}_4
\end{aligned}$$

3. Consider the following polynomials in Poly_2:

$$\mathbf{r}_1(x) := 3x^2 - 2,\ \mathbf{r}_2(x) := x^2 + x,\ \mathbf{r}_3(x) := x + 1,\ \mathbf{r}_4(x) := x - 1$$

(a) Can the polynomial $\mathbf{p}$ with $\mathbf{p}(x) = x^2 + 1$ be written as a linear combination of $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$, $\mathbf{r}_4$?

(b) If so, in *how many ways* can this be done?

Oplossing.

(a) We must set up the appropriate system of linear equations:

$$\begin{aligned}
& a\mathbf{r}_1(x) + b\mathbf{r}_2(x) + c\mathbf{r}_3(x) + d\mathbf{r}_4(x) && = \mathbf{p}(x) \\
\Longrightarrow\ & a(3x^2 - 2) + b(x^2 + x) + c(x + 1) + d(x - 1) && = x^2 + 1
\end{aligned}$$

After grouping like powers of x we obtain

$$x^2(3a + b) + x(b + c + d) + (-2a + c - d) = x^2 + 1.$$

We equate coefficients on both sides of the equation to obtain the following system of linear equations:

$$\begin{aligned}
3a + b + 0c + 0d &= 1, \\
0a + 1b + 1c + 1d &= 0,
\end{aligned}$$

$$-2a + 0b + 1c + -1d = 1.$$

Using your preferred method for solving a system of linear equations (such as Gauss reduction), we obtain a solution set of the form:

$$\begin{aligned} &d \text{ is free}, \\ &a = 2 + 2d, \\ &b = -5 - 6d, \\ &c = 5 + 5d. \end{aligned}$$

And so $\mathbf{p}(x)$ is indeed a linear combination of $\mathbf{r}_1(x), \mathbf{r}_2(x), \mathbf{r}_3(x), \mathbf{r}_4(x)$.

(b) Since d is free in the above solution set, we can write $\mathbf{p}(x)$ as a linear combination of $\mathbf{r}_1(x), \mathbf{r}_2(x), \mathbf{r}_3(x), \mathbf{r}_4(x)$ in an uncountably infinite number of ways (one for each real number!).

4. Suppose that the vectors $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ and $\mathbf{e}_4$ span a vector space V. Show that the vectors $\mathbf{f}_1 := \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1$, $\mathbf{f}_2 := \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2$, $\mathbf{f}_3 := \mathbf{e}_4 - \mathbf{e}_3$, $\mathbf{f}_4 := \mathbf{e}_4$ also span V.

Oplossing. You could choose to show this directly or we could use a clever approach based on **2**. From **2**, we know that $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}v_3, \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_4$ must span V. But if these vectors span V, then non-zero multiples of the vectors also span V. Thus $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4$ must span V.

5. Show that the polynomials

$$\mathbf{q}_0(x) := 1,\ \mathbf{q}_1(x) := x,\ \mathbf{q}_2(x) := 2x^2 - 1,\ \mathbf{q}_3(x) := 4x^3 - 3x$$

span Poly_3.

Oplossing. Once again we base our strategy on 2. Pick a spanning set for Poly_3. We'll use $1, x, x^2, x^3$, since it's the simplest. $1, x$ are certainly spanned by $\mathbf{q}_0 x), \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$ since $1 = \mathbf{q}_0(x)$ and $x = \mathbf{q}_1(x)$. It can easily be seen that

$$x^2 = \frac{1}{2}\mathbf{q}_2(x) + \frac{1}{2}\mathbf{q}_0(x)x^3 = \frac{1}{4}\mathbf{q}_3(x) + \frac{3}{4}\mathbf{q}_1(x),$$

.completing the proof.

6. Let $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ be a list of vectors in a vector space V. Suppose that $\mathcal{S}$ spans V. Suppose that w is another vector in V. Prove that the list of vectors $\mathcal{S}' = \{\mathbf{w}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ also spans V.

7. Let $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ be a list of vectors in a vector space V. Suppose that $\mathcal{S}$ spans V. Suppose that one of the vectors in the list, say $\mathbf{v}_r$, can be expressed as a linear combination of the preceding vectors:

$$\mathbf{v}_r = a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_{r-1}\mathbf{v}_{r-1} \tag{2.1.32}$$

Suppose that we remove $\mathbf{v}_r$ from $\mathcal{S}$, to arrive at a new list

$$\mathcal{T} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \hat{\mathbf{v}}_r, \ldots, \mathbf{s}_n\}$$

Prove that $\mathcal{T}$ also spans V.

Oplossing. We must show that every vector $\mathbf{v} \in V$ can be written as a linear combination of the vectors from $\mathcal{T}$. So let $\mathbf{v} \in V$. Since $\mathcal{S}$ spans V, we know we can write $\mathbf{v}$ as a linear combination of the vectors from $\mathcal{S}$:

$$\mathbf{v} = b_1\mathbf{v}_1 + \cdots + b_r\mathbf{v}_r + \cdots + b_n\mathbf{v}_n \tag{2.1.33}$$

Substituting (2.1.32) into (2.1.33) gives

$$\mathbf{v} = b_1\mathbf{v}_1 + \cdots + b_r(a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_{r-1}\mathbf{v}_{r-1}) + b_{r+1}\mathbf{v}_{r+1} + \cdots + b_n\mathbf{v}_n \tag{2.1.34}$$

$$= (b_1 + b_r a_1)\mathbf{v}_1 + \cdots + (b_r + b_r a_{r-1})\mathbf{v}_{r-1} + b_{r+1}\mathbf{v}_{r+1} + \cdots + b_n\mathbf{v}_n \tag{2.1.35}$$

Equation (2.1.35) shows that we can express $\mathbf{v}$ as a linear combination of the vectors from $\mathcal{T}$. Hence $\mathcal{T}$ spans V.

2.2 Lineêre onafhanklikheid

Definisie 2.2.1 'n Lys van vektore $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ in 'n vektorruimte V is **lineêr onafhanklik** as die vergelyking

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{e}_2 + \cdots k_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \tag{2.2.1}$$

slegs die triviale oplossing $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$ het. Andersins word die lys vektore $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ **lineêr afhanklik** genoem. $\diamondsuit$

Opmerking 2.2.2 Nulvektor impliseer lineêr onafhanklik. Veronderstel een van die vektore $\mathbf{v}_i$ in die lys $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ is die nulvektor $\mathbf{0}$. Dan is die lys $\mathcal{B}$ lineêr afhanklik, want die vergelyking (2.2.1) het die nie-triviale oplossing

$$0\mathbf{v}_1 + \cdots + 0\mathbf{v}_{i-1} + 1\mathbf{v}_i + 0\mathbf{v}_{i+1} + \cdots + 0\mathbf{v}_n = \mathbf{0},$$

met ander woorde,

$$k_1 = 0, \ldots, k_{i-1} = 0, k_i = 1, k_{i+1} = 0, \ldots, k_n = 0.$$

So: *'n lineêr onafhanklike lys bevat nooit die nulvektor nie!*

Voorbeeld 2.2.3 Die lys van vektore $\mathbf{f}_1 = (-1,\, 2)$ en $\mathbf{f}_2 = (1,\, 1)$ uit Voorbeeld 2.1.8 is lineêr onafhanklik, omdat die vergelyking

$$k_1(-1,\, 2) + k_2(1,\, 1) = (0,\, 0)$$

ekwivalent is aan die sisteem van vergelykings

$$-k_1 + k_2 = 0, \quad 2k_1 + k_2 = 0 \tag{2.2.2}$$

wat slegs die trivale oplossing $k_1 = 0$ en $k_2 = 0$ het. $\square$

Verstaanpunt 2.2.4 Bevestig dat (2.2.2) slegs die triviale oplossing het.

Oplossing.

$$(2k_1 + k_2) - (-k_1 + k_2) = 0 = 3k_2 \implies k_2 = 0 \implies k_1 = 0.$$

Voorbeeld 2.2.5 Die lys van vektore $\mathbf{f}_1 = (-1,\, 2)$, $\mathbf{f}_2 = (1,\, 1)$, $\mathbf{f}_3 = (2,\, -1)$ uit Voorbeeld 2.1.8 is lineêr afhanklik, want die vergelyking

$$k_1(-1,\, 2) + k_2(1,\, 1) + k_3(2,\, -1) = (0,\, 0) \tag{2.2.3}$$

is ekwivalent aan die sisteem van vergelykings

$$-k_1 + k_2 + 2k_3 = 0, \quad 2k_1 + k_2 - k_3 = 0 \tag{2.2.4}$$

wat 'n een-dimansionele vektorruimte van oplossings het wat deur t parameteriseer word,

$$k_1 = t,\ k_2 = -t,\ k_3 = t, t \in \mathbb{R}. \tag{2.2.5}$$

Byvoorbeeld, vir $t = 2$, is

$$2(-1,\,2) - 2(1,\,1) + 2(2,\,-1) = (0,\,0)$$

sodat (2.2.3) non-triviale oplossings het. □

Verstaanpunt 2.2.6 Wys dat (2.2.4) die oplossingsversameling (2.2.5) het.

Oplossing. We have a system of consistent homogenous linear equations so we know there exists at least one solution, namely the trivial solution. Since we have 3 unknowns but only 2 equations, we do not have a unique solution. Let k_1 be free, i.e. $k_1 = t, t \in \mathbb{R}$. Then

$$(-k_1+k_2+2k_3)-(2k_1+k_2-k_3) = 0 = -3k_1+3k_3 \implies -k_1+k_3 = 0 \implies k_3 = t. -t+k_2+2t = 0 \implies k_2 = -t$$

Voorbeeld 2.2.7 Die lys polinome

$$\mathbf{q}_0(x) := 1,\ \mathbf{q}_1(x) := x,\ \mathbf{q}_2(x) := 2x^2 - 1,\ \mathbf{q}_3(x) := 4x^3 - 3x$$

uit Voorbeeld 2.1.5 is lineêr onafhanklik in Poly_3. Dit is omdat die vergelyking

$$k_0\mathbf{q}_0 + k_1\mathbf{q}_1 + k_2\mathbf{q}_2 + k_3\mathbf{q}_3 = \mathbf{0}$$

vereenvoudig as die volgende polinoomvergelyking:

$$4k_3x^3 + 2k_2x^2 + (-3k_3 + k_1)x + (-k_2 + k_0) = 0$$

Hierdie is ekwivalent aan die volgende stelsel vergelykings,

$$4k_3 = 0, \quad 2k_2 = 0, \quad -3k_3 + k_1 = 0, \quad k_0 - k_2 = 0$$

wat slegs die triviale oplossing $k_0 = k_1 = k_2 = k_3 = 0$ het. □

Hier is twee meer maniere om hoe van lineêre afhanklike lyste vektore te dink.

