W214 Lineêre Algebra

W214 Lineêre Algebra

Bruce Bartlett

Nota aan die student

Jou tweede ontmoeting met lineêre algebra lê tans voor jou. In die eerste jaar is daar gefokus op stelsels van lineêre vergelykings, matrikse en hul determinante. Hierdie kursus (Wiskunde 214) keer terug na hierdie onderwerpe, maar met 'n meer abstrakte, wiskundige aanslag.

Moenie bang wees vir *abstraksie* nie. Dit behels eenvoudig om van oorbodige besonderhede ontslae te raak en om slegs die mees belangrike kenmerke van 'n probleem in ag te neem. Dit help jou om die probleem beter te verstaan. Daar is minder om jou te verwar! Verder, as jy 'n ander probleem sou teëkom wat op eerste oogopslag anders lyk, maar dieselfde belangrike kenmerke as die oorskpronklike het, dan kan jy die probleem op dieselfde manier verstaan. Dít maak abstraksie baie kragtig.

In die studie van abstrakte wiskunde gebruik ons die taal van *definisies*, *stellings* en *bewyse*. Om aan hierdie denkwyse gewoond te raak (en abstrakte wiskundige denke te ontwikkel) kan aanvanklik oorweldigend voel. Maar volhard! Eendag sal jy dit 'snap' en jy sal besef dat dit heelwat eenvoudiger is as wat jy jou voorgestel het.

'n Mens kan nie wiskunde soos 'n roman lees nie. Jy het 'n *pen en notaboekie* byderhand nodig en jy sal aktief by die materiaal *betrokke* moet raak. As jy byvoorbeeld 'n definisie teëkom, begin deur dit in jou notaboekie neer te skryf. Net die blote skryf daarvan kan terapeuties wees!

As jy 'n uitgewerkte voorbeeld behandel, skryf die voorbeeld self uit. Miskien probeer die voorbeeld vir jou wys dat A gelyk aan B is. Vra jouself: Verstaan ek regtig wat 'A' beteken? En wat 'B' beteken? Dan eers is jy gereed om te oorweeg of A gelyk is aan B!

Baie sterkte met hierdie nuwe fase van jou wiskundige opleiding. Geniet die reis!

Inhoudsopgawe

Hoofstuk 1

Abstrakte vektorruimtes

1.1 Inleiding

1.1.1 Drie verskillende versamelings

Ons begin met 'n speletjie. In wiskunde is 'n *versameling* X 'n kolleksie van onderskeibare voorwerpe. Hierdie voorwerpe word die *elemente* van X genoem.

Ek gaan vir jou drie verskillende versamelings wys en dan moet jy sê watter eienskappe hulle in gemeen het.

Die eerste versameling, A, word gedefinieer as die versameling van alle geordende pare (x, y), waar x en y reële getalle is.

Kom ons stop hier vir 'n oomblik en vertaal die definisie van Afrikaans na wiskundige simbole. Die vertaling is:

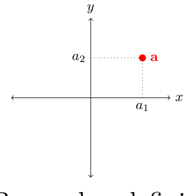
$$A := \{(a_1,\, a_2) : a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}. \tag{1.1.1}$$

Die $:=$ staan vir 'is gedefinieer as'. Die $\{$ en $\}$ simbole staan vir 'die versameling van alle'. Die enkele dubbelpunt : staan vir 'waar' of 'sodat'. Die komma tussen a en b staan vir 'en'. Die $\in$ staan vir "'n element van". En $\mathbb{R}$ staan vir die versameling van alle reële getalle.

Veels geluk! — jy is besig om die taal van wiskunde te leer!

'n Element van A is 'n willekeurige paar reële getalle $\mathbf{a} = (a_1,\, a_2)$. Byvoorbeeld, $(1,\, 2) \in A$ en $(3.891,\, e^{\pi})$ is elemente van A. Let ook op dat ek 'n vetdruk $\mathbf{a}$ gebruik om na 'n element van A te verwys. Dit is sodat ons $\mathbf{a}$ kan onderskei van sy *komponente* a_1 en a_2, wat net gewone getalle is (nie elemente van A nie).

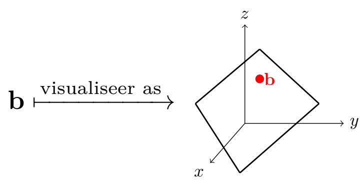
Ons kan 'n element $\mathbf{a}$ van A visualiseer as 'n punt in die Cartesiese vlak waarvan die x-koördinaat a_1 en die y-koördinaat a_2 is:

$\mathbf{a} \xmapsto{\text{visualiseer as}}$ 

Die tweede versameling, B, word gedefinieer as die versameling van alle geordende reële drietalle $(u_1,\, u_2,\, u_3)$, wat $u_1 - u_2 + u_3 = 0$ bevredig. In wiskundige simbole is dit soos volg:

$$B := \{(b_1,\, b_2,\, b_3) : b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R} \text{ en } b_1 - b_2 + b_3 = 0\}. \tag{1.1.2}$$

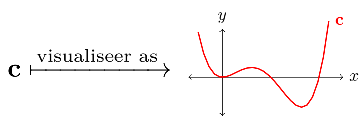
Byvoorbeeld, $(2, 3, 1) \in B$, maar $(1, 1, 1) \notin B$. Ons kan 'n element $\mathbf{b}$ in B visualiseer as 'n punt in die vlak in 3-dimensionele ruimte wat deur die vergelyking $x - y + z = 0$ gedefinieer word:



Die derde versameling, C, is die versameling van alle polinome van graad 4 of minder. Omgesit in wiskundige simbole,

$$C := \{\text{polinome met graad } \leq 4\}. \tag{1.1.3}$$

Onthou dat die *graad* van 'n polinoom die grootse mag van x is wat (met 'n nie-nul koëffisiënt) daarin verskyn. Byvoorbeeld, $\mathbf{c} = x^4 - 3x^3 + 2x^2$ is 'n vierdegraadse polinoom en die polinoom $\mathbf{p} = 2x^3 + \pi x$ het 'n graad van 3. So $\mathbf{c}$ en $\mathbf{p}$ is elemente van C. Maar $\mathbf{r} = 8x^5 - 7$ en $\mathbf{s} = \sin(x)$ is nie elemente van C nie. Ons kan 'n element $\mathbf{c} \in C$ (i.e. 'n vierdegraadse polinoom) met sy *grafiek* visualiseer. Byvoorbeeld, die polinoom $\mathbf{c} = x^4 - 3x^3 + 2x^2 \in C$ word soos volg gevisualiseer:



Daar het jy dit. Ek het drie versamelings definieer: A, B en C, en ek het verduidelik hoe elkeen gevisualiseer kan word. Die drie versamelings lyk aanvanklik redelik verskillend. Elemente van A is willekeurige punte in $\mathbb{R}^2$. Elemente van B is punte in $\mathbb{R}^3$ wat 'n sekere vergelyking bevredig. Elemente van C is almal polinome.

Watter kenmerke het hierdie versamelings in gemeen?

1.1.2 Gedeelde kenmerke van die versamelings

Ek wil fokus op twee kenmerke wat versamelings in A, B en C in gemeen het.

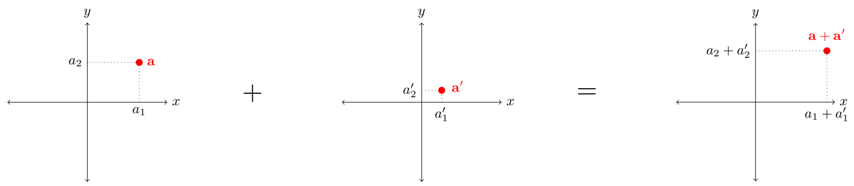
1.1.2.1 Optelling

Eerstens het al drie hierdie versamelings 'n natuurlike *optellingsbewerking*. Ons kan twee elemente in 'n versameling bymekaar tel om 'n derde element te kry.

In Versameling A kan ons twee elmente $\mathbf{a} = (a_1,\, a_2)$ en $\mathbf{a}' = (a_1',\, a_2')$ bymekaar tel deur hulle onderskeie komponente bymekaar te tel om 'n nuwe element $\mathbf{a} + \mathbf{a}' \in A$ te vorm:

$$\underbrace{(a_1,\, a_2)}_{\mathbf{a}} + \underbrace{(a_1',\, a_2')}_{\mathbf{a}'} := \underbrace{(a_1 + a_1',\, a_2 + a_2')}_{\mathbf{a}+\mathbf{a}'} \tag{1.1.4}$$

Byvoorbeeld, $(1,\, 3) + (2,\, -1.6) = (3,\, 1.4)$. Ons kan die optellingsbewerking as volg visualiseer:



Ons kan 'n soortgelyke benadering in versameling B volg. Versonderstel dat ons het twee elemente $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ en $\mathbf{b}' = (b_1', b_2', b_3')$ van B het. Let daarop dat, omdat $\mathbf{b} \in B$, bevredig $\mathbf{b}$ se komponente die vergelyking $b_1 - b_2 + b_3 = 0$. So bevredig die komponente van b' ook $b_1' - b_2' + b_3' = 0$. Ons kan $\mathbf{b}$ en $\mathbf{b}'$ by mekaar tel om 'n nuwe element $\mathbf{b} + \mathbf{b}'$ van B te kry, deur hulle komponente soos voorheen by mekaar tel:

$$\underbrace{(b_1, b_2, b_3)}_{\mathbf{b}} + \underbrace{(b_1', b_2', b_3')}_{\mathbf{b}'} := \underbrace{(b_1 + b_1', b_2 + b_2', b_3 + b_3')}_{\mathbf{b}+\mathbf{b}'} \tag{1.1.5}$$

Ons moet hier versigtig wees. Hoe weet ons dat die uitdrukking aan die regterkant regtig 'n element van B is? Ons moet seker maak dat dit die vergelyking 'die eerste komponent minus die tweede komponent plus die derde komponent is gelyk aan nul' bevredig. Kom ons doen dit formeel:

$$\begin{aligned}(\mathbf{b}+\mathbf{b}')_1 - (\mathbf{b}+\mathbf{b}')_2 + (\mathbf{b}+\mathbf{b}')_3 &= (b_1 + b_1') - (b_2 + b_2') + (b_3 + b_3')\\ &= (b_1 - b_2 + b_3) + (b_1' - b_2' + b_3')\\ &= 0 + 0\\ &= 0.\end{aligned}$$

Ons kanhierdie optellingsbewerking in B op dieselfde manier as A visualiseer.

Daar is ook 'n optellingsbewerking in die versameling C. Ons kan twee polinome algebraïes bymekaartel deur hulle ooreenkomstige koëffisiënte bymekaar te tel:

$$\begin{aligned}&[c_4x^4 + c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x^1 + c_0] + [d_4x^4 + d_3x^3 + d_2x^2 + d_1x^1 + d_0]\\ &:= (c_4 + d_4)x^4 + (c_3 + d_3)x^3 + (c_2 + d_2)x^2 + (c_1 + d_1)x^1 + (c_0 + d_0)\end{aligned} \tag{1.1.6}$$

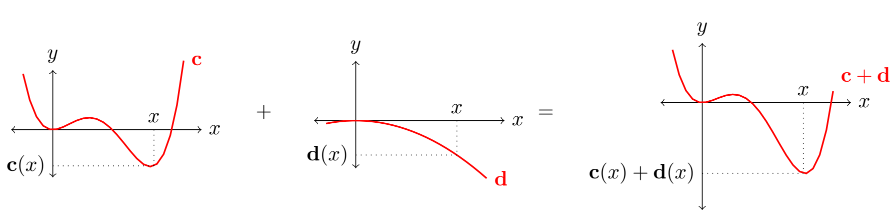
Byvoorbeeld,

$$[2x^4 + x^2 - 3x + 2] + [2x^3 - 7x^2 + x] = 2x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 2x + 2.$$

Daar is nog 'n manier om aan die optelling van polinome te dink. Elke polinoom $\mathbf{c}$ kan gesien word as 'n *funksie*, in die sin dat ons x met enige waarde in die polinoom $\mathbf{c}$ kan vervang (ons sê dat ons die polinomm by hierdie waarde uitwerk of *evalueer*) en dit sal 'n waarde $\mathbf{c}(x)$ voortbring. Byvoorbeeld, as $\mathbf{c}(x) = 3x^2 - 1$, dan is $\mathbf{c}(2) = 11$. As ons polinome as funksies beskou, dan kan ons aan die som $\mathbf{c} + \mathbf{d}$ van twee polinome dink as 'n nuwe funksie wat, wanneer 'n getal x invervang word, dit die waarde $\mathbf{c}(x) + \mathbf{d}(x)$ teruggee. Wiskundig geskryf, is

$$(\mathbf{c} + \mathbf{d})(x) := \mathbf{c}(x) + \mathbf{d}(x) \tag{1.1.7}$$

Deur so hieraan te dink, kan ons die grafiek van $\mathbf{c} + \mathbf{d}$ as die som van die grafieke van $\mathbf{c}$ en $\mathbf{d}$ voorstel:



1.1.2.2 Nul-element

In al drie versamelings A, B en C, is daar 'n spesifieke element (die *nul-element*) $\mathbf{0}$ wat, as dit by 'n ander element getel word, dit daardie element onveranderd laat.

In A word die nul-element $\mathbf{0}$ definieer deur

$$\mathbf{0} := (0, 0) \in A. \tag{1.1.8}$$

Wanneer jy hierdie punt by 'n ander punt $(a_1,\, a_2) \in A$ tel, gebeur niks nie!

$$(0,\, 0) + (a_1,\, a_2) = (a_1,\, a_2).$$

Moenie die nul-element $\mathbf{0} \in A$ met die reële getal nul ($0 \in \mathbb{R}$) verwar nie. Dit is nog 'n rede hoekom ek vetdruk gebruik! (Jy kan elemente van A onderstreep om die onderskeid te tref.)

Die element $(0, 0, 0) \in B$ is die nul-element $\mathbf{0}$ in B. As jy dit by 'n ander punt $(u_1, u_2, u_3) \in B$ tel, gebeur niks nie!

$$(0,\, 0,\, 0) + (u_1,\, u_2,\, u_3) = (u_1,\, u_2,\, u_3).$$

In C is die *nul-polinoom* die nul-element $\mathbf{0}$. Algebraïes is dit die vierdegraadse polinoom waarvan die koëffisiënte almal nul is:

$$\mathbf{0} = 0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0 \tag{1.1.9}$$

As ons aan die polinoom as 'n funksie dink, dan is die nul-polinoom $\mathbf{0}$ die funksie wat vir alle waardes van x nul is, i.e. $\mathbf{0}(x) = 0$ vir alle x. Hoe ons ookal daaraan dink, as ons die nul-polinoom by 'n ander polinoom tel, gebeur niks nie!

$$\begin{aligned} &[0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0] + [c_4x^4 + c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0] \\ &\qquad = [c_4x^4 + c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0] \end{aligned}$$

1.1.2.3 Skalaarvermenigvuldiging

Die laaste kenmerk wat die versamelings A, B en C in gemeen het, is dat die elemente van elkeen met 'n reële getal *vermenigvuldig* kan word en steeds in die versameling sal wees.

Byvoorbeeld, as $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ 'n elment van A is, dan kan ons dit met 'n willekeurige reële getal, sê maar 9, vermenigvuldig, om 'n nuwe element $9 \cdot a$ van A te kry. Hierdie vermenigvuldiging word komponentsgewys gedoen:

$$9 \cdot (a_1,\, a_2) := (9a_1,\, 9a_2). \tag{1.1.10}$$

In die algemeen, as $k \in \mathbb{R}$ enige reële getal is, dan kan ons enige element $\mathbf{a} \in A$ met k vermenigvuldig om 'n nuwe element $k \cdot \mathbf{a} \in A$ te kry deur elke komponent van $\mathbf{a}$ met k te vermenigvuldig:

$$\underbrace{k.(a_1,\, a_2)}_{\text{Skalaarvermenigvuldiging}} := (\underbrace{ka_1}_{\text{Vermenigvuldig twee getalle}},\, \underbrace{ka_2})$$

Wees versigtig om te onderskei tussen skalaarvermenigvuldiging $k.\mathbf{a}$ (aangedui met .) en gewone vermenigvuldiging van reële getalle ka_1 (aangedui sonder enige simbool; die twee simbole word bloot langs mekaar geplaas). Later gaan ons die wiskundige konvensie volg en ophou om die $\cdot$ eksplisiet uit te skryf — wees gewaarsku!

Visueel *skaleer* die vermenigvuldigingsbewerking $\mathbf{a}$ met 'n faktor van k. Dit is hoekom ons dit *skalaarvermenigvuldiging* noem.

Daar is 'n soortgelyke skalaarvermenigvuldigingsbewerking in B:

$$k(u_1, u_2, u_3) := (ku_1, ku_2, ku_3) \tag{1.1.11}$$

Daar is ook 'n skalaarvermenigvuldigingsbewerking in C. Ons vermenigvuldig elke koëffisient van 'n polinoom $\mathbf{c} \in C$ met k:

$$k \cdot [c_4x^4 + c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0] = kc_0x^4 + kc_3x^3 + kc_2x^2 + kc_1x + kc_0 \tag{1.1.12}$$

As ons aan 'n polinoom $\mathbf{c}$ as 'n funksie dink, dan korrespondeer dit met vertikale *skalering* van die grafiek met 'n faktor van k.

1.1.3 Kenmerke wat die versamelings *nie* het nie

Kom on noem 'n paar kenmerke wat die versamelings *nie* het nie, of ten minste nie in gemeen het nie.

- Die versameling $A = \mathbb{R}^2$ het 'n *vermenigvuldigingsbewerking*. Dit is omdat ons $\mathbb{R}^2$ as die komplekse vlak $\mathbb{C}$ kan beskou; ons weet hoe om komplekse getalle kan vermenigvuldig. Daar is geen duidelike kandidaat vir 'n vermenigvuldigingsbewerking op B nie. Dieselfde geld vir C: as jy twee vierdegraadse polinome in C vermenigvuldig, eindig jy met 'n agtstegraadse polinoom, wat nie in C is nie!
- Daar is 'n *'bereken die afgeleide'*-bewerking op C,

  $$\mathbf{c} \mapsto \frac{d}{dx}\mathbf{c}$$

  wat ons later weer sal teëkom. Let op dat die wanneer die afgeleide bereken word, die graad van 'n polinoom met 1 afneem, so die resultaat bly in C, wat beteken dat dit 'n wel-gedefinieerde afbeelding van C na C is. Daar is geen ooreenstemmende bewerking hiervoor in A en B nie.

> Let daarop dat daar geen *integrasie* afbeelding van C na C is nie, want integrasie van 'n polinoom *verhoog* die graad met 1, so die resultaat mag dalk 'n polinoom van graad 5 wees, wat nie in C is nie!

1.1.4 Reëls

Ons het gevind dat elk van ons drie versamelings A, B en C 'n *optellingsbewerking* $+$, 'n *nul-element* $\mathbf{0}$ en 'n *skalaarvermenigvuldigingsbewerking* $\cdot$ het. Kan ons enige reëls identifiseer waaraan hierdie bewerkings in al drie versamelings moet voldoen?

Byvoorbeeld, ons kan aan die optellingsbewerking in A dink as 'n funksie wat aan elke elementpaar $\mathbf{a}$ en $\mathbf{a'}$ in A 'n nuwe element $\mathbf{a} + \mathbf{a'}$ in A toeken. Voldoen hierdie bewerking aan enige reëls?

Kom ons kyk. Laat $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ en $\mathbf{a'} = (a'_1, a'_2)$ elemente van A wees. Ons kan hulle in twee verskillende volgordes bymekaar tel,

$$\mathbf{a} + \mathbf{a'} = (a_1 + a'_1, a_2 + a'_2)$$

en

$$\mathbf{a}' + \mathbf{a} = (a'_1 + a_1,\, a'_2 + a_2).$$

Kom dit op dieselfde neer? In ander woorde, geld

$$\mathbf{a} + \mathbf{a}' = \mathbf{a}' + \mathbf{a} \tag{1.1.13}$$

as 'n reël? Die antwoord is *ja*, maar hoekom? Om na te gaan of twee elemente van A dieselfde is, moet ons nagaan of elkeen van hulle komponente gelyk is. Die eerste komponent van $\mathbf{a} + \mathbf{a}'$ is $a_1 + a'_1$. Die eerste komponent van $\mathbf{a}' + \mathbf{a}$ is $a'_1 + a_1$. Is $a_1 + a'_1 = a'_1 + a_1$? Ja — want beide is gewone reële getalle (nie elemente van A nie), en ons weet dat vir gewone reële getalle kan jy in enige orde saamtel met dieselfde resultaat. So die eerste komponent van $\mathbf{a} + \mathbf{a}'$ is gelyk aan die eerste komponent van $\mathbf{a}' + \mathbf{a}$. Net so kan ons nagaan dat die tweede komponent van $\mathbf{a} + \mathbf{a}'$ gelyk is aan die tweede komponent van $\mathbf{a}' + \mathbf{a}$. So al die komponente van $\mathbf{a} + \mathbf{a}'$ is gelyk aan al die ooreenstemmende komponente van $\mathbf{a}' + \mathbf{a}$. So, uiteindelik kan ons tot die gevolgtrekking kom dat $\mathbf{a} + \mathbf{a}' = \mathbf{a}' + \mathbf{a}$.

Geld die reël in vergelyking (1.1.13) ook vir optellingsoperators in B en C? Ja. Byvoorbeeld, kom ons gaan na dat dit vir C geld. Veronderstel dat $\mathbf{c}$ en $\mathbf{c}'$ polinome in C is. Geld die reël

$$\mathbf{c} + \mathbf{c}' = \mathbf{c}' + \mathbf{c} \tag{1.1.14}$$

steeds?

Die linker- en regterkante van vergelyking (1.1.14) is elemente van C. En alle elemente van C is polinome. Om na te gaan of twee polinome gelyk is, moet ons nagaan of hulle gelyk is *as funksies*, met ander woorde, of jy identiese resultate uitkry vir enige moontlike insetwaarde van x wat invervang word.

By 'n arbitrêre insetwaarde x is die linkerkant $(\mathbf{c} + \mathbf{c}')(x) = \mathbf{c}(x) + \mathbf{c}'(x)$. Aan die anderkant is die regterkant $(\mathbf{c}' + \mathbf{c})(x) = \mathbf{c}'(x) + \mathbf{c}(x)$. Nou, let op dat $\mathbf{c}(x)$ en $\mathbf{c}'(x)$ gewone getalle is (en nie polinome nie). So $\mathbf{c}(x) + \mathbf{c}'(x) = \mathbf{c}'(x) + \mathbf{c}(x)$, want dit is waar vir gewone getalle. So vir elke insetwaarde x, $(\mathbf{c} + \mathbf{c}')(x) = (\mathbf{c}' + \mathbf{c})(x)$. Daarom is die polinome $\mathbf{c} + \mathbf{c}'$ en $\mathbf{c}' + \mathbf{c}$ gelyk, hulle uitsetwaarde is dieselfde vir alle getalle x.

Daar is ander reëls wat ook vir al drie versamelings geld. Byvoorbeeld, in al drie versamelings geld die reël

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) \tag{1.1.15}$$

vir alle elemente $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ en $\mathbf{z}$. Kan jy ander reëls identifiseer wat vir al drie versamelings geld?

1.2 Definisie van 'n abstrakte vektorruimte

Wiskunde behels die identifisering van patrone. Ons het drie versamelings, A, B en C, gevind wat aanvanklik baie soortgelyk voorkom maar baie in gemeen het. In elke versamiling is daar 'n optellingsbewerking, 'n nulvektor en 'n skalaarvermenigvuldigingbewerking. Verder geld dieselfde reëls vir hierdie bewerkings. Kom ons noteer hierdie patroon deur dit 'n naam te gee en die reëls eksplisiet neer te skryf.

Definisie 1.2.1 A **vektorruimte** is 'n versameling V wat met die volgende data toegerus is:

D1 'n *Optellingsbewerking.* (I.e. vir elke paar elemente $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V$, word 'n nuwe element $\mathbf{v} + \mathbf{v}'$ gedefinieer.)

D2 'n *Nul-vektor.* (M.a.w. 'n spesiale vektor $\mathbf{0} \in V$ word gekies.)

D3 'n *Skalaarvermenigvuldigingsbewerking.* (M.a.w., vir elke reële getal k en elke element $\mathbf{v} \in V$ word 'n nuwe element $k \cdot \mathbf{v} \in V$ definieer.)

Hierdie data moet vir alle $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ in V en vir alle reële getalle k en l aan die volgende reëls voldoen:

R1 $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$

R2 $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$

R3a $\mathbf{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v}$

R3b $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$

R4 $k.(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = k.\mathbf{v} + k.\mathbf{w}$

R5 $(k + l).\mathbf{v} = k.\mathbf{v} + l.\mathbf{v}$

R6 $k.(l.\mathbf{v}) = (kl).\mathbf{v}$

R7 $1.\mathbf{v} = \mathbf{v}$

R8 $0.\mathbf{v} = \mathbf{0}$

$\Diamond$

Ons noem elemente van 'n vektorruimte **vektore** en ons skryf hulle in vetdruk, bv. $\mathbf{v} \in V$. Dit is om vektore te ondrskei van reële getalle, wat ons *skalare* noem en wat nie in vetdruk geskryf word nie. Dit is moeilik om vetdruk met handskrif uit te druk, so jy kan hulle met 'n pyltjie skryf, soos $\vec{v}$ of onderstreep, soos $\underline{v}$. Dit is nie noodsaaklik om dit te doen nie, want dit sal gewoonlik duidelik wees uit die konteks. Maar dit kan jou dalk help om helder oor hul verskille na te dink.

In hierdie hoofstuk sal ons skalaarvermenigvuldiging met 'n $\cdot$ skryf, byvoorbeeld $k \cdot \mathbf{v}$, maar in hieropvolgende hoofstukke sal ons gewoon $k\mathbf{v}$ skryf, so weer versigtig!

Om te bewys dat 'n gegewe versameling in 'n vektorruimte gemaak kan word, moet 'n mens dus die volgende doen:

1. Definieer 'n versameling V.
2. Definieer die data van 'n optellingsbewerking (D1), 'n nul-vektor (D2) en 'n skalaarvermenigvuldigingsbewerking (D3) op V.
3. Gaan na dat hierdie data aan reëls (R1) – (R8) voldoen.

1.3 Eerste voorbeeld van 'n vektorruimte

Ons is na die definisie (Definisie 1.2.1) van 'n abstrakte vektorruimte gelei deur die eienskappe van versamelings A, B en C in Afdeling 1.1 te bestudeer. Kom ons toets byvoorbeeld dat B wel 'n abstrakte vektorruimte is deur te toets dat dit die voorwaardes van Definisie 1.2.1 bevredig. Om te toets dat die ander twee versamelings vektorruimtes is, sal as oefeninge aan jou oorgelaat word.

Voorbeeld 1.3.1 Die versameling B is 'n vektorruimte.. ***1. Definieer 'n versameling B***

Ons definieer

$$B := \{(u_1,\, u_2,\, u_3) : u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R} \text{ and } u_1 - u_2 + u_3 = 0\}. \tag{1.3.1}$$

2. Definieer optelling, die nul-vektor en skalaarvermenigvuldiging.

D1. Optelling Ons definieer optelling soos volg: Veronderstel $\mathbf{u} = (u_1,\, u_2,\, u_3)$ en $\mathbf{v} = (v_1, , v_2,\, v_3)$ is elemente van B. Dit beteken spesifiek dat $u_1 - u_2 + u_3 = 0$ en $v_1 - v_2 + v_3 = 0$. Ons definieer $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ as:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} := (u_1 + v_1,\, u_2 + v_2,\, u_3 + v_3). \tag{1.3.2}$$

Ons moet nagaan dat dit sin maak. Die eerste ding wat ons moet toets is dat $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ ook 'n element van B is. Ons kan nie net enige definisie neerskryf nie! Om na te gaan of $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ 'n element van B is, moet ons nagaan of dit vergelyking (1.3.1) bevredig. Kom ons kyk:

$$\begin{aligned}
&(u_1 + v_1) - (u_2 + v_2) + (u_3 + v_3) & \\
&= (u_1 - u_2 + u_3) + (v_1 - v_2 + v_3) & &\text{(waar vir gewone getalle)} \\
&= 0 + 0 & &\text{(want } \mathbf{u} \text{ en } \mathbf{v} \text{ is in } B) \\
&= 0. & &
\end{aligned}$$

Daarom het ons dat $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ inderdaad 'n element van B is, so ons het 'n wel-gedefinieerde optellingsbewerking op B gedefinieer, wat twee willekeurige elemente van B neem en weer 'n element van B teruggee.

D2. Nulvektor Ons definieer die nulvektor $\mathbf{0} \in B$ as

$$\mathbf{0} := (0, 0, 0). \tag{1.3.3}$$

Ons moet seker maak dat dit sin maak. Is $(0, 0, 0)$ regtig 'n element van B? Met ander woorde, bevredig dit vergelyking (1.3.1)? Ja, omdat $0 - 0 + 0 = 0$. So ons het 'n wel-gedefinieerde nul-vektor.

D3. Skalaarvermenigvuldiging Ons definieer skalaarvermenigvuldiging op B soos volg: Laat k 'n reële getal en $\mathbf{u} = (u_1,\, u_2,\, u_3)$ 'n element van B wees. Ons definieer

$$k.\mathbf{u} := (ku_1,\, ku_2,\, ku_3). \tag{1.3.4}$$

Ons moet seker maak dat dit sin maak. As ek 'n vektor $\mathbf{v}$ in B met 'n skalaar k vermenigvuldig, dan moet die resultaat $k \cdot \mathbf{u}$ 'n element van B wees. Behoort $(ku_1,\, ku_2,\, ku_3)$ werklik aan B? Kom ons kyk of dit die definiërende vergelyking (1.3.1) bevredig:

$$\begin{aligned}
&ku_1 - ku_2 + ku_3 & \\
&= k(u_1 - u_2 + u_3) & &\text{(waar vir gewone getalle)} \\
&= k0 & &\text{(want } \mathbf{u} \text{ is in } B) \\
&= 0. & &
\end{aligned}$$

Daarom is $k \cdot \mathbf{u}$ wel 'n element van B, so ons het 'n wel-gedefinieerde skalaarvermenigvuldigingsbewerking op B gevind.

3. Maak seker die data bevredig die reëls.

Ons moet seker maak dat ons data D1, D2 en D3 die reëls R1 – R8 bevredig. So, veronderstel dat $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ en $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ in B is en dat k en l reële getalle is.

R1 Ons gaan na:

$$\begin{aligned} &\mathbf{v} + \mathbf{w} && \text{(R1.)} \\ &= (v_1 + w_1,\, v_2 + w_2,\, v_3 + w_3) && \text{(definisie van optelling in } B\text{)} \\ &= (w_1 + v_1,\, w_2 + v_2,\, w_3 + v_3) && \text{(want } x + y = y + x \text{ is waar vir reële getalle)} \\ &= \mathbf{w} + \mathbf{v}. && \text{(definisie van optelling in } B\text{)} \end{aligned}$$

R2 Ons gaan na:

$$\begin{aligned} &(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} \\ &= (u_1 + v_1,\, u_2 + v_2,\, u_3 + v_3) + \mathbf{w} && \text{(definisie van optelling in } B\text{)} \\ &= ((u_1 + v_1) + w_1,\, (u_2 + v_2) + w_2,\, (u_3 + v_3) + w_3) && \text{(definisie van optelling in } B\text{)} \\ &= (u_1 + (v_1 + w_1),\, u_2 + (v_2 + w_2),\, u_3 + (v_3 + w_3)) && ((x + y) + z = x + (y + z) is waar vir reële getalle) \\ &= \mathbf{u} + (v_1 + w_1,\, v_2 + w_2,\, v_3 + w_3) && \text{(definisie van optelling in } B\text{)} \\ &= \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) && \text{(definisie van optelling in } B\text{).} \end{aligned}$$

R3 Ons gaan na:

$$\begin{aligned} &\mathbf{0} + \mathbf{v} \\ &= (0, 0, 0) + (v_1, v_2, v_3) && \text{(definisie van die nul-vektor in } B\text{)} \\ &= (0 + v_1,\, 0 + v_2,\, 0 + v_3) && \text{(definisie van optelling in } B\text{)} \\ &= (v_1, v_2, v_3) && (x + 0 = x \text{ is waar vir reële getalle)} \\ &= \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Met dieselfde benadering, gaan ons na dat $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$.

R4 Ons gaan na:

$$\begin{aligned} &k.(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \\ &= k.(v_1 + w_1,\, v_2 + w_2,\, v_3 + w_3) && \text{(definisie van optelling in } B\text{)} \\ &= (k(v_1 + w_1,\, k(v_2 + w_2),\, k(v_3 + w_3)) && \text{(definisie van skalaarvermenigvuldiging in } B\text{)} \\ &= (kv_1 + kw_1,\, kv_2 + kw_2,\, kv_3 + kw_3) && (k(x + y) = kx + ky \text{ vir reële getalle } x, y) \\ &= (kv_1, kv_2, kv_3) + (kw_1, kw_2, kw_3) && \text{(definisie van optelling in } B\text{)} \\ &= k \cdot \mathbf{v} + k \cdot \mathbf{w} && \text{(definisie van skalaarvermenigvuldiging in } B\text{)} \end{aligned}$$

R5 Ons gaan na:

$$\begin{aligned} &(k + l).\mathbf{v} \\ &= ((k + l)v_1,\, (k + l)v_2,\, (k + l)v_3) && \text{(definisie van skalaarvermenigvuldiging in } B\text{)} \\ &= (kv_1 + lv_1,\, kv_2 + lv_2,\, kv_3 + lv_3) && ((k + l)x = kx + lx \text{ vir reële getalle)} \\ &= (kv_1, kv_2, kv_3) + (lv_1, lv_2, lv_3) && \text{(definisie van optelling in } B\text{)} \\ &= k \cdot \mathbf{v} + l \cdot \mathbf{v} && \text{(definisie van skalaarvermenigvuldiging in } B\text{)} \end{aligned}$$

R6 Ons gaan na:

$$k \cdot (l \cdot \mathbf{v})$$

$$
\begin{aligned}
&= k \cdot (lv_1,\, lv_2,\, lv_3) && \text{(definisie van skalaarvermenigvuldiging in } B\text{)}\\
&= (k(lv_1),\, k(lv_2),\, k(lv_3)) && \text{(definisie van skalaarvermenigvuldiging in } B\text{)}\\
&= ((kl)v_1,\, (kl)v_2,\, (kl)v_3) && (k(lx) = (kl)x \text{ vir reële getalle})\\
&= (kl) \cdot \mathbf{v} && \text{(definisie van skalaarvermenigvuldiging in } B\text{).}
\end{aligned}
$$

R7 Ons gaan na:

$$
\begin{aligned}
1 \cdot \mathbf{v} &= (1v_1,\, 1v_2,\, 1v_3) && \text{(definisie van skalaarvermenigvuldiging in } B\text{)}\\
&= (v_1,\, v_2,\, v_3) && (1x = x \text{ vir reële getalle } x)\\
&= \mathbf{v}.
\end{aligned}
$$

R8 Ons gaan na:

$$
\begin{aligned}
0 \cdot \mathbf{v} &= (0v_1,\, 0v_2,\, 0v_3) && \text{(definisie van skalaarvermenigvuldiging in } B\text{)}\\
&= (0,\, 0,\, 0) && (0x = 0 \text{ vir reële getalle})\\
&= \mathbf{0} && \text{(definisie van die nul-vektor in } B\text{).}
\end{aligned}
$$

□

1.3.1 Oefeninge

1. Bewys dat die versameling A uit Afdeling 1.1 toegerus met die optellingsbewerking (1.1.4), die nulvektor (1.1.8) en die skalaarvermenigsvuldigingsbewerking (1.1.10) 'n vektorruimte is.

2. Bewys dat die versameling C uit Afdeling 1.1 toegerus met die optellingsbewerking (1.1.6), die nulvektor (1.1.9) en die skalaarvermenigsvuldingsbewerking (1.1.12) 'n vektorruimte is.

3. Defineer C' as die versameling van alle polinome met graad *presies* gelyk aan 4, asook die nulpolinoom. Toon aan dat as C' die optellingsbewerking (1.1.6), die nulvektor (1.1.9) en die skalaarvermenigvuldigingsbewerking (1.1.12) gegee word, dan is C' *nie* 'n vektorruimte nie.

Wenk. Gee 'n teenvoorbeeld!

Oplossing. Beskou die volgende twee polinome in C':

$$
\begin{aligned}
\mathbf{p}(x) &= x^4 + x^3,\\
\mathbf{q}(x) &= -x^4.
\end{aligned}
$$

Let op dat die som $p + q$ nie in C' is nie, want

$$\mathbf{p}(x) + \mathbf{q}(X) = (1 - 1)x^4 + x^3 = x^3$$

wat graad 3 het. Dus C' is nie geslote onder addisie nie en so dit kan nie 'n vektorruimte wees nie, want die optellingsbewerking is nie goedgedefineerd op C' nie.

4. Beskou die versameling

$$X := \{(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 : a_1 \geq 0, a_2 \geq 0\}$$

toegerus met dieselfde optellingsbewerking (1.1.4), nulvektor (1.1.8) en skalaarvermenigvuldigingsbewerking (1.1.10) as in A. Is X 'n vektorruimte? Indien nie, hoekom nie?

Oplossing. X is not a vector space since the additive inverse of an element in X may fail to be in X. For example, consider $(1,0)$. The additive inverse of $(1,0)$ would have to be $(-1,0)$. However, $(-1,0)$ is certainly *not* in X. Hence X is not a vector space.

1.3.2 Oplossings

1.3.1 · Oefeninge

1.3.1.3. **Oplossing**. Beskou die volgende twee polinome in C':

$$\mathbf{p}(x) = x^4 + x^3,$$
$$\mathbf{q}(x) = -x^4.$$

Let op dat die som $p + q$ nie in C' is nie, want

$$\mathbf{p}(x) + \mathbf{q}(X) = (1-1)x^4 + x^3 = x^3$$

wat graad 3 het. Dus C' is nie geslote onder addisie nie en so dit kan nie 'n vektorruimte wees nie, want die optellingsbewerking is nie goed-gedefineerd op C' nie.

1.3.1.4. **Oplossing**. X is not a vector space since the additive inverse of an element in X may fail to be in X. For example, consider $(1,0)$. The additive inverse of $(1,0)$ would have to be $(-1,0)$. However, $(-1,0)$ is certainly *not* in X. Hence X is not a vector space.

1.4 Verdere voorbeelde en nie-voorbeelde

Voorbeeld 1.4.1 Nie 'n vektor-ruimte nie. Definieer die versameling V deur

$$V := \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}. \tag{1.4.1}$$

Definieer die optellingsbewerking deur

$$\begin{aligned} \mathbf{a}+\mathbf{a} &:= \mathbf{a} & \qquad \mathbf{a}+\mathbf{b} &:= \mathbf{a} \\ \mathbf{b}+\mathbf{a} &:= \mathbf{b} & \qquad \mathbf{b}+\mathbf{b} &:= \mathbf{c} \end{aligned}$$

Om na te gaan of dit 'n wel-gedefinieerde bewerking is, moet ons nagaan dat die som van enige twee elemente van V 'n wel-gedefinieerde element van V lewer. Maar $\mathbf{v} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$, so die som van $\mathbf{b} \in V$ met homself lewer iets (naamlik $\mathbf{c}$) wat nie 'n element van V is nie. So V is nie 'n vektorruimte nie, want dit het nie 'n wel-gedefinieerde optellingsbewerking nie. □

Voorbeeld 1.4.2 Nog 'n nie-voorbeeld. Definieer die versameling V deur

$$V := \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}. \tag{1.4.2}$$

Definieer die optellingsbewerking as

$$\begin{aligned} \mathbf{a}+\mathbf{a} &:= \mathbf{a} & \qquad \mathbf{a}+\mathbf{b} &:= \mathbf{b} \\ \mathbf{b}+\mathbf{a} &:= \mathbf{b} & \qquad \mathbf{b}+\mathbf{b} &:= \mathbf{a} \end{aligned}$$

Dit is 'n wel-gedefinieerde bewerking, omdat enige twee elemente van V se som 'n wel-gedefinieerde element van V lewer.

Definieer die nul-vektor deur

$$\mathbf{0} := \mathbf{a}. \tag{1.4.3}$$

Dit is wel-gedefinieerd, want $\mathbf{a}$ is 'n element van V.

Definieer skalaarvermenigvuldiging met 'n reële getal $k \in \mathbb{R}$ as

$$k \cdot \mathbf{a} := \mathbf{a} \text{ en } k \cdot \mathbf{b} := \mathbf{b}. \tag{1.4.4}$$

Dit is 'n wel-gedefinieerde skalaarvermenigvuldigingsbewerking, want dit laat skalaarvermenigvuldiging met enige skalaar k toe en gee 'n wel-gedefinieerde element $k \cdot \mathbf{v} \in V$ terug. □

Verstaanpunt 1.4.3 Wys dat hierdie bewerkings R1, R2, R3, R4, R6 en R7 bevredig, maar nie R5 en R8 nie.

Oplossing. R1: Ons moet kontrolleer of $\mathbf{v}+\mathbf{w} = \mathbf{w}+\mathbf{v}$ vir alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$. Duidelik is $\mathbf{a}+\mathbf{a} = \mathbf{a}+\mathbf{a}$ en soortgelyk vir $\mathbf{b}$. Finaalweg $\mathbf{b} = \mathbf{a}+\mathbf{b} = \mathbf{b}+\mathbf{a}$.

R2: Ons moet kontrolleer of $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w} = \mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$ vir alle $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$. Dit vereis dat ons 8 vergelykings in totaal kontrolleer. Ons sal net die oplossing vir een van hulle aandui, die res is soortgelyk. Ons kontrolleer of

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{b} = \mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{b}$$

Beskou:

$$\begin{aligned} \text{LK} &= (\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{b} \\ &= \mathbf{b}+\mathbf{b} \\ &= \mathbf{a}. \end{aligned}$$

Deur 'n soortgelyke metode,

$$\begin{aligned} \text{RK} &= \mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{b}) \\ &= \mathbf{a}+\mathbf{a} \\ &= \mathbf{a} \\ \therefore LK &= RK. \end{aligned}$$

R3, R4, R6, en R7 volg almal in dieselfde manier.

Ons sal aantoon hoekom R5 nie bevredig is nie. Ons sal 'n teenvoorbeeld gee. Vat $k = 2 = l, \mathbf{v} = \mathbf{b}$. Dan is:

$$\begin{aligned} \text{LK} &= (2+2).\mathbf{b} \\ &= 4.\mathbf{b} \\ &= \mathbf{b} \end{aligned}$$

maar

$$\begin{aligned} \text{RK} &= 2.\mathbf{b}+2.\mathbf{b} \\ &= \mathbf{b}+\mathbf{b} \\ &= \mathbf{a}. \end{aligned}$$

Omdat LK $\neq$ RK in hierdie geval nie, kan R5 nie in algemeen waar wees nie.

Voorbeeld 1.4.4 Die nul-vektorruimte. Definieer die versameling Z as

$$Z := \{\mathbf{z}\}. \tag{1.4.5}$$

Let op dat dit net 'n enkele element bevat, $\mathbf{z}$. Definieer optelling as

$$\mathbf{z}+\mathbf{z} := \mathbf{z} \tag{1.4.6}$$

Definieer die nul-element as

$$\mathbf{0} := z. \tag{1.4.7}$$

Laastens, definieer skalaarvermenigvuldiging met 'n skalaar $k \in \mathbb{R}$ as:

$$k.\mathbf{z} := \mathbf{z}. \tag{1.4.8}$$

□

Verstaanpunt 1.4.5 Wys dat hierdie data reëls R1 tot R8 bevredig.

Voorbeeld 1.4.6 $\mathbb{R}^n$**.** Definieer die versameling $\mathbb{R}^n$ as

$$\mathbb{R}^n := \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R} \text{ vir alle } i = 1 \ldots n\}. \tag{1.4.9}$$

Definieer optelling as

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)+(y_1, y_2, \ldots, y_n) := (x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n). \tag{1.4.10}$$

Definieer die nul-element as

$$\mathbf{0} := (0, 0, \ldots, 0). \tag{1.4.11}$$

Definieer skalaarvermenigvuldiging as

$$k \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) := (kx_1, kx_2, \ldots, kx_n). \tag{1.4.12}$$

□

Verstaanpunt 1.4.7 Wys dat hierdie data reëls R1 tot R8 bevredig.

Voorbeeld 1.4.8 $\mathbb{R}^\infty$**.** Definieer die versameling $\mathbb{R}^\infty$ as

$$\mathbb{R}^\infty := \{(x_1, x_2, x_3, \ldots,) : x_i \in \mathbb{R} \text{ vir alle } i = 1, 2, 3, \ldots\} \tag{1.4.13}$$

So 'n element $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^\infty$ is 'n oneindige ry reële getalle. Definieer die optellingsbewerking komponentgewys:

$$(x_1, x_2, x_3, \ldots) + (y_1, y_2, y_3, \ldots) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \ldots). \tag{1.4.14}$$

Definieer die nul-element as

$$\mathbf{0} := (0, 0, 0, \ldots), \tag{1.4.15}$$

die oneindige reeks waarvan alle komponente nul is. Laastens, definieer skalaarvermenigvuldiging komponentgewys:

$$k \cdot (x_1, x_2, x_3, \ldots) := (kx_1, kx_2, kx_3, \ldots) \tag{1.4.16}$$

Die studie van oneindigheid is 'n belangrike deel van wiskunde. Het jy al die fliek *The man who knew infinity* wat oor my gaan, gesien?

□

Verstaanpunt 1.4.9 Wys dat hierdie data die reëls R1 tot R8 bevredig.

Oplossing. Ons sal net R4 kontrolleer, die res is soortgelyk.

R4: Laat

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= (v_1, v_2, v_3, \ldots)\\ \mathbf{w} &= (w_1, w_2, w_3, \ldots).\end{aligned}$$

Ons moet kontrolleer of $k.(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = k.\mathbf{v} + k.\mathbf{w}$.

$$\begin{aligned}
\text{LK} &= k.(\mathbf{v}+\mathbf{w}) \\
&= k.\left[(v_1, v_2, v_3, \ldots) + (w_1, w_2, w_3, \ldots)\right] \\
&= k.\left(v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3, \ldots\right) \\
&= (k(v_1 + w_1), k(v_2 + w_2), k(v_3 + w_3), \ldots) \\
&= (kv_1 + kw_1, kv_2 + kw_2, kv_3 + kw_3, \ldots) \\
&= (kv_1, kv_2, kv_3, \ldots) + (kw_1, kw_2, kw_3, \ldots) \\
&= k.(v_1, v_2, v_3, \ldots) + k.(w_1, w_2, w_3, \ldots) \\
&= k.\mathbf{v} + k.{=}w \\
&= \text{RK}
\end{aligned}$$

Voorbeeld 1.4.10 Funksies op 'n versameling. Laat X enige versameling wees. Definieer die versameling $\text{Fun}(X)$ van *funksies vanaf X na die reële getalle* as

$$\text{Fun}(X) := \{\mathbf{f} : X \to \mathbb{R}\}. \tag{1.4.17}$$

Let op dat die funksies arbitrêr kan wees; daar is geen vereiste dat hulle kontinu of differensieerbaar moet wees nie. So 'n vereiste maak nie sin nie, aangesien X 'n arbitrêre versameling kan wees. Byvoorbeeld, X kan die versameling $\{a, b, c\}$ wees — sonder enige verdere inligting maak dit nie sin om te sêdat die funksie $\mathbf{f} : X \to \mathbb{R}$ kontinu is nie.

Definieer die optellingsbewerking as

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), x \in X \tag{1.4.18}$$

Maak seker dat jy verstaan wat hierdie formule sê! Ons begin met twee funksies $\mathbf{f}$ en $\mathbf{g}$, en ons definieer hul som as $\mathbf{f}+\mathbf{g}$. Dit is veronderstel om self 'n funksie op X te wees. Om 'n funksie op X te definieer, moet ons vir elke $x \in X$ neerskryf watter waarde die funksie lewer. En dit is wat die formule sê: die waarde wat die funksie $\mathbf{f}+\mathbf{g}$ aan die element $x \in X$ toeken, word gedefinieer as die getal $\mathbf{f}(x)$ plus die getal $\mathbf{g}(x)$. Onthou: $\mathbf{f}$ is 'n funksie, terwyl $\mathbf{f}(x)$ 'n getal is!

Definieer die nul-vektor (wat ons hier as z gaan aandui) as die funksie wat die getal 0 lewer vir elke insetwaarde $x \in X$:

$$\mathbf{z}(x) := 0 \text{ vir alle } x \in X. \tag{1.4.19}$$

Definieer skalaarvermenigvuldiging as

$$(k.\mathbf{f})(x) := k\mathbf{f}(x). \tag{1.4.20}$$

□

Verstaanpunt 1.4.11 Notasie-uitdaging! Sê of elkeen van die volgende kombinasies simbole 'n reële getal of 'n funksie voorstel.

1. $\mathbf{f}$
2. $\mathbf{f}(x)$
3. $k \cdot \mathbf{f}$
4. $(k \cdot \mathbf{f})(x)$

Oplossing.

1. Funksie

2. Reële getal

3. Funksie

4. Reële getal

Verstaanpunt 1.4.12 Laat $X = \{a, b, c\}$.

1. Skryf drie verskillende funksies $\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h}$ in $\mathrm{Fun}(X)$ neer.

2. Vir die funksies wat jy in 1.4.12.1 geskryf het, bereken $\mathbf{f} + \mathbf{g}$, asook $3.\mathbf{h}$.

Oplossing.

1.

$$\begin{aligned} f(a) &= 4 \\ f(b) &= 0 \\ f(c) &= 2 \\ \\ g(a) &= 1 \\ g(b) &= 1 \\ g(c) &= 1 \\ \\ h(a) &= 0 \\ h(b) &= 3 \\ h(c) &= 0 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} (f+g)(a) &= 5 \\ (f+g)(b) &= 1 \\ (f+g)(c) &= 3 \\ \\ (3.h)(a) &= 0 \\ (3.h)(b) &= 9 \\ (3.h)(c) &= 0 \end{aligned}$$

Verstaanpunt 1.4.13 Wys dat die data in (1.4.18), (1.4.19), en (1.4.20) reëls R1 tot R8 bevredig, sodat $\mathrm{Fun}(X)$ 'n vektorruimte is.

Voorbeeld 1.4.14 Matrikse. Die versameling $\mathrm{Mat}_{n,m}$ van alle $n \times m$ matrikse is 'n vektorruimte. Sien Bylaag A om matrikse te hersien. □

Verstaanpunt 1.4.15 Wys dat met die bewerkings (optelling en skalaarvermenigvuldiging) en nul-matriks soos in Bylaag A gedefinieer vorm die versameling $\mathrm{Mat}_{n,m}$ van alle $n \times m$-matrikse 'n vektorruimte.

Voorbeeld 1.4.16 Ons sal Col_n skryf vir die vektorruimte $\mathrm{Mat}_{n,1}$ van n-dimensionele *kolomvektore*,

$$\mathrm{Col}_n = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} : x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

So, Col_n ‘is’ net $\mathbb{R}^n$, maar ons beklemtoon die feit dat die komponente van die vektore in kolomme gerangskik word. □

1.4.1 Oefeninge

1. Definieer ’n optellingsbewerking op die versameling $X := \{\mathbf{0}, \mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ met behulp van die volgende tabel:

+	**0**	**a**	**b**
0	**0**	**a**	**b**
a	**a**	**0**	**a**
b	**b**	**a**	**0**

Die tabel werk soos volg: Om byvoorbeeld $\mathbf{b} + \mathbf{a}$ te bereken, vind ons die kruising van ry $\mathbf{b}$ en kolom $\mathbf{a}$. Ons sien dus dat $\mathbf{b} + \mathbf{a} := \mathbf{a}$.

Bewys dat hierdie optellingsbewerking R1 bevredig.

2. Bewys dat die optellingsbewering van Oefening 1.4.1.1 nie R2 bevredig nie.

3. Definieer ’n snaakse optellingsbewerking $\hat{+}$ op $\mathbb{R}$ as

$$x \hat{+} y := x - y$$

Bevredig $\hat{+}$ R2? Indien wel, bewys dit. Indien nie, gee ’n teenvoorbeeld.

Oplossing. Nee, byvoorbeeld:

$$(1 \hat{+} 2) \hat{+} 3 = (1 - 2) - 3 = -4.$$

Maar

$$1 \hat{+} (2 \hat{+} 3) = 1 - (2 - 3) = 2.$$

4. Konstrueer ’n bewerking $\boxplus$ op $\mathbb{R}$ wat R1 bevredig maar nie R2 nie.

Wenk. Probeer om die formule van 1.4.1.3 aan te pas.

Oplossing. Defineer $x \boxplus y = |x - y|$. Dan word R1 bevredig, omdat $x \boxplus y = |x - y| = |y - x| = y \boxplus x$. Reël R2 word egter nie bevredig nie, omdat $(1 \boxplus 2) \boxplus 3 = ||1 - 2| - 3| = 2$ but $1 \boxplus (2 \boxplus 3) = |1 - |2 - 3|| = 0$

5. Laat $\mathbb{R}^+$ die versameling positiewe reële getalle wees. Definieer ’n optellingsbewerking $\oplus$, ’n nul-vektor z en ’n skalaarvermenigvuldigingsbewerking . op $\mathbb{R}^+$ as volg:

$$x + y := \mathbf{xy}$$
$$z := 1$$
$$k.x := x^k$$

waar $x, y \in \mathbb{R}^+$ en k ’n skalaar is (i.e. ’n willekeurige reële getal).

(a) Gaan na dat hierdie bewerkings wel-gedefinieerd is. Byvoorbeeld, is $x + y \in \mathbb{R}^+$, soos dit hoort?

(b) Gaan na dat hierdie data die reëls R1 tot R8 bevredig.

Oplossing.

(a) Laat x, y twee positiewe reële getalle wees. Dan is

$$x \oplus y := xy$$

beslis ook 'n positiewe reële getal. Soortgelyk, vir enige $k \in R$ en enige $x \in \mathbb{R}^+$, is

$$k.x := x^k$$

ook positief. Om dit te sien, let op vir enige vaste k, dat die grafiek van die funksie $f(x) = x^k$ beperk tot $x \geq 0$ bo die x-as lê.

(b)

6. Beskou die bewerking $\oplus$ op $\mathbb{R}^2$ gedefinieer deur:

$$(a_1, a_2) \oplus (b_1, b_2) := (a_1 + b_2, a_2 + b_1).$$

(a) Bevredig hierdie bewerking R1?

(b) Bevredig hierdie bewerking R2?

Oplossing.

(a) Nee — hier is 'n teenvoorbeeld:

$$(1, 2) \oplus (2, 1) = (1 + 1, 2 + 2) = (2, 4)$$

maar

$$(2, 1) \oplus (1, 2) = (2 + 2, 1 + 1) = (4, 2).$$

(b) Nee — hier is 'n teenvoorbeeld:

$$((1, 2) \oplus (2, 1)) \oplus (1, 3) = (2, 4) \oplus (1, 3) = (5, 5)$$

but

$$(1, 2) \oplus ((2, 1) \oplus (1, 3)) = (1, 2) \oplus (5, 2) = (3, 7).$$

1.4.2 Oplossings

1.4.1 · Oefeninge

1.4.1.3. Oplossing. Nee, byvoorbeeld:

$$(1 \hat{+} 2) \hat{+} 3 = (1 - 2) - 3 = -4.$$

Maar

$$1 \hat{+} (2 \hat{+} 3) = 1 - (2 - 3) = 2.$$

1.4.1.4. Oplossing. Defineer $x \boxplus y = |x - y|$. Dan word R1 bevredig, omdat $x \boxplus y = |x - y| = |y - x| = y \boxplus x$. Reël R2 word egter nie bevredig nie, omdat $(1 \boxplus 2) \boxplus 3 = ||1 - 2| - 3| = 2$ but $1 \boxplus (2 \boxplus 3) = |1 - |2 - 3|| = 0$

1.4.1.5. Oplossing.

(a) Laat x, y twee positiewe reële getalle wees. Dan is

$$x \oplus y := xy$$

beslis ook 'n positiewe reële getal. Soortgelyk, vir enige $k \in R$ en enige $x \in \mathbb{R}^+$, is

$$k.x := x^k$$

ook positief. Om dit te sien, let op vir enige vaste k, dat die grafiek van die funksie $f(x) = x^k$ beperk tot $x \geq 0$ bo die x-as lê.

(b)

1.4.1.6. Oplossing.

(a) Nee — hier is 'n teenvoorbeeld:

$$(1,2) \oplus (2,1) = (1+1, 2+2) = (2,4)$$

maar

$$(2,1) \oplus (1,2) = (2+2, 1+1) = (4,2).$$

(b) Nee — hier is 'n teenvoorbeeld:

$$((1,2) \oplus (2,1)) \oplus (1,3) = (2,4) \oplus (1,3) = (5,5)$$

but

$$(1,2) \oplus ((2,1) \oplus (1,3)) = (1,2) \oplus (5,2) = (3,7).$$

1.5 'n Paar resultate rakende abstrakte vektorruimtes

Dit is tyd om die reëls van vektorruimtes te gebruik om 'n paar algemene resultate te bewys.

> Ons is op die punt om on eerste formele bewys in die kursus te doen!

Ons eerste hulpstelling wys dat die nulvektor $\mathbf{0}$ die *unieke* vektor in V is wat soos'n nulvektor werk. Meer presies:

Hulpstelling 1.5.1 *Veronderstel V is 'n vektor-ruimte met nul-vektor $\mathbf{0}$. As $\mathbf{0}'$ 'n ander vektor is wat reël R3(a) bevredig,*

$$\mathbf{0}' + \mathbf{v} = \mathbf{v} \text{ vir alle } \mathbf{v} \in V \tag{1.5.1}$$

dan volg dit dat $\mathbf{0} = \mathbf{0}'$.
Bewys.

$\mathbf{0} = \mathbf{0}' + \mathbf{0}$	gebruik (1.5.1) vir $\mathbf{v} = \mathbf{0}$
$= \mathbf{0}'$	(R3b)

■

Definisie 1.5.2 Laat V 'n vektorruimte wees. Ons definieer die **optellingsinverse** van 'n vektor $\mathbf{v} \in V$ as

$$-\mathbf{v} := (-1).\mathbf{v}$$

◊

Hulpstelling 1.5.3 *As V 'n vektorruimte is, dan vir alle $\mathbf{v} \in V$ is*

$$-\mathbf{v} + \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ en } \mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}. \tag{1.5.2}$$

Bewys.

$$\begin{aligned} -\mathbf{v}+\mathbf{v} &= (-1).\mathbf{v}+\mathbf{v} && \text{(Definisie } -\mathbf{v}) \\ &= (-1).\mathbf{v}+1.\mathbf{v} \\ &= (-1+1).\mathbf{v} && \text{(R5)} \\ &= 0.\mathbf{v} \\ &= \mathbf{0} && \text{(R8)} \end{aligned}$$

Verder,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}+(-\mathbf{v}) &= -\mathbf{v}+\mathbf{v} && \text{(R1)} \\ &= \mathbf{0} && \text{(deur vorige bewys)} \end{aligned}$$

■

Hulpstelling 1.5.4 *Veronderstel twee vektore* $\mathbf{w}$ *en* $\mathbf{v}$ *in 'n vektorruimte bevredig* $\mathbf{w}+\mathbf{v}=\mathbf{0}$*. Dan volg dit dat* $\mathbf{w}=-\mathbf{v}$*.*

Bewys.

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \mathbf{w}+\mathbf{0} && \text{(R3b)} \\ &= \mathbf{w}+(\mathbf{v}+-\mathbf{v}) && \text{1.5.3} \\ &= (\mathbf{w}+\mathbf{v})+-\mathbf{v} && \text{(R2)} \\ &= \mathbf{0}+-\mathbf{v} && \text{(volgens aanname)} \\ &= -\mathbf{v} && \text{(R3a).} \end{aligned}$$

■

Kom ons bewys nog twee hulpstellings, vir nog 'n bietjie oefening.

Hulpstelling 1.5.5 *Laat* V *'n vektorruimte wees en* k *enige skalaar. Dan is*

$$k.\mathbf{0}=\mathbf{0}.$$

Bewys.

$$\begin{aligned} k.\mathbf{0} &= k.(0.\mathbf{0}) && \text{(R8 vir } \mathbf{v}=\mathbf{0}) \\ &= ((k)(0)).\mathbf{0} && \text{(R6)} \\ &= 0.\mathbf{0} && ((k)(0)=0 \text{ vir enige reële getal } k) \\ &= \mathbf{0} && \text{(R8 vir } \mathbf{v}=\mathbf{0}) \end{aligned}$$

■

Hulpstelling 1.5.6 *Veronderstel dat* $\mathbf{v}$ *'n vektor in 'n vektorruimte* V *is en dat* k *'n skalaar is. Dan volg dit dat*

$$k.\mathbf{v}=\mathbf{0} \Leftrightarrow k=0 \textit{ of } \mathbf{v}=\mathbf{0}.$$

Bewys. ***Bewys van*** $\Leftarrow$. Veronderstel $k=0$. Dan $k.\mathbf{v}=0.\mathbf{v}=\mathbf{0}$ deur R8 van 'n vektor-ruimte. Aan die ander kant, veronderstel $\mathbf{v}=\mathbf{0}$. Dan $k.\mathbf{v}=k.\mathbf{0}=\mathbf{0}$ deur Oefening 1.5.1.2.

Bewys van $\Rightarrow$***).*** Veronderstel dat $k.\mathbf{v}=\mathbf{0}$. Daar is twee moontlikhede: óf $k=0$, óf $k\neq 0$. As $k=0$, dan is ons klaar. As $k\neq 0$, dan bestaan $\frac{1}{k}$ en ons vermenigvuldig albei kante daarmee:

$$\begin{aligned} k.\mathbf{v} &= \mathbf{0} \\ \therefore \frac{1}{k}.(k.\mathbf{v}) &= \frac{1}{k}.\mathbf{0} \quad \text{(Vermenigvuldig beide kante met } \frac{1}{k}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \left(\frac{1}{k}k\right).\mathbf{v} &= \mathbf{0} && \text{(R6 aan LK. Gebruik Oefening 1.5.1.2 aan die RK.)}\\
\therefore 1.\mathbf{v} &= \mathbf{0} && \text{(gebruik } \tfrac{1}{k}k = 1\text{)}\\
\therefore \mathbf{v} &= \mathbf{0} && \text{(R7)}
\end{aligned}$$

Daarom, in die geval waar $k \neq 0$ dit volg dat $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, wat ons in die eerste plek wou bewys. ■

Voorbeeld 1.5.7 Kom ons oefen die gebruik van die reëls van vektorruimtes om alledaagse berekeninge uit te voer. Veronderstel byvoorbeeld dat ons vir die vektor $\mathbf{x}$ in die volgende vergelyking wil oplos:

$$\mathbf{v} + 7 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{w} \tag{1.5.3}$$

Ons gaan as volg te werk met die reëls:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} + 7.\mathbf{x} &= \mathbf{w} \\
\therefore -\mathbf{v} + (\mathbf{v} + 7 \cdot \mathbf{x}) &= -\mathbf{v} + \mathbf{w} && \text{(tel } -\mathbf{v} \text{ links aan beide kante by)}\\
\therefore (-\mathbf{v} + \mathbf{v}) + 7 \cdot \mathbf{x} &= -\mathbf{v} + \mathbf{w} && \text{(gebruik R2 aan LK)}\\
\therefore \mathbf{0} + 7.\mathbf{x} &= -\mathbf{v} + \mathbf{w} && \text{Lemma 1.5.3 aan LK)}\\
\therefore 7.\mathbf{x} &= -\mathbf{v} + \mathbf{w} && \text{(R3a aan LK)}\\
\therefore \frac{1}{7}.(7 \cdot \mathbf{x}) &= \frac{1}{7}.(-\mathbf{v} + \mathbf{w}) && \text{(skalaarvermenigvuldig aan beide kante met } \tfrac{1}{7}\text{)}\\
\therefore (\frac{1}{7}7) \cdot \mathbf{x} &= \frac{1}{7}.(-\mathbf{v} + \mathbf{w}) && \text{(gebruik R6 aan LK)}\\
\therefore 1 \cdot \mathbf{x} &= \frac{1}{7} \cdot (-\mathbf{v} + \mathbf{w}) && \text{(vermenigvuldig } \tfrac{1}{7} \text{ met 7)}\\
\therefore \mathbf{x} &= \frac{1}{7} \cdot (-\mathbf{v} + \mathbf{w}) && \text{(R7)}
\end{aligned}$$

Soos die kursus vorder sal ons hierdie stappe uitlaat. Maar dit is belangrik dat jy hulle almal kan weergee, as dit van jou gevra sou word! □

1.5.1 Oefeninge

1. Bewys dat, vir alle vektore v in 'n vektorruimte, geld $-(-\mathbf{v}) = \mathbf{v}$.

Oplossing. Ons pas die definisie van $-\mathbf{v}$ twee maal toe:

$$-(-\mathbf{v}) = (-1).(-\mathbf{v}) = (-1).(-1.(\mathbf{v})).$$

As ons nou R6 gebruik, kry ons

$$(-1).(-1(\mathbf{v})) = ((-1)(-1)).\mathbf{v} = 1.\mathbf{v}.$$

Laastens laat 'n enkele toepassing van R7 ons toe om af te lei dat

$$1.\mathbf{v} = \mathbf{v}$$

2. Laat V 'n vektorruimte wees met nul-vektor $\mathbf{0}$. Bewys dat vir alle skalare k, geld $k \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Oplossing. Ons pas R3b toe op $k.\mathbf{0}$:

$$k.\mathbf{0} = k.(\mathbf{0} + \mathbf{0}).$$

Uit R4 kry ons

$$k.(\mathbf{0}+\mathbf{0}) = k.\mathbf{0} + k.0.$$

Nou weet ons dat

$$k.\mathbf{0} = k.\mathbf{0} + k.0.$$

As ons nou die inverse van $k.0$ aan albei kante bytel, kry ons

$$\mathbf{0} = k.\mathbf{0} + \mathbf{0} = k.0$$

en ons is klaar.

3. Laat V 'n vektorruimte wees. Veronderstel dat 'n vektor $\mathbf{v} \in V$ bevredig

$$5.\mathbf{v} = 2.\mathbf{v}. \tag{1.5.4}$$

Wys dat $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Oplossing.

$$\begin{aligned}
&5.v = 2.v \\
&\implies 5.v + (-2).v = 2.v + (-2).v \\
&\implies (5-2).v = (2-2).v \\
&\implies 3.v = 0.v \\
&\implies (\frac{1}{3}3).v = (\frac{1}{3}0).v \\
&\implies 1.v = 0.v \\
&\implies v = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

4. Veronderstel dat twee vektore $\mathbf{x}$ en $\mathbf{w}$ in 'n vektorruimte die vergelyking $2\mathbf{x} + 6\mathbf{w} = \mathbf{0}$ bevredig. Los op vir $\mathbf{x}$ en wys eksplisiet hoe jy die reëls van 'n vektorruimte gebruik, soos byvoorbeeld in Voorbeeld 1.5.7.

Oplossing.

$$\begin{aligned}
& 2.\mathbf{x} + 6.\mathbf{w} = \mathbf{0} \\
\implies & (2.\mathbf{x} + 6.\mathbf{w}) + (-(6.\mathbf{w})) = \mathbf{0} + (-(6.\mathbf{w})) && \text{(tel } -(6.\mathbf{w}) \text{ by beide kante)} \\
\implies & 2.\mathbf{x} + (6.\mathbf{w} + (-(6.\mathbf{w}))) = -(6.\mathbf{w}) && \text{(R2 aan die LK, R3a aan die RK)} \\
\implies & 2.\mathbf{x} + \mathbf{0} = -(6.\mathbf{w}) && (1.5.3) \\
\implies & 2.\mathbf{x} = -(6.\mathbf{w}) && \text{(R3b)} \\
\implies & (\frac{1}{2}).(2.\mathbf{x}) = \frac{1}{2}.(-(6.\mathbf{w})) \\
\implies & (\frac{1}{2}2).\mathbf{x} = \frac{1}{2}.((-1).(6.\mathbf{w})) && \text{(R6 aan LK, definisie van inverse aan RK)} \\
\implies & 1.\mathbf{x} = \frac{1}{2}.((-1)(6)).\mathbf{w}) && \text{(R6 aan RK)} \\
\implies & \mathbf{x} = \frac{1}{2}.((-6).\mathbf{w}) && \text{(R7 aan LK)} \\
\implies & \mathbf{x} = ((\frac{1}{2})(-6)).\mathbf{w} && \text{(R6 aan RK)} \\
\implies & \mathbf{x} = (-3).\mathbf{w}
\end{aligned}$$

5. Veronderstel dat V 'n vektorruimte is wat nie die nul-vektorruimte is nie. Wys dat V oneindig baie elemente bevat.

Wenk 1. Aangesien V nie die nul-vektorruimte is nie, moet daar 'n vektor $\mathbf{v} \in V$ wees sodat $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.

Wenk 2. Gebruik die idee uit die bewys van Oefening 1.5.1.3.

Waar of Onwaar Vir elkeen van die volgende bewerings, besluit of dit waar of onwaar is en bewys dat jou keuse korrek is. (Met ander woorde, as jy sê dat dit waar is moet jy bewys dat dit waar is en as jy sê dat dit onwaar is, moet jy bewys dat dit onwaar is deur 'n *eksplisiete teenvoorbeeld* te gee.)

6. Indien $k.\mathbf{v} = \mathbf{0}$ in 'n vektorruimte, dan is $k = 0$.

Oplossing. Onwaar. Neem $\mathbb{R}^2$ as 'n voorbeeld. Indien $v = (0, 0)$ dan is $2.(0, 0) = (0, 0)$, maar natuurlik is $2 \neq 0$.

7. Indien $k.\mathbf{v} = \mathbf{0}$ in 'n vektorruimte, dan is $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

8. Die leê versameling kan met die data D1, D2, D3 toegerus word wat aan die reëls vir 'n vektorruimte voldoen.

Oplossing. Onwaar. Vir die leë versameling om 'n vektorruimte te wees, moet dit 'n nulvektor hê. Ons moet dus 'n element $v \in \emptyset$ kan vind wat die reëls vir die nulvektor bevredig. Maar aangesien die leë versameling geen elemente bevat nie, kan ons nooit so 'n element v vind nie. Dus kan die leë versameling mooit 'n vektorruimte wees nie.

9. Reël R3b van 'n vektorruimte volg outomaties uit die ander reëls.

Oplossing. Waar. As ons R1 en R3a saam sit, gee dit R3b.

10. Reël R7 van 'n vektorruimte volg outomaties uit die ander reëls.

Oplossing. Onwaar. Laat V 'n nie-nul vektorruimte wees (soos byvoorbeeld $\mathbb{R}^2$). Herdefinieer nou skalaarvermenigvuldiging deur

$$k.v := 0 \text{ vir alle skalare } k \text{ en alle vektore } v.$$

Dan sal V al die reëls vir 'n vektorruimte bevredig, behalwe R7. Dus is dit nie die geval dat R7 uit die ander reëls volg nie.

1.5.2 Oplossings

1.5.1 · Oefeninge

1.5.1.1. Oplossing. Ons pas die definisie van $-\mathbf{v}$ twee maal toe:

$$-(-\mathbf{v}) = (-1).(-\mathbf{v}) = (-1).(-1.(\mathbf{v})).$$

As ons nou R6 gebruik, kry ons

$$(-1).(-1(\mathbf{v})) = ((-1)(-1)).\mathbf{v} = 1.\mathbf{v}.$$

Laastens laat 'n enkele toepassing van R7 ons toe om af te lei dat

$$1.\mathbf{v} = \mathbf{v}$$

1.5.1.2. Oplossing. Ons pas R3b toe op $k.\mathbf{0}$:

$$k.\mathbf{0} = k.(\mathbf{0} + \mathbf{0}).$$

Uit R4 kry ons

$$k.(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = k.\mathbf{0} + k.0.$$

Nou weet ons dat

$$k.\mathbf{0} = k.\mathbf{0} + k.0.$$

As ons nou die inverse van $k.0$ aan albei kante bytel, kry ons

$$\mathbf{0} = k.\mathbf{0} + \mathbf{0} = k.0$$

en ons is klaar.