Stelling 2.2.8 Equivalent Criterions for Linear Dependence. *Let $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ be a list of vectors in a vector space V. The following statements are equivalent:*

1. *The list of vectors $\mathcal{B}$ is linearly dependent.*
2. *(Linear Combination of Other Vectors)One of the vectors in the list $\mathcal{B}$ is a linear combination of the other vectors in $\mathcal{B}$.*
3. *(Linear Combination of Preceding Vectors)Either $\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$, or for some $r \in \{2, 3, \ldots, n\}$, $\mathbf{v}_r$ is a linear combination of $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{r-1}$.*

Bewys. We will show that (1) ⇔ (2), (1) ⇒ (3) and (3) ⇒ (2), and conclude that each statement implies the others.

(1) ⇒ (2). Suppose that $\mathcal{B}$ is linearly dependent. This means that there are scalars $k_1, k_2, \ldots, k_n$, not all zero, such that

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}. \tag{2.2.6}$$

Let k_s be one of the nonzero coefficients. Then, by taking the other vectors to the other side of the equation, and multuplying by $\frac{1}{k_s}$ we can solve for $\mathbf{v}_s$ in terms of the other vectors:

$$\mathbf{v}_s = -\frac{k_1}{k_s}\mathbf{v}_1 - \ldots - \frac{k_n}{k_s}\mathbf{v}_n \qquad \text{(No } \mathbf{v}_i \text{ terms on RHS)}$$

Therefore, (2) is true.

(2) ⇒ (1). Suppose that one of the vectors in the list, say $\mathbf{v}_s$, is a linear combination of the others vectors. That is,

$$\mathbf{v}_s = k_1\mathbf{v}_1 + \ldots + k_n\mathbf{v}_n \qquad \text{(No term on RHS.)}$$

Rearranging this equation gives:

$$k_1\mathbf{v}_1 + \ldots + (-1)\mathbf{v}_s + \ldots + k_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}. \tag{2.2.7}$$

Not all the coefficients on the LHS of (2.2.7) are zero, since the coefficient of $\mathbf{v}_s$ is equal to -1. Therefore, $\mathcal{B}$ is linearly dependent.

(1) ⇒ (3). Suppose that the list $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ is linearly dependent. This means that there are scalars k_1, k_2, …, k_n, not all zero, such that

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}. \tag{2.2.8}$$

Let $r \in \{1, 2, \ldots, n\}$ be the largest index such that $k_r \neq 0$. (We are told that not all the k_i are zero, so this makes sense.) If $r = 1$, then (2.2.8) is simply the equation

$$k_1\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}, \text{where } k_1 \neq 0.$$

Therefore $\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$ by Lemma 1.5.6, and we are done. On the other hand, suppose $r \neq 1$. Then (2.2.8) becomes the equation

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_r\mathbf{v}_r = \mathbf{0}, \text{where } k_r \neq 0.$$

By dividing by k_r, we can now solve for $\mathbf{v}_r$ in terms of the preceding vectors $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, …, $\mathbf{v}_{r-1}$:

$$\therefore \mathbf{v}_r = -\frac{k_1}{k_r}\mathbf{v}_1 - \frac{k_2}{k_r}\mathbf{v}_2 - \cdots - \frac{k_{r-1}}{k_r}\mathbf{v}_{r-1}$$

Therefore, (3) is true.

(3) ⇒ (2) Suppose that (3) is true. In other words, either:

- $\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$. Therefore, $\mathcal{B}$ is linearly dependent, by Opmerking 2.2.2. In other words, (1) is true. Therefore, since we have already proved that (1) ⇒ (2), we conclude that (2) is true.

- For some $r \in \{2, \ldots, n\}$, $\mathbf{v}_r$ is a linear combination of $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{r-1}$. In this case, clearly $\mathbf{v}_r$ is a linear combination of the other vectors in $\mathcal{B}$, so (2) is true.

In both cases, (2) is true. So, (3) ⇒ (2). ■

Voorbeeld 2.2.9 Ons het in Voorbeeld 2.2.5 gesien dat die lys vektore $\mathbf{f}_1 = (-1, 2)$, $\mathbf{f}_2 = (1, 1)$, $\mathbf{f}_3 = (2, -1)$ in $\mathbb{R}^3$ lineêr afhanklik is. Gee twee alternatiewe bewyse hiervan, deur gebruik te maak van Stelling 2.2.8.

Oplossing 1. Ons kontrolleer Item 2 uit Stelling 2.2.8. Dit wil sê, ons kontrolleer of een van die vektore in die lys 'n lineêre kombinasie van die ander vektore is. Inderdaad, ons sien deur inspeksie dat

$$\mathbf{f}_2 = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_3. \tag{2.2.9}$$

Dus, $\mathcal{B}$ is lineêr afhanklik.

Oplossing 2. Ons kontrolleer Item 3 uit Stelling 2.2.8. Dit wil sê, ons kontrolleer:

- $\mathbf{f}_1 = \mathbf{0}$ (nie waar nie), óf
- $\mathbf{f}_2$ is 'n skalaarveelvoud van $\mathbf{f}_1$ (nie waar nie), óf
- $\mathbf{f}_3$ is 'n lineêre kombinasie van $\mathbf{f}_1$ en $\mathbf{f}_2$, wat waar is:

$$\mathbf{f}_3 = -\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2$$

□

Stelling 2.2.10 Afstampproposisie. *Veronderstel $\mathcal{L} = \{\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \ldots, \mathbf{l}_m\}$ is 'n lineêr onafhanklike lys vektore in 'n vektorruimte V en dat $\mathcal{S} = \{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_n\}$ vir V span. Dan is $m \leq n$.*

Bewys. Begin met die oorspronglike lys vektore

$$\mathcal{S} = \{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_n\} \tag{2.2.10}$$

wat V span en oorweeg die 'opgeblase' lys

$$\mathcal{S}' = \{\mathbf{l}_1, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \cdots, \mathbf{s}_n\} \tag{2.2.11}$$

Nou, omdat $\mathcal{S}$ vir V span, weet ons in besonder dat $\mathbf{l}_1$ kan uitgedruk word as 'n lineêre kombinasie van die vektore $\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_n$. Dus, deur Item 2 van Stelling 2.2.8, weet ons dat $\mathcal{S}'$ lineêr afhanklik is. Dus, deur Item 3 van Stelling 2.2.8, óf:

- $\mathbf{l}_1 = \mathbf{0}$. Dit kan nie waar wees nie, want dan sou $\mathcal{L}$ lineêr afhanklik wees weens Opmerking 2.2.2, wat in teenstryding is met ons oorspronklike aanname.
- een van die $\mathbf{s}$-vectore, noem dit $\mathbf{s}_r$, kan uitgedruk word as 'n lineêre kombinasie van die voorafgaande vektore. Ons kan dan $\mathbf{s}_r$ uit die lys $\mathcal{S}'$ verwyder ('afstamp'), en die resulterende lys

  $$\mathcal{S}_1 := \{\mathbf{l}_1, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \cdots, \hat{\mathbf{s}_r}, \cdots, \mathbf{s}_n\} \qquad (\mathbf{s}_r \text{ omitted}) \tag{2.2.12}$$

  sal nog steeds vir V span, deur Oefening 2.1.7.

In hierdie manier kan ons aangaan: elke keer 'n $\mathbf{l}$-vektor oor te dra en 'n $\mathbf{s}$-vektor te verwyder, en die resulterende lys sal nog steeds vir V span:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \{\mathbf{l}_1, \ldots, \mathbf{l}_m\} & \mathcal{S} &= \{\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_n\} \\
\mathcal{L}_1 &= \{\mathbf{l}_2, \ldots, \mathbf{l}_m\} & \mathcal{S}_1 &= \left\{\mathbf{l}_1, \underbrace{\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_n}_{n-1}\right\} \\
\mathcal{L}_2 &= \{\mathbf{l}_3, \ldots, \mathbf{l}_m\} & \mathcal{S}_2 &= \left\{\mathbf{l}_2, \mathbf{l}_1, \underbrace{\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_n}_{n-2}\right\} \\
&\vdots & &\vdots
\end{aligned}$$

Nou, veronderstel dat $m > n$. Wanneer ons die $n$ste stadium van hierdie proses bereik, sal $\mathcal{S}_n = \{\mathbf{l}_n, \ldots, \mathbf{l}_1\}$, en dit sal vir V span. Dus, in besonder,

$\mathbf{l}_{n+1}$ (let op dat hierdie vektore wel bestaan, want $m > n$) sal 'n lineêre kombinasie van $\mathbf{l}_1, \ldots, \mathbf{l}_n$ wees. Maar dan, deur Item 2 van Stelling 2.2.8, lei ons af dat $\mathcal{L}$ lineêr afhanklik is. Maar ons het aangeneem van die begin af dat $\mathcal{L}$ lineêr *on*afhanklik is. So ons het 'n teenstryding. Dus, ons aanname dat $m > n$ moet vals wees. Dus, dit moet waar wees dat $m \leq n$. ■

Oefeninge

1. Wys dat die lys vektore (2, 3, 1), (1, −1, 2), (7, 3, c) lineêr afhanklik in $\mathbb{R}^3$ is as en slegs as $c = 8$.

Oplossing. We set up a linear equation and find the necessary conditions on c. Suppose some linear combination of the vectors equals 0:

$$k_1(2,\, 3,\, 1) + k_2(1,\, -1,\, 2) + k_3(7,\, 3,\, c) = \mathbf{0} = (0, 0, 0)$$

This vector equation gives rise to a system of 3 linear equations:

$$2k_1 + k_2 + 7k_3 = 0, 3k_1 - k_2 + 3k_3 = 0, k_1 + 2k_2 + ck_3 = 0.$$

The corresponding matrix equation is

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

This matrix is non-invertible if and only if its determinant is 0. Furthermore, the matrix being non-invertible will mean we can find a non-trivial solution to the intial equation. We compute the determinant:s

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & c \end{bmatrix} = -5c + 40$$

which is 0 if and only if $c = 8$.

2. Die lys vektore in $\mathrm{Mat}_{2,2}$ gegee deur

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

is lineêr onafhanklik (ons sal dit in Oefening 2.3.2.4 bewys, maar ter wille van hierdie vraag kan jy aanvaar dat dit waar is). Herhaal dieselfde stappe as in Voorbeeld 2.2.9 om die eerste vektor in die lys te vind wat of die nulvektor of 'n lineêre kombinasie van die voorafgaande vektore is.

Oplossing. Firstly note that $\mathbf{v}_1$ is non-zero, so we consider $\mathbf{v}_2$. $\mathbf{v}_2$ cannnot be a scalar multiple of $\mathbf{v}_1$ by considering the matrix entry in position (1,2). We now consider $\mathbf{v}_3$. Suppose

$$a \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

This gives rise to a system of four linear equations. In particular, we have the equation for the matrix entry in position (1,2):

$$2a + 0b = 0$$

And hence $a = 0$. But clearly

$$b \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

for any choice of b. Hence $\mathbf{v}_3$ is not a scalar multiple of $\mathbf{v}_1$ and $\mathbf{v}_2$. We consider $\mathbf{v}_4$ next. Suppose

$$a\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{bmatrix} + c\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 3\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

The equation for the entry in position (1,2) is simply

$$2a = 3$$

and so $a = \frac{3}{2}$. The corresponding equation for the entry in position (1,1) is thus

$$\frac{3}{2} + b + c = 0.$$

Using this result, we consider the equation for the entry in position (2,2) and compute:

$$\frac{3}{2} + b + 3c = -1 \implies \frac{3}{2} + b + c + 2c = -1 \implies 2c = -1 \implies c = -\frac{1}{2}$$

and so $b = -1$. SHOW THAT THIS IS INCONSISTENT WITH (2,1).

3. Laat $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ 'n lineêr onafhanklike lys vektore in 'n vektorruimte V wees. Veronderstel dat $\mathbf{v}$ 'n vektor in V is wat nie as 'n lineêre kombinasie van die vektore uit $\mathcal{B}$ geskryf kan word nie. Toon aan dat die lys $\mathcal{B}' = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}\}$ lineêr onafhanklik is. (Wenk: Gebruik die Lineêre Kombinasie van Voorafgaande Vektore Proposisie.)

2.3 Basis en dimensie

Definisie 2.3.1 'n Lys vektore $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ in 'n vektorruimte V word 'n **basis** van V genoem as dit lineêr onafhanklik is en V span. $\diamondsuit$

Stelling 2.3.2 Invariansie van dimensie. *As $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ en $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ albei basisse van 'n vektorruimte V is, dan is $m = n$.*

Bewys. Dit is 'n gevolg van Proposisie 2.2.10 (die afstampproposisie). Aangesien die $\mathbf{e}$-vectore V lineêr onfafhanklik is en die $\mathbf{f}$-vektore V span, het ons $m \leq n$. Aan die ander kant, omdat die $\mathbf{f}$-vektore linêr onfahanklik is en die $\mathbf{e}$-vektore V span, het ons $n \leq m$. Daarom is $m = n$. ∎

Definisie 2.3.3 'n Vektorruimte V is **eindigdimensioneel** as dit 'n eindige basis het. In daardie geval is die **dimensie** van V die aantal elemente in 'n basis vir V. 'n Vektorruimte is **oneindigdimensioneel** as dit nie eindigdimensioneel is nie. $\diamondsuit$

Let op dat die konsep van die 'dimensie van'n vektorruimte' slegs goedgedefinieerd is as gevolg van Stelling 2.3.2.

Die geval van die nulvektorruimte $Z = \{\mathbf{0}\}$ is nie eksplisiet in Definisie 2.3.3 gehanteer nie. Ons hanteer dit as 'n spesiale geval. Naamlik, ons *defineer* die dimensie van die nulvektorruimte Z as 0. So, volgens die definisie is Z is eindig-dimensionaal, en sy dimensie is gelyk aan 0.

Voorbeeld 2.3.4 Standaard basis vir $\mathbb{R}^n$. Die lys vektore

$$\mathbf{e}_1 := (1, 0, \ldots, 0), \;\; \mathbf{e}_2 := (0, 1, \ldots, 0), \;\; \ldots, \;\; \mathbf{e}_n := (0, 0, \ldots, 0, 1)$$

is 'n basis vir $\mathbb{R}^n$. Ons het reeds in Voorbeeld 2.1.10 gesien dat die lys $\mathbb{R}^n$ span. Ons moet seker maak dat die lys lineêr onafhanklik is. So, suppose that

$$a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \cdots + a_n\mathbf{e}_n = \mathbf{0}.$$

Uitbreiding van die linkerkant na komponente volgens die definisie van die standaard basisvektore $\mathbf{e}_i$ lewer die vergelyking

$$(a_1, 0, 0, \ldots, 0) + (0, a_2, 0, \ldots, 0) + \cdots + (0, 0, 0, \ldots, a_n) = (0, 0, 0, \ldots, 0).$$

Met ander woorde, ons het dat

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) = (0, 0, 0, \ldots, 0)$$

wat beteken dat $a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_n = 0$, presies wat ons moes bewys. Gevolglik is die lys vektore $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ lineêr onafhanklik en daarom is dit 'n basis vir $\mathbb{R}^n$. So $\mathbb{R}^n$ het dimensie n. □

Voorbeeld 2.3.5 A basis for $\mathbb{R}^4$. Check whether the following list of vectors

$$\mathbf{v}_1 = (1, 0, 2, -3), \mathbf{v}_2 = (1, 3, -1, 2), \mathbf{v}_3 = (0, 1, 2, -1), \mathbf{v}_4 = (1, 2, 3, 4) \tag{2.3.1}$$

is a basis for $\mathbb{R}^4$.

Oplossing. First we check if the list of vectors is linearly independent. Consider the equation

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + a_3\mathbf{v}_3 + a_4\mathbf{v}_4 = \mathbf{0} \tag{2.3.2}$$

$$\therefore a_1(1, 0, 2, -3) + a_2(1, 3, -1, 2) + a_3(0, 1, 2, -1) + a_4(1, 2, 3, 4) = (0, 0, 0, 0) \tag{2.3.3}$$

$$\therefore (a_1 - a_2 + a_4, 3a_2 + a_3 + 2a_4, 2a_1 - a_2 + 2a_3 + 3a_4, -3a_1 + 2a_2 - a_3 + 4a_4) = (0, 0, 0, 0) \tag{2.3.4}$$

So the list of vectors is linearly indepedent if and only if the following equations have only the trivial solution $a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 0, a_4 = 0$:

$$a_1 - a_2 + a_4 = 0 \tag{2.3.5}$$
$$3a_1 + a_3 + 2a_4 = 0 \tag{2.3.6}$$
$$2a_1 - a_2 + 2a_3 + 3a_4 = 0 \tag{2.3.7}$$
$$-3a_1 + 2a_2 - a_3 + 4a_4 = 0 \tag{2.3.8}$$

We can compute the solutions to equations (2.3.5)–(2.3.8) by hand, or using SageMath.

```
var('a1, a2, a3, a4')

solve([a1 - a2 + a4 == 0,
      3*a1 + a3 + 2*a4 == 0,
      2*a1 - a2 + 2*a3 + 3*a4 == 0,
      -3*a1 + 2*a2 - a3 + 4*a4 == 0],
      [a1, a2, a3, a4])
```

SageMath outputs:

```
[[a1 == 0, a2 == 0, a3 == 0, a4 == 0]]
```

So indeed, equations (2.3.5)–(2.3.8) have only the trivial solution. Therefore the list of vectors is linearly independent.

Next, we need to check that the list of vectors spans $\mathbb{R}^4$. (There is a shorter way of doing this, using Gevolg 2.3.19 below, but for now we prove it from first principles.) So, let $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3, w_4)$ be an arbitrary vector in $\mathbb{R}^4$. We need to show that there exists at least one way to express $\mathbf{w}$ as a linear combination of the vectors $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$. In other words, we need to check if there exists at least one solution to the following equation:

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + a_3\mathbf{v}_3 + a_4\mathbf{v}_4 = \mathbf{w} \tag{2.3.9}$$

$$\therefore a_1(1,0,2,-3) + a_2(1,3,-1,2) + a_3(0,1,2,-1) + a_4(1,2,3,4) = (w_1,w_2,w_3,w_4) \tag{2.3.10}$$

$$\therefore (a_1 - a_2 + a_4, 3a_2 + a_3 + 2a_4, 2a_1 - a_2 + 2a_3 + 3a_4, -3a_1 + 2a_2 - a_3 + 4a_4) = (w_1,w_2,w_3,w_4) \tag{2.3.11}$$