1.5.1.3. Oplossing.

$$\begin{aligned}
&5.v = 2.v\\
&\implies 5.v + (-2).v = 2.v + (-2).v\\
&\implies (5-2).v = (2-2).v\\
&\implies 3.v = 0.v\\
&\implies (\frac{1}{3}3).v = (\frac{1}{3}0).v\\
&\implies 1.v = 0.v\\
&\implies v = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

1.5.1.4. Oplossing.

$$\begin{aligned}
2.\mathbf{x} + 6.\mathbf{w} &= \mathbf{0}\\
\implies (2.\mathbf{x} + 6.\mathbf{w}) + (-(6.\mathbf{w})) &= \mathbf{0} + (-(6.\mathbf{w})) && \text{(tel } -(6.\mathbf{w}) \text{ by beide kante)}\\
\implies 2.\mathbf{x} + (6.\mathbf{w} + (-(6.\mathbf{w}))) &= -(6.\mathbf{w}) && \text{(R2 aan die LK, R3a aan die RK)}\\
\implies 2.\mathbf{x} + \mathbf{0} &= -(6.\mathbf{w}) && (1.5.3)\\
\implies 2.\mathbf{x} &= -(6.\mathbf{w}) && \text{(R3b)}\\
\implies (\frac{1}{2}).(2.\mathbf{x}) &= \frac{1}{2}.(-(6.\mathbf{w}))\\
\implies (\frac{1}{2}2).\mathbf{x} &= \frac{1}{2}.((-1).(6.\mathbf{w})) && \text{(R6 aan LK, definisie van inverse aan RK)}\\
\implies 1.\mathbf{x} &= \frac{1}{2}.((-1)(6)).\mathbf{w}) && \text{(R6 aan RK)}\\
\implies \mathbf{x} &= \frac{1}{2}.((-6).\mathbf{w}) && \text{(R7 aan LK)}\\
\implies \mathbf{x} &= ((\frac{1}{2})(-6)).\mathbf{w} && \text{(R6 aan RK)}\\
\implies \mathbf{x} &= (-3).\mathbf{w}
\end{aligned}$$

Waar of Onwaar **1.5.1.6. Oplossing**. Onwaar. Neem $\mathbb{R}^2$ as 'n voorbeeld. Indien $v = (0,0)$ dan is $2.(0,0) = (0,0)$, maar natuurlik is $2 \neq 0$.

1.5.1.8. Oplossing. Onwaar. Vir die leë versameling om 'n vektorruimte te wees, moet dit 'n nulvektor hê. Ons moet dus 'n element $v \in \emptyset$ kan vind wat die reëls vir die nulvektor bevredig. Maar aangesien die leë versameling geen elemente bevat nie, kan ons nooit so 'n element v vind nie. Dus kan die leë versameling mooit 'n vektorruimte wees nie.

1.5.1.9. Oplossing. Waar. As ons R1 en R3a saam sit, gee dit R3b.

1.5.1.10. Oplossing. Onwaar. Laat V 'n nie-nul vektorruimte wees (soos byvoorbeeld $\mathbb{R}^2$). Herdefinieer nou skalaarvermenigvuldiging deur

$$k.v := 0 \text{ vir alle skalare } k \text{ en alle vektore } v.$$

Dan sal V al die reëls vir 'n vektorruimte bevredig, behalwe R7. Dus is dit nie die geval dat R7 uit die ander reëls volg nie.

1.6 Deelruimtes

In hierdie afdeling sal ons die konsep van 'n *deelruimte* bekend stel. Hierdie konsep sal ons toelaat om vinnig nuwe voorbeelde van vektorruimtes te vind.

1.6.1 Definition of a subspace

Definisie 1.6.1 'n Deelversameling $U \subseteq V$ van 'n vektor-ruimte V word 'n **deelruimte** van V genoem as:

- Vir alle $\mathbf{u}, \mathbf{u}' \in U$, $\mathbf{u} + \mathbf{u}' \in U$
- $\mathbf{0} \in U$
- Vir alle skalare k en alle vektore $\mathbf{u} \in U$, $k.\mathbf{u} \in U$

$\Diamond$

Wanneer U 'n deelversameling van 'n vektorruimte V is, dan kan ons elemente in U probeer bymekaartel of een element in U met 'n skalaar probeer vermenigvuldig asof dit elemente van V is. Aangesien hierdie twee bewerkings bewerkings op V is, sal dit altyd 'n element van V gee. Maar selfs al is al jou insette elemente van die deelversameling U, is die uitset van die bewerking nie noodwendig in U nie (maar definitief in V).

As U egter 'n deelruimte is, dan is hierdie uitsette almal wel in U volgens Definisie 1.6.1. In hierdie geval sê ons dat die bewerkings op V **beperk tot** bewerkings op U. In die volgende hulpstelling sien ons dat as ons hierdie beperkte bewerkings gebruik as die data vir U, dan is U ook 'n vektorruimte.

Opmerking 1.6.2 Party handboeke sal die eienskap in Hulpstelling 1.6.4 gebruik as die definisie van 'n deelruimte en Definisie 1.6.1 dan as 'n gevolg aflei.

Opmerking 1.6.3 Daar is baie min onderskeid tussen 'n bewerking op V en sy beperking tot U. Party mense sal hulle selfs dieselfde noem, want as jy die bewerking op twee elemente uit U toepas, dan sal jy diselfde antwoord in albei gevalle kry.

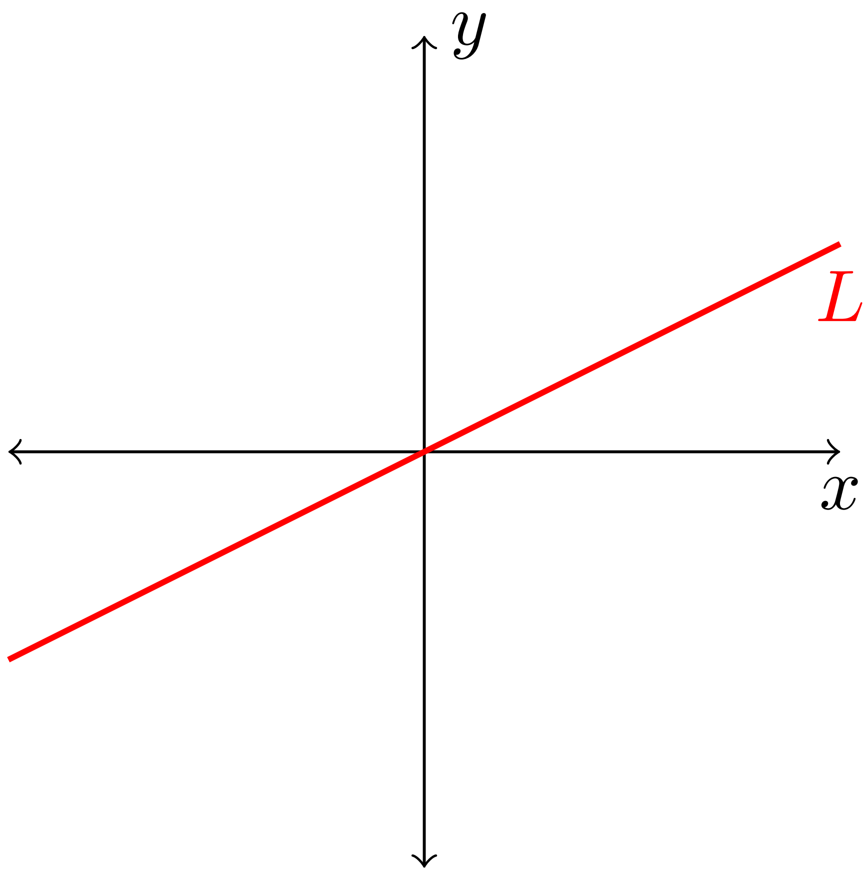
Hulpstelling 1.6.4 *Veronderstel dat U 'n deelruimte van 'n vektorruimte V is. As ons U toerus met die beperkte bewerkings van optelling en skalaarvermenigvuldiging vanaf V, dan is U 'n vektorruimte.*

Bewys. Aangesien U 'n deelruimte is, weet ons dat dit sin maak om dit "toe te rus met dieselfde (beperkte) optellingsbewerking, nul-vektor en skalaarvermenigvuldigingsbewerking as V". (As U *nie* 'n deelruimte was nie, dan sou ons byvoorbeeld kon vind dat $\mathbf{u}, \mathbf{u}' \in U$ maar $\mathbf{u}+\mathbf{u}' \notin U$, so die optellingsbewerking sou nie sin maak nie.)

So ons moet net reëls R1 tot R8 nagaan. Aangesien die reëls vir alle vektore $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ in V geld, sal hulle beslis vir alle vektore $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ in U geld. So reëls R1 tot R8 word bevredig. ■

1.6.2 Voorbeelde van deelruimtes

Voorbeeld 1.6.5 Lyn in $\mathbb{R}^2$. 'n Lyn L deur die oorsprong in $\mathbb{R}^2$ is 'n deelruimte van $\mathbb{R}^2$:



Figuur 1.6.6 A line through the origin in $\mathbb{R}^2$.

Onthou dat lyn L gespesifiseer kan word deur 'n homogene lineêre vergelyking van die form:

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by = 0\} \tag{1.6.1}$$

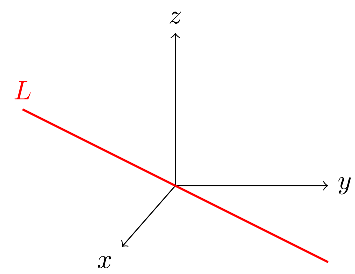
vir konstantes a en b. So, as $\mathbf{v} = (x, y)$ en $\mathbf{v}' = (x', y')$ op L lê, dan lê hul som $\mathbf{v} + \mathbf{v}' = (x + x', y + y')$ ook op L, want hul komponente bevredig die definiërende vergelyking (1.6.1):

$$\begin{aligned}
&a(x + x') + b(y + y') \\
&= (ax + by) + (ax' + by') \\
&= 0 + 0 && \text{(want } ax + by = 0 \text{ en } ax' + by' = 0\text{)} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

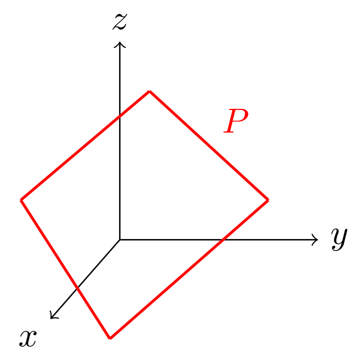
Dit maak ook meetkundig sin: As jy na beeld 1.6.6 kyk, sal jy sien dat die som van twee vektore $\mathbf{v}, \mathbf{v}'$ op L met die kop-op-stert-metode 'n verdere vektor op L tot gevolg sal hê. □

Verstaanpunt 1.6.7 Voltooi die bewys dat L 'n deelruimte van $\mathbb{R}^2$ is deur na te gaan dat die nul-vektor op lyn L is en dat die vermenigvuldiging van 'n vektor in L met 'n skalaar 'n vektor op L lewer.

Voorbeeld 1.6.8 Lyne en vlakke in $\mathbb{R}^3$. 'n Lyn L en 'n vlak P deur die oorsprong in $\mathbb{R}^3$ is ook 'n deelruimte van $\mathbb{R}^3$:



Figuur 1.6.9 ’n Lyn deur die oorsprong in $\mathbb{R}^3$.



Figuur 1.6.10 ’n Vlak deur die oorsprong in $\mathbb{R}^3$.

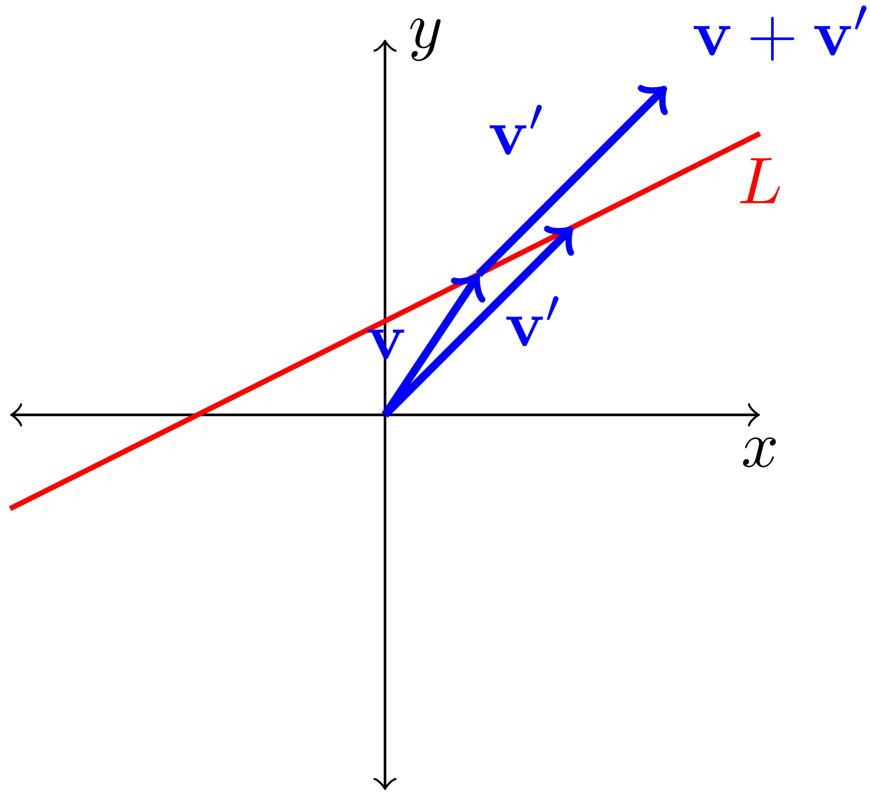
□

Voorbeeld 1.6.11 Nul-vektorruimte. As V ’n vektorruimte is, dan is die versameling $\{\mathbf{0}\} \subseteq V$ wat slegs die nul-vektor $\mathbf{0}$ ’n deelruimte van V. □

Verstaanpunt 1.6.12 Toets dat dit waar is.

Voorbeeld 1.6.13 Nie ’n vektorruimte nie: ’n Lyn nie deur die oorsprong nie. Wees egter versigtig — nie *elke* lyn $L \subset \mathbb{R}^2$ vorm ’n deelruimte van $\mathbb{R}^2$ nie. As L nie deur die oorsprong loop nie, dan vind ons dat $\mathbf{0} \notin L$, so L is nie ’n deelruimte nie.

Nog ’n rede dat L nie ’n deelruimte is nie is dat dit nie geslote onder optelling is nie: As ons twee nie-nul vektore $\mathbf{v}$ en $\mathbf{v}'$ op L bymekaar tel, kry ons ’n vektor $\mathbf{v} + \mathbf{v}'$ wat nie op L lê nie:



Figuur 1.6.14 'n Lyn wat nie deur die oorsprong gaan nie, is nie geslote onder optelling nie.

□

Voorbeeld 1.6.15 Hipervlakke ortognaal tot 'n vaste vektor. Hierdie voorbeeld veralgemeen Voorbeeld 1.6.8 na hoër dimensies. Laat $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ 'n vaste nie-nul vektor wees. Die *hipervlak ortogonaal tot* $\mathbf{v}$ is die versameling W van alle vektore ortogonaal tot $\mathbf{v}$, met ander woorde,

$$W := \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0\}. \tag{1.6.2}$$

Jy sal in Oefening Verstaanpunt 1.6.16 bewys dat W 'n deelruimte van $\mathbb{R}^n$ is.

Beskou byvoorbeeld die vektor $\mathbf{v} = (1, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$. Dan is die hipervlak ortogonaal tot $\mathbf{v}$ die versameling

$$W = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0\}. \tag{1.6.3}$$

As ons $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ skryf, dan is $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$ ekwivalent aan die vergelyking

$$w_1 + 2w_2 + 3w_3 = 0. \tag{1.6.4}$$

So, W kan gesien word as die versameling vektore in $\mathbb{R}^3$ wie se komponente (1.6.4) bevredig. □

Verstaanpunt 1.6.16 Laat $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ 'n vaste nie-nul vektor wees. Wys dat

$$W := \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0\}.$$

'n deelruimte van $\mathbb{R}^n$ is.

Oplossing. Ons stel eers vas of dit geslote is onder optelling.

Veronderstel dat $\mathbf{w}, \mathbf{w}' \in W$. Dus is, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$ en $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}' = 0$. Ons moet wys dat $\mathbf{w} + \mathbf{w}' \in W$, met ander woorde dat $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} + \mathbf{w}') = 0$. Dit geld inderdaad, omdat

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} + \mathbf{w}) &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}' \\ &= 0 + 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Volgende kyk ons of dit die nul-vektor bevat.

Aangesien $\mathbf{v} \cdot \mathbf{0} = 0$, lei ons af dat $\mathbf{0} \in W$.

Laastens moet ons kyk of dit geslote is onder skalaarvermenigvuldiging.

Veronderstel dat $\mathbf{w} \in W$ en dat k 'n skalaar is. Met ander woorde veronderstel dat, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$. Ons moet wys dat $k.\mathbf{w} \in W$, of met ander woorde dat $\mathbf{v} \cdot (k.\mathbf{w}) = 0$. Dit geld ook, omdat

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot (k.\mathbf{w}) &= k.(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) \\ &= (k)(0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Voorbeeld 1.6.17 Kontinue funksies as 'n deelruimte. Die versameling

$$\mathrm{Cont}(I) := \{\mathbf{f} : I \to \mathbb{R}, \ \mathbf{f} \text{ kontinu}\}$$

van alle kontinue funksies op die interval I is 'n deelruimte van die versameling $\mathrm{Fun}(I)$ van *alle* funksies op I. Kom ons bevestig dat dit die definisie bevredig. Jy weet reeds van vorige kursusse dat:

- As $\mathbf{f}$ en $\mathbf{g}$ kontinue funksies op I is, dan is $\mathbf{f} + \mathbf{g}$ ook 'n kontinue funksie.
- Die nul-funksie $\mathbf{0}$ gedefinieer as $\mathbf{0}(x) = 0$ vir alle $x \in I$ is 'n kontinue funksie.
- As $\mathbf{f}$ 'n kontinue funksie is en k 'n skalaar is, dan is $k \cdot \mathbf{f}$ ook kontinu.

Daarom, deur Hulpstelling 1.6.4, is $\mathrm{Cont}(I)$ 'n vektorruimte in eie reg. □

Voorbeeld 1.6.18 Differensieerbare funksies as 'n deelruimte. Op soortgelyke wyse is die versameling

$$\mathrm{Diff}(I) := \{\mathbf{f} : (0,1) \to \mathbb{R}, \ \mathbf{f}\text{differensieerbaar}\}$$

van differensieerbare fuksies op die oop interval I 'n deelruimte van $\mathrm{Fun}(I)$. □

Verstaanpunt 1.6.19 Bevestig dit. Ook, is $\mathrm{Diff}(I)$ 'n deelruimte van $\mathrm{Cont}(I)$?

Voorbeeld 1.6.20 Vektorruimtes van polinome. 'n *Polinoom* is 'n funksie $\mathbf{p} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ van die vorm

$$\mathbf{p}(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0. \tag{1.6.5}$$

vir onveranderlike reële koëffisiënte $a_0, \ldots, a_n$. Twee polinome $\mathbf{p}$ en $\mathbf{q}$ is *gelyk* as hulle *as funksies* gelyk is, m.a.w. as $\mathbf{p}(x) = \mathbf{q}(x)$ vir alle $x \in \mathbb{R}$. Die *graad* van 'n polinoom is die hoogste mag van x wat in die formule voorkom.

Byvoorbeeld, $2x^3 - x + 7$ is 'n polinoom van graad 3, terwyl $x^5 - 2$ 'n polinoom van graad 5 is.

Die versameling van *alle* polinome word as Poly geskryf en die versameling van alle polinome van 'n graad kleiner of gelyk aan n word as Poly_n geskryf. □

Verstaanpunt 1.6.21 Gaan na dat Poly en Poly_n wel deelruimtes van $\text{Cont}(\mathbb{R})$ is.

Voorbeeld 1.6.22 Polinome in meer as een veranderlike. 'n *monoom* in twee veranderlikes x en y is 'n uitdrukking van die vorm $x^m y^n$ vir sekere nie-negatiewe heelgetalle m, n. Die *graad* van die monoom is $m+n$. Byvoorbeeld,

$$\underbrace{x^3y^2}_{\text{graad } 5}, \quad \underbrace{y^7}_{\text{graad } 7}.$$

'n *Polinoom in twee veranderlikes x en y* is lineêre kombinasie van monome. Die *graad* van die polinoom is die hoogste mag van die monome wat in die lineêre kombinasie verskyn. Byvoorbeeld,

$$p = 5x^3y^2 - 3xy^7 \tag{1.6.6}$$

is 'n polinoom in x en y van graad 8.

Ons skryf $\text{Poly}[x, y]$ vir die versamleing van *alle* polinome in twee veranderlikes x en y, en $\text{Poly}_n[x, y]$ vir die versameling van alle polinome in x en y met graad minder of gelyk aan n.

Ons kan 'n polinoom p in twee veranderlikes beskou as 'n funksie

$$\begin{aligned} p : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto p(x, y) \end{aligned}$$

In hierdie manier kan ons $\text{Poly}_n[x, y]$ beskou as'n deelversameling van die vektorruimte $\text{Fun}(\mathbb{R}^2)$ van *alle* reëelwaardige funksies op $\mathbb{R}^2$ (sien Voorbeeld 1.4.10 om ouself te herinner van die vektorruimte van reëelwaardige funksies op 'n versameling X). Inderdaad, $\text{Poly}_n[x, y]$ is 'n *deelruimte* van $\text{Fun}(\mathbb{R}^2)$, en dus is dit 'n vektorruimte.

Twee polinome p en q in veranderlikes x en y is gedefineer as *gelyk*as en slegs as al hulle ooreenstemmende koëffisiente gelyk aan mekaar is. Dit is ekwivalent aan die bewering dat $p(x, y) = q(x, y)$ vir alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

In dieselfde manier, kan ons praat van polinome in x, y, z ensovoorts, byvoorbeeld

$$r = 5x^3y^2z + 3xy - 4xz^3 \in \text{Poly}_6[x, y, z].$$

□

As ons net 'p is 'n polinoom' sê, bedoel ons dat p 'n polinoom in 'n enkele veranderlike x is, met ander woorde $p \in \text{Poly}$. Let up dat $\text{Poly} = \text{Poly}[x]$.

Voorbeeld 1.6.23 Polinomiaal vektorvelde. Onthou dat 'n *vektorveld* op $\mathbb{R}^2$ 'n vektor is wie se komponente funksies is van x en y. Byvoorbeeld,

$$\mathbf{V} = (x^2y, x\cos(y)).$$

Ons skryf $\text{Vect}_n(\mathbb{R}^2)$ vir die versameling van alle vektorvelde

$$\mathbf{V} = (P(x, y), Q(x, y))$$

op $\mathbb{R}^2$ wie se komponentfunksies P en Q polinome inx, y met graad minder of gelyk aan n is. Byvoorbeeld,

$$\mathbf{V} = (xy, x^2y^3 - x) \in \text{Vect}_5(\mathbb{R}^2).$$

Ons defineer addisie en skalaarvermenigvuldiging vir vektorvelde in dieselfde manier as vir gewone vektore. Dit wil sê, as $\mathbf{V} = (V_1, V_2)$ en $\mathbf{W} = (W_1, W_2)$ vektorvelde op $\mathbb{R}^2$ is, dan defineer ons

$$\mathbf{V} + \mathbf{W} := (V_1 + W_1, V_2 + W_2).$$

Soortgelyk, as $k \in \mathbb{R}$, defineer ons

$$k\mathbf{V} = (kV_1, kV_2).$$

Die nulvektorveld is gedefineer as die vektorveld wie se komponente die nulfunksie is:

$$Z = (0, 0).$$

Met hierdie definisies kan ons bevestig dat $\text{Vect}_n(\mathbb{R}^2)$ wel die reëls van 'n vektorruimte bevredig. $\square$

Voorbeeld 1.6.24 Trigonometriese polinome. 'n *Trigonometriese polinoom* is 'n funksie $\mathbf{T} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ van die vorm

$$\mathbf{T}(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin(kx). \tag{1.6.7}$$

Die *graad* van 'n trigonometriese polinoom is die grootste veelvoud van x wat binne een van die sinusse of kosinusse in die formule voorkom. Byvoorbeeld,

$$3 - \cos(x) + 6\sin(3x)$$

is 'n trigonometriese polinoom van graad 3. Ons skryf die versameling van *alle* trigonometriese polinome as Trig en die versameling van alle trigonometriese polinome van graad kleiner of gelyk aan n as Trig_n. $\square$

Verstaanpunt 1.6.25 Wys dat Trig en Trig_n deelruimtes van $\text{Cont}(\mathbb{R})$ is.

Verstaanpunt 1.6.26 Oorweeg die funksie $\mathbf{f}(x) = \sin^3(x)$. Wys dat $\mathbf{f} \in \text{Trig}_3$ deur dit in die vorm (1.6.7) te skryf. Wenk: gebruik die identiteite

$$\begin{aligned}
\sin(A)\sin(B) &= \frac{1}{2}(\cos(A-B) - \cos(A+B)) \\
\sin(A)\cos(B) &= \frac{1}{2}(\sin(A-B) + \sin(A+B)) \\
\cos(A)\cos(B) &= \frac{1}{2}(\cos(A-B) + \cos(A+B))
\end{aligned}$$

wat maklik volg uit die optellingsformules

$$\begin{aligned}
\sin(A \pm B) &= \sin A \cos B \pm \cos A \sin B \\
\cos(A \pm B) &= \cos A \cos B \mp \sin A \sin B.
\end{aligned}$$

1.6.3 Oplossings van homogene lineêre differensiaalvergelykings

'n Homogene n-de graadse lineêre gewone differensiaalvergelyking op 'n interval I is 'n differentiaalvergelyking van die vorm

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0, \quad x \in I \tag{1.6.8}$$

waar $y^{(k)}$ die k-ste afgeleide van y aandui. 'n *Oplossing* vir die differensiaalvergelyking is 'n funksie $y(x)$ gedefinieer op die interval Iwat (1.6.8) bevredig.

Voorbeeld 1.6.27 Voorbeeld van 'n tweedegraadse homogene lineêre differensiaalvergelyking. Die differensiaalvergelyking

$$x^2y'' - 3xy' + 5y = 0, \quad x \in (0, \infty) \tag{1.6.9}$$

is byvoorbeeld 'n 2de graadse lineêre differensiaalvergelyking op die interval

$(0, \infty)$ en

$$y_1(x) = x^2 \sin(\log x) \tag{1.6.10}$$

is een oplossing vir (1.6.9) en die funksie

$$y_2(x) = x^2 \cos(\log x) \tag{1.6.11}$$

is 'n tweede oplossing vir (1.6.9).

Ons kan SageMath gebruik om te kyk dat hulle inderdaad oplossing vir (1.6.9) is. Kliek die `Evaluate (Sage)` knoppie — die behoort die uitset 'True' te gee wat aandui dat y_1 werklik 'n oplossing vir die differensiaalvergelyking is.

```
def solves_de(y):
 return bool(x^2 *diff(y,x,2) -3*x*diff(y,x) + 5*y == 0)

y1 = x^2*sin(log(x))

solves_de(y1)
```

Pas die kode hier bo aan om te bepaal of y_2 'n oplossing vir die differensiaalvergelyking (1.6.9) is.

Ons kan ook die grafieke van y_1 and y_2 met SageMath teken. Kliek weer op `Evaluate (Sage)`.

```
y1 = x^2*sin(log(x))
y2 = x^2*cos(log(x))

plot([y1, y2], (x, 0, 1), legend_label=['y1', 'y2'])
```

Speel met die kode hier bo en teken nog 'n paar ander funksies. □

Verstaanpunt 1.6.28 Toets met pen en papier berekeninge dat (1.6.10) en (1.6.11) werklik oplossings vir die differensiaalvergelyking (1.6.9) is.

Veronderstel daar word aan ons 'n n-de graadse homogene differensiaalvergelyking van die vorm (1.6.8) op 'n sekere interval $I \subseteq \mathbb{R}$ gegee. Skryf V vir die versameling van *alle* oplossings vir die differensiaalvergelyking. Dit is,

$$V := \{y : a_n(x)y^{(n)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0\} \tag{1.6.12}$$

Ons kan V sien as 'n deelversameling van die versameling van *alle* funksies op die interval I:

$$V \subseteq \operatorname{Fun}(I)$$

Verstaanpunt 1.6.29 Wys dat V 'n deelruimte 1.6.1 van $\operatorname{Fun}(I)$ is.

So, by Hulpstelling 1.6.4, we conclude that *the set of solutions to a homogenous linear differential equation is a vector space.*

Voorbeeld 1.6.30 Vervlging van Voorbeeld 1.6.27. Beskou weer die differensiaalvergelyking van Voorbeeld 1.6.27. Ons het gesien dat

$$y_1 = x^2 \sin(\log x), \quad y_2 = x^2 \cos(\log x)$$

oplosings hiervoor is. Dus is enige lineêre kombinasie van y_1 en y_2 *ook* 'n oplossing. Byvoorbeeld,

$$y = 2y_1 + 5y_2$$

is ook 'n oplossing. Kom ons gebruik weer SageMath om dit na te gaan.

```
def solves_de(y):
  return bool(x^2 *diff(y,x,2) -3*x*diff(y,x) + 5*y == 0)

y1 = x^2*sin(log(x))
y2 = x^2*sin(cos(x))

solves_de(2*y1 + 5*y2)
```

□

Voorbeeld 1.6.31 'n Nie-voorbeeld: Oplossings vir 'n nie-lineêre gewone differensiaalvergelyking. Ons het in die vorige voorbeeld gesien dat lineêre gewone differensiaalvergelykings gemaklik 'n gemaklike teorie het, omdat lineêre kombinasies van oplossings weer oplossings is. Dit hoef nie noodwendig in die nie-lineêre geval te gebeur nie. Kyk byvoorbeeld na die nie-lineêre differensiaalvergelyking

$$y' = y^2. \tag{1.6.13}$$

Die algemene oplossing word gegee deur

$$y_c = \frac{1}{c - x}$$

waar c 'n konstante is. Die funksies

$$y_1 = \frac{1}{1 - x}, \quad y_2 = \frac{1}{2 - x}$$

is byvoorbeeld oplossings.

Gebruik die SageMath kode hier onder om vas te stel of die lineêre kombinasie $y_1 + y_2$ ook 'n oplossing is.

```
y = function('y')(x)

def solves_de(f):
 return bool(diff(f,x) - f^2 == 0)

y1 = 1/(1-x)
y2 = 1/(2-x)

solves_de(y1+y2)
```

Die antwoord is `False`! So lineêre kombinasies van oplossings vir die nieilneêre differensiaalvergelyking (1.6.13) is nie noodwendig weer oplossings nie.

□

Voorbeeld 1.6.32 Uitwerk van die algemene oplossing van 'n differensiaalvergelyking m.b.v. SageMath. Let us use SageMath to find the general solution of the following ordinary differential equation

$$y'' + 2y' + y = 0. \tag{1.6.14}$$

Ons kan die as volg doen. Let op dat ons nou 'n bietjie meer versigtig moet wees. Ons moet eers ons veranderlike x definieer en dan sê dat y 'n funksie van x is.

```
var('x')
y = function('y')(x)

diff_eqn = diff(y,x,2) +2*diff(y,x,1) + 5*y == 0
  desolve(diff_eqn,y)

desolve(diff_eqn, y)
```

SageMath rapporteer dat die algemene oplossing in terme van twee onbepaalde konstantes `_K1` en `_K2` gegee word as `(_K2*cos(2*x) + _K1*sin(2*x))*e^(-x)`.

As ons `_K1` gelyk aan 1 stel en `_K2` gelyk aan 0 stel, dan kry ons 'n spesifieke oplossing y_1 vir die differensiaalvergelyking.

```
var('x,␣_K1,␣_K2')
y = function('y')(x)

diff_eqn = diff(y,x,2) +2*diff(y,x,1) + 5*y == 0

my_soln = desolve(diff_eqn,y)

y1 = my_soln.substitute(_K1==1, _K2==0)

y1
```

SageMath sê dat $y_1 = e^{-x}\sin(2x)$ 'n spesifieke olossing is.

Pas die kode aan om `_K2` gelyk aan 0 en `_K1` gelyk aan 1 te stel om 'n ander spesifieke oplossing y_2 te kry. Wat is y_2? □

1.6.4 Oefeninge

1. Wys dat die versameling

$$V := \{(a, -a, b, -b) : a, b \in \mathbb{R}\}$$

'n deelruimte van $\mathbb{R}^4$ is.

2. Wys dat die versameling

$$V := \{\text{polinome van die vorm } \mathbf{p}(x) = ax^3 + bx^2 - cx + a,\ a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

'n deelruimte van Poly_3 is.

3. Laat $b \in \mathbb{R}$. Bewys dat

$$V := \{(x_1,\, x_2,\, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = b\}$$

'n deelruimte van $\mathbb{R}^3$ is as en slegs as $b = 0$. (Onthou dat as en slegs as beteken dat die vorentoe- *en* die terug-implikasie bewys moet word.)

4. Beskou die versameling

$$V := \{\mathbf{f} \in \text{Diff}((-1, 1)) : f'(0) = 2\}.$$

Is V 'n deelruimte van $\text{Diff}((-1, 1))$? As jy dink dat dit is, *bewys* dat dit so is. As jy dink dit is nie, *bewys* dat dit nie is nie!

5. Beskou die versameling

$$V := \{(x_1,\, x_2,\, x_3,\, \ldots) \in \mathbb{R}^\infty : \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}.$$

Is V 'n deelruimte van $\mathbb{R}^\infty$? As jy dink dat dit is, *bewys* dat dit is. As jy dink dit is nie, *bewys* dat dit nie is nie!

6. Is $\mathbb{R}^+ := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R} : \mathbf{x} \geq 0\}$ 'n deelruimte van $\mathbb{R}$? As jy dink dat dit is, *bewys* dat dit is. As jy dink dit is nie, *bewys* dat dit nie is nie!

7. Gee 'n voorbeeld van 'n nie-leë deelversameling U van $\mathbb{R}^2$ wat geslote is onder optelling en die vind van optellingsinverses (i.e. as $\mathbf{u}$ in U is, dan is $-\mathbf{u}$ in V), maar nié 'n deelruimte van $\mathbb{R}^2$ is nie.

8. Gee 'n voorbeeld van 'n nie-leë deelversameling V van $\mathbb{R}^2$ wat geslote onder skalaarvermenigvuldiging is, maar nié 'n deelruimte van $\mathbb{R}^2$ is nie.

The next 4 exercises will help acquaint the reader with the concept of the *sum of two subspaces*. First, we'll need to define what that is.

Let V be a vector space. Suppose U and W are two subspaces of V. The sum $U + W$ of U and W is defined by

$$U + V = \{\mathbf{u} + \mathbf{w} \in V \,:\, \mathbf{u} \in U, \mathbf{w} \in W\} \tag{1.6.15}$$

In the exercises below, V, U, W will be as above.

9. Show that $U + V$ is a subspace of V.

10. Show that $U + V$ is, in fact, the smallest subspace of V containing both U and V.

11. If $W \subset U$ what is $U + W$?

12. Can you think of two subspaces of $\mathbb{R}^2$ whose sum is $\mathbb{R}^2$? Similarly, can you think of two subspaces of $\mathbb{R}^2$ whose sum is *not* all of $\mathbb{R}^2$?

1.6.5 Oplossings

Hoofstuk 2

Eindigdimensionele vektorruimtes

In hierdie kursus konsentreer ons op *eindig dimensionele* vektorruimtes, wat ons in hierdie hoofstuk sal definieer.

> *Waarskuwing*: Van hier af verder gaan ek verkorte notasie vir skalaarvermenigvuldiging gebruik en $k \cdot \mathbf{v}$ bloot as $k\mathbf{v}$ skryf!

2.1 Lineêre kombinasies en span

Ons begin met 'n paar basiese definisies.

Definisie 2.1.1 'n **Lineêre kombinasie** van 'n eindige kolleksie vektore $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ in 'n vektorruimte V is 'n vektor van die vorm

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_b\mathbf{v}_n \tag{2.1.1}$$

waar $a_1, a_2, \ldots, a_n$ skalare is. As al die skalare a_i gelyk aan nul is, dan sê ons dat dit die **triviale lineêre kombinasie** is. ◊

Voorbeeld 2.1.2 Eerste voorbeeld van 'n lineêre kombinasie. In $\mathbb{R}^3$ is $(6, 2, -14)$ 'n lineêre kombinasie van $(-3, 1, 2)$ en $(-2, 0, 3)$, want

$$(6, 2, -14) = 2(-3, 1, 2) - 6(-2, 0, 3).$$

□

Voorbeeld 2.1.3 Toets of 'n vektor 'n lineêre kombinasie van ander vektore is. In $\mathbb{R}^4$, is $\mathbf{v} = (2, -1, 3, 0)$ 'n lineêre kombinasie van

$$\mathbf{v}_1 = (1, 3, 2, 0), \mathbf{v}_2 = (5, 1, 2, 4), \text{ en } \mathbf{v}_3 = (-1, 0, 2, 1)?$$

Om dit te toets, moet ons vasstel of die vergelyking

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + a_3\mathbf{v}_3, \tag{2.1.2}$$

in die onbekendes a_1, a_2, a_3 enige oplossings het. Kom ons skryf (2.1.2) eksplisiet uit:

$$(2, -1, 3, 0) = a_1(1, 3, 2, 0) + a_2(5, 1, 2, 4) + a_3(-1, 0, 2, 1) \tag{2.1.3}$$

$$\therefore (2, -1, 3, 0) = (a_1 + 5a_2 - a_3, 3a_1 + a_2, 2a_1 + 2a_2 + 2a_3, 4a_2 + a_3) \quad (2.1.4)$$

Die vergelyking (2.1.4) is 'n vergelyking tussen twee vektore in $\mathbb{R}^4$. Twee vektore in $\mathbb{R}^4$ is gelyk as en slegs as hul ooreenstemmende koëffisiënte gelyk is. So, (2.1.2) is ekwivalent aan die stelsel gelyktydige lineêre vergelykings:

$$a_1 + 5a_2 - a_3 = -2 \quad (2.1.5)$$
$$3a_1 + a_2 = -1 \quad (2.1.6)$$
$$2a_1 + 2a_2 + 2a_3 = 3 \quad (2.1.7)$$
$$4a_2 + a_3 = 0 \quad (2.1.8)$$

Met ander woorde, ons vraag is nou: het die stelsel (2.1.5)–(2.1.8) 'n oplossing?