So the list of vectors spans $\mathbb{R}^4$ if and only if the following equations for a_1, a_2, a_3, a_4 always have a solution, no matter what the values of w_1, w_2, w_3, w_4 are:

$$a_1 - a_2 + a_4 = w_1 \tag{2.3.12}$$

$$3a_1 + a_3 + 2a_4 = w_2 \tag{2.3.13}$$

$$2a_1 - a_2 + 2a_3 + 3a_4 = w_3 \tag{2.3.14}$$

$$-3a_1 + 2a_2 - a_3 + 4a_4 = w_4 \tag{2.3.15}$$

We can compute the solutions to equations (2.3.12)–(2.3.15) by hand, or using SageMath:

```
var('a1, a2, a3, a4, w1, w2, w3, w4')

solve([a1 - a2 + a4 == w1,
       3*a1 + a3 + 2*a4 == w2,
       2*a1 - a2 + 2*a3 + 3*a4 == w3,
       -3*a1 + 2*a2 - a3 + 4*a4 == w4],
       [a1, a2, a3, a4])
```

Note that we ask SageMath to solve for `a1, a2, a3, a4`, since `w1, w2, w3, w4` are regarded as constants in the equation... we are not trying to solve for them, they are fixed, but arbitrary! SageMath outputs:

```
[[a1 == 1/9*w1 + 7/18*w2 - 2/9*w3 - 1/18*w4, a2 == -2/3*w1 + 5/12*w2
- 1/6*w3 + 1/12*w4, a3 == -7/9*w1 - 2/9*w2 + 5/9*w3 - 1/9*w4, a4 ==
2/9*w1 + 1/36*w2 + 1/18*w3 + 5/36*w4]]
```

In other words, there does indeed exist a solution, no matter what (w_1, w_2, w_3, w_4) is. For instance, if $(w_1, w_2, w_3, w_4) = (3, 1, 2, 4)$, then the solution is

$$a_1 = \frac{1}{18}, a_2 = -\frac{19}{12}, a_3 = -\frac{17}{9}, a_4 = \frac{49}{36}.$$

In other words,

$$(3,1,2,4) = \frac{1}{18}\mathbf{v}_1 - \frac{19}{12}\mathbf{v}_2 - \frac{17}{9}\mathbf{v}_3 + \frac{49}{36}\mathbf{v}_4.$$

Since there exists a solution to equation (2.3.9) for each vector $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^4$, we conclude that $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ spans $\mathbb{R}^4$.

Voorbeeld 2.3.6. Die lys polinome

Hence $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ is a basis for $\mathbb{R}^4$, since it is linearly independent and spans $\mathbb{R}^4$. □

$\mathbf{p}_0(x) := 1$, $\mathbf{p}_1(x) := x$, $\mathbf{p}_2(x) := x^2$, $\ldots$, $\mathbf{p}_n(x) := x^n$

is 'n basis vir Poly_n, so $\dim \mathrm{Poly}_n = n+1$. Duidelik span hierdie lys Poly_n per definisie, so ons moet net seker maak dat hulle line{êr} onafhanklik is. Veronderstel dat

$$a_0\mathbf{p}_0 + a_1\mathbf{p}_1 + a_2\mathbf{p_2} + \cdots + a_n\mathbf{p}_n = \mathbf{0}.$$

Dit is 'n vergelyking van funksies, so dit geld vir alle $x \in \mathbb{R}$! Met ander woorde, vir *alle* $x \in \mathbb{R}$ het ons het die vergelyking

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = 0. \tag{2.3.16}$$

Dink versigtig hieraan. Vergelyking (2.3.16) verteenwordig 'n *oneindige* stelsel van vergelykings vir die onbekendes $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Daar is een vergelyking vir elke waarde van $x \in \mathbb{R}$. Byvoorbeeld

$$\begin{aligned}
(x=1) \qquad && a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0 && (2.3.17)\\
(x=-1) \qquad && a_0 - a_1 + a_2 + \cdots + (-1)^n a_n = 0 && (2.3.18)\\
(x=2) \qquad && a_0 + 2a_1 + 4a_3 + \cdots + 2^n a_n = 0 && (2.3.19)\\
(x=3) \qquad && a_0 + 3a_1 + 9a_3 + \cdots + 3^n a_n = 0 && (2.3.20)\\
&& \vdots && (2.3.21)
\end{aligned}$$

Veronderstel dat ons waardes vir $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ kan vind wat *elkeen* van hierdie oneindig veel vergelykings (2.3.17)–(2.3.21) op los. Ons kan nou ons standpunt verander. Naamlik, stel hierdie vaste waardes vir $a_0, a_1, \ldots, a_n$ in Vergelyking (2.3.16) en beskou Vergelyking (2.3.16) as 'n vergelyking vir die onbekende x (die koëffisiente $a_0, a_1, \ldots, a_n$ is nou *vasgemaak*.) Ons trek die gevolg dat *elke* $x \in \mathbb{R}$ 'n wortel van hierdie polinoom vergelyking is!

Maar, ons weet uit algebra dat 'n polinoom van die vorm (2.3.16) met nie-nul koëffisiënte *meestens* n wortels $x_1, x_2, \ldots, x_n$ het . So, die koëffisiënte moet nul wees, i.e. $a_0 = a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$, wat is wat ons moes bewys. □

Voorbeeld 2.3.7 Veronderstel X is 'n eindige versameling. Dan is $\mathrm{Fun}(X)$ eindig-dimensioneel, met dimensie $|X|$, waar die basis gegee word deur die funksies $\mathbf{f}_a$, $a \in X$, gedefinieer deur:

$$\mathbf{f}_a(x) := \begin{cases} 1 & \text{if } x = a \\ 0 & \text{andersins} \end{cases} \tag{2.3.22}$$

Ons sal dit in 'n reeks oefeninge bewys.

Die formule aan die regterkant van (2.3.22) kom so gereeld in wiskunde voor dat ons dit 'n spesiale simbool gee, naamlik δ_{ab} (die 'Kronecker-delta'). Hierdie simbool staan vir die formule: "As $a = b$, gee die waarde 1. As $a \neq b$, gee die waarde 0". In hierdie taal kan ons die definisie van die funksies $\mathbf{f}_a$ as

$$\mathbf{f}_a(x) := \delta_{ax} \tag{2.3.23}$$

herskryf.

□

Voorbeeld 2.3.8 Trig_n is $(2n+1)$-dimensioneel, met basis

$$\mathbf{T}_0(x) := 1, \ \ \mathbf{T}_1(x) := \cos x, \ \mathbf{T}_2(x) := \sin x, \ \mathbf{T}_3(x) := \cos 2x,$$

$$\mathbf{T}_4(x) := \sin 2x,\ \ldots,\ \mathbf{T}_{2n-1}(x) := \cos nx,\ \mathbf{T}_{2n}(x) := \sin nx.$$

Hierdie funksies span Trig_n per definisie. Hulle is ook lineêr onafhanklik, alhoewel ons dit nie sal bewys nie. □

Voorbeeld 2.3.9 Die dimensie van $\mathrm{Mat}_{n,m}$ is nm. 'n Basis word gegee deur die matrikse

$$\mathsf{E}_{ij}, i = 1 \ldots n,\ j = 1 \ldots m$$

wat 'n 1 in ry i en kolom j het, en nulle orals elders.

Normaalweg is A 'n matriks en A_{ij} is die element van die matriks in die posisie (i, j). Maar nou is E_{ij} 'n matriks in eie reg! 'n Element in posisie (k, l) sal geskryf word as $(\mathsf{E}_{ij})_{kl}$. Ek hoop jy vind dit nie te verwarrend nie. Trouens, ons kan 'n elegante formule vir die elemente van E_{ij} neerskryf deur gebruik te maak van die Kronecker delta-simbool:

$$(\mathsf{E}_{ij})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl} \tag{2.3.24}$$

□

Kontroleer dat (3.0.1) wel die korrekte formule vir die matrikselemente van E_{ij} gee.

Voorbeeld 2.3.10 Die standaard basis van $\mathrm{Mat}_{2,2}$ is

$$\mathsf{E}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathsf{E}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathsf{E}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathsf{E}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

□

Voorbeeld 2.3.11 Die standaard basis van Col_n is

$$\mathbf{e}_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \mathbf{e}_n := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

□

Ons gaan nou deelruimtes van vektorruimtes se dimensie bestudeer.

Stelling 2.3.12 *Laat W 'n deelruimte van 'n eindig-dimensionele vektorruimte V wees. Dan is W eindig-dimensioneel, en* $\mathrm{Dim}(W) \leq \mathrm{Dim}(V)$.

Bewys. Let

$$\mathcal{C} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$$

be a basis for V, so that $\mathrm{Dim}(V) = n$. We just need to show that W is finite-dimensional, i.e. that there exists a basis

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k\}$$

for W. For then $\mathcal{B}$ will be a list of k linearly independent vectors which live in W (and hence also in V) and hence we must have $k \leq n$ by Stelling 2.2.10, as $\mathcal{C}$ spans V.

We show that W is finite-dimensional as follows.

If W is the zero vector space $\{\mathbf{0}\}$, then W is finite-dimensional by definition.

If W is not the zero vector space, then there exists a nonzero vector $\mathbf{w}_1 \in W$. Consider the list $\mathcal{B}_1 = \{\mathbf{w}_1\}$. Note that $\mathcal{B}_1$ is linearly independent, by Item 3 of Stelling 2.2.8. So, if $\mathcal{B}_1$ spans W, then it is a basis for W, and so W is finite-dimensional and we are done.

If $\mathcal{B}_1$ does not span W, then there exists a vector $\mathbf{w}_2 \in W$ which is not a scalar multiple of $\mathbf{e}_1$. Now consider the list $\mathcal{B}_2 = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. Once again, $\mathcal{B}_2$ is linearly independent, by Item 3 of Stelling 2.2.8. So, if $\mathcal{B}_2$ spans W, then it is a basis for W, and we are done.

If $\mathcal{B}_2$ does not span W, then there exists a vector $\mathbf{w}_3 \in W$ which is not a linear combination of $\mathbf{w}_1$ and $\mathbf{w}_2$. Now consider the list $\mathcal{B}_3 = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$. Again, $\mathcal{B}_3$ is linearly independent, by Item 3 of Stelling 2.2.8. If it does not span W, then there exists a vector $\mathbf{w}_4 \in W$ which is not a linear combination of $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$. So consider the list $\mathcal{B}_4 = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4\}$.