Jy behoort reeds uit jou eerstejaarkennis te weet hoe om hierdie tipe probleem met die hand op te los. Ons kan egter ook SageMath gebruik om dit namens ons te doen. Ons sê gewoon wat ons onbekende veranderlikes en vra dit dan om die stelsel op te los. Druk `Evaluate (Sage)` om die uitslag te sien.

```
var('a1, a2, a3')

solve([a1 + 5*a2 - a3 == 2,
      3*a1 + a2 == -1,
      2*a1 + 2*a2 + 2*a3 ==3,
      4*a2 + a3 == 0],
      [a1, a2, a3])
```

SageMath gee 'n leë lys `[]` as uitset. Met ander woorde, daar is geen oplossing vir die stelsel (2.1.5)–(2.1.8) nie. Daarom kan $\mathbf{v}$ nie as 'n lineêre kombinasie van $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ uitgedruk word nie. □

Voorbeeld 2.1.4 Toets of 'n polinoom 'n lineêre kombinasie van ander polinome is. In Poly_2, is dit moontlik om $p = x^2 - 1$ as 'n lineêre kombinasie van

$$p_1 = 1 + x^2,\ p_2 = x - 3,\ p_3 = x^2 + x + 1,\ p_4 = x^2 + x - 1$$

uit te druk?

Om dit vas te stel, moet ons toets of die vergelyking

$$p = a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 + a_4 p_4, \quad (2.1.9)$$

in die onbekendes a_1, a_2, a_3, a_4 enige oplossings het. Kom ons skryf (2.1.9) eksplisiet uit, deur magte van x saam te groepeer:

$$\begin{aligned} p &= a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 + a_4 p_4 \\ \therefore x^2 - 1 &= a_1(1 + x^2) + a_2(x - 3) + a_3(x^2 + x + 1) + a_4(x^2 + x - 1) \\ \therefore -1 + x^2 &= (a_1 - 3a_2 + a_3 - a_4) + (a_2 + a_3 + a_4)x + (a_1 + a_3 + a_4)x^2 \end{aligned}$$

Twee polinome is gelyk as en slegs as elkeen van hul koëffisiënte gelyk is. So, (2.1.9) is ekwivalent aan die volgende stelsel gelyktydige lineêre vergelykings:

$$a_1 - 3a_2 + a_3 - a_4 = -1 \quad (2.1.10)$$
$$a_2 + a_3 + a_4 = 0 \quad (2.1.11)$$
$$a_1 + a_3 + a_4 = 1 \quad (2.1.12)$$

Ons vraag word dus: het ie stelsel (2.1.10)–(2.1.12) 'n oplossing? Ons gebruik weer SageMath om ons te help:

```
var('a1,␣a2,␣a3,␣a4')

solve([a1 - 3*a2 + a3 - a4 == -1,
       a2 + a3 + a4 == 0,
       a1 + a3 - a4 == 1],
       [a1, a2, a3, a4])
```

Op my rekenaar is die uitset:

```
[[a1 == 2*r1 + 2/3, a2 == (2/3), a3 == -r1 + 1/3, a4 == r1]]
```

Hier moet `r1` en `r2` as vrye parameters interpreteer word. Ek gaan hulle s en t noem, want dis wat ons gewoonlik gebruik! Dus het die stelsel (2.1.10)–(2.1.12) *oneindig* baie oplossings, geparametriseer deur twee vrye veranderlikes s en t. In besonder bestaan daar *ten minste een* oplossing. Byvoorbeeld, as ons $s = 2$ en $t = 1$ neem (heeltemal lukrake keuse!), kry ons die volgende oplossing:

$$a_1 = \frac{8}{3},\ a_2 = \frac{2}{3}, a_3 = -\frac{5}{3}, a_4 = 1 \tag{2.1.13}$$

$$\text{i.e. } p = \frac{8}{3}p_1 + \frac{2}{3}p_2 - \frac{5}{3}p_3 + p_4 \tag{2.1.14}$$

Jy moet die regterkant van (2.1.14) met die hand uitbrei en kyk dat dit inderdaad gelyk aan p is.

Ons lei af dat p wel as 'n lineêre kombinasie van p_1, p_2, p_3 en p_4 geskryf kan word. □

Voorbeeld 2.1.5 Definieer die funksies $\mathbf{f}, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 \in \text{Diff}$ as

$$\mathbf{f}(x) = \cos^3 x, \mathbf{f}_1(x) = \cos(x), \mathbf{f}_2(x) = \cos(3x).$$

Dan is $\mathbf{f}$ 'n lineêre kombinasie van $\mathbf{f}_1$ en $\mathbf{f}_2$, vanweë die identiteit $\cos(3x) = \frac{1}{4}(3\cos x + \cos(3x))$. Sien Voorbeeld 1.6.24. Met ander woorde,

$$\mathbf{f} = \frac{3}{4}\mathbf{f}_1 + \frac{1}{4}\mathbf{f}_2.$$

Hierdie voorbeeld wys dat $\mathbf{f}$ ook 'n trigonometriese polinoom is, selfs al is die oorspronklike formule $\mathbf{f}(x) = \cos(3x)$ nie van die form (1.6.7) nie. □

Definisie 2.1.6 Ons sê dat die lys vektore $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ in 'n vektorruimte V V **span** as elke vektor $\mathbf{v} \in V$ 'n lineêre kombinasie van die vektore uit $\mathcal{B}$. ◊

Voorbeeld 2.1.7 $\mathbb{R}^2$ word deur

$$\mathbf{e}_1 := (1,\, 0),\ \ \mathbf{e}_2 := (0, 1)$$

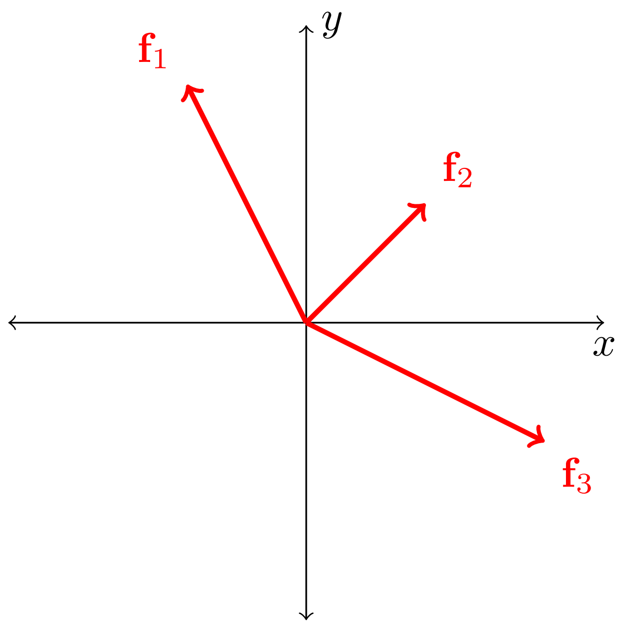
gespan, want elke vektor $\mathbf{v} = (a_1,\, a_2)$ kan as 'n lineêre kombinasie

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2$$

uitgedruk word. □

Voorbeeld 2.1.8 Toets of 'n lys vektore 'n vektorruimte onderspan. Word $\mathbb{R}^2$ onderspan deur die volgende lys vektore?

$$\mathbf{f}_1 := (-1, 2),\ \mathbf{f}_2 := (1, 1),\ \mathbf{f}_3 := (2, -1)$$



Figuur 2.1.9 'n Lys vektore wat $\mathbb{R}^2$ onderspan.

Oplossing. Om dit te toets, moet ons kyk of elke vektor $\mathbf{v} \in V$ as 'n lineêre kombinasie van $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ and $\mathbf{f}_3$ geskryf kan word.

So, laat $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ 'n vaste, maar willekeurige vektor in $\mathbb{R}^2$ wees. Ons moet kyk of die volgende vergelyking 'n oplossing vir a_1, a_2, a_3 het:

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{f}_1 + a_2\mathbf{f}_2 + a_3\mathbf{f}_3 \tag{2.1.15}$$

Kom ons skryf hierdie vergelyking eksplisiet uit:

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{f}_1 + a_2\mathbf{f}_2 + a_3\mathbf{f}_3 \tag{2.1.16}$$
$$\therefore (v_1, v_2) = a_1(-1, 2) + a_2(1, 1) + a_3(2, -1) \tag{2.1.17}$$
$$\therefore (v_1, v_2) = (-a_1 + a_2 + 2a_3, 2a_1 + a_2 - a_3) \tag{2.1.18}$$

Die vergelyking (2.1.18) is 'n vergelyking tussen twee vektore in $\mathbb{R}^2$. Twee vektore in $\mathbb{R}^2$ is gelyk as en slegs as hul ooreenstemmende koëffisiënte gelyk is. So, (2.1.18) is ekwivalent aan die volgende stelsel gelyktydige vergelykings:

$$-a_1 + a_2 + 2a_3 = v_1 \tag{2.1.19}$$
$$2a_1 + a_2 - a_3 = v_2 \tag{2.1.20}$$

Met ander woorde, die oorspronklike vraag

> Word $\mathbb{R}^2$ deur $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ onderspan?

is ekwivalent aan die vraag

> Kan ons altyd die stelsel (2.1.19)–(2.1.20) vir a_1, a_2, a_3 oplos, maak nie saak wat die vaste konstantes $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ is nie?

Jy weet reeds hoe om gelyktydige lineêre vergelykings soos (2.1.19)–(2.1.20) met die hand op te los:

$$-a_1 + a_2 + 2a_3 = v_1 \tag{2.1.21}$$
$$2a_1 + a_2 - a_3 = v_2 \tag{2.1.22}$$

$$ \tag{2.1.23} $$

$$ \therefore -a_1 + a_2 + 2a_3 = v_1 \tag{2.1.24} $$

$$ 3a_2 + 3a_3 = 2v_1 + v_2 \qquad R2 \to R2 + 2R1 \tag{2.1.25} $$

$$ \tag{2.1.26} $$

$$ \text{Let } a_3 = t \tag{2.1.27} $$

$$ \therefore a_2 = \frac{1}{3}(2v_1 + v_2) - t \tag{2.1.28} $$

$$ \therefore a_1 = -\frac{1}{3}(-v_1 + v_2) + t \tag{2.1.29} $$

Met ander woorde, maak nie saak wat v_1, v_2 is nie, daar is altyd oneindig baie oplossings (geparametriseer deur die vrye veranderlike t) vir (2.1.19)–(2.1.20), en dus vir ons oorspronklike vergelyking (2.1.15). Ons kan dus *enige* $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ as 'n lineêre kombinasie van die vektore $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ uitdruk en daar is selfs *oneindig* baie maniere om dit te doen!

Kom ons probeer byvoorbeeld die vektor $\mathbf{v} = (2, 3)$ as 'n lineêre kombinasie van $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ skryf. As ons ons algemene oplossing (2.1.27)–(2.1.29) neem, en $t = 0$, neem, dan kry ons

$$ a_1 = \frac{1}{3},\ a_2 = \frac{7}{3},\ a_3 = 0 $$
$$ \text{i.e. } \mathbf{v} = \frac{1}{3}\mathbf{f}_1 + \frac{7}{3}\mathbf{f}_2 $$

Ons sou ook byvoorbeeld $t = 1$ kon neem. Dan sou ons oplossing

$$ a_1 = \frac{4}{3},\ a_2 = \frac{4}{3},\ a_3 = 1 $$
$$ \text{i.e. } \mathbf{v} = \frac{4}{3}\mathbf{f}_1 + \frac{4}{3}\mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3 $$

wees.

Daar is oneindig baie oplossings, maar die belangrike punt is dat daar *altyd 'n oplossing vir (2.1.15) is*, maak nie saak wat $\mathbf{v}$ is nie. Daarom sal die vektore $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ die vektorruimte $\mathbb{R}^2$ onderspan.

Kom ons los laastens ook die probleem met SageMath op. Deur met die hand te werk, kom ons by die stelsel lineêre vergelykings (2.1.19)–(2.1.20), en dit is wat ons as invoer in SageMath gebruik:

```
var('a1, a2, a3, v1, v2')

solve([-a1 + a2 + 2*a3 == v1,
       2*a1 + a2 - a3  == v2],
       [a1, a2, a3])
```

Let op dat ek eers vir SageMath moet sê dat `v1` en `v2` veranderlikes is, en dat ek vra dat dit vir `a1`, `a2` en `a3` moet oplos. Op my rekenaar is die uitset:

```
[[a1 == r1 - 1/3*v1 + 1/3*v2, a2 == -r1 + 2/3*v1 + 1/3*v2, a3 == r1]]
```

Hier moet `r1` interpreteer word as ons vrye parameter, wat ons vroeër t genoem het. Dus gee SageMath dieselfde oplossing (2.1.27)–(2.1.29) as wat ons met die hand gekry het. □

Voorbeeld 2.1.10 $\mathbb{R}^n$ word deur

$$ \mathbf{e}_1 := (1, 0, \ldots, 0),\ \ \mathbf{e}_2 := (0, 1, \ldots, 0),\ \ \ldots,\ \ \mathbf{e}_n := (0, 0, \ldots, 0, 1) \tag{2.1.30} $$

onderspan, want elke vektor $\mathbf{v} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ kan as 'n lineêre kombinasie

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \cdots + a_n\mathbf{e}_n. \tag{2.1.31}$$

uitgedruk word. □

Verstaanpunt 2.1.11 Bevestig die korrektheid van (2.1.31).
Oplossing.

$\mathbf{v} = a_1\mathbf{e}_1+a_2\mathbf{e}_2+\cdots+a_n\mathbf{e}_n = a_1(1,\ldots,0)+\cdots a_n(0,\ldots,1) = (a_1,\ldots,0)+\cdots+(0,\ldots,a_n) = (a_1,\ldots,a_n)$

Die volgende Lemma gee 'n gerieflike metode om te kontrolleer of 'n gegewe lys vektore $\mathcal{C}$ 'n vektorruimte V onderspan, as jy alreeds weet dat 'n sekere ander lys $\mathcal{B}$ vir V onderspan.

Hulpstelling 2.1.12 *Veronderstel dat $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m\}$ 'n vektorruimte V span. Verder, veronderstel dat elke vektor in $\mathcal{B}$ is 'n lineêre kombinasie van die vektore uit 'n ander lys $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n\}$. Dan span $\mathcal{C}$ ook vir V.*

Bewys. Laat $\mathbf{v}$ 'n willekeurige vektor in V wees. Aangesien $\mathcal{B}$ vir V onderspan, kan ons $\mathbf{v}$ as 'n lineêre kombinasie van die vektore in $\mathcal{B}$ skryf:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{m} a_i\mathbf{b}_i \tag{2.1.32}$$

Maar elke vektor in $\mathcal{B}$ kan as 'n lineêre kombinasie van die vektor in $\mathcal{C}$ geskryf word:

$$\mathbf{b}_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{i,j}\mathbf{c}_j$$

Deur dit in vergelyking (2.1.32) in te vervang, kry ons

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \sum_{i=1}^{m} a_i\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_{i,j}\mathbf{c}_j\right)\\ &= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_i\lambda_{i,j}\right)\mathbf{c}_j\end{aligned}$$

Dus het ons $\mathbf{v}$ as 'n lineêre kombinasie van die vektore in $\mathcal{C}$ uitgebeeld. Dus sal $\mathcal{C}$ vir V onderspan. ■

2.1.1 Oefeninge

1. Onthou uit eerste-jaar dat ons 'n funksie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ewe* noem as $f(-x) = f(x)$ en *onewe* noem as $f(-x) = -f(x)$. Wys dat vir elke vektor in die vektorruimte $\mathrm{Fun}(\mathbb{R})$ geskryf kan word as 'n lineêre kombinasie van 'n ewe funksie en 'n onewe funksie.

Oplossing. Die oplossing bevat 'n konstruksie wat dalk nie maklik is om te sien nie, maar is redelik eenvoudig daarna. Definieer die volgende twee funksies:

$$f_{\text{ewe}}(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) + f(-x)\right), \quad f_{\text{onewe}}(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) - f(-x)\right)$$

Dit is redelik maklik om te sien dat f_{ewe} (soos die naam voorstel) 'n ewe funksie is en dat $f_{\text{onewe}}(x)$ 'n onewe funksie is. Ons kan eenvoudig f_{ewe}

en f_{onewe} by mekaar tel:

$$f_{\text{ewe}}(x) + f_{\text{onewe}}(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) + f(-x)\right) + \frac{1}{2}\left(f(x) - f(-x)\right) = f(x).$$

2. Veronderstel dat $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ vir V onderspan. Bewys dat $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_4$ ook vir V onderspan.

Oplossing. Indien $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ vir V onderspan, en ons moet wys dat 'n ander lys vektore vir V onderspan, is dit uit Hulpstelling 2.1.12 genoeg om te wys dat elkeen van die vektore $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ geskryf kan word as 'n lineêre kombinasie van die vektore in die nuwe lys.

With this observation in hand, the exercise has an easy solution.

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) + (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3) + (\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4) + \mathbf{v}_4 \\
\mathbf{v}_2 &= (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3) + (\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4) + \mathbf{v}_4 \\
\mathbf{v}_3 &= (\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4) + \mathbf{v}_4 \\
\mathbf{v}_4 &= \mathbf{v}_4
\end{aligned}$$

3. Consider the following polynomials in Poly_2:

$$\mathbf{r}_1(x) := 3x^2 - 2,\ \mathbf{r}_2(x) := x^2 + x,\ \mathbf{r}_3(x) := x + 1,\ \mathbf{r}_4(x) := x - 1$$

(a) Can the polynomial $\mathbf{p}$ with $\mathbf{p}(x) = x^2 + 1$ be written as a linear combination of $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$, $\mathbf{r}_4$?

(b) If so, in *how many ways* can this be done?

Oplossing.

(a) We must set up the appropriate system of linear equations:

$$\begin{aligned}
& a\mathbf{r}_1(x) + b\mathbf{r}_2(x) + c\mathbf{r}_3(x) + d\mathbf{r}_4(x) && = \mathbf{p}(x) \\
\implies & a(3x^2 - 2) + b(x^2 + x) + c(x + 1) + d(x - 1) && = x^2 + 1
\end{aligned}$$

After grouping like powers of x we obtain

$$x^2(3a + b) + x(b + c + d) + (-2a + c - d) = x^2 + 1.$$

We equate coefficients on both sides of the equation to obtain the following system of linear equations:

$$\begin{aligned}
3a + b + 0c + 0d &= 1, \\
0a + 1b + 1c + 1d &= 0, \\
-2a + 0b + 1c + -1d &= 1.
\end{aligned}$$

Using your preferred method for solving a system of linear equations (such as Gauss reduction), we obtain a solution set of the form:

$$\begin{aligned}
& d \text{ is free}, \\
& a = 2 + 2d, \\
& b = -5 - 6d, \\
& c = 5 + 5d.
\end{aligned}$$

And so $\mathbf{p}(x)$ is indeed a linear combination of $\mathbf{r}_1(x), \mathbf{r}_2(x), \mathbf{r}_3(x), \mathbf{r}_4(x)$.

(b) Since d is free in the above solution set, we can write $\mathbf{p}(x)$ as a linear combination of $\mathbf{r}_1(x), \mathbf{r}_2(x), \mathbf{r}_3(x), \mathbf{r}_4(x)$ in an uncountably infinite number of ways (one for each real number!).

4. Suppose that the vectors $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ and $\mathbf{e}_4$ span a vector space V. Show that the vectors $\mathbf{f}_1 := \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1$, $\mathbf{f}_2 := \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2$, $\mathbf{f}_3 := \mathbf{e}_4 - \mathbf{e}_3$, $\mathbf{f}_4 := \mathbf{e}_4$ also span V.

Oplossing. You could choose to show this directly or we could use a clever approach based on **2**. From **2**, we know that $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}v_3, \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_4$ must span V. But if these vectors span V, then non-zero multiples of the vectors also span V. Thus $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4$ must span V.

5. Show that the polynomials

$$\mathbf{q}_0(x) := 1,\ \mathbf{q}_1(x) := x,\ \mathbf{q}_2(x) := 2x^2 - 1,\ \mathbf{q}_3(x) := 4x^3 - 3x$$

span Poly_3.

Oplossing. Once again we base our strategy on 2. Pick a spanning set for Poly_3. We'll use $1, x, x^2, x^3$, since it's the simplest. $1, x$ are certainly spanned by $\mathbf{q}_0 x), \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$ since $1 = \mathbf{q}_0(x)$ and $x = \mathbf{q}_1(x)$. It can easily be seen that

$$x^2 = \frac{1}{2}\mathbf{q}_2(x) + \frac{1}{2}\mathbf{q}_0(x)x^3 = \frac{1}{4}\mathbf{q}_3(x) + \frac{3}{4}\mathbf{q}_1(x),$$

completing the proof.

6. Let $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ be a list of vectors in a vector space V. Suppose that $\mathcal{S}$ spans V. Suppose that w is another vector in V. Prove that the list of vectors $\mathcal{S}' = \{\mathbf{w}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ also spans V.

7. Let $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ be a list of vectors in a vector space V. Suppose that $\mathcal{S}$ spans V. Suppose that one of the vectors in the list, say $\mathbf{v}_r$, can be expressed as a linear combination of the preceding vectors:

$$\mathbf{v}_r = a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_{r-1}\mathbf{v}_{r-1} \tag{2.1.33}$$

Suppose that we remove $\mathbf{v}_r$ from $\mathcal{S}$, to arrive at a new list

$$\mathcal{T} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \hat{\mathbf{v}}_r, \ldots, \mathbf{s}_n\}$$

Prove that $\mathcal{T}$ also spans V.

Oplossing. We must show that every vector $\mathbf{v} \in V$ can be written as a linear combination of the vectors from $\mathcal{T}$. So let $\mathbf{v} \in V$. Since $\mathcal{S}$ spans V, we know we can write $\mathbf{v}$ as a linear combination of the vectors from $\mathcal{S}$:

$$\mathbf{v} = b_1\mathbf{v}_1 + \cdots + b_r\mathbf{v}_r + \cdots + b_n\mathbf{v}_n \tag{2.1.34}$$

Substituting (2.1.33) into (2.1.37) gives

$$\mathbf{v} = b_1\mathbf{v}_1 + \cdots + b_r(a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_{r-1}\mathbf{v}_{r-1}) + b_{r+1}\mathbf{v}_{r+1} + \cdots + b_n\mathbf{v}_n \tag{2.1.35}$$

$$= (b_1 + b_r a_1)\mathbf{v}_1 + \cdots + (b_r + b_r a_{r-1})\mathbf{v}_{r-1} + b_{r+1}\mathbf{v}_{r+1} + \cdots + b_n\mathbf{v}_n \tag{2.1.36}$$

Equation (2.1.39) shows that we can express $\mathbf{v}$ as a linear combination of the vectors from $\mathcal{T}$. Hence $\mathcal{T}$ spans V.

2.1.2 Oplossings

2.1.1 · Oefeninge

2.1.1.1. Oplossing. Die oplossing bevat 'n konstruksie wat dalk nie maklik is om te sien nie, maar is redelik eenvoudig daarna. Definieer die volgende twee funksies:

$$f_{\text{ewe}}(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) + f(-x)\right), \quad f_{\text{onewe}}(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) - f(-x)\right)$$

Dit is redelik maklik om te sien dat f_{ewe} (soos die naam voorstel) 'n ewe funksie is en dat $f_{\text{onewe}}(x)$ 'n onewe funksie is. Ons kan eenvoudig f_{ewe} en f_{onewe} by mekaar tel:

$$f_{\text{ewe}}(x) + f_{\text{onewe}}(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) + f(-x)\right) + \frac{1}{2}\left(f(x) - f(-x)\right) = f(x).$$

2.1.1.2. Oplossing. Indien $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ vir V onderspan, en ons moet wys dat 'n ander lys vektore vir V onderspan, is dit uit Hulpstelling 2.1.12 genoeg om te wys dat elkeen van die vektore $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ geskryf kan word as 'n lineêre kombinasie van die vektore in die nuwe lys.

With this observation in hand, the exercise has an easy solution.

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) + (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3) + (\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4) + \mathbf{v}_4 \\
\mathbf{v}_2 &= (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3) + (\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4) + \mathbf{v}_4 \\
\mathbf{v}_3 &= (\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4) + \mathbf{v}_4 \\
\mathbf{v}_4 &= \mathbf{v}_4
\end{aligned}$$

2.1.1.3. Oplossing.

(a) We must set up the appropriate system of linear equations:

$$\begin{aligned}
& a\mathbf{r}_1(x) + b\mathbf{r}_2(x) + c\mathbf{r}_3(x) + d\mathbf{r}_4(x) && = \mathbf{p}(x) \\
\implies & a(3x^2 - 2) + b(x^2 + x) + c(x + 1) + d(x - 1) && = x^2 + 1
\end{aligned}$$

After grouping like powers of x we obtain

$$x^2(3a + b) + x(b + c + d) + (-2a + c - d) = x^2 + 1.$$

We equate coefficients on both sides of the equation to obtain the following system of linear equations:

$$\begin{aligned}
3a + b + 0c + 0d &= 1, \\
0a + 1b + 1c + 1d &= 0, \\
-2a + 0b + 1c + -1d &= 1.
\end{aligned}$$

Using your preferred method for solving a system of linear equations (such as Gauss reduction), we obtain a solution set of the form:

$$\begin{aligned}
& d \text{ is free,} \\
& a = 2 + 2d, \\
& b = -5 - 6d, \\
& c = 5 + 5d.
\end{aligned}$$

And so $\mathbf{p}(x)$ is indeed a linear combination of $\mathbf{r}_1(x), \mathbf{r}_2(x), \mathbf{r}_3(x), \mathbf{r}_4(x)$.

(b) Since d is free in the above solution set, we can write $\mathbf{p}(x)$ as a linear combination of $\mathbf{r}_1(x), \mathbf{r}_2(x), \mathbf{r}_3(x), \mathbf{r}_4(x)$ in an uncountably infinite number of ways (one for each real number!).

2.1.1.4. Oplossing. You could choose to show this directly or we could use a clever approach based on **2**. From **2**, we know that $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}v_3, \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_4$ must span V. But if these vectors span V, then non-zero multiples of the vectors also span V. Thus $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4$ must span V.

2.1.1.5. Oplossing. Once again we base our strategy on 2. Pick a spanning set for Poly_3. We'll use $1, x, x^2, x^3$, since it's the simplest. $1, x$ are certainly spanned by $\mathbf{q}_0 x), \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$ since $1 = \mathbf{q}_0(x)$ and $x = \mathbf{q}_1(x)$. It can easily be seen that

$$x^2 = \frac{1}{2}\mathbf{q}_2(x) + \frac{1}{2}\mathbf{q}_0(x) x^3 = \frac{1}{4}\mathbf{q}_3(x) + \frac{3}{4}\mathbf{q}_1(x),$$

completing the proof.

2.1.1.7. Oplossing. We must show that every vector $\mathbf{v} \in V$ can be written as a linear combination of the vectors from $\mathcal{T}$. So let $\mathbf{v} \in V$. Since $\mathcal{S}$ spans V, we know we can write $\mathbf{v}$ as a linear combination of the vectors from $\mathcal{S}$:

$$\mathbf{v} = b_1\mathbf{v}_1 + \cdots + b_r\mathbf{v}_r + \cdots + b_n\mathbf{v}_n \tag{2.1.37}$$

Substituting (2.1.33) into (2.1.37) gives

$$\mathbf{v} = b_1\mathbf{v}_1 + \cdots + b_r(a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_{r-1}\mathbf{v}_{r-1}) + b_{r+1}\mathbf{v}_{r+1} + \cdots + b_n\mathbf{v}_n \tag{2.1.38}$$

$$= (b_1 + b_r a_1)\mathbf{v}_1 + \cdots + (b_r + b_r a_{r-1})\mathbf{v}_{r-1} + b_{r+1}\mathbf{v}_{r+1} + \cdots + b_n\mathbf{v}_n \tag{2.1.39}$$

Equation (2.1.39) shows that we can express $\mathbf{v}$ as a linear combination of the vectors from $\mathcal{T}$. Hence $\mathcal{T}$ spans V.

2.2 Lineêre onafhanklikheid

Definisie 2.2.1 'n Lys vektore $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ in 'n vektorruimte V is **lineêr onafhanklik** as die vergelyking

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{e}_2 + \cdots k_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \tag{2.2.1}$$

slegs die triviale oplossing $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$ het. Andersins word die lys vektore $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ **lineêr afhanklik** genoem. ♢

Opmerking 2.2.2 Nulvektor impliseer lineêr onafhanklik. Veronderstel een van die vektore $\mathbf{v}_i$ in die lys $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ is die nulvektor $\mathbf{0}$. Dan is die lys $\mathcal{B}$ lineêr afhanklik, want die vergelyking (2.2.1) het die nie-triviale oplossing

$$0\mathbf{v}_1 + \cdots + 0\mathbf{v}_{i-1} + 1\mathbf{v}_i + 0\mathbf{v}_{i+1} + \cdots + 0\mathbf{v}_n = \mathbf{0},$$

met ander woorde,

$$k_1 = 0, \ldots, k_{i-1} = 0, k_i = 1, k_{i+1} = 0, \ldots, k_n = 0.$$

So: *'n lineêr onafhanklike lys bevat nooit die nulvektor nie!*

Voorbeeld 2.2.3 Die lys van vektore $\mathbf{f}_1 = (-1, 2)$ en $\mathbf{f}_2 = (1, 1)$ uit Voorbeeld 2.1.8 is lineêr onafhanklik, omdat die vergelyking

$$k_1(-1, 2) + k_2(1, 1) = (0, 0)$$

ekwivalent is aan die sisteem van vergelykings

$$-k_1 + k_2 = 0, \quad 2k_1 + k_2 = 0 \tag{2.2.2}$$

wat slegs die trivale oplossing $k_1 = 0$ en $k_2 = 0$ het. □

Verstaanpunt 2.2.4 Bevestig dat (2.2.2) slegs die triviale oplossing het.

Oplossing.

$$(2k_1 + k_2) - (-k_1 + k_2) = 0 = 3k_2 \implies k_2 = 0 \implies k_1 = 0.$$

Voorbeeld 2.2.5 Die lys van vektore $\mathbf{f}_1 = (-1, 2)$, $\mathbf{f}_2 = (1, 1)$, $\mathbf{f}_3 = (2, -1)$ uit Voorbeeld 2.1.8 is lineêr afhanklik, want die vergelyking

$$k_1(-1, 2) + k_2(1, 1) + k_3(2, -1) = (0, 0) \tag{2.2.3}$$

is ekwivalent aan die sisteem van vergelykings

$$-k_1 + k_2 + 2k_3 = 0, \quad 2k_1 + k_2 - k_3 = 0 \tag{2.2.4}$$

wat 'n een-dimansionele vektorruimte van oplossings het wat deur t parameteriseer word,

$$k_1 = t,\ k_2 = -t,\ k_3 = t, t \in \mathbb{R}. \tag{2.2.5}$$

Byvoorbeeld, vir $t = 2$, is

$$2(-1, 2) - 2(1, 1) + 2(2, -1) = (0, 0)$$

sodat (2.2.3) nie-triviale oplossings het. □

Verstaanpunt 2.2.6 Wys dat (2.2.4) die oplossingsversameling (2.2.5) het.

Oplossing. We have a system of consistent homogenous linear equations so we know there exists at least one solution, namely the trivial solution. Since we have 3 unknowns but only 2 equations, we do not have a unique solution. Let k_1 be free, i.e. $k_1 = t, t \in \mathbb{R}$. Then

$$(-k_1+k_2+2k_3)-(2k_1+k_2-k_3) = 0 = -3k_1+3k_3 \implies -k_1+k_3 = 0 \implies k_3 = t. -t+k_2+2t = 0 \implies k_2 = -t$$

Voorbeeld 2.2.7 Die lys polinome

$$\mathbf{q}_0(x) := 1,\ \mathbf{q}_1(x) := x,\ \mathbf{q}_2(x) := 2x^2 - 1,\ \mathbf{q}_3(x) := 4x^3 - 3x$$

uit Voorbeeld 2.1.1.5 is lineêr onafhanklik in Poly_3. Dit is omdat die vergelyking

$$k_0\mathbf{q}_0 + k_1\mathbf{q}_1 + k_2\mathbf{q}_2 + k_3\mathbf{q}_3 = \mathbf{0}$$

vereenvoudig as die volgende polinoomvergelyking:

$$4k_3x^3 + 2k_2x^2 + (-3k_3 + k_1)x + (-k_2 + k_0) = 0$$

Hierdie is ekwivalent aan die volgende stelsel vergelykings,

$$4k_3 = 0, \quad 2k_2 = 0, \quad -3k_3 + k_1 = 0, \quad k_0 - k_2 = 0$$

wat slegs die triviale oplossing $k_0 = k_1 = k_2 = k_3 = 0$ het. □

Hier is twee meer maniere om hoe van lineêre afhanklike lyste vektore te dink.

Stelling 2.2.8 Equivalent Criterions for Linear Dependence. *Let $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ be a list of vectors in a vector space V. The following statements* *are equivalent:*

1. *The list of vectors $\mathcal{B}$ is linearly dependent.*

2. (Linear Combination of Other Vectors) *One of the vectors in the list $\mathcal{B}$ is a linear combination of the other vectors in $\mathcal{B}$.*

3. *Linear Combination of Preceding Vectors.*

   (Linear Combination of Preceding Vectors) *Either $\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$, or for some $r \in \{2, 3, \ldots, n\}$, $\mathbf{v}_r$ is a linear combination of $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, …, $\mathbf{v}_{r-1}$.*

Bewys. We will show that (1) $\Leftrightarrow$ (2), (1) $\Rightarrow$ (3) and (3) $\Rightarrow$ (2), and conclude that each statement implies the others.

(1) $\Rightarrow$ (2). Suppose that $\mathcal{B}$ is linearly dependent. This means that there are scalars k_1, k_2, …, k_n, not all zero, such that

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}. \tag{2.2.6}$$

Let k_s be one of the nonzero coefficients. Then, by taking the other vectors to the other side of the equation, and multuplying by $\frac{1}{k_s}$ we can solve for $\mathbf{v}_s$ in terms of the other vectors:

$$\mathbf{v}_s = -\frac{k_1}{k_s}\mathbf{v}_1 - \ldots - \frac{k_n}{k_s}\mathbf{v}_n \qquad \text{(No } \mathbf{v}_i \text{ terms on RHS)}$$

Therefore, (2) is true.

(2) $\Rightarrow$ (1). Suppose that one of the vectors in the list, say $\mathbf{v}_s$, is a linear combination of the others vectors. That is,

$$\mathbf{v}_s = k_1\mathbf{v}_1 + \ldots + k_n\mathbf{v}_n \qquad \text{(No } \mathbf{v}_s\text{term on RHS.)}$$

Rearranging this equation gives:

$$k_1\mathbf{v}_1 + \ldots + (-1)\mathbf{v}_s + \ldots + k_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}. \tag{2.2.7}$$

Not all the coefficients on the LHS of (2.2.7) are zero, since the coefficient of $\mathbf{v}_s$ is equal to -1. Therefore, $\mathcal{B}$ is linearly dependent.

(1) $\Rightarrow$ (3). Suppose that the list $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ is linearly dependent. This means that there are scalars k_1, k_2, …, k_n, not all zero, such that

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}. \tag{2.2.8}$$

Let $r \in \{1, 2, \ldots, n\}$ be the largest index such that $k_r \neq 0$. (We are told that not all the k_i are zero, so this makes sense.) If $r = 1$, then (2.2.8) is simply the equation

$$k_1\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}, \text{where } k_1 \neq 0.$$

Therefore $\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$ by Lemma 1.5.6, and we are done. On the other hand, suppose $r \neq 1$. Then (2.2.8) becomes the equation

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_r\mathbf{v}_r = \mathbf{0}, \text{where } k_r \neq 0.$$

By dividing by k_r, we can now solve for $\mathbf{v}_r$ in terms of the preceding vectors $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, …, $\mathbf{v}_{r-1}$:

$$\therefore \mathbf{v}_r = -\frac{k_1}{k_r}\mathbf{v}_1 - \frac{k_2}{k_r}\mathbf{v}_2 - \cdots - \frac{k_{r-1}}{k_r}\mathbf{v}_{r-1}$$

Therefore, (3) is true.

(3) $\Rightarrow$ (2) Suppose that (3) is true. In other words, either:

- $\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$. Therefore, $\mathcal{B}$ is linearly dependent, by Opmerking 2.2.2. In other words, (1) is true. Therefore, since we have already proved that (1) $\Rightarrow$ (2), we conclude that (2) is true.

- For some $r \in \{2, \ldots, n\}$, $\mathbf{v}_r$ is a linear combination of $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{r-1}$. In this case, clearly $\mathbf{v}_r$ is a linear combination of the other vectors in $\mathcal{B}$, so (2) is true.

In both cases, (2) is true. So, (3) $\Rightarrow$ (2). ∎

Voorbeeld 2.2.9 Ons het in Voorbeeld 2.2.5 gesien dat die lys vektore $\mathbf{f}_1 = (-1, 2)$, $\mathbf{f}_2 = (1, 1)$, $\mathbf{f}_3 = (2, -1)$ in $\mathbb{R}^3$ lineêr afhanklik is. Gee twee alternatiewe bewyse hiervan, deur gebruik te maak van Stelling 2.2.8.

Oplossing 1. Ons kontrolleer Item 2 uit Stelling 2.2.8. Dit wil sê, ons kontrolleer of een van die vektore in die lys 'n lineêre kombinasie van die ander vektore is. Inderdaad, ons sien deur inspeksie dat

$$\mathbf{f}_2 = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_3. \tag{2.2.9}$$

Dus, $\mathcal{B}$ is lineêr afhanklik.

Oplossing 2. Ons kontrolleer Item 3 uit Stelling 2.2.8. Dit wil sê, ons kontrolleer:

- Is $\mathbf{f}_1 = \mathbf{0}$? Nee.

- Is $\mathbf{f}_2$ 'n skalaarveelvoud van $\mathbf{f}_1$? Nee.

- Is $\mathbf{f}_3$ 'n lineêre kombinasie van $\mathbf{f}_1$ en $\mathbf{f}_2$? Ja, want

$$\mathbf{f}_3 = -\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2.$$

  Dus is $\mathcal{B}$ lineêr afhanklik.

□

Stelling 2.2.10 Afstampproposisie. *Veronderstel $\mathcal{L} = \{\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \ldots, \mathbf{l}_m\}$ is 'n lineêr onafhanklike lys vektore in 'n vektorruimte V en dat $\mathcal{S} = \{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_n\}$ vir V onderspan. Dan is $m \leq n$.*

Bewys. Begin met die oorspronglike lys vektore

$$\mathcal{S} = \{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_n\} \tag{2.2.10}$$

wat V span en oorweeg die 'opgeblase' lys

$$\mathcal{S}' = \{\mathbf{l}_1, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \cdots, \mathbf{s}_n\} \tag{2.2.11}$$

Nou, omdat $\mathcal{S}$ vir V span, weet ons in besonder dat $\mathbf{l}_1$ kan uitgedruk word as 'n lineêre kombinasie van die vektore $\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_n$. Dus, deur Item 2 van Stelling 2.2.8, weet ons dat $\mathcal{S}'$ lineêr afhanklik is. Dus, deur Item 3 van Stelling 2.2.8, óf:

- $\mathbf{l}_1 = \mathbf{0}$. Dit kan nie waar wees nie, want dan sou $\mathcal{L}$ lineêr afhanklik wees weens Opmerking 2.2.2, wat in teenstryding is met ons oorspronklike aanname.

- een van die $\mathbf{s}$-vectore, noem dit $\mathbf{s}_r$, kan uitgedruk word as 'n lineêre kombinasie van die voorafgaande vektore. Ons kan dan $\mathbf{s}_r$ uit die lys $\mathcal{S}'$ verwyder ('afstamp'), en die resulterende lys

$$\mathcal{S}_1 := \{\mathbf{l}_1, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \cdots, \hat{\mathbf{s}_r}, \cdots, \mathbf{s}_n\} \qquad (\mathbf{s}_r \text{ omitted}) \tag{2.2.12}$$

  sal nog steeds vir V span, deur Oefening 2.1.1.7.

In hierdie manier kan ons aangaan: elke keer 'n $\mathbf{l}$-vektor oor te dra en 'n $\mathbf{s}$-vektor te verwyder, en die resulterende lys sal nog steeds vir V span:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \{\mathbf{l}_1, \ldots, \mathbf{l}_m\} & \mathcal{S} &= \{\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_n\} \\ \mathcal{L}_1 &= \{\mathbf{l}_2, \ldots, \mathbf{l}_m\} & \mathcal{S}_1 &= \{\mathbf{l}_1, \underbrace{\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_n}_{n-1}\} \\ \mathcal{L}_2 &= \{\mathbf{l}_3, \ldots, \mathbf{l}_m\} & \mathcal{S}_2 &= \{\mathbf{l}_2, \mathbf{l}_1, \underbrace{\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_n}_{n-2}\} \\ &\vdots & &\vdots \end{aligned}$$

Nou, veronderstel dat $m > n$. Wanneer ons die $n$ste stadium van hierdie proses bereik, sal $\mathcal{S}_n = \{\mathbf{l}_n, \ldots, \mathbf{l}_1\}$, en dit sal vir V span. Dus, in besonder, $\mathbf{l}_{n+1}$ (let op dat hierdie vektore wel bestaan, want $m > n$) sal 'n lineêre kombinasie van $\mathbf{l}_1, \ldots, \mathbf{l}_n$ wees. Maar dan, deur Item 2 van Stelling 2.2.8, lei ons af dat $\mathcal{L}$ lineêr afhanklik is. Maar ons het aangeneem van die begin af dat $\mathcal{L}$ lineêr *on*afhanklik is. So ons het 'n teenstryding. Dus, ons aanname dat $m > n$ moet vals wees. Dus, dit moet waar wees dat $m \leq n$. ■

2.2.1 Oefeninge

1. Wys dat die lys vektore (2, 3, 1), (1, −1, 2), (7, 3, c) lineêr afhanklik in $\mathbb{R}^3$ is as en slegs as $c = 8$.

Oplossing. We set up a linear equation and find the necessary conditions on c. Suppose some linear combination of the vectors equals 0:

$$k_1(2,\ 3,\ 1) + k_2(1,\ -1,\ 2) + k_3(7,\ 3,\ c) = \mathbf{0} = (0,0,0)$$

This vector equation gives rise to a system of 3 linear equations:

$$2k_1 + k_2 + 7k_3 = 0, 3k_1 - k_2 + 3k_3 = 0, k_1 + 2k_2 + ck_3 = 0.$$

The corresponding matrix equation is

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

This matrix is non-invertible if and only if its determinant is 0. Furthermore, the matrix being non-invertible will mean we can find a non-trivial solution to the intial equation. We compute the determinant:s

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & c \end{bmatrix} = -5c + 40$$

which is 0 if and only if $c = 8$.

2. Die lys vektore in $\mathrm{Mat}_{2,2}$ gegee deur

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

is lineêr onafhanklik (ons sal dit in Oefening 2.3.6.4 bewys, maar ter wille van hierdie vraag kan jy aanvaar dat dit waar is). Herhaal dieselfde stappe as in Voorbeeld 2.2.9 om die eerste vektor in die lys te vind wat of die nulvektor of 'n lineêre kombinasie van die voorafgaande vektore is.

Oplossing. Firstly note that $\mathbf{v}_1$ is non-zero, so we consider $\mathbf{v}_2$. $\mathbf{v}_2$ cannnot be a scalar multiple of $\mathbf{v}_1$ by considering the matrix entry in position (1,2). We now consider $\mathbf{v}_3$. Suppose

$$a\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{bmatrix}$$

This gives rise to a system of four linear equations. In particular, we have the equation for the matrix entry in position (1,2):

$$2a + 0b = 0$$

And hence $a = 0$. But clearly

$$b\begin{bmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{bmatrix}$$

for any choice of b. Hence $\mathbf{v}_3$ is not a scalar multiple of $\mathbf{v}_1$ and $\mathbf{v}_2$. We consider $\mathbf{v}_4$ next. Suppose

$$a\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{bmatrix} + c\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 3\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

The equation for the entry in position (1,2) is simply

$$2a = 3$$

and so $a = \frac{3}{2}$. The corresponding equation for the entry in position (1,1) is thus

$$\frac{3}{2} + b + c = 0.$$

Using this result, we consider the equation for the entry in position (2,2) and compute:

$$\frac{3}{2} + b + 3c = -1 \implies \frac{3}{2} + b + c + 2c = -1 \implies 2c = -1 \implies c = -\frac{1}{2}$$

and so $b = -1$. SHOW THAT THIS IS INCONSISTENT WITH (2,1).

3. Let $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ be a list of vectors in a vector space V. Suppose that $\mathcal{S}$ spans V. Suppose that w is another vector in V. Prove that the list of vectors $\mathcal{S}' = \{\mathbf{w}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ also spans V.

Oplossing. To say that $\mathcal{S}$ spans V is to say that for every vector $\mathbf{v} \in V$ there exist scalars $(a_i^{\mathbf{v}})$ depending on $\mathbf{v}$ such that

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^{\mathbf{v}} \mathbf{v}_i = \mathbf{v}.$$

But of course, it is also true that

$$0\mathbf{w} + \sum_{i=1}^{n} a_i^{\mathbf{v}} \mathbf{v}_i = \mathbf{v}$$

because $0\mathbf{w} = 0$ and so has no effect on the sum. Hence any vector in V is a linear combination of $\mathbf{w}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ which is to say that the set $\mathcal{S}' = \{\mathbf{w}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ spans V.

4. Laat $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ 'n lineêr onafhanklike lys vektore in 'n vektorruimte V wees. Veronderstel dat $\mathbf{v}$ 'n vektor in V is wat nie as 'n lineêre kombinasie van die vektore uit $\mathcal{B}$ geskryf kan word nie. Toon aan dat die lys $\mathcal{B}' = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}\}$ lineêr onafhanklik is. (Wenk: Gebruik die Lineêre Kombinasie van Voorafgaande Vektore Proposisie.)

5. Consider the vector space of functions on the closed unit interval, $\mathrm{Fun}([0,1])$. Show that for any $n \in \mathbb{N}$, we can find n linear independent vectors in $\mathrm{Fun}([0,1])$.

6. (Bonus) Try adapt the argument in the question above to show that for any $n \in \mathbb{N}$, we can find n linear independent vectors in $\mathrm{Cont}([0,1])$, the vector space of all *continuous* real valued functions on $[0,1]$.

2.2.2 Oplossings

2.2.1 · Oefeninge

2.2.1.1. Oplossing. We set up a linear equation and find the necessary conditions on c. Suppose some linear combination of the vectors equals 0:

$$k_1(2,\ 3,\ 1) + k_2(1,\ -1,\ 2) + k_3(7,\ 3,\ c) = \mathbf{0} = (0,0,0)$$

This vector equation gives rise to a system of 3 linear equations:

$$2k_1 + k_2 + 7k_3 = 0, 3k_1 - k_2 + 3k_3 = 0, k_1 + 2k_2 + ck_3 = 0.$$

The corresponding matrix equation is

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

This matrix is non-invertible if and only if its determinant is 0. Furthermore, the matrix being non-invertible will mean we can find a non-trivial solution to the intial equation. We compute the determinant:s

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & c \end{bmatrix} = -5c + 40$$

which is 0 if and only if $c = 8$.

2.2.1.2. Oplossing. Firstly note that $\mathbf{v}_1$ is non-zero, so we consider $\mathbf{v}_2$. $\mathbf{v}_2$ cannnot be a scalar multiple of $\mathbf{v}_1$ by considering the matrix entry in position (1,2). We now consider $\mathbf{v}_3$. Suppose

$$a \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

This gives rise to a system of four linear equations. In particular, we have the equation for the matrix entry in position (1,2):

$$2a + 0b = 0$$

And hence $a = 0$. But clearly

$$b \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

for any choice of b. Hence $\mathbf{v}_3$ is not a scalar multiple of $\mathbf{v}_1$ and $\mathbf{v}_2$. We consider $\mathbf{v}_4$ next. Suppose

$$a\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{bmatrix} + c\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 3\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

The equation for the entry in position (1,2) is simply

$$2a = 3$$

and so $a = \frac{3}{2}$. The corresponding equation for the entry in position (1,1) is thus

$$\frac{3}{2} + b + c = 0.$$

Using this result, we consider the equation for the entry in position (2,2) and compute:

$$\frac{3}{2} + b + 3c = -1 \implies \frac{3}{2} + b + c + 2c = -1 \implies 2c = -1 \implies c = -\frac{1}{2}$$

and so $b = -1$. SHOW THAT THIS IS INCONSISTENT WITH (2,1).

2.2.1.3. Oplossing. To say that $\mathcal{S}$ spans V is to say that for every vector $\mathbf{v} \in V$ there exist scalars $(a_i^{\mathbf{v}})$ depending on $\mathbf{v}$ such that

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^{\mathbf{v}} \mathbf{v}_i = \mathbf{v}.$$

But of course, it is also true that

$$0\mathbf{w} + \sum_{i=1}^{n} a_i^{\mathbf{v}} \mathbf{v}_i = \mathbf{v}$$

because $0\mathbf{w} = 0$ and so has no effect on the sum. Hence any vector in V is a linear combination of $\mathbf{w}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ which is to say that the set $\mathcal{S}' = \{\mathbf{w}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ spans V.

2.3 Basis en dimensie

In hierdie afdeling introduseer ons die begrippe van:

- 'n *deelruimte* van 'n vektorruimte, en ,
- die *dimensie* van 'n vektorruimte.

Dan bereken ons die dimensies van die vektorruimtes wat ons tot hierdie punt gesien het. Ons eindig deur die *sifalgoritme* te verduidelik, wat ons toelaat om nuttige resultate rakend basis en dimensie te bewys.

Definisie 2.3.1 'n Lys vektore $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ in 'n vektorruimte V word 'n **basis** van V genoem as dit lineêr onafhanklik is en V span. $\Diamond$

Stelling 2.3.2 Invariansie van dimensie. *As* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ *en* $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ *albei basisse van 'n vektorruimte* V *is, dan is* $m = n$.

Bewys. Dit is 'n gevolg van Proposisie 2.2.10 (die afstampproposisie). Aangesien die $\mathbf{e}$-vectore V lineêr onfafhanklik is en die $\mathbf{f}$-vektore V span, het ons $m \leq n$. Aan die ander kant, omdat die $\mathbf{f}$-vektore linêr onfahanklik is en die $\mathbf{e}$-vektore V span, het ons $n \leq m$. Daarom is $m = n$. ∎

Definisie 2.3.3 'n Vektorruimte V is **eindig dimensioneel** as dit 'n basis met 'n eindige aantal elemente het. In daardie geval is die **dimensie** van V die aantal elemente in 'n basis vir V. 'n Vektorruimte is **oneindig dimensioneel** as dit nie eindigdimensioneel is nie. $\Diamond$

Let op dat die konsep van die 'dimensie van' 'n vektorruimte slegs welgedefinieerd is as gevolg van Stelling 2.3.2.

Die geval van die nulvektorruimte $Z = \{\mathbf{0}\}$ is nie eksplisiet in Definisie 2.3.3 gehanteer nie. Ons hanteer dit as 'n spesiale geval. Naamlik, ons *defineer* die dimensie van die nulvektorruimte Z as 0. So, volgens die definisie is Z is eindig-dimensionaal, en sy dimensie is gelyk aan 0.

2.3.1 Dimensies van bekende vektorruimtes

Voorbeeld 2.3.4 Standaard basis vir $\mathbb{R}^n$. Die lys vektore

$$\mathbf{e}_1 := (1, 0, \dots, 0),\ \ \mathbf{e}_2 := (0, 1, \dots, 0),\ \ \dots,\ \ \mathbf{e}_n := (0, 0, \dots, 0, 1)$$

is 'n basis vir $\mathbb{R}^n$. Ons het reeds in Voorbeeld 2.1.10 gesien dat die lys $\mathbb{R}^n$ span. Ons moet seker maak dat die lys lineêr onafhanklik is. So, veronderstel dat

$$a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \cdots + a_n\mathbf{e}_n = \mathbf{0}.$$

As ons die linkerkant in komponente uitbrei volgens die definisie van die standaard basisvektore $\mathbf{e}_i$ kry ons die vergelyking

$$(a_1, 0, 0, \dots, 0) + (0, a_2, 0, \dots, 0) + \cdots + (0, 0, 0, \dots, a_n) = (0, 0, 0, \dots, 0).$$

Met ander woorde, ons het dat

$$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) = (0, 0, 0, \dots, 0)$$

wat beteken dat $a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_n = 0$, presies wat ons moes bewys. Gevolglik is die lys vektore $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ lineêr onafhanklik en daarom is dit 'n basis vir $\mathbb{R}^n$. So $\mathbb{R}^n$ het dimensie n. $\square$

Voorbeeld 2.3.5 A basis for $\mathbb{R}^4$. Check whether the following list of vectors

$$\mathbf{v}_1 = (1, 0, 2, -3),\ \mathbf{v}_2 = (1, 3, -1, 2),\ \mathbf{v}_3 = (0, 1, 2, -1),\ \mathbf{v}_4 = (1, 2, 3, 4) \quad (2.3.1)$$

is a basis for $\mathbb{R}^4$.

Oplossing. First we check if the list of vectors is linearly independent 2.2.1. Consider the equation

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + a_3\mathbf{v}_3 + a_4\mathbf{v}_4 = \mathbf{0} \quad (2.3.2)$$

$$\therefore a_1(1, 0, 2, -3) + a_2(1, 3, -1, 2) + a_3(0, 1, 2, -1) + a_4(1, 2, 3, 4) = (0, 0, 0, 0) \quad (2.3.3)$$

$$\therefore (a_1 - a_2 + a_4, 3a_2 + a_3 + 2a_4, 2a_1 - a_2 + 2a_3 + 3a_4, -3a_1 + 2a_2 - a_3 + 4a_4) = (0, 0, 0, 0) \quad (2.3.4)$$

So the list of vectors is linearly indepedent if and only if the following equations have only the trivial solution $a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 0, a_4 = 0$:

$$a_1 - a_2 + a_4 = 0 \tag{2.3.5}$$
$$3a_1 + a_3 + 2a_4 = 0 \tag{2.3.6}$$
$$2a_1 - a_2 + 2a_3 + 3a_4 = 0 \tag{2.3.7}$$
$$-3a_1 + 2a_2 - a_3 + 4a_4 = 0 \tag{2.3.8}$$

We can compute the solutions to equations (2.3.5)–(2.3.8) by hand, or using SageMath.

```
var('a1,␣a2,␣a3,␣a4')

solve([a1 - a2 + a4 == 0,
      3*a1 + a3 + 2*a4 == 0,
      2*a1 - a2 + 2*a3 + 3*a4 == 0,
      -3*a1 + 2*a2 - a3 + 4*a4 == 0],
      [a1, a2, a3, a4])
```

SageMath outputs:

```
[[a1 == 0, a2 == 0, a3 == 0, a4 == 0]]
```

So indeed, equations (2.3.5)–(2.3.8) have only the trivial solution. Therefore the list of vectors is linearly independent.

Next, we need to check that the list of vectors spans $\mathbb{R}^4$. (There is a shorter way of doing this, using Gevolg 2.3.32 below, but for now we prove it from first principles.) So, let $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3, w_4)$ be an arbitrary vector in $\mathbb{R}^4$. We need to show that there exists at least one way to express $\mathbf{w}$ as a linear combination of the vectors $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$. In other words, we need to check if there exists at least one solution to the following equation:

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + a_3\mathbf{v}_3 + a_4\mathbf{v}_4 = \mathbf{w} \tag{2.3.9}$$
$$\therefore a_1(1, 0, 2, -3) + a_2(1, 3, -1, 2) + a_3(0, 1, 2, -1) + a_4(1, 2, 3, 4) = (w_1, w_2, w_3, w_4) \tag{2.3.10}$$
$$\therefore (a_1 - a_2 + a_4, 3a_2 + a_3 + 2a_4, 2a_1 - a_2 + 2a_3 + 3a_4, -3a_1 + 2a_2 - a_3 + 4a_4) = (w_1, w_2, w_3, w_4) \tag{2.3.11}$$

So the list of vectors spans $\mathbb{R}^4$ if and only if the following equations for a_1, a_2, a_3, a_4 always have a solution, no matter what the values of w_1, w_2, w_3, w_4 are:

$$a_1 - a_2 + a_4 = w_1 \tag{2.3.12}$$
$$3a_1 + a_3 + 2a_4 = w_2 \tag{2.3.13}$$
$$2a_1 - a_2 + 2a_3 + 3a_4 = w_3 \tag{2.3.14}$$
$$-3a_1 + 2a_2 - a_3 + 4a_4 = w_4 \tag{2.3.15}$$

We can compute the solutions to equations (2.3.12)–(2.3.15) by hand, or using SageMath:

```
var('a1,␣a2,␣a3,␣a4,␣w1,␣w2,␣w3,␣w4')

solve([a1 - a2 + a4 == w1,
      3*a1 + a3 + 2*a4 == w2,
      2*a1 - a2 + 2*a3 + 3*a4 == w3,
      -3*a1 + 2*a2 - a3 + 4*a4 == w4],
      [a1, a2, a3, a4])
```

Note that we ask SageMath to solve for `a1, a2, a3, a4`, since `w1, w2, w3, w4` are regarded as constants in the equation... we are not trying to solve for them, they are fixed, but arbitrary! SageMath outputs:

```
[[a1 == 1/9*w1 + 7/18*w2 - 2/9*w3 - 1/18*w4, a2 == -2/3*w1 + 5/12*w2
- 1/6*w3 + 1/12*w4, a3 == -7/9*w1 - 2/9*w2 + 5/9*w3 - 1/9*w4, a4 ==
2/9*w1 + 1/36*w2 + 1/18*w3 + 5/36*w4]]
```

In other words, there does indeed exist a solution, no matter what (w_1, w_2, w_3, w_4) is. For instance, if $(w_1, w_2, w_3, w_4) = (3, 1, 2, 4)$, then the solution is

$$a_1 = \frac{1}{18}, a_2 = -\frac{19}{12}, a_3 = -\frac{17}{9}, a_4 = \frac{49}{36}.$$

In other words,

$$(3, 1, 2, 4) = \frac{1}{18}\mathbf{v}_1 - \frac{19}{12}\mathbf{v}_2 - \frac{17}{9}\mathbf{v}_3 + \frac{49}{36}\mathbf{v}_4.$$

Since there exists a solution to equation (2.3.9) for each vector $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^4$, we conclude that $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ spans $\mathbb{R}^4$.

Hence $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ is a basis for $\mathbb{R}^4$, since it is linearly independent and spans $\mathbb{R}^4$. □

Voorbeeld 2.3.6 Dimensie van *Poly$_n$*. Die lys polinome

$$\mathbf{p}_0(x) := 1,\ \mathbf{p}_1(x) := x,\ \mathbf{p}_2(x) := x^2,\ \ldots,\ \mathbf{p}_n(x) := x^n$$

is 'n basis vir Poly_n, so $\dim \mathrm{Poly}_n = n+1$. Duidelik sal hierdie lys Poly_n onderspan (per definisie), so ons moet net seker maak dat hulle line{êr} onafhanklik is. Veronderstel dat

$$a_0\mathbf{p}_0 + a_1\mathbf{p}_1 + a_2\mathbf{p_2} + \cdots + a_n\mathbf{p}_n = \mathbf{0}.$$

Dit is 'n vergelyking van funksies, so dit geld vir alle $x \in \mathbb{R}$! Met ander woorde, vir *alle* $x \in \mathbb{R}$ het ons het die vergelyking

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = 0. \tag{2.3.16}$$

Dink versigtig hieraan. Vergelyking (2.3.16) verteenwordig 'n *oneindige* stelsel van vergelykings vir die onbekendes $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Daar is een vergelyking vir elke waarde van $x \in \mathbb{R}$. Byvoorbeeld

$$
\begin{aligned}
&(x = 1) & a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n &= 0 && (2.3.17)\\
&(x = -1) & a_0 - a_1 + a_2 + \cdots + (-1)^n a_n &= 0 && (2.3.18)\\
&(x = 2) & a_0 + 2a_1 + 4a_3 + \cdots + 2^n a_n &= 0 && (2.3.19)\\
&(x = 3) & a_0 + 3a_1 + 9a_3 + \cdots + 3^n a_n &= 0 && (2.3.20)\\
& & &\vdots && (2.3.21)
\end{aligned}
$$

Veronderstel dat ons waardes vir $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ kan vind wat *elkeen* van hierdie oneindig veel vergelykings (2.3.17)–(2.3.21) op los. Ons kan nou ons standpunt verander. Naamlik, stel hierdie vaste waardes vir $a_0, a_1, \ldots, a_n$ in Vergelyking (2.3.16) en beskou Vergelyking (2.3.16) as 'n vergelyking vir die onbekende x (die koëffisiente $a_0, a_1, \ldots, a_n$ is nou *vasgemaak*.) Ons trek die gevolg dat *elke* $x \in \mathbb{R}$ 'n wortel van hierdie polinoom vergelyking is!

Maar, ons weet uit algebra dat 'n polinoom van die vorm (2.3.16) met nie-nul koëffisiënte *meestens* n wortels $x_1, x_2, \ldots, x_n$ het . So, die koëffisiënte moet nul wees, i.e. $a_0 = a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$, wat is wat ons moes bewys. □

Voorbeeld 2.3.7 Dimensie van $\mathrm{Poly}_n[x, y]$. Onthou uit Voorbeeld 1.6.22 die vektorruimte $\mathrm{Poly}_n[x, y]$ van polinome in veranderlikes x en y van graad minder of gelyk aan n.

'n Basis vir $\mathrm{Poly}_0[x, y]$ word gegee deur die konstante polinoom

$$1$$

so $\mathrm{Dim}\,\mathrm{Poly}_0[x, y] = 1$. Soortgelyk, 'n basis vir $\mathrm{Poly}_1[x, y]$ word gegee deur die polinome

$$1, x, y$$

so $\mathrm{Dim}\,\mathrm{Poly}_1[x, y] = 3$. Soortgelyk, 'n basis vir $\mathrm{Poly}_2[x, y]$ word gegee deur die polinome

$$1, x, y, x^2, xy, y^2$$

so $\mathrm{Dim}\,\mathrm{Poly}_2[x, y] = 6$. Deur sò te redeneer, sien ons dat

$$\begin{aligned} \mathrm{Dim}\,\mathrm{Poly}_n[x, y] &= 1 + 2 + 3 + \cdots n + 1 \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \end{aligned}$$

□

Voorbeeld 2.3.8 Dimensie van $\mathrm{Vect}_n(\mathbb{R}^2)$. Onthou uit Voorbeeld 1.6.23 die vektorruimte $\mathrm{Vect}_n(\mathbb{R}^2)$ van polinomiaal vektorvelde op $\mathbb{R}^2$ wie se komponentfunksies almal graad minder of gelyk aan n het.

'n Basis vir $\mathrm{Vect}_0(\mathbb{R}^2)$ word gegee deur die konstant polinomiaalvektorvelde

$$(1, 0), (0, 1)$$

so $\mathrm{Dim}\,\mathrm{Vect}_0(\mathbb{R}^2) = 1 + 1 = 2$. Soortgelyk, 'n basis vir $\mathrm{Vect}_1(\mathbb{R}^2)$ word gegee deur die polinomiaalvektorvelde

$$(1, 0), (x, 0), (y, 0), (0, 1), (0, x), (0, y)$$

so $\mathrm{Dim}\,\mathrm{Vect}_1(\mathbb{R}^2) = 3 + 3 = 6$. Soortgelyk 'n basis vir $\mathrm{Vect}_2(\mathbb{R}^2)$ word gegee deur die polinomiaalvektorvelde

$$\begin{gathered} (1, 0), (x, 0), (y, 0), (x^2, 0), (xy, 0), (y^2, 0), \\ (0, 1), (0, x), (0, y), (0, x^2), (0, xy), (0, y^2) \end{gathered}$$

so $\mathrm{Dim}\,\mathrm{Vect}_2(\mathbb{R}^2) = 6 + 6 = 12$. Deur sò te redeneer, sien ons dat

$$\begin{aligned} \mathrm{Dim}\,\mathrm{Vect}_n(\mathbb{R}^2) &= \mathrm{Dim}\,\mathrm{Poly}_n[x, y] + \mathrm{Dim}\,\mathrm{Poly}_n[x, y] \\ &= (n+1)(n+2). \end{aligned}$$

□

Voorbeeld 2.3.9 Veronderstel X 'n eindige versameling is. Dan is $\mathrm{Fun}(X)$ eindig-dimensioneel, met dimensie $|X|$, waar die basis gegee word deur die funksies f_a, $a \in X$, gedefinieer deur:

$$f_a(x) := \begin{cases} 1 & \text{if } x = a \\ 0 & \text{andersins} \end{cases} \tag{2.3.22}$$

Ons sal dit in 'n reeks oefeninge bewys.

Die formule aan die regterkant van (2.3.22) kom so gereeld in wiskunde voor dat ons dit 'n spesiale simbool gee, naamlik δ_{ab} (die 'Kronecker-delta').

Hierdie simbool staan vir die formule: "As $a = b$, gee die waarde 1. As $a \neq b$, gee die waarde 0". In hierdie taal kan ons die definisie van die funksies f_a as

$$f_a(x) := \delta_{ax} \tag{2.3.23}$$

herskryf. □

Verstaanpunt 2.3.10 Suppose $X = \{a, b, c\}$.

1. Evaluate the function f_b at each $x \in X$.

2. Show that $\{f_a, f_b, f_c\}$ is a basis for $\mathrm{Fun}(X)$.

Verstaanpunt 2.3.11 Nou, laat X 'n willekeurige eindige versameling wees. Oorweeg die versameling funksies

$$\mathcal{B} = \{f_a : a \in X\}$$

Toon aan dat $\mathcal{B}$ 'n basis vir $\mathrm{Fun}(X)$ is.

Voorbeeld 2.3.12 Trig_n is $(2n+1)$-dimensioneel, met basis

$$\begin{gathered}\mathbf{T}_0(x) := 1,\ \ \mathbf{T}_1(x) := \cos x,\ \mathbf{T}_2(x) := \sin x,\ \mathbf{T}_3(x) := \cos 2x,\\ \mathbf{T}_4(x) := \sin 2x,\ \ldots,\ \mathbf{T}_{2n-1}(x) := \cos nx,\ \mathbf{T}_{2n}(x) := \sin nx.\end{gathered}$$

Hierdie funksies span Trig_n per definisie. Hulle is ook lineêr onafhanklik, alhoewel ons dit nie sal bewys nie. □

Voorbeeld 2.3.13 Die dimensie van $\mathrm{Mat}_{n,m}$ is nm. 'n Basis word gegee deur die matrikse

$$\mathsf{E}_{ij}, i = 1 \ldots n,\ j = 1 \ldots m$$

wat 'n 1 in ry i en kolom j het, en nulle orals elders.

Normaalweg is A 'n matriks en A_{ij} is die element van die matriks in die posisie (i, j). Maar nou is E_{ij} 'n matriks in eie reg! 'n Element in posisie (k, l) sal geskryf word as $(\mathsf{E}_{ij})_{kl}$. Ek hoop jy vind dit nie te verwarrend nie. Trouens, ons kan 'n elegante formule vir die elemente van E_{ij} neerskryf deur gebruik te maak van die Kronecker delta-simbool:

$$(\mathsf{E}_{ij})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl} \tag{2.3.24}$$

□

Verstaanpunt 2.3.14 Kontroleer dat (2.3.24) wel die korrekte formule vir die matrikselemente van E_{ij} gee.

Voorbeeld 2.3.15 Die standaard basis van $\mathrm{Mat}_{2,2}$ is

$$\mathsf{E}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathsf{E}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathsf{E}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathsf{E}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

□

Voorbeeld 2.3.16 Die standaard basis van Col_n is

$$\mathbf{e}_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \mathbf{e}_n := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

□

Voorbeeld 2.3.17 Dimensie van 'n hipervlak. Laat $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ 'n vaste vektor wees, en beskou die hipervlak $W \subset \mathbb{R}^n$ ortogonaal aan $\mathbf{v}$ soos in Voorbeeld 1.6.15. Jy in Oefening Verstaanpunt 2.3.19 bewys dat $\mathrm{Dim}(W) = n - 1$.

Byvoorbeeld, beskou die spesifieke voorbeeld uit Voorbeeld 1.6.15, naamlik die vlak $W \subset \mathbb{R}^3$ ortogonaal aan $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$. Met ander woorde,

$$W = \{(w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3 : w_1 + 2w_2 + 3w_3 = 0\}. \tag{2.3.25}$$

Daar is geen 'standaard basis' vir W nie. Maar, hier is een basis (net so goed as enige ander basis):

$$\mathbf{a} = (1, 0, -\frac{1}{3}), \quad \mathbf{b} = (0, 1, -\frac{2}{3}). \tag{2.3.26}$$

Jy sal in Verstaanpunt 2.3.18 aantoon dat dit wel 'n basis vir W is. Ek het hierdie vektore as volg bereken. Vir $\mathbf{a}$, het ek eenvoudig net $w_1 = 1, w_2 = 0$ gestel en dan vir w_3 opgelos deur Vergelyking (2.3.25) te gebruik. Soortgelyk, vir $\mathbf{b}$, het ek eenvoudig net $w_1 = 0, w_2 = 1$ gestel en dan vir w_3 opgelos deur (2.3.25) te gebruik.

Daar is niks spesiaal met my metode hierbo om 'n basis vir W te bereken nie. Hier is nog 'n basis vir W, wat ek bereken het deur arbitrêre waardes van w_1 en w_2 te kies en dan w_3 te bereken deur Vergelyking (2.3.25) te gebruik:

$$\mathbf{u} = (1, 2, -\frac{5}{3}), \quad \mathbf{v} = (-4, 2, 0). \tag{2.3.27}$$

Wat ook al metode ons gebruik om 'n basis vir W te bereken, sien ons dat $\mathrm{Dim}(W) = 2$. □

Verstaanpunt 2.3.18 Toon aan dat die lys vektore $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ uit (2.3.26) in Voorbeeld 2.3.17 'n basis vir W is.

Verstaanpunt 2.3.19 Laat $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ 'n vaste vektor wees, en stel

$$W := \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0\}$$

Bewys dat $\mathrm{Dim}(W) = n - 1$.

Wenk. Vind 'n basis vir die oplossingversamling van die vergelyking wat W defineer.

2.3.2 Dimensie van die vektorruimte van oplossings van 'n homogene lineêre differensiaalvergelyking

Ons gaan nou die dimensie bereken van die vektorruimte van oplossings van 'n homogene lineêre differensiaalvergelyking. Ons het die volgende stelling nodig uit die teorie van differensiaalvergelykings, wat ons nie sal bewys nie.

Stelling 2.3.20 Bestaan en uniekheid van oplossings van lineêre GDV's. *Laat*

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y^{(1)} + a_0(x)y == 0 \tag{2.3.28}$$

'n lineêre homogene differensiaalvergelyking wees op 'n interval I, waar $a_0(x), \cdots, a_{n-1}(x)$ kontinu op I is. Verdonderstel dat ons beginwaardes gegee word,

$$y(x_0) = c_0 \tag{2.3.29}$$

$$y^{(1)}(x_0) = c_1 \tag{2.3.30}$$

$$\vdots \tag{2.3.31}$$

$$y^{(n-1)}(x_0) = c_{n-1} \tag{2.3.32}$$

waar $x_0 \in I$ en $c_0, \ldots, c_{n-1}$ willekeurige konstantes is. Dan bestaan daar 'n unieke funksie $y(x)$ op I wat die differensiaalvergelyingsaisfying (2.3.28) bevredig asook die beginwaardes (2.3.29)–(2.3.32).