This process must terminate for some $k \leq n$. If not, then it will produce a list $\mathcal{B}_{n+1} = \{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_{n+1}\}$. This would be a linearly independent list of $n+1$ vectors from V. But $\operatorname{Dim} V = n$, so this is impossible, by Stelling 2.2.10. Hence for some $k \leq n$ we must have that $\mathcal{B}_k$ is a basis for W, and we are done. ■

Dit is goed om 'n voorbeeld van 'n oneindig-dimensionele vektorruimte te hê.

Stelling 2.3.13 Poly *is oneindigdimensioneel.*

Bewys. Veronderstel Poly is eindigdimensioneel. Dit beteken daar bestaan 'n eindige versameling polinome $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$ wat Poly span. Maar, laat d die hoogste graad van al die polinome in die lys $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$ wees. Dan is $\mathbf{p} := x^{d+1}$ 'n polinoom wat nie in die span van $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$ is nie, want die sommering en skalaarvermenigvuldiging van polinome kan nooit die graad verhoog nie. Ons het 'n teenstelling bereik. So ons aanvanklike aanname kan nie waar wees nie, i.e. Poly kan nie eindigdimensioneel wees nie. ■

Voorbeeld 2.3.14 Ons sal dit nie hier bewys nie, maar die volgende vektorruimtes is ook eindigdimensioneel:

- $\mathbb{R}^\infty$,
- $\operatorname{Fun}(X)$ waar X 'n eindige versameling is,
- $\operatorname{Cont}(I)$ vir enige nie-leë interval I en
- $\operatorname{Diff}(I)$ vir enige oop interval I.

□

2.3.1 Sifting

As ons die bewys van Proposisie 2.2.10 (die 'Afstampproposisie') noukeurig bestudeer, vind ons dat dit van 'n *sif-algoritme* gebruik maak. Hierdie algoritme kan op *enige* lys vektore $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ in 'n vektorruimte toegepas word. Beskou elke vektor $\mathbf{v}_i$ in so 'n lys opeenvolgend. As $\mathbf{v}_i$ die nul-vektor is, of as dit 'n lineêre kombinasie van die voorafgaande vektore $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}$ is, verwyder dit van die lys.

Voorbeeld 2.3.15 Sif die volgende lys vektore in $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{v}_1 = (1,2,-1), & \mathbf{v}_2 = (0,0,0), & \mathbf{v}_3 = (3,6,-3) \\ \mathbf{v}_4 = (1,0,5), & \mathbf{v}_5 = (5,4,13), & \mathbf{v}_6 = (1,1,0). \end{array}$$

Ons begin met $\mathbf{v}_1$. Aangesien dit nie die nul-vektor is nie en nie 'n lineêre kombinasie van enige voorafgaande vektore is nie, bly dit in die lys. Nou beweeg ons aan na $\mathbf{v}_2$, wat nul is, so ons verwyder dit. Ons skuif aan na $\mathbf{v}_3$, wat ons deur inspeksie vasstel dat dit as$3\mathbf{v}_1$ geskryf kan word, so ons verwyder dit. Ons beweeg aan na $\mathbf{v}_4$. Dit is nie nul nie, en dit kan nie as 'n veelvoud van $\mathbf{v}_1$ uitgedruk word nie (bevestig dit vir jouself), so dit bly in die lys. Ons beweeg aan na $\mathbf{v}_5$. Ons kyk of dit as die lineêre kombinasie

$$\mathbf{v}_5 = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_4$$

geskryf kan word en vind die oplossing $a = 2, b = 3$ (bevestig self), so ons verwyder dit. Uiteindelik kom ons by $\mathbf{v}_6$. Ons ondersoek of dit as 'n lineêre kombinasie

$$\mathbf{v}_6 = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_4$$

geskryf kan word en vind geen oplossings nie (bevestig self), so dit bly in die lys. Ons finale gesifte lys is

$$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_6.$$

□

Verstaanpunt 2.3.16 Doen die drie 'bevestig self'-bewerkings hierbo.

Die volgende resultate wys dat sifting a baie nuttige manier is om 'n basis vir 'n vektorruimte te konstrueer!

Hulpstelling 2.3.17 *As 'n lys vektore $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ 'n vektorruimte V span, dan sal sifting van die lys in 'n basis vir V resulteer.*

Bewys. By elke stap vind ons dat 'n vektor wat uit die lys verwyder word óf die nul-vektor is, óf 'n lineêre kombinasie van die voorafgaande vektore is wat nié uit die lys verwyder word nie. So as ons die vektor uit die lys verwyder, sal die oorblywende vektore steeds V span. Daarom span die vektore in die finale lys steeds V.

Om te sien dat die finale gesifte lys lineêr onafhanklik is, pas ons Proposisie 2.2.8 toe. Deur konstruksie is geen vektor in die finale lys 'n lineêre kombinasie van die voorafgaande vektore nie (ander sou dit verwyder gewees het!). Daarom is die finale lys nie lineêr afhanklik nie, so dit moet lineêr onafhanklik wees! ■

Gevolg 2.3.18 *Enige lineêr onafhanklike lys vektore $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ in 'n eindig-dimensionele vektorruimte V kan uitgebrei word tot 'n basis van V.*

Bewys. Aangesien V eindig-dimensioneel is, het dit 'n basis $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$. Oorweeg nou die lys

$$L : \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$$

wat duidelik V span. Deur die lys te sif, sal ons 'n basis vir V kry, volgens Lemma 2.3.17. Sommige van die $\mathbf{e}$-vektore mag dalk verwyder wees in die proses. Maar geeneen van die $\mathbf{v}$-vektore sal verwyder word nie, aangesien dit sou beteken dat sommige vektore $\mathbf{v}_i$ 'n lineêre kombinasie van die voorafgaande vektore $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}$ is, wat onmoontlik is, omdat $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ 'n lineêr onafhanklike lys is. Dus ná sifting van die lys L brei ons ons die oorspronklike lys $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ uit na 'n basis van V. ■

Gevolg 2.3.19 *As $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ 'n lineêr onafhanklike lys van n vektore in 'n n-dimensionele vektorruimte V is, dan is dit 'n basis.*

Bewys. Volgens Gevolgtrekking 2.3.18 kan ons $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ uitbrei tot 'n basis van V. Maar V het dimensie n, so die basis moet slegs n vektore bevat volgens Stelling 2.3.2 (Onveranderlikheid van Dimensie). Gevolglike het ons geen vektore bygevoeg nie, en ons oorspronklike lys is reeds 'n basis. ■

Voorbeeld 2.3.20 In Voorbeeld 2.2.7 het ons gewys dat die lys polinome

$$\mathbf{q}_0(x) := 1,\ \mathbf{q}_1(x) := x,\ \mathbf{q}_2(x) := 2x^2 - 1,\ \mathbf{q}_3(x) := 4x^3 - 3x$$

lineêr onafhanklik in Poly_3 is. Aangesien $\dim \mathrm{Poly}_3 = 4$, sien ons dat dit 'n basis vir Poly_3 is.

> In Oefening 2.1.5 het jy gewys dat $\mathbf{q}_0, \ldots, \mathbf{q}_3$ 'n basis vir Poly_3 is deur 'n 'brute krag' benadering. Hierdie nuwe metode is *verskillend*!

□

2.3.2 Oefeninge

1. Sif die lys vektore

$$\mathbf{v}_1 = (0,0,0), \qquad \mathbf{v}_2 = (1,0,-1), \qquad \mathbf{v}_3 = (1,2,3)$$
$$\mathbf{v}_4 = (3,4,5), \qquad \mathbf{v}_5 = (4,8,12), \qquad \mathbf{v}_6 = (1,1,0).$$

2. Laat V 'n vektorruimte van dimensie n wees. Besluit (en skryf jou besluit neer!) of die volgende bewerings waar of onwaar is. As dit waar is, bewys dit. Indien nie, gee 'n teenvoorbeeld.

- Enige lineêr onafhanklike lys vektore in V bevat hoogstens n vektore.
- Enige lys vektore wat V span bevat ten minste n vektore.

3. Voltooi die bewys van die volgende Lemma.

Lemma. Veronderstel dat V 'n vektorruimte van dimensie n is. Dan is enige lineêr onafhanklike lys van n vektore in V 'n basis vir V.

Bewys. Laat $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ 'n lineêr onafhanklike lys vektore in V wees.

Veronderstel dat $\mathcal{B}$ *nie* 'n basis vir V is nie.
Daarom span $\mathcal{B}$ nie V nie, want... (a)
Daarom bestaan daar $\mathbf{v} \in V$ sodanig dat ... (b)
Voeg nou $\mathbf{v}$ by die lys $\mathcal{B}$ om 'n nuwe lys te vorm, $\mathcal{B}' :=$ ... (c)
Die nuwe lys $\mathcal{B}'$ is lineêr onafhanklik omdat ... (d)
Dit is 'n teenstelling, omdat ... (e)
Dus $\mathcal{B}$ moet 'n basis vir V wees.

4. Gebruik Oefening 2.3.2.2(a) om aan te toon dat die lys matrikse in $\mathrm{Mat}_{2,2}$ vanaf Oefening 2.2.2 lineêr onafhanklik is.

5. In elke geval, gebruik die resultate uit Oefeninge 2.3.2.2 en 2.3.2.3 om te bepaal of $\mathcal{B}$ 'n basis vir V is:

- $V = \mathrm{Poly}_2$, $\mathcal{B} = \left\{2 + x^2,\ 1 - x,\ 1 + x - 3x^2,\ x - x^2\right\}$
- $V = \mathrm{Mat}_{2,2}$,
$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \right\}$$
- $V = \mathrm{Trig}_2$, $\mathcal{B} = \left\{\sin^2 x,\ \cos^2 x,\ 1 - \sin 2x,\ \cos 2x + 3\sin 2x\right\}$

6. Laat $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ 'n lineêr onafhanklike lys vektore in 'n vektorruimte V wees. Skryf neer of die volgende bewerings waar of onwaar is. As dit waar is, bewys dit. As dit onwaar is, gee 'n teenvoorbeeld. Wenk: Gebruik die definisie van lineêre onafhanklikheid.

- Die lys $\{\mathbf{u} + \mathbf{v},\ \mathbf{v} + \mathbf{w},\ \mathbf{u} + \mathbf{w}\}$ is lineêr onafhanklik.
- Die lys $\{\mathbf{u} - \mathbf{v},\ \mathbf{v} - \mathbf{w},\ \mathbf{u} - \mathbf{w}\}$ is lineêr onafhanklik.

7. Vir elkeen van die volgende, toon aan dat V 'n deelruimte van Poly_2 is, vind 'n basis vir V, en bereken $\dim V$.

- $V = \{p \in \mathrm{Poly}_2 : p(2) = 0\}$
- $V = \{p \in \mathrm{Poly}_2 : xp'(x) = p(x)\}$

2.4 Koördinaatvektore

Daar is 'n meer direkte manier om oor 'n basis te dink.

Stelling 2.4.1 Basisse gee koördinate. *'n Lys vektore $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, …, $\mathbf{e}_n$ in 'n vektorruimte V is 'n basis van V as en slegs as elke vektor $\mathbf{v} \in V$ op presies* een *manier as 'n lineêre kombinasie*

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \cdots + a_n\mathbf{e}_n \tag{2.4.1}$$

geskryf kan word. Dit is, vir elke $\mathbf{v} \in V$ bestaan *daar skalare a_1, a_2, …, a_n wat (2.4.1) bevredig en verder is hierdie skalare* uniek.

> Dit is belangrik om die wiskundige frase 'daar bestaan'n unieke X wat Y bevredig' te verstaan. Dit beteken twee dinge. Eerstens, daar *bestaan* 'n X wat Y bevredig. Tweedens, daar *geen ander* X wat Y bevredig nie.

> Ons noem die skalare $a_1, a_2, \ldots, a_n$ in (2.4.1) die *koördinate* van $\mathbf{v}$ in die basis $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$.

Bewys. $\Rightarrow$. Veronderstel dat die lys vektore $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, …, $\mathbf{e}_n$ 'n basis vir V vorm. Veronderstel $\mathbf{v} \in V$. Omdat die lys vektore V span, weet ons dat ons $\mathbf{v}$ as 'n lineêre kombinasie van vektore in die lys op ten minste een manier *kan* skryf,

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \cdots + a_n\mathbf{e}_n. \tag{2.4.2}$$

Ons moet wys dat dit die *enigste* manier is om $\mathbf{v}$ as 'n lineêre kombinasie van die vektore $\mathbf{e}_i$ uit te druk. Veronderstel ons het ook

$$\mathbf{v} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + \cdots + b_n\mathbf{e}_n. \tag{2.4.3}$$

Die verskil van die twee vergelykings lewer

$$\mathbf{0} = (a_1 - b_1)\mathbf{e}_1 + (a_2 - b_2)\mathbf{e}_2 + \cdots + (a_n - b_n)\mathbf{e}_n.$$

Omdat die lys vektore $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, …, $\mathbf{e}_n$ lineêr onafhanklik is, kom ons tot die gevolgtrekking dat

$$a_1 - b_1 = 0,\ a_2 - b_2 = 0,\ \cdots,\ a_n - b_n = 0.$$

Dit is, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, ensovoorts tot en met $a_n = b_n$ en daarom is (2.4.2) uniek.

$\Leftarrow$. Aan die ander kant, veronderstel dat elke vektor $\mathbf{v}$ as 'n unieke lineêre kombinasie

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \cdots + a_n\mathbf{e}_n$$

geskryf kan word. Die feit dat elke $\mathbf{v}$ as 'n lineêre kombinasie van $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, …, $\mathbf{e}_n$ geskryf *kan* word, beteken hulle span V. Ons moet steeds wys dat hulle lineêr onafhanklik is. So, veronderstel daar bestaan skalare b_1, b_2, …, b_n, sodat

$$b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + \cdots + b_n\mathbf{e}_n = \mathbf{0}. \tag{2.4.4}$$

Ons moet wys dat b_i almal nul moet wees. Ons weet reeds van *een* moontlike oplossing van (2.4.4) : stel elke $b_i = 0$. Maar ons weet ook dat elke vektor (spesifiek, die vektor $\mathbf{0}$) op presies een manier as 'n lineêre kombinasie van vektore $\mathbf{e}_i$ uitgedurk kan word. Daarom moet dit die enigste oplossing wees, i.e. ons vind dat $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$, en daarom is die lys vektore $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, …, $\mathbf{e}_n$ lineêr onafhanklik. ∎

Definisie 2.4.2 Laat $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ 'n basis vir vektorruimte V wees, en laat $\mathbf{v} \in V$. Skryf

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{b}_1 + a_2\mathbf{b}_2 + \cdots + \mathbf{a}_n\mathbf{b}_n\,.$$

Dan word die kolomvektor

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} := \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathrm{Col}_n$$

die **koördinaatvektor van v met betrekking tot basis $\mathcal{B}$** genoem. ◊

> Ek dui aan dat 'n kolleksie objekte 'n *lys* is (waar volgorde van belang is) en nie bloot 'n *versameling* nie (waar dit nie van belang is nie) deur van my eie tuisgemaakte simbole $\{\ldots\}$ gebruik te maak. 'n Basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ is 'n lys van vektore. Die volgorde van die vektore is van belang want dit affekteer die koördinaatvektor $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$.

Voorbeeld 2.4.3 Vind die koördinaatvektor van $\mathbf{p} = 2x^2 - 2x + 3$ met betrekking tot die basis $\mathcal{B} = \left\{1 + x, x^2 + x - 1, x^2 + x + 1\right\}$ van Poly_3.

Oplossing. Ons skryf $\mathbf{p}$ as 'n lineêre kombinasie van polinome van die basis $\mathcal{B}$:

$$2x^2 - 2x + 3 = -4(1 + x) - \frac{5}{2}(x^2 + x - 1) + \frac{9}{2}(x^2 + x + 1)$$

$$[\mathbf{p}]_{\mathcal{B}} = -4 - \frac{5}{2}\frac{9}{2}$$

□

Verstaanpunt 2.4.4 Bevestig dit!

Voorbeeld 2.4.5 Vind die koördinaatvektore van $\mathbf{v}$ en $\mathbf{w}$ in Figuur 2.4.6 met betrekking tot die basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$.

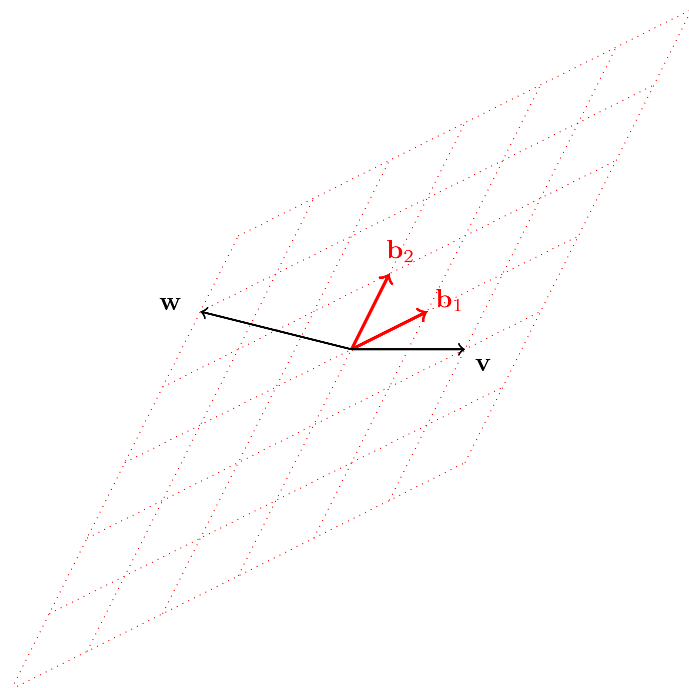
Oplossing. Deur inspeksie sien ons dat $\mathbf{v} = 2\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2$, sodat

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} := \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Ook deur inspeksie sien ons dat $\mathbf{w} = -3\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2$, sodat

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

□



Figuur 2.4.6: Die basis B vir $\mathbb{R}^2$.

Voorbeeld 2.4.7 Vind die koördinaatvektor van die funksie $\mathbf{f}$ gegee deur

$$\mathbf{f}(x) = \sin^2 x - \cos^3 x$$

met betrekking tot die standaard basis

$$\mathcal{S} = \{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos 3x, \sin 3x\}$$

van Trig_3.

Oplossing. Met die sommeringsformules vir sin en cos soos in Oefening 1.6.20 bereken ons

$$\sin^2 x - \cos^3 x = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\cos x - \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{4}\cos 3x.$$

Gevolglik

$$[\mathbf{f}]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \end{bmatrix}$$

□

Verstaanpunt 2.4.8 Bevestig hierdie berekeninge!

Hulpstelling 2.4.9 *Laat $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ 'n basis vir 'n vektorruimte V wees. Dan het ons dat vir alle vektore $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ en alle skalare k*

1. $[\mathbf{v} + \mathbf{w}]_{\mathcal{B}} = [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} + [\mathbf{w}]_{\mathcal{B}}$

2. $[k\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = k[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$

Bewys. (a) Veronderstel dat

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \cdots + a_n\mathbf{e}_n$$

en

$$\mathbf{w} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + \cdots + b_n\mathbf{e}_n \,.$$

Dan, deur van die re{\"e}ls van 'n vektorruimte gebruik te maak, bereken ons

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (a_1 + b_1)\mathbf{e}_1 + (a_2 + b_2)\mathbf{e}_2 + \cdots + (a_n + b_n)\mathbf{e}_n \,.$$

Van hier af lees ons dat

$$[\mathbf{v} + \mathbf{w}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{bmatrix}.$$

Die bewys van (b) is soortgelyk. ■

Oefeninge

1. Bewys Lemma 2.4.9(b) in die geval waar V twee-dimensioneel is, sodat $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. Verduidelik elke stap met die toepaslike reël van 'n vektorruimte.