Ons gaan nie Stelling 2.3.20 bewys nie --- jy kan die bewys in 'n kursus oor Differensiaalvergelykings vind. Ons is eerder geinteresseerd in die Lineêre Algebra *gevolgtrekkings* van Stelling 2.3.20. Maar eerstens, 'n voorbeeld om die Stelling te illustreer.

Voorbeeld 2.3.21 Visualisering van Stelling 2.3.20. Die volgende app illustreer Stelling 2.3.20. Sleep die rooi en groen slepers om die koëffisiente van die differensiaal vergelyking te verander (in hierdie voordbeeld, die koëffisiënte is net getalle, maar in algemeen hulle is funksies van x). Sleep die rooi punte om die beginwaardes te verander.

Specify static image with `@preview` attribute,
Or create and provide automatic screenshot as
`images/interactive-1-preview.png` via the `mbx` script

`www.geogebra.org/material/iframe/id/https://www.geogebra.org/material/iframe/id/xfs4bpqk/width/598/heigh`

Figuur 2.3.22 GeoGebra App: 2de orde GDV met konstante koëffisiënte.

□

Ons stel egter eerder belang in die volgende Lineêre Algebra *gevolg* van Stelling 2.3.20.

Gevolg 2.3.23 Dimensie van vektorruimte van oplossings van 'n homogene lineêre GDV van orde n. *Laat V die vektorruimte van alle oplossings van 'n n-ste orde homogene lineêre gewone differensiaalvergelyking op 'n interval I wees,*

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y^{(1)} + a_0(x)y = 0, \tag{2.3.33}$$

waar $a_0(x), \cdots, a_{n-1}(x)$ kontinu op I is. Dan is

$$\mathrm{Dim}(V) = n.$$

Bewys. Kies 'n vaste $a \in I$. Deur die *bestaan* deel van Stelling 2.3.20, weet ons dat daar bestaan

$$y_0, \ldots, y_{n-1} \in V \tag{2.3.34}$$

wat die volgende beginwaardes bevredig:

$$y_i^{(j)}(a) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1 \ldots n-1. \tag{2.3.35}$$

Hier is (2.3.35) volledig uitgeskryf:

$$\begin{array}{cccc}
y_0(a) = 1 & y_1(a) = 0 & \cdots & y_{n-1}(a) = 0 \qquad (2.3.36) \\
y_0^{(1)}(a) = 0 & y_1^{(1)}(a) = 1 & \cdots & y_{n-1}^{(1)}(a) = 0 \qquad (2.3.37) \\
\vdots & & \vdots & \qquad (2.3.38) \\
y_0^{(n-1)}(a) = 0 & y_1^{(n-1)}(a) = 0 & \cdots & y_{n-1}^{(n-1)}(a) = 1 \qquad (2.3.39)
\end{array}$$

Ek beweer dat $\{y_0, \ldots, y_{n-1}\}$ 'n basis vir V is.

Stap 1. $\{y_0, \ldots, y_{n-1}\}$ ***is lineêr onafhanklik.***
Veronderstel

$$k_0 y_0 + \cdots + k_{n-1} y_{n-1} = 0. \tag{2.3.40}$$

Deur Vergelyking (2.3.40) herhaaldelik te differensieer, kry ons n vergelykings:

$$k_0 y_0 + \cdots + k_{n-1} y_{n-1} = 0 \tag{2.3.41}$$
$$k_0 y_0' + \cdots + k_{n-1} y_{n-1}' = 0 \tag{2.3.42}$$
$$\vdots \tag{2.3.43}$$
$$k_0 y_0^{(n-1)} + \cdots + k_{n-1} y_{n-1}^{(n-1)} = 0 \tag{2.3.44}$$

Deur (2.3.41) te evalueer by $x = a$ kry ons:

$$k_0 \underbrace{y_0(a)}_{=1} + k_1 \underbrace{y_1(a)}_{=0} + \cdots + k_{n-1} \underbrace{y_{n-1}(a)}_{=0} = 0$$
$$\therefore k_0 = 0.$$

Soortgelyk, deur (2.3.42) te evalueer by $x = a$ kry ons

$$k_0 \underbrace{y_0'(a)}_{=0} + k_1 \underbrace{y_1'(a)}_{=1} + \cdots + k_{n-1} \underbrace{y_{n-1}'(a)}_{=0} = 0$$
$$\therefore k_1 = 0.$$

Soortgelyk, deur die oorblywnede höer afgeleides by $x = a$ te evalueer kry ons $k_2 = 0, \ldots, k_{n-1} = 0$. Dus, $\{y_0, \ldots, y_{n-1}\}$ is lineêr onafhanklik.

Stap 2. $\{y_0, \ldots, y_{n-1}\}$ ***span vir*** V***.***

Laat y 'n willekeurige oplossing van die differensiaalvergelyking (2.3.28) wees. Ons moet aantoon dat y uitgedruk kan word as 'n lineêre kombinasie van $y_0, \ldots, y_{n-1}$.

Definneer skalare $c_0, \ldots, c_{n-1}$ deur die afgeleides van y by $x = a$ te evalueer:

$$c_0 := y(a)$$
$$c_1 := y'(a)$$
$$\vdots$$
$$c_{n-1} := y^{(n-1)}(a)$$

Ek beweer dat

$$y = c_0 y_0 + c_1 y_1 + \cdots + c_{n-1} y_{n-1}. \tag{2.3.45}$$

Om hierdie te bewys, laat f die funksie op die regterkant van (2.3.45) wees:

$$f := c_0 y_0 + c_1 y_1 + \cdots + c_{n-1} y_{n-1}$$

Duidelik is $f \in V$, met ander woorde f is wel 'n oplossing van die differensiaalvergelyking (2.3.28).

Verder, oorweeg om f herhaaldelik te differensieer en dan te evalueer by $x = a$. Deur die beginwaardes wat deur die funksies y_i bevredig word, Vergelyking (2.3.35), bereken ons:

$$f(a) = c_0$$
$$f'(a) = c_1$$
$$\vdots$$
$$f^{(n-1)}(a) = c_{n-1}$$

Hierdie is presies dieselfde beginwaardes bevredig deur y in Vergelykings (2.3.36)–(2.3.39)! Dus, deur die uniekheid deel van Stelling 2.3.20, lei ons af dat $f = y$. Dus (2.3.45) is inderdaad waar. ■

Laat ons nou 'n paar voorbeelde doen wat die ideë hierbô illustreer.

Voorbeeld 2.3.24 Toepassing van bestaan en uniekheid van oplossings van 'n GDV. Beskou die GDV

$$x^2 y'' - 3xy' + 5y = 0 \quad \text{on } (0, \infty) \tag{2.3.46}$$

uit Voorbeeld 1.6.27. Om Stelling 2.3.20 toe te pas, heskryf ons dit eers in die vorm

$$y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{5}{x^2}y = 0 \quad \text{on } (0, \infty). \tag{2.3.47}$$

Die koëffisiëntfunksies $\frac{3}{x}$ en $\frac{5}{x^2}$ is albei kontinu op $(0, \infty)$ en so kan ons Stelling 2.3.20 toepas. Kies, byvoorbeeld, $x_0 = 1$ en willekeurige getalle c_0, c_1. Dan sê Stelling 2.3.20 dat daar bestaan 'n unieke oplossing $y(x)$ van die differensiaalvergelyking (2.3.47) wat die volgende beginwaardes bevredig:

$$y(1) = c_0 \tag{2.3.48}$$

$$y'(1) = c_1 \tag{2.3.49}$$

Laat ons die verifeer in SageMath. Eerstens, ons vra SageMath om die algemene oplossing van differensiaalvergelyking (2.3.47) te bereken:

```
x = var('x')
y = function('y')(x)

ode = diff(y,x,2) - 3/x * diff(y,x,1) + 5/x^2 * y == 0

show(desolve(ode, y))
```

SageMath vertel ons dat die algemene oplossing van die differensiaalvergelyking (2.3.47) is

$$y = K_1 x^2 \sin(\log(x)) + K_2 x^2 \cos(\log(x)). \tag{2.3.50}$$

Kom ons pas nou die beginwaardes (2.3.48)–(2.3.49) toe. Ons kan $y(1)$ en $y'(1)$ bereken deur die formule vir y uit (2.3.50) te gebruik. So (2.3.48)–(2.3.49) word (kontrolleer!):

$$K_2 = c_0 \tag{2.3.51}$$

$$K_1 + 2K_2 = c_1 \tag{2.3.52}$$

Vergelykings (2.3.51)–(2.3.52) het 'n unieke oplossing, naamlik $K_1 = c_1 - 2c_0, K_2 = c_0$. So inderdaad, vir enige beginwaardes (2.3.48)–(2.3.49), het die differensiaalvergelyking (2.3.47) 'n unieke oplossing, naamlik:

$$y = (c_1 - 2c_0)x^2 \sin(\log(x)) + c_0 x^2 \cos(\log(x))$$

Byvoorbeeld, as ons beginwaardes

$$y(1) = 1 \tag{2.3.53}$$

$$y'(1) = 0 \tag{2.3.54}$$

is, dan is die unieke oplossing as volg:

$$y = -2x^2 \sin(\log(x)) + x^2 \cos(\log(x)). \tag{2.3.55}$$

Jy kan dit ook eksplisiet in SageMath bevestig, deur die `ics=[1,1,0]` opsie van `desolve` te gebruik (die eerste nommer is die waarde van x_0, die tweede nommer is die waarde van $y(x_0)$, en die derde nommer is die waarde van y'(x_0), etc.):

```
x = var('x')
y = function('y')(x)

ode = diff(y,x,2) - 3/x * diff(y,x,1) + 5/x^2 * y == 0

show(desolve(ode, y, ics=[1,1,0]))
```

SageMath druk uit dieselfde oplossing as in (2.3.55). Soortgelyk, as ons beginwaardes

$$y(1) = 1 \tag{2.3.56}$$
$$y'(1) = 0 \tag{2.3.57}$$

is, dan is die unieke oplossing

$$y = x^2 \sin(\log(x)).$$

□

2.3.3 Dimensies van deelruimtes

Ons gaan nou deelruimtes van vektorruimtes se dimensie bestudeer.

Stelling 2.3.25 *Laat W 'n deelruimte van 'n eindig-dimensionele vektorruimte V wees. Dan is W eindig-dimensioneel, en $\mathrm{Dim}(W) \leq \mathrm{Dim}(V)$. Verder, as $\mathrm{Dim}(W) = \mathrm{Dim}(V)$ dan is $W = V$.*

Bewys. ***Proving that*** $\mathrm{Dim}(W) \leq \mathrm{Dim}(V)$

Let

$$\mathcal{C} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$$

be a basis for V, so that $\mathrm{Dim}(V) = n$. We just need to show that W is finite-dimensional, i.e. that there exists a basis

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k\}$$

for W. For then $\mathcal{B}$ will be a list of k linearly independent vectors which live in W (and hence also in V) and hence we must have $k \leq n$ by Stelling 2.2.10, as $\mathcal{C}$ spans V.

We show that W is finite-dimensional as follows.

If W is the zero vector space $\{\mathbf{0}\}$, then W is finite-dimensional by definition.

If W is not the zero vector space, then there exists a nonzero vector $\mathbf{w}_1 \in W$. Consider the list $\mathcal{B}_1 = \{\mathbf{w}_1\}$. Note that $\mathcal{B}_1$ is linearly independent, by Item 3 of Stelling 2.2.8. So, if $\mathcal{B}_1$ spans W, then it is a basis for W, and so W is finite-dimensional and we are done.

If $\mathcal{B}_1$ does not span W, then there exists a vector $\mathbf{w}_2 \in W$ which is not a scalar multiple of $\mathbf{e}_1$. Now consider the list $\mathcal{B}_2 = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. Once again, $\mathcal{B}_2$ is linearly independent, by Item 3 of Stelling 2.2.8. So, if $\mathcal{B}_2$ spans W, then it is a basis for W, and we are done.

If $\mathcal{B}_2$ does not span W, then there exists a vector $\mathbf{w}_3 \in W$ which is not a linear combination of $\mathbf{w}_1$ and $\mathbf{w}_2$. Now consider the list $\mathcal{B}_3 = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$. Again, $\mathcal{B}_3$ is linearly independent, by Item 3 of Stelling 2.2.8. If it does not span W, then there exists a vector $\mathbf{w}_4 \in W$ which is not a linear combination of $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$. So consider the list $\mathcal{B}_4 = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4\}$.

This process must terminate for some $k \leq n$. If not, then it will produce a list $\mathcal{B}_{n+1} = \{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_{n+1}\}$. This would be a linearly independent list of $n+1$ vectors from V. But $\mathrm{Dim}\, V = n$, so this is impossible, by Stelling 2.2.10. Hence for some $k \leq n$ we must have that $\mathcal{B}_k$ is a basis for W, and we are done.

Proving that $\mathrm{Dim}(V) = \mathrm{Dim}(W) \Rightarrow W = V$

Suppose that $\mathrm{Dim}(W) = \mathrm{Dim}(V)$ but that $W \neq V$. Since $W \neq V$, there exists a vector $\mathbf{v}$ which is an element of V but not an element of W. Let $\mathcal{B} = \{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ be a basis for W. We can add $\mathbf{v}$ to $\mathcal{B}$ to get the following list of vectors in V:

$$\mathcal{B}' = \{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n, \mathbf{v}\}.$$

Since $\mathbf{v}$ cannot be written as a linear combination of $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$, we conclude that $\mathcal{B}'$ linearly lindependent, by Item 3. But then $\mathcal{B}'$ is a list of $n+1$ linearly independent vectors in an n-dimensional vector space V. This is impossible, by Stelling 2.2.10. Therefore our assumption was false, and we must have $W = V$. ■

2.3.4 Oneindig-dimensionele vektorruimtes

Dit is goed om 'n paar voorbeelde van oneindig-dimensionele vektorruimte te hê.

Stelling 2.3.26 Poly *is oneindigdimensioneel.*

Bewys. Veronderstel Poly is eindig dimensioneel. Dit beteken dat daar 'n eindige versameling polinome $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$ bestaan wat Poly onderspan. Maar, laat d die hoogste graad van al die polinome in die lys $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$ wees. Dan is $\mathbf{p} := x^{d+1}$ 'n polinoom wat nie in die span van $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$ is nie, want die optelling en skalaarvermenigvuldiging van polinome nooit die graad kan verhoog nie. Dit is 'n teenstrydigheid. So ons aanvanklike aanname kan nie waar wees nie, i.e. Poly kan nie eindigdimensioneel wees nie. ■

Voorbeeld 2.3.27 Ons sal dit nie hier bewys nie, maar die volgende vektorruimtes is ook oneindig dimensioneel:

- $\mathbb{R}^\infty$,
- Fun(X) waar X 'n eindige versameling is,
- Cont(I) vir enige nie-leë interval I,
- Diff(I) vir enige oop interval I, en
- Poly^k.

□

2.3.5 Die sifalgoritme en die gebruike daarvan

As ons die bewys van Proposisie 2.2.10 (die 'Afstampproposisie') noukeurig bestudeer, vind ons dat dit van 'n *sif-algoritme* gebruik maak. Hierdie algoritme kan op *enige* lys vektore $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ in 'n vektorruimte toegepas word. Beskou elke vektor $\mathbf{v}_i$ in so 'n lys opeenvolgend. As $\mathbf{v}_i$ die nul-vektor is, of as dit 'n lineêre kombinasie van die voorafgaande vektore $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}$ is, verwyder dit van die lys.

Voorbeeld 2.3.28 Sif die volgende lys vektore in $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} &\mathbf{v}_1 = (1,2,-1), && \mathbf{v}_2 = (0,0,0), && \mathbf{v}_3 = (3,6,-3) \\ &\mathbf{v}_4 = (1,0,5), && \mathbf{v}_5 = (5,4,13), && \mathbf{v}_6 = (1,1,0). \end{aligned}$$

Ons begin met $\mathbf{v}_1$. Aangesien dit nie die nul-vektor is nie en nie 'n lineêre kombinasie van enige voorafgaande vektore is nie, bly dit in die lys. Nou beweeg ons aan na $\mathbf{v}_2$, wat nul is, so ons verwyder dit. Ons skuif aan na $\mathbf{v}_3$, wat ons deur inspeksie vasstel dat dit as$3\mathbf{v}_1$ geskryf kan word, so ons verwyder dit. Ons beweeg aan na $\mathbf{v}_4$. Dit is nie nul nie, en dit kan nie as 'n veelvoud van $\mathbf{v}_1$ uitgedruk word nie (bevestig dit self), so dit bly in die lys. Ons beweeg aan na $\mathbf{v}_5$. Ons kyk of dit as die lineêre kombinasie

$$\mathbf{v}_5 = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_4$$

geskryf kan word en vind die oplossing $a = 2, b = 3$ (bevestig self), so ons verwyder dit. Laastens kom ons by $\mathbf{v}_6$. Ons ondersoek of dit as 'n lineêre kombinasie

$$\mathbf{v}_6 = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_4$$

geskryf kan word en vind geen oplossings nie (bevestig self), so dit bly in die lys. Ons finale gesifte lys is

$$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_6.$$

□

Verstaanpunt 2.3.29 Doen die drie 'bevestig self'-bewerkings hierbo.

Oplossing.

1. Suppose
$$(a, 2a, -a) = (1, 0, 5).$$
Then the first entry requires that $a = 1$ but the second entry requires that $a = 0$. Hence there can be no a satisfying the equation.

2. $$2\mathbf{v}_1+3\mathbf{v}_2 = 2(1, 2, -1)+3(1, 0, 5) = (2+3, 4+0, -2+15) = (5, 4, 13) = \mathbf{v}_4$$

3. Suppose
$$a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_4 = \mathbf{v}_6$$
i.e.
$$(a, 2a, -a) + (b, 0, 5b) = (1, 1, 0).$$
Consideration of the second entry gives $a = \frac{1}{2}$ which, by looking at the first entry, forces $b = \frac{1}{2}$ but then, if we look at the third entry, $-\frac{1}{2}+\frac{5}{2} \neq 0$. Hence there are no solutions to the equation.

Die volgende resultate wys dat sifting a baie nuttige manier is om 'n basis vir 'n vektorruimte te konstrueer!

Hulpstelling 2.3.30 *As 'n lys vektore $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ 'n vektorruimte V span, dan sal sifting van die lys in 'n basis vir V resulteer.*

Bewys. By elke stap vind ons dat 'n vektor wat uit die lys verwyder word óf die nul-vektor is, óf 'n lineêre kombinasie van die voorafgaande vektore is wat nié uit die lys verwyder word nie. So as ons die vektor uit die lys verwyder, sal die oorblywende vektore steeds V span. Daarom span die vektore in die finale lys steeds V.

Om te sien dat die finale gesifte lys lineêr onafhanklik is, pas ons Proposisie 2.2.8 toe. Deur konstruksie is geen vektor in die finale lys 'n lineêre kombinasie van die voorafgaande vektore nie (anders sou dit verwyder gewees het!). Daarom is die finale lys nie lineêr afhanklik nie, so dit moet lineêr onafhanklik wees! ■

Gevolg 2.3.31 *Enige lineêr onafhanklike lys vektore $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ in 'n eindig-dimensionele vektorruimte V kan uitgebrei word tot 'n basis van V.*

Bewys. Aangesien V eindig-dimensioneel is, het dit 'n basis $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$. Oorweeg nou die lys

$$L : \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$$

wat duidelik V onderspan. Deur die lys te sif, sal ons 'n basis vir V kry, volgens Lemma 2.3.30. Sommige van die $\mathbf{e}$-vektore mag dalk verwyder wees in die proses. Maar geeneen van die $\mathbf{v}$-vektore sal verwyder word nie, aangesien dit sou beteken dat sommige vektore $\mathbf{v}_i$ 'n lineêre kombinasie van die voorafgaande vektore $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}$ is, wat onmoontlik is, omdat $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ 'n lineêr onafhanklike lys is. Dus ná sifting van die lys L brei ons ons die oorspronklike lys $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ uit na 'n basis van V. ■

Gevolg 2.3.32 *As* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ *'n lineêr onafhanklike lys van* n *vektore in 'n* n*-dimensionele vektorruimte* V *is, dan is dit 'n basis.*

Bewys. Volgens Gevolgtrekking 2.3.31 kan ons $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ tot 'n basis van V uitbrei. Maar V het dimensie n, so die basis moet volgens Stelling 2.3.2 (Onveranderlikheid van Dimensie) slegs n vektore bevat Gevolglik het ons geen vektore bygevoeg nie, en ons oorspronklike lys is reeds 'n basis. ■

Voorbeeld 2.3.33 In Voorbeeld 2.2.7 het ons gewys dat die lys polinome

$$\mathbf{q}_0(x) := 1, \ \mathbf{q}_1(x) := x, \ \mathbf{q}_2(x) := 2x^2 - 1, \ \mathbf{q}_3(x) := 4x^3 - 3x$$

lineêr onafhanklik in Poly_3 is. Aangesien $\dim \mathrm{Poly}_3 = 4$, sien ons dat dit 'n basis vir Poly_3 is.

In Oefening 2.1.1.5 het jy gewys dat $\mathbf{q}_0, \ldots, \mathbf{q}_3$ 'n basis vir Poly_3 is deur dit direk teen die definisie te toets. Hierdie nuwe metode is *verskillend*! □

2.3.6 Oefeninge

1. Sif die lys vektore

$$\begin{array}{lll} \mathbf{v}_1 = (0,0,0), & \mathbf{v}_2 = (1,0,-1), & \mathbf{v}_3 = (1,2,3) \\ \mathbf{v}_4 = (3,4,5), & \mathbf{v}_5 = (4,8,12), & \mathbf{v}_6 = (1,1,0). \end{array}$$

2. Laat V 'n vektorruimte van dimensie n wees. Besluit (en skryf jou besluit neer!) of die volgende bewerings waar of onwaar is. As dit waar is, bewys dit. Indien nie, gee 'n teenvoorbeeld.

- *(a).*

  Enige lineêr onafhanklike lys vektore in V bevat hoogstens n vektore.

- *(b).*

  Enige lys vektore wat V span bevat ten minste n vektore.

Oplossing.

(a) True

Suppose we had a list of $n+1$ linearly independent vectors. By Corollary 2.3.31, we can extend the list to a basis for V. Hence we would obtain a basis for V with at least $n+1$ vectors. We conclude that $\dim V \geq n+1$ contradicting, the fact that $\dim V = n$.

(b) True

Try it yourself! Your proof will be very similar to the one given for a.

3. Voltooi die bewys van die volgende Lemma.

Lemma. Veronderstel dat V 'n vektorruimte van dimensie n is. Dan is enige lineêr onafhanklike lys van n vektore in V 'n basis vir V.

Bewys. Laat $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ 'n lineêr onafhanklike lys vektore in V wees.

Veronderstel dat $\mathcal{B}$ *nie* 'n basis vir V is nie.
Daarom onderspan $\mathcal{B}$ nie vir V nie, want ... (a)
Daarom bestaan daar $\mathbf{v} \in V$ sodanig dat ... (b)
Voeg nou $\mathbf{v}$ by die lys $\mathcal{B}$ om 'n nuwe lys $\mathcal{B}' :=$ te vorm ... (c)
Die nuwe lys $\mathcal{B}'$ is lineêr onafhanklik omdat ... (d)
Dit is 'n teenstrydigheid, omdat ... (e)
Dus moet $\mathcal{B}$ 'n basis vir V wees.

Oplossing.

(a) Any linearly independent spanning set is by definition a basis, contradicting our assumption.

(b) $\mathbf{v}$ is not a linearly combination of the vectors in $\mathcal{B}$.

(c) $\{\mathbf{v}_1 \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}\}$

(d) No vector in $\mathcal{B}'$ is a linear combination of the previous vectors and so the list is thus linearly indepedent by Stelling 2.2.8.

(e) The vector subspace W of V spanned by the vectors in $\mathcal{B}'$ has dimension $n+1$ and so $\dim(W) > \dim(V)$ which contradicts Stelling 2.3.25.

4. Gebruik Oefening 2.3.6.2(a) om aan te toon dat die lys matrikse in $\mathrm{Mat}_{2,2}$ vanaf Oefening 2.2.1.2 lineêr onafhanklik is.

Oplossing. $\mathrm{Mat}_{2,2}$ has dimension 4 since it is spanned by $\mathbf{e}_{1,1}, \mathbf{e}_{1,2}, \mathbf{e}_{2,1}, \mathbf{e}_{2,2}$ where $\mathbf{e}_{i,j}$ is the matrix with a 1 in the ij^{th} entry and 0's everywhere else. By Exercise 2.3.6.2(a), any linearly indepedent list of vectors in $\mathrm{Mat}_{2,2}$ has length at most 4. Since the list of matrices in $\mathrm{Mat}_{2,2}$ in Exercise 2.2.1.2 has length 5, it cannot be linearly independent.

5. In elke geval, gebruik die resultate uit Oefeninge 2.3.6.2 en 2.3.6.3 om te bepaal of $\mathcal{B}$ 'n basis vir V is:

(a) *(a).*
$V = \mathrm{Poly}_2$, $\mathcal{B} = \left\{2 + x^2,\ 1 - x,\ 1 + x - 3x^2,\ x - x^2\right\}$

(b) *(b).*
$V = \mathrm{Mat}_{2,2}$,

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \right\}$$

(c) *(c).*
$V = \mathrm{Trig}_2$, $\mathcal{B} = \left\{\sin^2 x,\ \cos^2 x,\ 1 - \sin 2x,\ \cos 2x + 3\sin 2x\right\}$

Oplossing.

(a) Poly_2 has a basis $\mathcal{B}' = \{1, x, x^2\}$ and so has dimension 3. Since $\mathcal{B}$ has length 4, it cannot be linearly independent by Exercise 2.3.6.2(a). Hence $\mathcal{B}$ cannot be a basis for Poly_2.

(b) $\mathrm{Mat}_{2,2}$ has dimension 4. Since $\mathcal{B}$ has length 3, it cannot span $\mathrm{Mat}_{2,2}$. Hence $\mathcal{B}$ cannot be a basis for $\mathrm{Mat}_{2,2}$.

(c) Trig_2 has dimension 5. Since $\mathcal{B}$ has length 5, it cannot span Trig_2. Hence $\mathcal{B}$ cannot be a basis for Trig_2.

6. Laat $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ 'n lineêr onafhanklike lys vektore in 'n vektorruimte V wees. Skryf neer of die volgende bewerings waar of onwaar is. As dit waar is, bewys dit. As dit onwaar is, gee 'n teenvoorbeeld. (Wenk: Gebruik die definisie van lineêre onafhanklikheid.)

- *(a).*
  Die lys $\{\mathbf{u} + \mathbf{v},\ \mathbf{v} + \mathbf{w},\ \mathbf{u} + \mathbf{w}\}$ is lineêr onafhanklik.
- *(b).*

Die lys $\{\mathbf{u}-\mathbf{v},\ \mathbf{v}-\mathbf{w},\ \mathbf{u}-\mathbf{w}\}$ is lineêr onafhanklik.

Oplossing.

(a) True. Suppose there is a linear relation on $\{\mathbf{u}+\mathbf{v},\ \mathbf{v}+\mathbf{w},\ \mathbf{u}+\mathbf{w}\}$:

$$a(\mathbf{u}+\mathbf{v})+b(\mathbf{v}+\mathbf{w})+c(\mathbf{u}+\mathbf{w}).$$

This induces a linear relation on $\{\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\}$: $(a+c)\mathbf{u}+(a+b)\mathbf{v}+(b+c)w=\mathbf{0}$ Since $\{\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\}$ is linearly independent, we must have that

$$\begin{aligned} a+c&=0 \qquad (1)\\ a+b&=0 \qquad (2)\\ b+c&=0 \qquad (3)\end{aligned}$$

(1)+(2) combined with (3) gives us that $a=0$ and so $b=c=0$ too. We conclude that $\{\mathbf{u}+\mathbf{v},\ \mathbf{v}+\mathbf{w},\ \mathbf{u}+\mathbf{w}\}$ is linearly independent.

(b) False. Let $V=\mathbb{R}^3$. Let

$$\mathbf{u}=(1,0,0)\,\mathbf{v}=(0,1,0),\ \mathbf{w}=(0,0,1)$$

and so

$$\mathbf{u}-\mathbf{v}=(1,-1,0)\mathbf{v}-\mathbf{w}=(0,1,-1)\mathbf{u}-\mathbf{w}=(1,0,-1).$$

By inspection, we see that

$$(1,-1,0)+(0,1,-1)=(1,0,-1)$$

and so $\{\mathbf{u}-\mathbf{v},\ \mathbf{v}-\mathbf{w},\ \mathbf{u}-\mathbf{w}\}$ is linearly dependent.

Alternatively, we could have noticed that for any vectors $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$:

$$(\mathbf{u}-\mathbf{v})+(\mathbf{v}-\mathbf{w})=\mathbf{u}-\mathbf{w}.$$

Thus $\{\mathbf{u}-\mathbf{v},\ \mathbf{v}-\mathbf{w},\ \mathbf{u}-\mathbf{w}\}$ satisfies Stelling 2.2.8 and so is linearly dependent.

7. Vir elkeen van die volgende, toon aan dat V 'n deelruimte van Poly_2 is, vind 'n basis vir V, en bereken $\dim V$.

(a) *(a).*
$V=\{p\in\text{Poly}_2 : p(2)=0\}$

(b) *(b).*
$V=\{p\in\text{Poly}_2 : xp'(x)=p(x)\}$

Oplossing.

(a) We omit the check that V is a subspace of Poly_2 since it is routine. Let us now construct a basis for V. Begin with a non-zero vector $\mathbf{v}_1$ in V. We make the most obvious choice, let $\mathbf{v}_1=x-2$. Next pick any vector $\mathbf{v}_2$ in V not in the span of $\{\mathbf{v}_1\}$. An obvious choice is $\mathbf{v}_2=x(x-2)$. Since V is not all of Poly_2, we know that $\dim V<3$. Thus $\mathcal{B}'=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\}$ is a basis for V and so $\dim V=2$.

(b) Once again, we omit the check that V is a subspace of Poly_2. Pick any non-zero vector $\mathbf{v}_1$ in V. Let's choose $\mathbf{v}_1=x$. It is not as obvious as before whether there are indeed any vectors in V not in the span of $\{\mathbf{v}_1\}$, and so we must do some computations. If $p(x) = ax^2 + bx + c$ is in V, $p(x)$ must satisfy

$$x(2ax+b) = ax^2 + bx + c \implies 2ax^2 + bx = ax^2 + bx + c.$$

Hence $a = c = 0$. Thus all vectors in V are scalar multiples of $\mathbf{v}_1 = x$. Hence $\{\mathbf{v}_1\}$ is a basis for V and so $\dim V = 1$.

8. Prove or disprove: there exits a basis $\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ of Poly_3 such that none of the polynomials p_0, p_1, p_2, p_3 have degree 2.

Oplossing. The basis $\mathcal{B} = \{x^3, x^3+x^2, x, 1\}$ works. The check is routine.

9. Prove or disprove: if U and W are distinct subspaces of V with $U \neq V$ and $W \neq V$, then $\dim(U+V) = \dim(U) + \dim(V)$. (Recall the definition of the sum of two subspaces from Oefening 1.6.4.9.)

Oplossing. We can disprove the statement with the following counterexample. Let $V = \mathbb{R}^3$. Let U be the vector subspace with basis $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$ and let W be the vector subspace with basis $\{(0,0,1),(0,1,0)\}$. Clearly $\dim U = \dim W = 2$ and thus $\dim(U) + \dim(V) = 4$. But since $U + W = \mathbb{R}^3$, $\dim(U+V) = \dim \mathbb{R}^3 = 3$.

10. Laat V die vektorruimte van oplossings van die volgende differensiaalevergelyking wees:

$$x^3y''' + x^2y'' - 2xy' + 2y = 0 \tag{2.3.58}$$

(a) Sonder om enige eksplisiete berekeninge to doen, bepaal die dimensie van V.

(b) Deur SageMath te gebruik, vind 'n basis vir V. (Sien die voorbeelde in Afdeling 2.3). Toon eksplisiet aan (met had berekeninge!) dat elkeen van jou basis vektore inderdaad (2.4.8) bevredig.

(c) Bepaal die unieke funksie y_1 wat 'n oplossing van (2.4.8) is en die volgende beginwaardes bevredig:

$$y_1(1) = 1 \quad y_1'(1) = 0 \quad y_1''(1) = 0.$$

(d) Bepaal die unieke funksie y_2 wat 'n oplossing van (2.4.8) en die volgende beginwaardes bevredig:

$$y_2(1) = 0 \quad y_2'(1) = 1 \quad y_2''(1) = 0.$$

(e) Bevredig die funksie $y_3 = y_1 + y_2$ ook die differensiaalvergelyking (2.4.8)? As gevolg van Stelling 2.3.20, is y_3 die unieke oplossing van 'n beginwaardeprobleem wat te doen het met (2.4.8). Wat is daardie beginwaardes?

(f) Lees deur 2D Plotting in Sage. Gebruik SageMath om 'n grafiek van y_1, y_2, y_3 te teken op die interval $[0, 10]$.

2.3.7 Oplossings

2.3.6 · Oefeninge

2.3.6.2. Oplossing.

(a) True

Suppose we had a list of $n+1$ linearly independent vectors. By Corollary 2.3.31, we can extend the list to a basis for V. Hence we would obtain a basis for V with at least $n+1$ vectors. We conclude that $\dim V \geq n+1$ contradicting, the fact that $\dim V = n$.

(b) True

Try it yourself! Your proof will be very similar to the one given for a.

2.3.6.3. Oplossing.

(a) Any linearly independent spanning set is by definition a basis, contradicting our assumption.

(b) $\mathbf{v}$ is not a linearly combination of the vectors in $\mathcal{B}$.

(c) $\{\mathbf{v}_1 \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}\}$

(d) No vector in $\mathcal{B}'$ is a linear combination of the previous vectors and so the list is thus linearly indepedent by Stelling 2.2.8.

(e) The vector subspace W of V spanned by the vectors in $\mathcal{B}'$ has dimension $n+1$ and so $\dim(W) > \dim(V)$ which contradicts Stelling 2.3.25.

2.3.6.4. Oplossing. $\mathrm{Mat}_{2,2}$ has dimension 4 since it is spanned by $\mathbf{e}_{1,1}, \mathbf{e}_{1,2}, \mathbf{e}_{2,1}, \mathbf{e}_{2,2}$ where $\mathbf{e}_{i,j}$ is the matrix with a 1 in the ij^{th} entry and 0's everywhere else. By Exercise 2.3.6.2(a), any linearly indepedent list of vectors in $\mathrm{Mat}_{2,2}$ has length at most 4. Since the list of matrices in $\mathrm{Mat}_{2,2}$ in Exercise 2.2.1.2 has length 5, it cannot be linearly independent.

2.3.6.5. Oplossing.

(a) Poly_2 has a basis $\mathcal{B}' = \{1, x, x^2\}$ and so has dimension 3. Since $\mathcal{B}$ has length 4, it cannot be linearly independent by Exercise 2.3.6.2(a). Hence $\mathcal{B}$ cannot be a basis for Poly_2.

(b) $\mathrm{Mat}_{2,2}$ has dimension 4. Since $\mathcal{B}$ has length 3, it cannot span $\mathrm{Mat}_{2,2}$. Hence $\mathcal{B}$ cannot be a basis for $\mathrm{Mat}_{2,2}$.

(c) Trig_2 has dimension 5. Since $\mathcal{B}$ has length 5, it cannot span Trig_2. Hence $\mathcal{B}$ cannot be a basis for Trig_2.

2.3.6.6. Oplossing.

(a) True. Suppose there is a linear relation on $\{\mathbf{u}+\mathbf{v},\ \mathbf{v}+\mathbf{w},\ \mathbf{u}+\mathbf{w}\}$:

$$a(\mathbf{u}+\mathbf{v}) + b(\mathbf{v}+\mathbf{w}) + c(\mathbf{u}+\mathbf{w}).$$

This induces a linear relation on $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$: $(a+c)\mathbf{u}+(a+b)\mathbf{v}+(b+c)w = \mathbf{0}$ Since $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ is linearly independent, we must have that

$$\begin{aligned} a+c &= 0 \qquad (1)\\ a+b &= 0 \qquad (2)\\ b+c &= 0 \qquad (3) \end{aligned}$$

$(1)+(2)$ combined with (3) gives us that $a=0$ and so $b=c=0$ too. We conclude that $\{\mathbf{u}+\mathbf{v},\ \mathbf{v}+\mathbf{w},\ \mathbf{u}+\mathbf{w}\}$ is linearly independent.