2. Laat $\mathcal{B}$ die volgende basis van $\text{Mat}_{2,2}$ wees:

$$\mathsf{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathsf{B}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \mathsf{B}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathsf{B}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Bereken $[\mathsf{A}]_{\mathcal{B}}$, waar

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

3. In Oefening 2.3.2.5 is jy gevra om 'n basis $\mathcal{B}$ vir die vektorruimte

$$V := \{p \in \text{Poly}_2 : p(2) = 0\}$$

te bepaal. Beskou $p(x) = x^2 + x - 6$.

- Toon aan dat $p \in V$.
- Bereken die koördinaatvektor van p met betrekking tot jou basis $\mathcal{B}$. Met ander woorde, bereken $[p]_{\mathcal{B}}$.

2.5 Basisverandering

2.5.1 Koördinaatvektore verskil in verskillende basisse

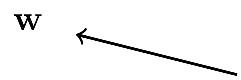
Veronderstel dat $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ en $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\}$ twee verskillende basisse vir $\mathbb{R}^2$ is, geïllustreer soos volg:

(a) Die basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$

(b) Die basis $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\}$.

Figuur 2.5.1: Twee verskillende basisse $\mathbb{R}^2$

Veronderstel ons word 'n vektor $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ gegee:



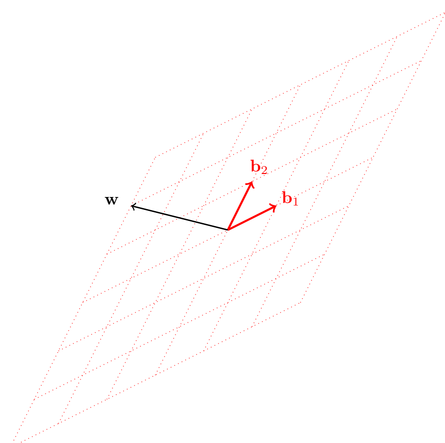
Ons wil die koördinaatvektor van *dieselfde* vektor $\mathbf{w}$ relatief tot twee verskillende basisse $\mathcal{B}$ en $\mathcal{C}$ bereken.

Met hierdie spesifieke vektor $\mathbf{w}$, uit Figuur 2.5.1(a) sien ons dat in die basis $\mathcal{B}$ het ons

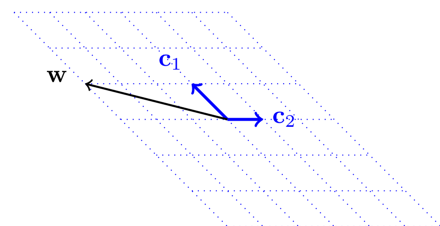
$$\mathbf{w} = -3\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 \qquad \therefore\ [\mathbf{w}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}. \tag{2.5.1}$$

Aan die anderkant, in basis $\mathcal{C}$ het ons

$$\mathbf{w} = \mathbf{c}_1 - 3\mathbf{c}_2 \qquad \therefore\ [\mathbf{w}]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}. \tag{2.5.2}$$



Figuur 2.5.2: $\mathbf{w} = -3\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2$



Figuur 2.5.3: $\mathbf{w} = \mathbf{c}_1 - 3\mathbf{c}_2$

So *dieselfde* vektor $\mathbf{w}$ het verskillende koördinaatvektore $[\mathbf{w}]_{\mathcal{B}}$ en $[\mathbf{w}]_{\mathcal{C}}$ relatief tot die basisse $\mathcal{B}$ en $\mathcal{C}$!

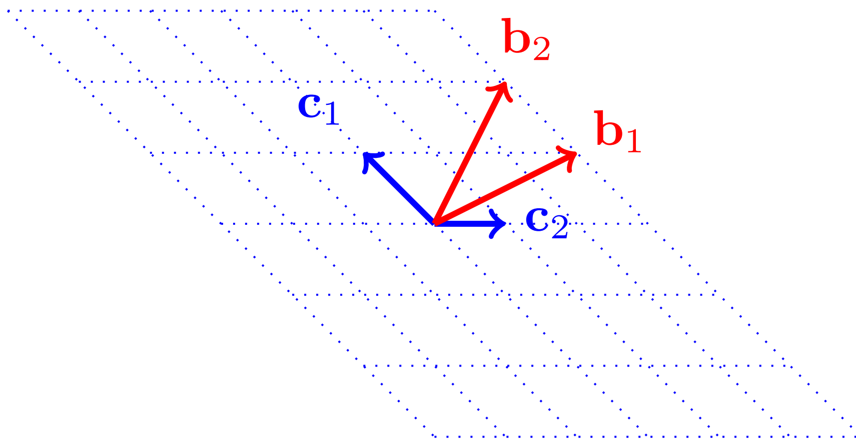
2.5.2 Omskakeling van een basis na 'n ander

Veronderstel nou ons het slegs $[\mathbf{w}]_{\mathcal{B}}$, die koördinaatvektor van $\mathbf{w}$ in basis $\mathcal{B}$. Met ander woorde, veronderstel ons weet net dat

$$[\mathbf{w}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix},$$

dit is, $\mathbf{w} = -3\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2$. Hoe kan ons $[\mathbf{w}]_{\mathcal{C}}$, die koördinaatvektor van $\mathbf{w}$ in die basis $\mathcal{C}$ bereken?

Die beste benadering is om elke vektor in $\mathcal{B}$ as 'n lineêre kombinasie van die basisvektore in $\mathcal{C}$ uit te druk. In die volgende figuur word die vektore $\mathbf{b}_1$ en $\mathbf{b}_2$ uitgebeeld teen die agtergrond van die basis $\mathcal{C}$:



Ons lees af dat:

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{c}_1 + 3\mathbf{c}_2 \tag{2.5.3}$$
$$\mathbf{b}_2 = 2\mathbf{c}_1 + 3\mathbf{c}_2 \tag{2.5.4}$$

Daarom bereken ons:

$$\begin{aligned}\mathbf{w} &= -3\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 \\ &= -3(\mathbf{c}_1 + 3\mathbf{c}_2) + 2(2\mathbf{c}_1 + 3\mathbf{c}_2) \\ &= \mathbf{c}_1 - 3\mathbf{c}_2\end{aligned}$$

Hiervan lees ons af dat

$$[\mathbf{w}]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} \tag{2.5.5}$$

Wat die korrekte antwoord is, soos ons weet uit (2.5.2).

Hierdie berekening kan in terme van matrikse uitgedruk word.

Definisie 2.5.4 Laat $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ en $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n\}$ basisse vir 'n vektorruimte V wees. Die **basisomskakelingsmatriks van $\mathcal{B}$ na $\mathcal{C}$** is die $n \times n$-matriks waarvan die kolomme die koördinaatvektore $[\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}}, \ldots, [\mathbf{b}_n]_{\mathcal{C}}$ is:

$$\mathsf{P}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} := \left[\begin{bmatrix} \\ \mathbf{b}_1 \\ \\ \end{bmatrix}_{\mathcal{C}} \begin{bmatrix} \\ \mathbf{b}_2 \\ \\ \end{bmatrix}_{\mathcal{C}} \cdots \begin{bmatrix} \\ \mathbf{b}_n \\ \\ \end{bmatrix}_{\mathcal{C}} \right].$$

$\lozenge$

Voorbeeld 2.5.5 In die deurlopende voorbeeld, sien ons uit (2.5.3) en (2.5.4) dat

$$[\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{b}_2]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Daarom is die basisomskakelingsmatriks van $\mathcal{B}$ na $\mathcal{C}$

$$\mathsf{P}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

$\square$

Voordat ons verder gaan, hersien ons 'n aspek van matriksvermenigvuldiging. Veronderstel ons groepeer m kolomvektore saam om 'n matriks te vorm:

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{C}_1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathrm{C}_2 \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} \mathrm{C}_m \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

(Ons basisomskakelingsmatriks $\mathsf{P}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ is so gevorm.) Dan word die produk van hierdie matriks met 'n kolomvektor soos volg bereken:

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{C}_1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathrm{C}_2 \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} \mathrm{C}_m \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

(For instance, our change-of-basis matrix $\mathsf{P}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ was formed in this way.) Then the product of this matrix with a column vector can be computed as follows:

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{C}_1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathrm{C}_2 \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} \mathrm{C}_m \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} \mathrm{C}_1 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} \mathrm{C}_2 \end{bmatrix} + \cdots + a_m \begin{bmatrix} \mathrm{C}_m \end{bmatrix}. \tag{2.5.6}$$

Verstaanpunt 2.5.6 Bewys die bostaande formule!

Ons kan nou die volgende stelling bewys.

Stelling 2.5.7 Basisomskakeling. *Veronderstel dat $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ en $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n\}$ basisse vir 'n vektorruimte V is, en laat $\mathsf{P}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ die basiskomskakelingsmatriks van $\mathcal{B}$ na $\mathcal{C}$ wees. Dan, vir alle vektore $\mathbf{v}$ in V,*

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} = \mathsf{P}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}. \tag{2.5.7}$$

Bewys. Laat $\mathbf{v} \in V$. Brei $\mathbf{v}$ uit in die basis $\mathcal{B}$:

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{b}_1 + a_2\mathbf{b}_2 + \cdots + a_n\mathbf{b}_n, \text{i.e. } [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

Dan,

$$\begin{aligned} {}_{\mathcal{C}} &= [a_1\mathbf{b}_1 + \cdots + a_n\mathbf{b}_n]_{\mathcal{C}} \\ &= a_1[\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}} + \cdots + a_n[\mathbf{b}_n]_{\mathcal{C}} && \text{(Lemma 2.4.9)} \\ &= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} \mathbf{b}_n \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} && (2.5.6) \\ &= \mathsf{P}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}\,. \end{aligned}$$

■

Voorbeeld 2.5.8 In ons deurlopende voorbeeld, sê die stelling dat vir *enige* vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$,

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}.$$

Dit geld dan ook vir ons vektor $\mathbf{w}$, waarvan die koördinate in die basis $\mathbf{B}$

is:

$$[\mathbf{w}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

So in hierdie geval sê die stelling dat

$$[\mathbf{w}]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

wat met ons vorige berekening (2.5.5) ooreenstem! □

2.5.3 Oefeninge

1. Dit is 'n voortsetting van Oefening 2.4.2. Beskou die volgende twee basisse vir $\mathrm{Mat}_{2,2}$:

$$\mathcal{B} = \left\{ \mathrm{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 11 \end{bmatrix}, \mathrm{B}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \mathrm{B}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathrm{B}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{C} = \left\{ \mathrm{C}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathrm{C}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathrm{C}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathrm{C}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right\}$$

(a) Bereken die basisomskakelingmatrikse $\mathsf{P}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ en $\mathsf{P}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$.