(b) False. Let $V = \mathbb{R}^3$. Let

$$\mathbf{u} = (1,0,0)\,\mathbf{v} = (0,1,0),\ \mathbf{w} = (0,0,1)$$

and so

$$\mathbf{u}-\mathbf{v} = (1,-1,0)\mathbf{v}-\mathbf{w} = (0,1,-1)\mathbf{u}-\mathbf{w} = (1,0,-1).$$

By inspection, we see that

$$(1,-1,0) + (0,1,-1) = (1,0,-1)$$

and so $\{\mathbf{u}-\mathbf{v},\ \mathbf{v}-\mathbf{w},\ \mathbf{u}-\mathbf{w}\}$ is linearly dependent.

Alternatively, we could have noticed that for any vectors $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$:

$$(\mathbf{u}-\mathbf{v}) + (\mathbf{v}-\mathbf{w}) = \mathbf{u}-\mathbf{w}.$$

Thus $\{\mathbf{u}-\mathbf{v},\ \mathbf{v}-\mathbf{w},\ \mathbf{u}-\mathbf{w}\}$ satisfies Stelling 2.2.8 and so is linearly dependent.

2.3.6.7. Oplossing.

(a) We omit the check that V is a subspace of Poly_2 since it is routine. Let us now construct a basis for V. Begin with a non-zero vector $\mathbf{v}_1$ in V. We make the most obvious choice, let $\mathbf{v}_1 = x-2$. Next pick any vector $\mathbf{v}_2$ in V not in the span of $\{\mathbf{v}_1\}$. An obvious choice is $\mathbf{v}_2 = x(x-2)$. Since V is not all of Poly_2, we know that $\dim V < 3$. Thus $\mathcal{B}' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ is a basis for V and so $\dim V = 2$.

(b) Once again, we omit the check that V is a subspace of Poly_2. Pick any non-zero vector $\mathbf{v}_1$ in V. Let's choose $\mathbf{v}_1 = x$. It is not as obvious as before whether there are indeed any vectors in V not in the span of $\{\mathbf{v}_1\}$, and so we must do some computations. If $p(x) = ax^2+bx+c$ is in V, $p(x)$ must satisfy

$$x(2ax+b) = ax^2+bx+c \implies 2ax^2+bx = ax^2+bx+c.$$

Hence $a = c = 0$. Thus all vectors in V are scalar multiples of $\mathbf{v}_1 = x$. Hence $\{\mathbf{v}_1\}$ is a basis for V and so $\dim V = 1$.

2.3.6.8. Oplossing. The basis $\mathcal{B} = \{x^3, x^3+x^2, x, 1\}$ works. The check is routine.

2.3.6.9. Oplossing. We can disprove the statement with the following counterexample. Let $V = \mathbb{R}^3$. Let U be the vector subspace with basis $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$ and let W be the vector subspace with basis $\{(0,0,1),(0,1,0)\}$. Clearly $\dim U = \dim W = 2$ and thus $\dim(U) + \dim(V) = 4$. But since $U+W = \mathbb{R}^3$, $\dim(U+V) = \dim\mathbb{R}^3 = 3$.

2.4 Koördinaatvektore

Daar is 'n meer direkte manier om oor 'n basis te dink.

Stelling 2.4.1 Basisse gee koördinate. *'n Lys vektore $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ in 'n vektorruimte V is 'n basis van V as en slegs as elke vektor $\mathbf{v} \in V$ op presies* een *manier as 'n lineêre kombinasie*

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \cdots + a_n\mathbf{e}_n \tag{2.4.1}$$

geskryf kan word. Dit is, vir elke $\mathbf{v} \in V$ bestaan *daar skalare* a_1, a_2, ..., a_n *wat (2.4.1) bevredig en verder is hierdie skalare* uniek.

Dit is belangrik om die wiskundige frase "daar bestaan 'n unieke X wat Y bevredig" te verstaan. Dit beteken twee dinge. Eerstens, daar *bestaan* 'n X wat Y bevredig. Tweedens, daar *geen ander* X wat Y bevredig nie.

Ons noem die skalare $a_1, a_2, \ldots, a_n$ in (2.4.1) die *koördinate* van $\mathbf{v}$ in die basis $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$.

Bewys. $\Rightarrow$. Veronderstel dat die lys vektore $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ 'n basis vir V vorm. Veronderstel $\mathbf{v} \in V$. Omdat die lys vektore V span, weet ons dat ons $\mathbf{v}$ as 'n lineêre kombinasie van vektore in die lys op ten minste een manier *kan* skryf,

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \cdots + a_n\mathbf{e}_n. \tag{2.4.2}$$

Ons moet wys dat dit die *enigste* manier is om $\mathbf{v}$ as 'n lineêre kombinasie van die vektore $\mathbf{e}_i$ uit te druk. Veronderstel ons het ook

$$\mathbf{v} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + \cdots + b_n\mathbf{e}_n. \tag{2.4.3}$$

Die verskil van die twee vergelykings lewer

$$\mathbf{0} = (a_1 - b_1)\mathbf{e}_1 + (a_2 - b_2)\mathbf{e}_2 + \cdots + (a_n - b_n)\mathbf{e}_n.$$

Omdat die lys vektore $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ lineêr onafhanklik is, kom ons tot die gevolgtrekking dat

$$a_1 - b_1 = 0,\ a_2 - b_2 = 0,\ \cdots,\ a_n - b_n = 0.$$

Dit is, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, ensovoorts tot en met $a_n = b_n$ en daarom is (2.4.2) uniek.

$\Leftarrow$. Aan die ander kant, veronderstel dat elke vektor $\mathbf{v}$ as 'n unieke lineêre kombinasie

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \cdots + a_n\mathbf{e}_n$$

geskryf kan word. Die feit dat elke $\mathbf{v}$ as 'n lineêre kombinasie van $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ geskryf *kan* word, beteken hulle span V. Ons moet steeds wys dat hulle lineêr onafhanklik is. So, veronderstel daar bestaan skalare b_1, b_2, ..., b_n, sodat

$$b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + \cdots + b_n\mathbf{e}_n = \mathbf{0}. \tag{2.4.4}$$

Ons moet wys dat b_i almal nul moet wees. Ons weet reeds van *een* moontlike oplossing van (2.4.4) : stel elke $b_i = 0$. Maar ons weet ook dat elke vektor (spesifiek, die vektor $\mathbf{0}$) op presies een manier as 'n lineêre kombinasie van vektore $\mathbf{e}_i$ uitgedurk kan word. Daarom moet dit die enigste oplossing wees, i.e. ons vind dat $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$, en daarom is die lys vektore $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ lineêr onafhanklik. ■

Definisie 2.4.2 Laat $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ 'n basis vir vektorruimte V wees, en laat $\mathbf{v} \in V$. Skryf

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{b}_1 + a_2\mathbf{b}_2 + \cdots + \mathbf{a}_n\mathbf{b}_n.$$

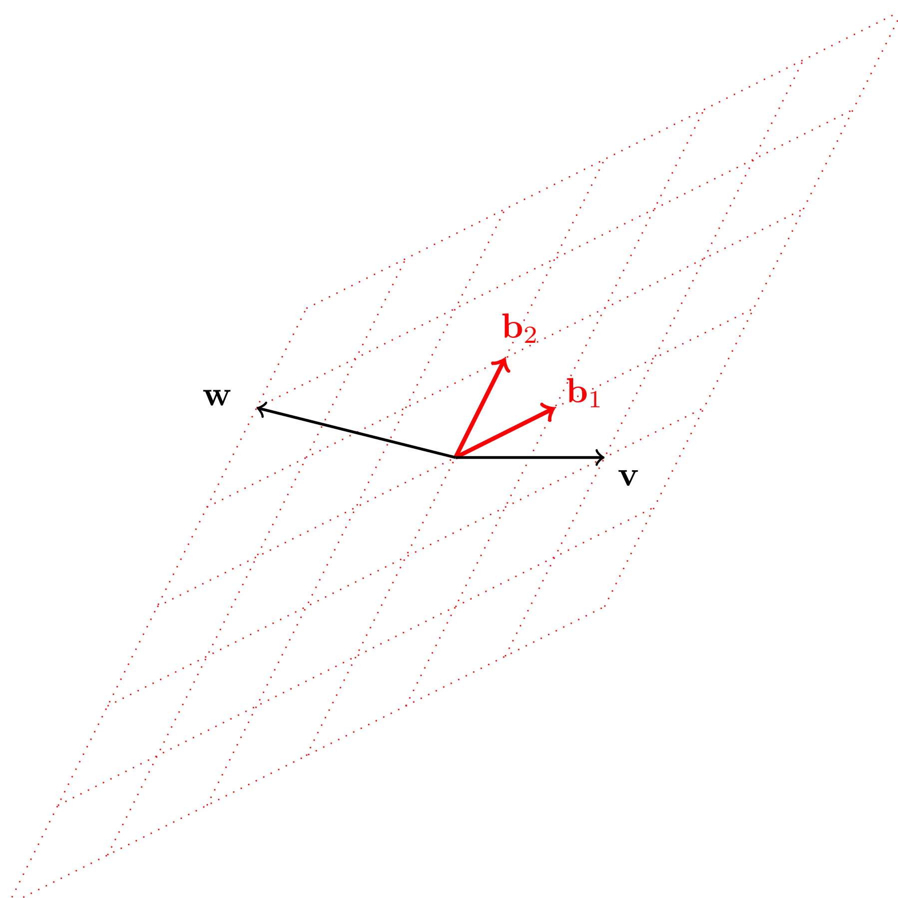
Die skalare a_i wat in die bostaande uitdrukking voorkom, word die **koördinate van die vektor v met betrekking tot die basis** $\mathcal{B}$ genoem. Die kolomvektor word

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} := \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathrm{Col}_n$$

die **koördinaatvektor van v met betrekking tot basis** $\mathcal{B}$ genoem. ◊

> Ek dui aan dat 'n kolleksie objekte 'n *lys* is (waar volgorde van belang is) en nie bloot 'n *versameling* nie (waar dit nie van belang is nie) deur van my eie tuisgemaakte simbole $\{\ldots\}$ gebruik te maak. 'n Basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ is 'n lys vektore. Die volgorde van die vektore is van belang want dit beïnvloed die koördinaatvektor $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$.

Voorbeeld 2.4.3 Koördinaatvektore in $\mathbb{R}^2$. Vind die koördinaatvektore van $\mathbf{v}$ en $\mathbf{w}$ in Figuur 2.4.4 met betrekking tot die basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$.



Figuur 2.4.4 Die basis $\mathcal{B}$ vir $\mathbb{R}^2$.

Oplossing. Deur inspeksie sien ons dat $\mathbf{v} = 2\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2$, sodat

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} := \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Ook deur inspeksie sien ons dat $\mathbf{w} = -3\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2$, sodat

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

□

Voorbeeld 2.4.5 Geogebra App: Koördinaatvektore in $\mathbb{R}^2$. Die volgende interaktiewe GeoGebra app vertoon 'n vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ (in swart), 'n basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ (in rooi), en 'n agtergrond van integrale lineêre kombinasies van die basisvektore. Sleep die eindpunt van $\mathbf{v}$ en sien hoe die koördinaatvektor$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ van $\mathbf{v}$ relatief tot $\mathcal{B}$ verander. Jy kan ook die basis $\mathcal{B}$ verander deur die eindpunte van die basisvektore $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ te sleep. Let op die effek op die koördinaatvektor $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$.

Specify static image with `@preview` attribute,
Or create and provide automatic screenshot as
`images/interactive-2-preview.png` via the `mbx` script

`www.geogebra.org/material/iframe/id/https://www.geogebra.org/material/iframe/id/tpdmz8kj/width/600/heigh`

Figuur 2.4.6 Interaktiewe Geogebra app wat die koördinaatvektor van $\mathbf{v}$ relatief tot die basis $\mathcal{B}$ aantoon.

□

Voorbeeld 2.4.7 Vind die koördinaatvektor van $\mathbf{p} = 2x^2 - 2x + 3$ met betrekking tot die basis $\mathcal{B} = \left\{1 + x, x^2 + x - 1, x^2 + x + 1\right\}$ van Poly_3.

Oplossing. We need to write $\mathbf{p}$ as a linear combination of polynomials from the basis $\mathcal{B}$:

$$2x^2 - 2x + 3 = a_1(1 + x) + a_2(x^2 + x - 1) + a_3(x^2 + x + 1)$$

Collecting powers of x^2, x and 1 on the right hand side gives:

$$2x^2 - 2x + 3 = (a_2 + a_3)x^2 + (a_1 + a_2 + a_3)x + (a_1 - a_2 + a_3)1$$

This translates into the equations:

$$\begin{aligned} a_2 + a_3 &= 2 \\ a_1 + a_2 + a_3 &= -2 \\ a_1 - a_2 + a_3 &= 3 \end{aligned}$$

We can solve these equations by hand, or we can use SageMath:

```
var('a1␣a2␣a3')

show(solve((a2 + a3 == 2,
      a1 + a2 + a3 == -2,
      a1 - a2 + a3 == 3), (a1, a2, a3)))
```

We compute the coordinates of p as $a_1 = -4$, $a_2 = -\frac{5}{2}$, $a_3 = \frac{9}{2}$. In other words,

$$2x^2 - 2x + 3 = -4(1 + x) - \frac{5}{2}(x^2 + x - 1) + \frac{9}{2}(x^2 + x + 1)$$

Therefore,

$$[\mathbf{p}]_{\mathcal{B}} := \begin{bmatrix} -4 \\ -\frac{5}{2} \\ \frac{9}{2} \end{bmatrix}$$

□

Voorbeeld 2.4.8 Vind die koördinaatvektor van die funksie $\mathbf{f}$ gegee deur

$$\mathbf{f}(x) = \sin^2 x - \cos^3 x$$

met betrekking tot die standaard basis

$$\mathcal{S} = \{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos 3x, \sin 3x\}$$

van Trig_3.

Oplossing. Met die optellingsformules vir sin en cos soos in Oefening 1.6.26 bereken ons

$$\sin^2 x - \cos^3 x = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\cos x - \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{4}\cos 3x. \tag{2.4.5}$$

Ons kan dit ook as volg in SageMath doen:

```
x=var('x')

f = sin(x)^2 - cos(x)^3

show(f.reduce_trig())
```

Gevolglik is

$$[\mathbf{f}]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \end{bmatrix}$$

□

Verstaanpunt 2.4.9 Bevestig die uitbreiding (2.4.5) met die hand.

Oplossing.

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \implies \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$$

$$\cos^3 x = \cos x \cos^2 x = \cos x(1 - \sin^2 x) = \cos x(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x) = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\cos x \cos 2x$$

$$\cos x \cos 2x = \cos 3x + \sin x \sin 2x = \cos 3x + 2\sin^2 x \cos x = \cos 3x + (1 - \cos 2x)\cos x = \cos 3x + \cos x - \cos 2x \cos x$$

Thus

$$\sin^2 x - \cos^3 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x - (\frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\cos x \cos 2x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\cos 3x + \frac{1}{2}\cos x) = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\cos$$

Hulpstelling 2.4.10 *Laat $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ 'n basis vir 'n vektorruimte V wees. Dan het ons dat vir alle vektore $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ en alle skalare k dat*

a $[\mathbf{v} + \mathbf{w}]_{\mathcal{B}} = [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} + [\mathbf{w}]_{\mathcal{B}}$

b $[k\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = k[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$

Bewys. (a) Veronderstel dat

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \cdots + a_n\mathbf{e}_n$$

en

$$\mathbf{w} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + \cdots + b_n\mathbf{e}_n\,.$$

Dan, deur van die re{\"e}ls van 'n vektorruimte gebruik te maak, bereken ons

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (a_1 + b_1)\mathbf{e}_1 + (a_2 + b_2)\mathbf{e}_2 + \cdots + (a_n + b_n)\mathbf{e}_n\,.$$

Hieruit lees ons af dat

$$[\mathbf{v} + \mathbf{w}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{bmatrix}.$$

Die bewys van (b) is soortgelyk. ∎

2.4.1 Oefeninge

1. Bewys Lemma 2.4.10(b) in die geval waar V twee-dimensioneel is, sodat $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. Verduidelik elke stap met die toepaslike reël van 'n vektorruimte.

Oplossing. As before, suppose that

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2,$$

which gives

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}.$$

Then

$$\begin{aligned} k\mathbf{v} &= k(a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2) \\ &= k(a_1\mathbf{e}_1) + k(a_2\mathbf{e}_2) && \text{(R4)} \\ &= (ka_1)\mathbf{e}_1 + (ka_2)\mathbf{e}_2 && \text{(R6)} \end{aligned}$$

Reading off the coefficients, we obtain

$$k\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_1 \\ ka_2 \end{bmatrix},$$

as desired.

2. Laat $\mathcal{B} = \{\mathsf{B}_1, \mathsf{B}_2, \mathsf{B}_3, \mathsf{B}_4\}$ die volgende basis van $\mathrm{Mat}_{2,2}$ wees:

$$\mathsf{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathsf{B}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \mathsf{B}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathsf{B}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Bereken $[\mathsf{A}]_{\mathcal{B}}$, waar

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Oplossing. To determine $[\mathsf{A}]_{\mathcal{B}}$, we must find the scalars a_1, a_2, a_3, a_4

satisfying

$$a_1\mathsf{B}_1 + a_2\mathsf{B}_2 + a_3\mathsf{B}_3 + a_4\mathsf{B}_4 = \mathsf{A}.$$

This results in a system of 4 linear equations in 4 variables, one equation for each entry in A:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= 1 \\ a_3 + a_4 &= 2 \\ a_3 - a_4 &= 3 \\ a_1 - a_2 + a_3 &= 4 \end{aligned}$$

Solving this equation, we get

$$a_1 = 0, \quad a_2 = -\frac{3}{2}, \quad a_3 = \frac{5}{2}, \quad a_4 = -\frac{1}{2}.$$

Hence

$$[\mathsf{A}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

3.

(a) Bepaal 'n basis $\mathcal{B}$ vir die vektorruimte

$$V := \{p \in \text{Poly}_2 : p(2) = 0\}.$$

(b) Beskou $p(x) = x^2 + x - 6$. Toon aan dat $p \in V$.

(c) Bepaal die koëffisiënte van p met betrekking tot jou basis $\mathcal{B}$, m.a.w. bepaal $[p]_{\mathcal{B}}$.

Oplossing.

(a)

$$p(x) = x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2)$$

and so $p(2) =$ and hence $p \in V$.

(b) Recall that $\mathcal{B} = \{x - 2, x(x-2)\}$.

$$p(x) = x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2) = 3(x-2) + x(x-2)$$

and so

$$[p]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

4. Find the coordinate representation of $\mathbf{p}(x) = 3x^3 - 7x + 1$ with respect to your basis in Exercise 2.3.6.8.

Oplossing. We shall use the basis $\mathcal{B} = \{x^3, x^3 + x^2, x, 1\}$. Since $\mathbf{p}(x)$ has no degree 2 term, we know immediately that

$$\mathbf{p}(x) = ax^3 + 0(x^3 + x^2) + cx + d.$$

Reading off the rest of the coefficients, we see that $a = 3, c = -7, d = 1$.

Hence

$$[p]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

5. Beskou die vektorruimte W uit Voorbeeld 2.3.17,

$$W = \{(w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3 : w_1 + 2w_2 + 3w_3 = 0\},$$

en die volgende basisse vir W:

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}, \quad \mathcal{C} = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$$

waar

$$\mathbf{a} = (1, 0, -\frac{1}{3}), \qquad \mathbf{b} = (0, 1, -\frac{2}{3})$$
$$\mathbf{u} = (1, 2, -\frac{5}{3}), \qquad \mathbf{v} = (-4, 2, 0)$$

Beskou die vektor $\mathbf{w} = (-2, 4, -2) \in \mathbb{R}^3$.

(a) Toon aan dat $\mathbf{w} \in W$.

(b) Bereken $[\mathbf{w}]_{\mathcal{B}}$.

(c) Bereken $[\mathbf{w}]_{\mathcal{C}}$.

6. Laat V die vektorruimte van oplossings van die volgende differensiaalvergelyking wees:

$$y'' + y = 0. \tag{2.4.6}$$

(a) Toon aan dat $\mathcal{B} = \{\cos x, \sin x\}$ 'n basis vir V is.

(b) Laat $y \in V$ gedefineer word as die unieke oplossing van die differensiaalvergelyking (2.4.6) wat die volgende beginwaardes bevredig:

$$y(\frac{\pi}{6}) = 1, \quad y'(\frac{\pi}{6}) = 0.$$

(Let op dat ons kan inderdaad y in hierdie manier in 'n unieke manier defineer as gevolg van Stelling 2.3.20.) Bereken $[y]_{\mathcal{B}}$.

(c) Laat $z(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

i. Toon aan dat $z \in V$ deur te kontrolleer dat dit die differensiaalvergelyking (2.4.6) op los.

ii. Bereken $[z]_{\mathcal{B}}$.

7. Let V be the vector space of solutions to the differential equation

$$(1 - x^2)y'' - xy' + 4y = 0, \quad x \in (-1, 1). \tag{2.4.7}$$

(a) Show that y_1 and y_2 are elements of V, where

$$y_1(x) = 2x^2 - 1, \quad y_2(x) = x\sqrt{1 - x^2}.$$

(b) Show that $\mathcal{B} = \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2\}$ is a basis for V.

(c) Let $y \in V$ be defined as the unique solution to the differential equation in (2.4.7) satisfying

$$y(\frac{1}{2}) = 1, \quad y'(\frac{1}{2}) = 0.$$

(Note that we can indeed define y uniquely in this way due to Stelling 2.3.20.) Compute $[y]_{\mathcal{B}}$.

8. Let V be the vector space of solutions to the differential equation

$$x^3y''' + x^2y'' - 2xy' + 2y = 0 \tag{2.4.8}$$

(a) Without performing any explicit calculations, determine the dimension of V.

(b) Using Sage, find a basis for V, if you're unsure of the syntax, look at the examples in Afdeling 2.3. Show explicitly (by hand!) that each basis element does indeed satisfy (2.4.8).

(c) Find that unique function y_1 that is a solution to (2.4.8) subject to the initial conditions

$$y_1(1) = 1 \quad y_1'(1) = 0 \quad y_1''(1) = 0.$$

(d) Find that unique function y_2 that is a solution to (2.4.8) subject to the initial conditions

$$y_2(1) = 0 \quad y_2'(1) = 1 \quad y_2''(1) = 0.$$

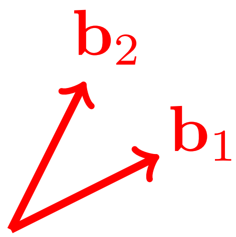
(e) Does the function $y_3 = y_1 + y_2$ also solve (2.4.8)? By Stelling 2.3.20, y_3 is the unique solution to an initial value problem involving (2.4.8) - what are those initial conditions?

(f) Read through 2D Plotting in Sage. Plot y_1, y_2, y_3 (you don't need to plot them on the same set of axes) on the interval $x = [0, 10]$ with a step size of $\Delta x = 0.5$. Sketch the results.

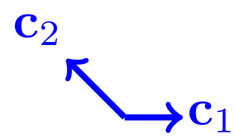
2.5 Basisverandering

2.5.1 Koördinaatvektore verskil in verskillende basisse

Veronderstel dat $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ en $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\}$ twee verskillende basisse vir $\mathbb{R}^2$ is, geïllustreer soos volg:



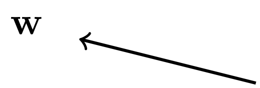
(a) Die basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$



(b) Die basis $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\}$.

Figuur 2.5.1 Twee verskillende basisse $\mathbb{R}^2$

Veronderstel ons word 'n vektor $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ gegee:



Ons wil die koördinaatvektor van *dieselfde* vektor $\mathbf{w}$ relatief tot twee verskillende basisse $\mathcal{B}$ en $\mathcal{C}$ bereken.

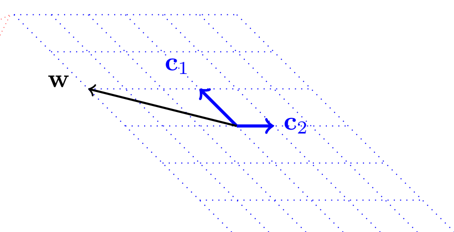
Met hierdie spesifieke vektor $\mathbf{w}$, sien ons uit Figuur 2.5.2 dat ons in terme van die basis $\mathcal{B}$

$$\mathbf{w} = -3\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 \qquad \therefore\ [\mathbf{w}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{2.5.1}$$

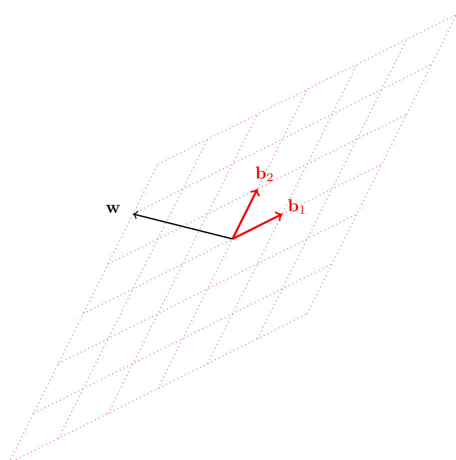
het.

Aan die anderkant, in terme van basis $\mathcal{C}$ sien ons uit Figuur 2.5.3 dat:

$$\mathbf{w} = \mathbf{c}_1 - 3\mathbf{c}_2 \qquad \therefore\ [\mathbf{w}]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}. \tag{2.5.2}$$



Figuur 2.5.3 $\mathbf{w} = \mathbf{c}_1 - 3\mathbf{c}_2$



Figuur 2.5.2 $\mathbf{w} = -3\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2$

So *dieselfde* vektor $\mathbf{w}$ het verskillende koördinaatvektore $[\mathbf{w}]_{\mathcal{B}}$ en $[\mathbf{w}]_{\mathcal{C}}$ relatief tot die basisse $\mathcal{B}$ en $\mathcal{C}$!

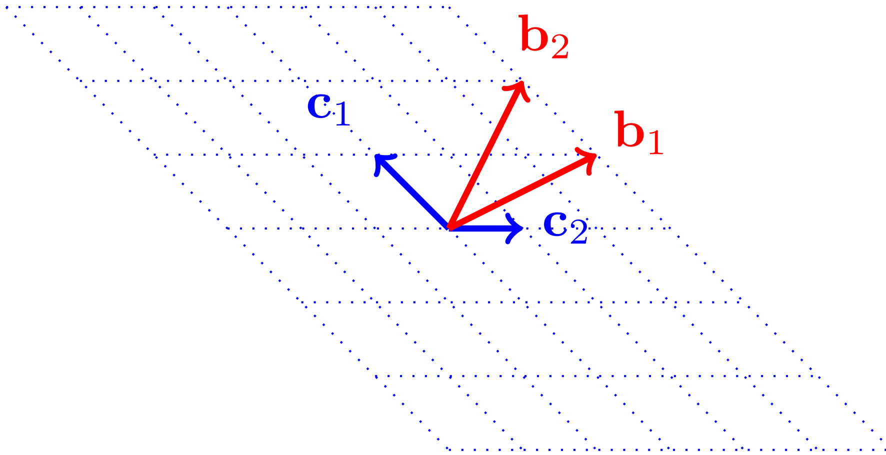
2.5.2 Omskakeling van een basis na 'n ander

Veronderstel nou dat ons die basisse $\mathcal{B}$ en $\mathcal{C}$ ken, asook die koördinaatvektor $[\mathbf{w}]_{\mathcal{B}}$ van $\mathbf{w}$ in die basis $\mathcal{B}$,

$$[\mathbf{w}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix},$$

dit is, $\mathbf{w} = -3\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2$. Hoe kan ons $[\mathbf{w}]_\mathcal{C}$, die koördinaatvektor van $\mathbf{w}$ in die basis $\mathcal{C}$ bereken?

Die beste benadering is om elke vektor in $\mathcal{B}$ as 'n lineêre kombinasie van die basisvektore in $\mathcal{C}$ uit te druk. In die volgende figuur word die vektore $\mathbf{b}_1$ en $\mathbf{b}_2$ uitgebeeld teen die agtergrond van heeltallige lineêre kombinasies van die basis $\mathcal{C}$:



Ons lees af dat:

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{c}_1 + 3\mathbf{c}_2 \tag{2.5.3}$$
$$\mathbf{b}_2 = 2\mathbf{c}_1 + 3\mathbf{c}_2 \tag{2.5.4}$$

Daarom bereken ons:

$$\begin{aligned}\mathbf{w} &= -3\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 \\ &= -3(\mathbf{c}_1 + 3\mathbf{c}_2) + 2(2\mathbf{c}_1 + 3\mathbf{c}_2) \\ &= \mathbf{c}_1 - 3\mathbf{c}_2\end{aligned}$$

Hiervan lees ons af dat

$$[\mathbf{w}]_\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} \tag{2.5.5}$$

wat die korrekte antwoord is, soos ons weet uit (2.5.2).

Hierdie berekening kan in terme van matrikse uitgedruk word.

Definisie 2.5.4 Laat $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ en $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n\}$ basisse vir 'n vektorruimte V wees. Die **basisomskakelingsmatriks van $\mathcal{B}$ na $\mathcal{C}$** is die $n \times n$-matriks $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ waarvan die kolomme die koördinaatvektore $[\mathbf{b}_1]_\mathcal{C}, \ldots, [\mathbf{b}_n]_\mathcal{C}$ is:

$$\mathsf{P}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} := \left[\begin{bmatrix} \\ \mathbf{b}_1 \\ \\ \end{bmatrix}_\mathcal{C} \begin{bmatrix} \\ \mathbf{b}_2 \\ \\ \end{bmatrix}_\mathcal{C} \cdots \begin{bmatrix} \\ \mathbf{b}_n \\ \\ \end{bmatrix}_\mathcal{C} \right].$$

◊

Voorbeeld 2.5.5 In ons deurlopende voorbeeld, sien ons uit (2.5.3) en (2.5.4) dat

$$[\mathbf{b}_1]_\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{b}_2]_\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Daarom is die basisomskakelingsmatriks van $\mathcal{B}$ na $\mathcal{C}$

$$\mathsf{P}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

□

Voordat ons verder gaan, moet ons 'n aspek van matriksvermenigvuldiging hersien. Veronderstel ons groepeer m kolomvektore saam om 'n matriks te vorm:

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ \mathrm{C}_1 \\ \\ \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \\ \mathrm{C}_2 \\ \\ \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} \\ \mathrm{C}_m \\ \\ \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

(Ons basisomskakelingsmatriks $\mathsf{P}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ is so gevorm.) Dan kan ons die produk van hierdie matriks met 'n kolomvektor soos volg bereken:

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ \mathrm{C}_1 \\ \\ \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \\ \mathrm{C}_2 \\ \\ \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} \\ \mathrm{C}_m \\ \\ \end{bmatrix} \end{bmatrix} \tag{2.5.6}$$

Verstaanpunt 2.5.6 Bewys die bostaande formule!

Oplossing. Ons toets die i^{ste} inskrywing van die linkerkant van (2.5.6) deur gewoon die definisie van matriksvermenigvuldiging te gebruik.

$$(\mathrm{LHS})_i = (\mathrm{C}_1)_i a_1 + \ldots + (\mathrm{C}_n)_i a_n = (\mathrm{RHS})_i$$

en ons is klaar!

Ons kan nou die volgende stelling bewys.

Stelling 2.5.7 Basisomskakeling. *Veronderstel dat $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ en $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n\}$ basisse vir 'n vektorruimte V is, en laat $\mathsf{P}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ die basiskomskakelingsmatriks van $\mathcal{B}$ na $\mathcal{C}$ wees. Dan geld vir alle vektore $\mathbf{v}$ in V dat*

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} = \mathsf{P}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}. \tag{2.5.7}$$

Bewys. Laat $\mathbf{v} \in V$. Brei $\mathbf{v}$ in die basis $\mathcal{B}$ uit:

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{b}_1 + a_2\mathbf{b}_2 + \cdots + a_n\mathbf{b}_n, \text{i.e. } [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

Dan,

$$\begin{aligned} [\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} &= [a_1\mathbf{b}_1 + \cdots + a_n\mathbf{b}_n]_{\mathcal{C}} \\ &= a_1[\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}} + \cdots + a_n[\mathbf{b}_n]_{\mathcal{C}} && (\text{Lemma 2.4.10}) \\ &= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ \mathbf{b}_1 \\ \\ \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \\ \mathbf{b}_2 \\ \\ \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} \\ \mathbf{b}_n \\ \\ \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} && (2.5.6) \\ &= \mathsf{P}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}. \end{aligned}$$

■

Voorbeeld 2.5.8 In ons deurlopende voorbeeld, sê die stelling dat vir *enige* vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$,

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}.$$

Dit geld in besonder ook vir ons vektor $\mathbf{w}$, waarvan die koördinate in die basis $\mathbf{B}$ is:

$$[\mathbf{w}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

So in hierdie geval sê die stelling dat

$$[\mathbf{w}]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

wat met ons vorige berekening (2.5.5) ooreenstem! □

2.5.3 Oefeninge

1. Dit is 'n voortsetting van Oefening 2.4.1.2. Beskou die volgende twee basisse vir $\mathrm{Mat}_{2,2}$:

$$\mathcal{B} = \left\{ \mathrm{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathrm{B}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \mathrm{B}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathrm{B}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{C} = \left\{ \mathrm{C}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathrm{C}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathrm{C}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathrm{C}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right\}$$

(a) Bereken die basisomskakelingsmatrikse $\mathsf{P}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ en $\mathsf{P}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$.

(b) Bereken $[\mathsf{A}]_{\mathcal{B}}$ en $[\mathsf{A}]_{\mathcal{C}}$, waar

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

(c) Gaan na dat $[\mathsf{A}]_{\mathcal{C}} = \mathsf{P}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[\mathsf{A}]_{\mathcal{B}}$ en dat $[\mathsf{A}]_{\mathcal{B}} = \mathsf{P}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}[\mathsf{A}]_{\mathcal{C}}$.

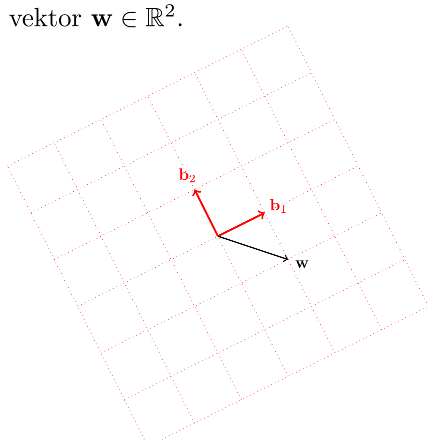
2. Bereken die basisomskakelingmatriks $\mathsf{P}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{S}}$ van die standaardbasis

$$\mathcal{S} = \{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x\}$$

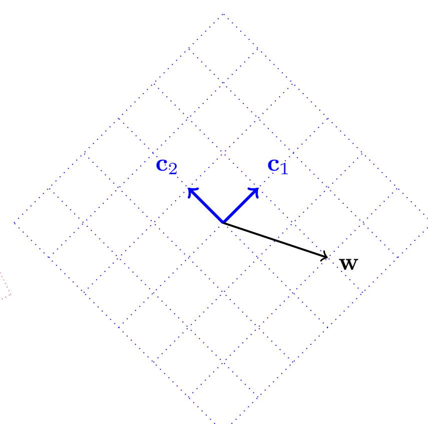
van Trig_2 na die basis

$$\mathcal{B} = \left\{1, \cos x, \sin x, \cos^2 x, \sin x \cos x\right\}.$$

3. Figuur 2.5.9 wys vir ons 'n basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ vir $\mathbb{R}^2$, 'n agtergrond van heeltallige lineêre kombinasies van $\mathbf{b}_1$ en $\mathbf{b}_2$, asook 'n ander vektor $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$. Soortgelyk wys Figuur 2.5.10 'n ander basis $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\}$ vir $\mathbb{R}^2$, 'n agtergrond van heeltallige lineêre kombinasies van $\mathbf{c}_1$ en $\mathbf{c}_2$, en dieselfde vektor $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$.



Figuur 2.5.9 Die vektor $\mathbf{w}$ teen 'n agtergrond van heeltallige lineêre kombinasies van die basisvektore van $\mathcal{B}$.

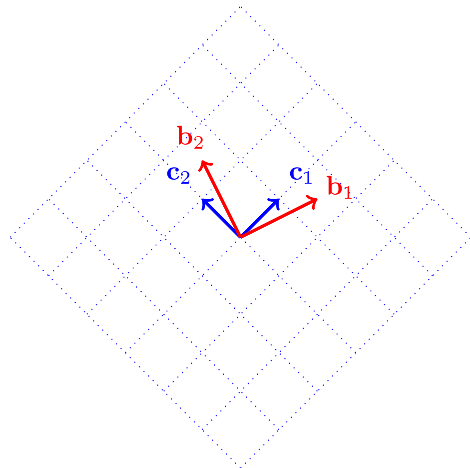


Figuur 2.5.10 Die vektor $\mathbf{w}$ teen 'n agtergrond van heeltallige lineêre kombinasies van die basisvektore van $\mathcal{C}$.