(b) Bereken $[\mathsf{A}]_{\mathcal{B}}$ en $[\mathsf{A}]_{\mathcal{C}}$, waar

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

(c) Gaan na dat $[\mathsf{A}]_{\mathcal{C}} = \mathsf{P}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[\mathsf{A}]_{\mathcal{B}}$ en dat $[\mathsf{A}]_{\mathcal{B}} = \mathsf{P}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}[\mathsf{A}]_{\mathcal{C}}$.

2. Bereken die basisomskakelingmatriks $\mathsf{P}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{S}}$ van die standaardbasis

$$\mathcal{S} = \{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x\}$$

van Trig_2 na die basis

$$\mathcal{B} = \left\{1, \cos x, \sin x, \cos^2 x, \sin^2 x\right\}.$$

Hoofstuk 3

Matrikshersiening

Kom ons onthou 'n paar goed oor matrikse en stel vas watter notasie ons gaan gebruik.

'n $n \times m$-*matriks* A is maar net 'n reghoekige skikking van getalle, met n rye en m kolomme:

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} \mathsf{A}_{11} & \mathsf{A}_{12} & \cdots & \mathsf{A}_{1m} \\ \mathsf{A}_{21} & \mathsf{A}_{22} & \cdots & \mathsf{A}_{2m} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathsf{A}_{n1} & \mathsf{A}_{n2} & \cdots & \mathsf{A}_{nm} \end{bmatrix}$$

Ek sal altyd matrikse in *'sans serif'*-lettertipe skryf, bv. A. Dit is moeilik om in handgeskrewe teks 'van lettertipe te verander,' maar ek moedig jou aan om ten minste die letters A, B, C, ens vir matrikse te reserveer, en om S, T, etc. vir lineêre afbeeldings te gebruik!

Twee $n \times m$ matrikse A en B kan bymekaargetel word, om n' nuwe $n \times m$ matriks $\mathsf{A} + \mathsf{B}$ te verkry:

$$(\mathsf{A} + \mathsf{B})_{ij} := \mathsf{A}_{ij} + \mathsf{B}_{ij}$$

Daar is die *nul* $n \times m$-*matriks*:

$$\mathsf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Jy kan ook 'n $n \times m$-matriks A met 'n skalaar k vermenigvuldig, om 'n nuwe $n \times m$ matriks $k\mathsf{A}$ te verkry:

$$(k\mathsf{A})_{ij} := k\mathsf{A}_{ij}$$

Hulpstelling 3.0.1

1. *Saam met hierdie bewerkings is die versameling* $\mathrm{Mat}_{n,m}$ *van alle* $n \times m$ *matrikse 'n vektorruimte.*

2. *Die dimensie van* Mat_{nm} *is* nm, *met die matrikse*

$$\mathsf{E}_{ij}, i = 1 \ldots n,\ j = 1 \ldots m$$

as basis, elk met 'n 1 *in die* i*de ry en* j*de kolom en nulle orals anders.*

Bewys. Die bewys word aan die leser as 'n oefening oorgelaat. ∎

Voorbeeld 3.0.2 $\mathrm{Mat}_{2,2}$ het die basis

$$\mathsf{E}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathsf{E}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathsf{E}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathsf{E}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

□

Gewoonlik is A 'n matriks, en is A_{ij} die element van die matriks by posisie (i, j). Maar nou is E_{ij} 'n matriks in eie reg! Sy element by posisie (k, l) sal geskryf word as $(\mathsf{E}_{ij})_{kl}$. Ek hoop dit is nie te verwarrend nie. Ons kan 'n elegante formule vir die elemente van E_{ij} skryf met die Kronecker-delta-simbool:

$$(\mathsf{E}_{ij})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl} \tag{3.0.1}$$

Voorbeeld 3.0.3 Ons skryf Col_n vir die vektorruimte $\mathrm{Mat}_{n,1}$ van n-dimensional *kolomvektore*, en ons sal die standaard basisvektore as E_{i1} van Col_n skryf, of nog eenvoudiger as $\mathbf{e}_i$:

$$\mathbf{e}_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \mathbf{e}_n := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vektore in Col_n sal in vetdruk, sans-serif geskryf word, bv. $\mathbf{v} \in \mathrm{Col}_n$. □

\subsection{Matriksvermenigvuldiging}

Toegerus met hierdie bewerkings, vorm die versameling $\mathrm{Mat}_{n,m}$ van alle $n \times m$ matrikse 'n vektorruimte (sien Voorbeeld 1.4.14), met dimensienm UN-COMMENT! Ons skryf Col_n vir die vektorruimte $\mathrm{Mat}_{n,1}$ van n-dimensionele *kolomvektore.*

Die belangrikste bewerking is *matriksvermenigvuldiging.* 'n $n \times k$-matriks A kan van regs met 'n $k \times m$-matriks B vermenigvuldig word om 'n $n \times m$-matriks AB te kry,

deur die inskrywings van AB as

$$(\mathsf{AB})_{ij} := \mathsf{A}_{i1}\mathsf{B}_{1j} + \mathsf{A}_{i2}\mathsf{B}_{2j} + \cdots + \mathsf{A}_{ik}\mathsf{B}_{kj}$$

te definieer.

Stelling 3.0.4 *Die bostaande bewerkings op matrikse bevredig die volgende reëls presies wanneer die somme en produkte goed-gedefinieer is:*

1. $(\mathsf{A} + \mathsf{B})\mathsf{C} = \mathsf{AC} + \mathsf{BC}$
2. $\mathsf{A}(\mathsf{B} + \mathsf{C}) = \mathsf{AB} + \mathsf{AC}$
3. $(k\mathsf{A})\mathsf{B} = \mathsf{A}(k\mathsf{B}) = k(\mathsf{AB})$
4. $(\mathsf{AB})\mathsf{C} = \mathsf{A}(\mathsf{BC})$

Bewys. Die bewyse van (1) - (3) is roetinewerk wat jy hopelik voorheen al gedoen het. Kom ons bewys (4), om te oefen om Σ-notasie te gebruik! Veronderstel A, B en C het groottes $n \times k$, $k \times r$ en $r \times m$ onderskeidelik, sodat die matriksprodukte sinmaak. Dan:

$$
\begin{aligned}
((\mathsf{AB})\mathsf{C})_{ij} &= \sum_{p=1}^{r} (\mathsf{AB})_{ip} \mathsf{C}_{pj} \\
&= \sum_{p=1}^{r} \left(\sum_{q=1}^{k} \mathsf{A}_{iq} \mathsf{B}_{qp} \right) \mathsf{C}_{pj} \\
&= \sum_{p,q} \mathsf{A}_{iq} \mathsf{B}_{qp} \mathsf{C}_{pj} \\
&= \sum_{q=1}^{k} \mathsf{A}_{iq} \left(\sum_{p=1}^{r} \mathsf{B}_{qp} \mathsf{C}_{pj} \right) \\
&= \sum_{q=1}^{k} \mathsf{A}_{iq} (\mathsf{BC})_{qj} \\
&= (\mathsf{A}(\mathsf{BC}))_{ij}.
\end{aligned}
$$

■

Ek hoop nie die Σ-notasie in die bostaande bewys is te verwarrend nie! Kom ek skryf presies dieselfde bewys uit *sonder* Σ-notasie, in die eenvoudige geval waar A, B en C almal 2×2-matrikse is en ons wil die inskrywing by posisie 11 uitwerk.

$$
\begin{aligned}
((\mathsf{AB})\mathsf{C})_{11} &= (\mathsf{AB})_{11}\mathsf{C}_{11} + (\mathsf{AB})_{12}\mathsf{C}_{21} \\
&= (\mathsf{A}_{11}\mathsf{B}_{11} + \mathsf{A}_{12}\mathsf{B}_{21})\mathsf{C}_{11} + (\mathsf{A}_{11}\mathsf{B}_{12} + \mathsf{A}_{12}\mathsf{B}_{22})\mathsf{C}_{21} \\
&= \mathsf{A}_{11}\mathsf{B}_{11}\mathsf{C}_{11} + \mathsf{A}_{12}\mathsf{B}_{21}\mathsf{C}_{11} + \mathsf{A}_{11}\mathsf{B}_{12}\mathsf{C}_{21} + \mathsf{A}_{12}\mathsf{B}_{22}\mathsf{C}_{21} \\
&= \mathsf{A}_{11}(\mathsf{B}_{11}\mathsf{C}_{11} + \mathsf{B}_{12}\mathsf{C}_{21}) + \mathsf{A}_{12}(\mathsf{B}_{21}\mathsf{C}_{11} + \mathsf{B}_{22}\mathsf{C}_{21}) \\
&= \mathsf{A}_{11}(\mathsf{BC})_{11} + \mathsf{A}_{12}(\mathsf{BC})_{21} \\
&= (\mathsf{A}(\mathsf{BC}))_{11}.
\end{aligned}
$$

Verstaan jy nou die Σ-notasie-bewys? Die kritieke stap (om van die tweede tot die vierde lyn te vorder) word *omruil van die sommeringsvolgorde* genoem.

Die *transponering* van 'n $n \times m$-matriks A is die $m \times n$-matriks A^T waarvan die inskrywings gegee word deur

$$(\mathsf{A}^T)_{ij} := \mathsf{A}_{ji}.$$

Bibliography