(a) Bepaal $[\mathbf{w}]_{\mathcal{B}}$, direk uit Figuur 2.5.9.

(b) Bepaal $[\mathbf{w}]_{\mathcal{C}}$, direk uit Figuur 2.5.10.

(c) Die volgende figuur wys die basis $\mathcal{B}$ teen 'n agtergrond van lineêre kombinasies van die basis $\mathcal{C}$:



Figuur 2.5.11

Bepaal die basisomskakelingsmatriks $\mathsf{P}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$. (Jy mag aanneem dat alle koëffisiënte of heelgetalle of half-heelgetalle (soos 3/2) is.)

(d) Vermenigvuldig die matriks wat jy in (c) 2.5.3.3.c bereken het met die kolomvektor wat jy in (a) 2.5.3.3.a bereken het. Met ander woorde, bereken die produk $\mathsf{P}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[\mathsf{w}]_{\mathcal{B}}$. Is jou antwoord dieselfde as wat jy in (b) 2.5.3.3.b gekry het?

4. Beskou die volgende drie basisse vir $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{A} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$
$$\mathcal{B} = \{(2,1,1),(1,1,1),(0,2,1)\}$$
$$\mathcal{C} = \{(1,2,3),(0,1,0),(1,0,1)\}.$$

Bereken $\mathsf{P}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}, \mathsf{P}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}, \mathsf{P}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{A}}$ en verifieer die vergelyking

$$\mathsf{P}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}\mathsf{P}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}} = \mathsf{P}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{A}}.$$

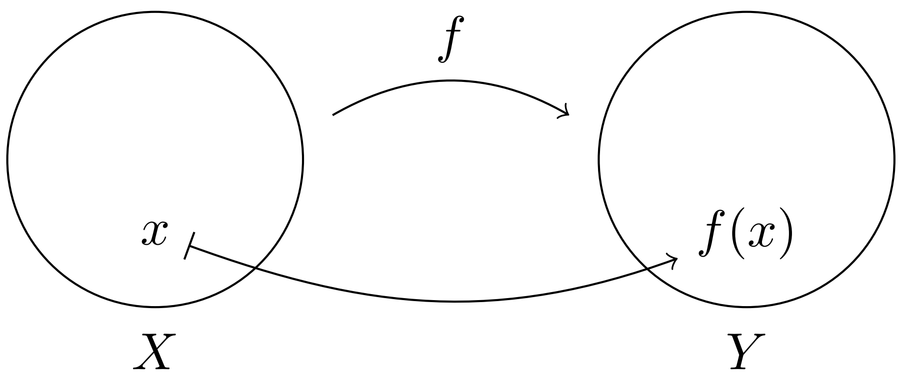
Hoofstuk 3

Lineêre afbeeldings

3.1 Definisie en Voorbeelde

3.1.1 Definisie van 'n lineêre afbeelding

Herinner jouself daaraan dat 'n *funksie* (of 'n *afbeelding*) $f : X \to Y$ van 'n versameling X na 'n versameling Y 'n reël is wat aan elke element $x \in X$ 'n element $f(x)$ van Y toeken. Ons skryf $x \mapsto f(x)$ om aan te dui dat 'n element $x \in X$ op $f(x) \in Y$ afbeeld deur die funksie f. Sien Figuur 3.1.1. Twee funksies $f, g : X \to Y$ is *gelyk* as $f(x) = g(x)$ vir alle x in X.



Figuur 3.1.1 'n Funksie $f : X \to Y$.

Definisie 3.1.2 Laat V en W vektorruimtes wees. 'n **lineêre afbeelding** van V na W is 'n funksie $T : V \to W$ wat die volgende bevredig:

- $T(\mathbf{v} + \mathbf{v}') = T(\mathbf{v}) + T(\mathbf{v}')$ vir alle vektore $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V$
- $T(k\mathbf{v}) = kT(\mathbf{v})$ vir alle vektore $\mathbf{v} \in V$ en alle skalare $k \in \mathbb{R}$

◊

'n Ander naam vir 'n lineêre afbeelding is 'n *lineêre transformasie*.

3.1.2 Voorbeelde van lineêre afbleedings

Voorbeeld 3.1.3 Matrikse gee aanleiding tot lineêre afbeeldings. Elke $n \times m$-matriks A gee aanleiding tot 'n *lineêre afbeelding*

$$\begin{aligned} T_{\mathsf{A}} : \mathrm{Col}_m &\to \mathrm{Col}_n \\ \mathbf{v} &\mapsto \mathsf{A}\mathbf{v}\,. \end{aligned}$$

Dit is, $T_{\mathsf{A}}(\mathbf{v}) := \mathsf{A}\mathbf{v}$ is die matriksproduk van A met die kolomvektor $\mathbf{v}$. Die feit dat T_{A} wel 'n lineêre afbeelding is volg vanuit die lineariteit van matriksvermenigvuldiging (Proposisien A.0.4 dele 2 en 3).

Let daarop dat 'n $n \times m$-matriks 'n lineêre afbeelding vanaf Col_m na Col_n definieer!

Byvoorbeeld, beskou

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Dit lewer 'n lineêre afbeelding:

$$\begin{aligned} T : \mathrm{Col}_2 &\to \mathrm{Col}_2 \\ \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} &\mapsto \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Die volgende interaktiewe GeoGebra app demonstreer dit. Sleep die rooi vektor$\mathbf{v}$ en sien die effek op $\mathsf{A}\mathbf{v}$. Jy kan ook die koëffisiënte van die matriks A verander deur die sliders te sleep.

Specify static image with `@preview` attribute,
Or create and provide automatic screenshot as
`images/interactive-3-preview.png` via the `mbx` script

`www.geogebra.org/material/iframe/id/https://www.geogebra.org/material/iframe/id/vexfrzez/width/600/heigh`

Figuur 3.1.4 Interactive GeoGebra applet wat die lineêre afbeelding $\mathbf{v} \mapsto \mathsf{A}\mathbf{v}$ aantoon.

□

Voorbeeld 3.1.5 'n Nie-lineêre afbeelding. Die volgende app illustreer die 'poolkoördinate' afbeelding

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} &\mapsto \begin{bmatrix} v_1 \cos(\pi v_2) \\ v_1 \sin(\pi v_2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Let op dat T 'n nie-lineêre afbeelding is, want, vir die meeste punte $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in \mathbb{R}^2$, is $T(\mathbf{v} + \mathbf{v}') \neq T(\mathbf{v}) + T(\mathbf{v}')$.

Specify static image with `@preview` attribute,
Or create and provide automatic screenshot as
`images/interactive-polar-map-preview.png`
via the `mbx` script

Figuur 3.1.6 App: Poolkoördinate as 'n nie-lineêre afbeelding

Nog 'n manier om te sien dat T nie-lineêr is, is te waarneem dat T nie reguit lyne na reguit lyne stuur nie. □

Voorbeeld 3.1.7 Identiteitsafbeelding. Laat V 'n vektorruimte wees. Die funksie

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_V : V &\to V \\ \mathbf{v} &\mapsto \mathbf{v} \end{aligned}$$

word die *identiteitsafbeelding* op V genoem. Die is duidelik 'n lineêre afbeelding, omdat

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_V(\mathbf{v}+\mathbf{w}) &= \mathbf{v}+\mathbf{w} \\ &= \mathrm{id}_V(\mathbf{v}) + \mathrm{id}_V(\mathbf{w}) \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_V(k\mathbf{v}) &= k\mathbf{v} \\ &= k\,\mathrm{id}_V(\mathbf{v}). \end{aligned}$$

□

Voorbeeld 3.1.8 Projeksie. Die funksie

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto x \end{aligned}$$

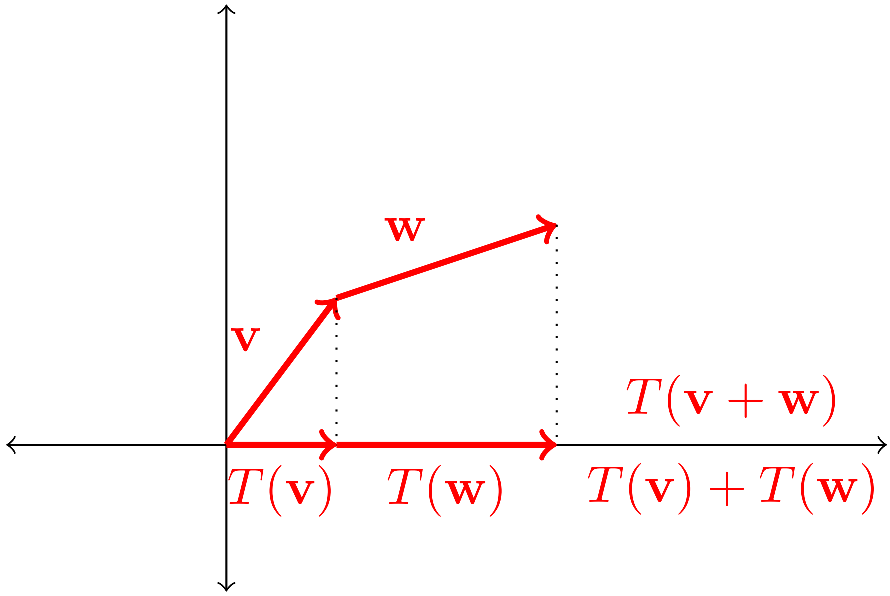
wat vektore op die x-as projekteer is 'n lineêre afbeelding.

Kom ons bevestig optelling algebraïes:

$$T\left((x_1,y_1)\right) + \left((x_2,y_2)\right) \stackrel{?}{=} T\left((x_1,y_1)\right) + T\left((x_2,y_2)\right)$$

$$\begin{aligned} \mathrm{LK} &= T\left((x_1+x_2, y_1+y_2)\right) \\ &= x_1+x_2 \end{aligned} \qquad\qquad \mathrm{RK} = x_1+x_2$$

Hier is 'n grafiese weergawe van hierdie bewys:



Figuur 3.1.9

□

Verstaanpunt 3.1.10 Bewys algebraïes dat $T(k\mathbf{v}) = kT(\mathbf{v})$, sodat T 'n lineêre afbeelding is.

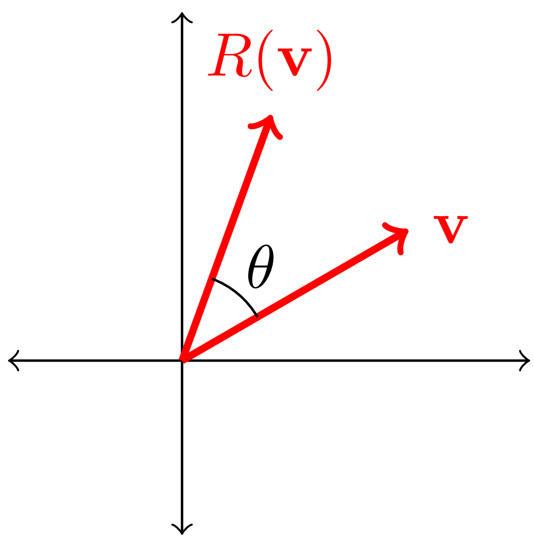
Oplossing.

$$T(k\mathbf{v}) = T(k(x,y)) = T(kx,ky) = kx = kT((x,y)) = kT(\mathbf{v})$$

Voorbeeld 3.1.11 Rotasie. Neem 'n vaste hoek θ. Die funksie

$$\begin{aligned} R_\theta : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ \mathbf{v} &\mapsto \text{rotasie van } \mathbf{v} \text{ anti-kloksgewys met 'n hoek } \theta \end{aligned}$$

is 'n lineêre afbeelding, met 'n soortgelyke grafiese argument as in Voorbeeld 3.1.8.



Figuur 3.1.12

□

Voorbeeld 3.1.13 Kruis-produk met 'n vaste vektor. Neem 'n vaste vektor $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Die funksie

$$\begin{aligned} C : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{v} &\mapsto \mathbf{w} \times \mathbf{v} \end{aligned}$$

is 'n lineêre afbeelding as gevolg van die eienskappe van die kruisproduk,

$$\begin{aligned} \mathbf{w} \times (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) &= \mathbf{w} \times \mathbf{v}_1 + \mathbf{w} \times \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{w} \times (k\mathbf{v}) &= k\mathbf{w} \times \mathbf{v}. \end{aligned}$$

□

Voorbeeld 3.1.14 Dotproduk met 'n vaste vektor. Neem 'n vaste vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$. Die funksie

$$\begin{aligned} D : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R} \\ \mathbf{v} &\mapsto \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \end{aligned}$$

(hier is $\cdot$ die dotproduk van vektore, nie skalaarvermenigvuldiging nie!) is 'n lineêre afbeelding, vanweë die eienskappe

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{u} \times \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{u} \cdot (k\mathbf{v}) &= k\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Ons sal binnekort sien dat *alle* lineêre afbeeldings $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ (inderwaarheid alle lineêre afbeeldings $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$) van hierdie vorm is. □

Voorbeeld 3.1.15 Differensiasie as 'n lineêre afbeelding. Die bewerking 'neem die afgeleide' kan as 'n lineêre afbeelding

$$\begin{aligned} D : \mathrm{Poly}_n &\to \mathrm{Poly}_{n-1} \\ p &\mapsto p' \end{aligned}$$

interpreteer word. Byvoorbeeld, $D(2x^3 - 6x + 2) = 6x^2 - 6$. □

Verstaanpunt 3.1.16

a Hoekom is D 'n afbeelding van Poly_n na Poly_{n-1}?

b Bevestig dat D lineêr is.

Oplossing.

1. As you know from calculus, taking the derivative of a polynomial decreases every power of x by 1. So if p is in Poly_n, then p has degree at most n . Therefore, its image under D has degree at most $n-1$. Thus p' is in Poly_{n-1}.

2. Let p, q be in Poly_n. Then:

$$\begin{aligned} D(p+q) &= (p+q)' \\ &= p' + q' && \text{(rule of differentiation)} \\ &= D(p) + D(q) \end{aligned}$$

Similarly,

$$\begin{aligned} D(kp) &= (kp)' \\ &= kp' && \text{(rule of differentiation)} \\ &= kD(p) \end{aligned}$$

Voorbeeld 3.1.17 Anti-afgeleide as 'n lineêre afbeelding. Die bewerking 'find die unieke anti-afgeleide met nul as konstante term' kan as 'n lineêre afbeelding

$$\begin{aligned} A : \mathrm{Poly}_n &\to \mathrm{Poly}_{n+1} \\ \mathbf{p} &\mapsto \int_0^x \mathbf{p}(t)\,dt \end{aligned}$$

interpreteer word. Byvoorbeeld, $A(2x^3 - 6x + 2) = 4x^4 - 3x^2 + 2x$. □

Verstaanpunt 3.1.18

1. Waarom is A 'n afbeelding vanaf Poly_n na Poly_{n+1}?

2. Bevestig dat A lineêr is.

Oplossing.

1. You know from calculus that the antiderivative of a polynomial $\mathbf{p}$ must always have degree one greater than $\mathbf{p}$. Hence A maps Poly_n to Poly_{n+1}.

2. Let $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ be in Poly_n. Using the usual properties of the integral, we compute

$$A(\mathbf{p}+\mathbf{q}) = \int_0^x \mathbf{p}(t) + \mathbf{q}(t)\,dt = \int_0^x \mathbf{p}(t)\,dt + \int_0^x \mathbf{q}(t)\,dt = A(\mathbf{p}) + A(\mathbf{q}).$$

Similarly,

$$A(k\mathbf{p}) = k\int_0^x \mathbf{p}(t)\,dt = \int_0^x k\mathbf{p}(t)\,dt = A(k\mathbf{p}).$$

Voorbeeld 3.1.19 Skuifafbeelding. Definieer die 'skuif aan met 1'-afbeelding

$$\begin{aligned} S : \mathrm{Poly}_n &\to \mathrm{Poly}_n \\ \mathbf{p} &\mapsto S(\mathbf{p}) \end{aligned}$$

as $S(\mathbf{p})(x) = \mathbf{p}(x-1)$.

Kom ons kyk na die geval $n = 3$. In terme van die standaard basis

$$\mathbf{p}_0(x) = 1,\ \mathbf{p}_1(x) = x,\ \mathbf{p}_2(x) = x^2,\ \mathbf{p}_3(x) = x^3$$

van Poly_3, het ons:

$$\begin{aligned} S(\mathbf{p}_0) &= \mathbf{p}_0 \\ S(\mathbf{p}_1) &= \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0 \\ S(\mathbf{p}_2) &= \mathbf{p}_2 - 2\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_0 \\ S(\mathbf{p}_3) &= \mathbf{p}_3 - 3\mathbf{p}_2 + 3\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0 \end{aligned}$$

□

Verstaanpunt 3.1.20 Gaan na dat S 'n lineêre afbeelding is.

Oplossing. Laat

$$\mathbf{p} = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \mathbf{q} = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j$$

$$S(k\mathbf{p}) = S\left(\sum_{j=0}^{n} ka_j x^j\right) = \sum_{j=0}^{n} ka_j(x-1)^j = k\sum_{j=0}^{n} a_j(x-1)^j = kS(\mathbf{p}).$$

$$S(\mathbf{p}+\mathbf{q}) = S\left(\sum_{j=0}^{n}(a_j+b_j)x^j\right) = \sum_{j=0}^{n}(a_j+b_j)(x-1)^j = \sum_{j=0}^{n} a_j(x-1)^j+\sum_{j=0}^{n} b_j(x-1)^j = S(\mathbf{p})+S(\mathbf{q}).$$

Verstaanpunt 3.1.21 Bevestig die formules vir $S(\mathbf{p}_0), S(\mathbf{p}_1), S(\mathbf{p}_2), S(\mathbf{p}_3),$.

Oplossing. $S(\mathbf{p}_0) = \mathbf{p}_0$ is trivial.

$$S(\mathbf{p}_1) = x-1 = \mathbf{p}_1-\mathbf{p}_0 S(\mathbf{p}_2) = (x-1)^2 = x^2-2x+1 = \mathbf{p}_2-2\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_0 S(\mathbf{p}_3) = (x-1)^3 = x^3-3x^2+3x-1 = \mathbf{p}_3-3\mathbf{p}$$

Voorbeeld 3.1.22 Gradient as a linear map. Recall the vector space Poly_n of polynomials in x and y (Voorbeeld 1.6.22, dimension computed in Voorbeeld 2.3.7) and the vector space $\mathrm{Vect}_n(\mathbb{R}^2)$ of polynomial vector fields on $\mathbb{R}^2$ (Voorbeeld 1.6.23, dimension computed in Voorbeeld 2.3.8).

The operation 'take the gradient' can be thought of as a linear map

$$\begin{aligned}\nabla : \mathrm{Poly}_n[x,y] &\to \mathrm{Vect}_{n-1}(\mathbb{R}^2)\\ f &\mapsto \nabla f\end{aligned}$$

This is a linear map because $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$ and $\nabla(kf) = k\nabla f$.

For example,

$$\nabla(x+xy) = (1+y, x).$$

□

Voorbeeld 3.1.23 Double integral as a linear map. Let $D \subseteq \mathbb{R}^2$ be a region in the plane. Integrating polynomial functions over D can be thought of as a linear map

$$\begin{aligned}I : \mathrm{Poly}_n[x,y] &\mapsto \mathbb{R}\\ f &\mapsto \iint_D f dA\end{aligned}$$

This is a linear map because

$$\iint_D (f+g)dA = \iint_D f dA + \iint_D g dA$$
$$\iint_D kf\, dA = k\iint_D f\, dA$$

For example, let $D = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1\}$, and let $f = x^2$. Then

$$I(f) = \iint_D x^2\, dA = \frac{\pi}{4}$$

as the reader will verify. □

Voorbeeld 3.1.24 Beginwaardes vir differensiaalvergelykings as 'n lineêre afbeelding. Laat V die vektorruimte van oplossings van 'n tweede orde homogene lineêre gewone differensiaalvergylyking op 'n interval I wees:

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0, \quad x \in I.$$

Maak vas 'n punt $x_0 \in I$. Dan het ons 'n lineêre afbeelding

$$T_{x_0} : \mathrm{Col}_2 \to V$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \mapsto \text{unieke } y \in V \text{ met } y(x_0) = a, y'(x_0) = b$$

(Nou is 'n goeie tyd om Stelling 2.3.20 en Voorbeeld 2.3.21 te hersien.)

Hierdie is in Figuur 3.1.25 geillustreer vir die geval van die differensiaalvergelyking

$$y'' + xy = 0.$$

Sleep die blou vektor $\mathbf{v}$ om die effek op sy beeld $T_{x_0}(\mathbf{v}) = y$ in V te sien. Jy kan ook die waarde van x_0 verander.

Specify static image with `@preview` attribute,
Or create and provide automatic screenshot as
`images/interactive-5-preview.png` via the `mbx` script

`www.geogebra.org/material/iframe/id/https://www.geogebra.org/material/iframe/id/kxcmtv5t/width/800/heigh`

Figuur 3.1.25 GeoGebra App: Beeld van die lineêre afbeelding T.

□

3.1.3 'n Paar resultate oor lineêre afbeeldings

Hulpstelling 3.1.26 *Veronderstel $T : V \to W$ is 'n lineêre afbeelding. Dan volg dit dat*

1. $T(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$
2. $T(-\mathbf{v}) = -T(\mathbf{v})$ *vir alle vektore* $\mathbf{v} \in V$.

Bewys. Ons werk soos volg:

1.

$$\begin{aligned} T(\mathbf{0}_V) &= T(0\mathbf{0}_V) && \text{(R8 toegepas op } \mathbf{v} = \mathbf{0}_V \in V) \\ &= 0T(\mathbf{0}_V) && \text{(T is lineêr)} \\ &= \mathbf{0}_W && \text{(R8 toegepas op } \mathbf{v} = T(\mathbf{0}_V) \in W \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} T(-\mathbf{v}) &= T((-1)\mathbf{v}) && \text{(defn van } -\mathbf{v} \in V) \\ &= (-1)T(\mathbf{v}) && \text{(T is lineêr)} \\ &= -T(\mathbf{v}) && \text{(defn van } -T(\mathbf{v}) \in W) \end{aligned}$$

■

Die volgende resultaat is baie belangrik. Dit wys dat as ons weet hoe 'n lineêre afbeelding op 'n basis werk, dan weet ons hoe dit op die hele vektorruimte werk (hierdie is die 'uniekheid' deel). Verder kan ons enige willekeurige formule opmaak vir wat T met die basisvektore doen en ons is gewaarborg dat ons dit sal kan uitbrei tot 'n lineêre afbeelding wat op die hele vektorruimte gedefinieer is (dit is waarna die 'bestaan' deel verwys).

Stelling 3.1.27 Voldoende om 'n lineêre afbeelding op 'n basis te definieer. *Veronderstel $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m\}$ is 'n basis vir V en $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m$ is* *vektore in W. Dan bestaan daar 'n unieke lineêre afbeelding $T : V \to W$ sodat*

$$T(\mathbf{e}_i) = \mathbf{w}_i, i = 1 \dots m.$$

Bewys. Bestaansbewys. Om 'n lineêre afbeelding T te definieer, moet ons $T(\mathbf{v})$ vir elke vektor $\mathbf{v}$ definieer. Ons kan $\mathbf{v}$ in terme van sy koördinaatvektor $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ met betrekking tot die basis $\mathcal{B}$ as

$$\mathbf{v} = [\mathbf{v}]_{\mathcal{B},1}\mathbf{e}_1 + \cdots + [\mathbf{v}]_{\mathcal{B},m}\mathbf{e}_m \tag{3.1.1}$$

skryf, waar $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B},i}$ die inskrywing in ry i van die koördinaatvektor $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ is. Ons definieer

$$T(\mathbf{v}) := [\mathbf{v}]_{\mathcal{B},1}\mathbf{w}_1 + [\mathbf{v}]_{\mathcal{B},2}\mathbf{w}_2 + \cdots [\mathbf{v}]_{\mathcal{B},m}\mathbf{w}_m. \tag{3.1.2}$$

Duidelik het ons $T(\mathbf{e}_i) = \mathbf{w}_i$. Om die bestaansbewys te voltooi, moet ons wys dat T lineêr is:

$$\begin{aligned}
T(\mathbf{v} + \mathbf{v}') &= [\mathbf{v} + \mathbf{v}']_{\mathcal{B},1}\mathbf{w}_1 + \cdots + [\mathbf{v} + \mathbf{v}']_{\mathcal{B},m}\mathbf{w}_m \\
&= \big([\mathbf{v}]_{\mathcal{B},1} + [\mathbf{v}']_{\mathcal{B},1}\big)\mathbf{w}_1 + \cdots + \big([\mathbf{v}]_{\mathcal{B},m} + [\mathbf{v}']_{\mathcal{B},m}\big)\mathbf{w}_m \quad ([\mathbf{v} + \mathbf{v}']_{\mathcal{B}} = [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} + [\mathbf{v}']_{\mathcal{B}}) \\
&= [\mathbf{v}]_{\mathcal{B},1}\mathbf{w}_1 + \cdots + [\mathbf{v}]_{\mathcal{B},m}\mathbf{w}_m + \\
&\qquad [\mathbf{v}']_{\mathcal{B},1}\mathbf{w}_1 + \cdots + [\mathbf{v}']_{\mathcal{B},m}\mathbf{w}_m \\
&= T(\mathbf{v}) + T(\mathbf{w}).
\end{aligned}$$

Net so kan ons bevestig dat $T(k\mathbf{v}) = kT(\mathbf{v})$, wat die bestaansbewys voltooi.

Uniekheidsbewys. Veronderstel dat $S, T : V \to W$ lineêre afbeeldings is met

$$S(\mathbf{e}_i) = \mathbf{w}_i, \text{ en } T(\mathbf{e}_i) = \mathbf{w}_i, i = 1 \dots m. \tag{3.1.3}$$

Dan,

$$\begin{aligned}
S(\mathbf{v}) &= S\big([\mathbf{v}]_{\mathcal{B},1}\mathbf{e}_1 + \cdots + [\mathbf{v}]_{\mathcal{B},m}\mathbf{e}_m\big) \\
&= [\mathbf{v}]_{\mathcal{B},1}S(\mathbf{e}_1) + \cdots + [\mathbf{v}]_{\mathcal{B},m}S(\mathbf{e}_m) && (S \text{ is lineêr}) \\
&= [\mathbf{v}]_{\mathcal{B},1}\mathbf{w}_1 + \cdots + [\mathbf{v}]_{\mathcal{B},m}\mathbf{w}_m && (\text{want } S(\mathbf{e}_i) = \mathbf{w}_i) \\
&= [\mathbf{v}]_{\mathcal{B},1}T(\mathbf{e}_1) + \cdots + [\mathbf{v}]_{\mathcal{B},m}T(\mathbf{e}_m) && (\text{want } T(\mathbf{e}_i) = \mathbf{w}_i) \\
&= T([\mathbf{v}]_{\mathcal{B},1}\mathbf{e}_1 + \cdots + [\mathbf{v}]_{\mathcal{B},m}\mathbf{e}_m) && (T \text{ is lineêr}) \\
&= T(\mathbf{v}).
\end{aligned}$$

Gevolglik $S = T$, met ander woorde, die lineêre afbeelding wat (3.1.3) bevredig is uniek. ■

Voorbeeld 3.1.28 As 'n voorbeeld van Proposisie 3.1.27, definieer ons die 'n lineêre afbeelding

$$T\ \mathrm{Col}_2 \qquad \to \mathrm{Fun}(\mathbb{R})$$

bloot deur die werking op die standaard basis van Col_2 te definieer. Byvoorbeeld, ons bepaal

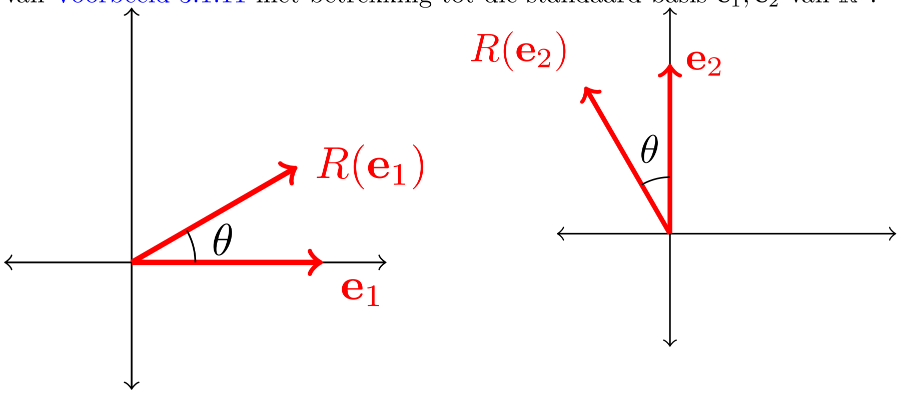
$$\begin{aligned}
\mathsf{e}_1 &\to f_1 \\
\mathsf{e}_2 &\to f_2
\end{aligned}$$

Die punt is dat ons vry is om e_1 en e_2 na *enige funksies* f_1 en f_2 wat ons wil te stuur, en ons is gewaarborg dat dit 'n wel-gedefinieerde lineêre afbeelding $T : \mathrm{Col}_2 \to \mathrm{Fun}(\mathbb{R})$ sal gee. Byvoorbeeld, ons stel $f_1(x) = \sin x$ en $f_2(x) = |x|$. Dan is die algemene formule vir T

$$\left(T \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right)(x) = a \sin x + b|x|.$$

□

Voorbeeld 3.1.29 Rotasie-afbeelding op die standaard basis. Kom ons bereken die aksie van die 'anti-kloksgewyse rotasie met θ'-afbeelding R van Voorbeeld 3.1.11 met betrekking tot die standaard basis $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ van $\mathbb{R}^2$.



Uit die figuur het ons:

$$R(\mathbf{e}_1) = (\cos\theta, \sin\theta) \qquad\qquad R(\mathbf{e}_2) = (-\sin\theta, \cos\theta)$$

sodat

$$R(\mathbf{e}_1) = \cos\theta\,\mathbf{e}_1 + \sin\theta\,\mathbf{e}_2, R(\mathbf{e}_2) = -\sin\theta\,\mathbf{e}_1 + \cos\theta\,\mathbf{e}_2.$$

Nou wat ons die aksie van R op die standaard basisvektore verstaan, kan ons die aksie op 'n arbitrêre vektor $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ bereken:

$$\begin{aligned} R\left((x,y)\right) &= R(x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2) \\ &= xR(\mathbf{e}_1) + yR(\mathbf{e}_2) \\ &= x(\cos\theta, \sin\theta) + y(-\sin\theta, \cos\theta) \\ &= (x\cos\theta - y\sin\theta,\ x\sin\theta + y\cos\theta). \end{aligned}$$

□

3.1.4 Oefeninge

1. Laat V 'n vektorruimte wees en laat $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ 'n vaste vektor wees. Definieer die afbeelding T soos volg:

$$\begin{aligned} T : V &\to V \\ \mathbf{v} &\mapsto \mathbf{a} + \mathbf{v} \end{aligned}$$

- *(a).*
  Is T 'n lineêre afbeelding? (Ja of nee)
- *(b).*
  Bewys jou antwoord vir (a).

Oplossing.

(a) Nee.

(b) According to Hulpstelling 3.1.26, $T(0) = 0$ is a necessary condition for T to be linear. However,

$$T(\mathbf{0}) = \mathbf{a} + 0 = \mathbf{a} \neq \mathbf{0}.$$

Hence T cannot be linear.

2. Beskou die afbeelding $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ wat deur $T((x, y, z)) = (z, x, y)$ gegee word.

(a) *(a).*
Is T 'n lineêre afbeelding? (Ja of nee)

(b) *(b).*
Bewys jou antwoord vir (a).

Oplossing.

(a) Ja.

(b)

$$T((x, y, z) + (a, b, c)) = T((x + a, y + b, z + c)) = (z+c, x+a, y+b) = (z, x, y)+(c, a, b) = T((x, y, z$$

$$T(k(x, y, z)) = T(kx, ky, kz) = (kz, kx, ky) = k(z, x, y) = kT((x, y, z)).$$

3. Definieer die 'vermenigvuldig met x^2'-afbeelding

$$\begin{aligned} M : \mathrm{Poly}_n &\to \mathrm{Poly}_{n+2} \\ \mathbf{p} &\mapsto M(\mathbf{p}) \end{aligned}$$

waar $M(\mathbf{p})(x) = x^2\mathbf{p}(x)$.

(a) *(a).*
Hoekom beeld M Poly_n op Poly_{n+2} af?

(b) *(b).*
Bewys dat M lineêr is.

(c) *(c).*
Bereken die aksie van M op die standaard basis vir Poly_3, soos in Voorbeeld 3.1.19.

Oplossing.

(a) If $p(x)$ has degree at most n, then $\mathbf{q}(x) := x^2\mathbf{p}(x)$ has degree at most $n+2$.

(b) The proof is simple and follows from the usual properties of polynomials. Using the fact that multiplication of polynomials distributes over addition we compute

$$M(\mathbf{p}+\mathbf{q})(x) = x^2(\mathbf{p}(x)+\mathbf{q}(x)) = x^2\mathbf{p}(x)+x^2\mathbf{q}(x) = M(\mathbf{p})(x)+M(\mathbf{q})(x).$$

We may consider the scalar k as a constant polynomial. Thus, using the commutativity and associativity of polynomial multiplication we compute

$$M(k\mathbf{p})(x) = x^2k\mathbf{p}(x) = k(x^2\mathbf{p}(x)) = kM(\mathbf{p})(x).$$

(c)

$$M(\mathbf{p}_0) = x^2 1 = x^2 = \mathbf{p}_2 M(\mathbf{p}_1) = x^2 x = x^3 = \mathbf{p}_3 M(\mathbf{p}_2) = x^2x^2 = x^4 = \mathbf{p}_4 M(\mathbf{p}_3) = x^2x^3 = x^5 = \mathbf{p}_5$$

4. Define the map

$$C : \mathrm{Poly}_n \to \mathrm{Trig}_n$$

by the formula

$$C(p)(x) := p(\cos x).$$

(a) Compute $C(p)$, where $p(x) = 3x^2 - x + 1$. Express your answer in terms of the standard basis for $Trig_2$,

$$T_0(x) = 1, T_1(x) = \cos x, T_2(x) = \sin x, T_3(x) = \cos(2x), T_4(x) = \sin(2x).$$

(b) Is C a linear map?

(c) Justify that for every polynomial $p \in \mathrm{Poly}_n$, the function $C(p) \in \mathrm{Trig}_n$? (This is implicitly assumed above.)

(d) Compute $C(p_0), C(p_1), C(p_2), C(p_3)$ where

$$p_0(x) = 1, p_1(x) = x, p_2(x) = x^2, p_3(x) = x^3$$

are the standard basis vectors for Poly_3. Express your answers in terms of the standard basis of Trig_n.

5. Determine the action of the gradient linear map

$$\nabla : \mathrm{Poly}_2[x, y] \to \mathrm{Vect}_1(\mathbb{R}^2)$$

from Voorbeeld 3.1.22 in terms of the standard bases

$$\{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}$$
$$q_1 = 1, q_2 = x, q_3 = y, q_4 = x^2, q_5 = xy, q_6 = y^2$$

of Poly_2 and

$$\{V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6\}$$
$$V_1 = (1, 0), V_2 = (x, 0), V_3 = (y, 0)$$
$$V_4 = (0, 1), V_5 = (0, x), V_6 = (0, y)$$

of $\mathrm{Vect}_1(\mathbb{R}^2)$respectively.

6. Consider the following function:

$$T : \mathrm{Poly}_2 \to \mathbb{R}^2$$
$$p \mapsto \begin{bmatrix} p(0) \\ p(1) \end{bmatrix}$$

(a) Is T a linear map? (Yes / No).

(b) Prove your assertion from (a).

7. Let V be the vector space of solutions to the differential equation

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x) = 0.$$

Consider the 'evaluate at $x = 1$' map

$$T : V \to \mathbb{R}$$
$$y \mapsto y(1)$$

Is T a linear map? Prove your assertion.

8. Definieer die 'integreer oor die interval $[-1, 1]$'-afbeelding

$$I : \mathrm{Poly}_n \to \mathbb{R}$$
$$\mathbf{p} \mapsto \int_{-1}^{1} \mathbf{p}(x)\, dx$$

(a) *(a).*

Bewys dat I lineêr is.

(b) *(b).*

Bereken die aksie van I met betrekking tot die standaard basis $\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_3$ vir Poly_3.

(c) *(c).*

Bereken die aksie van I met betrekking tot die basis $\mathbf{q}_0, \ldots, \mathbf{q}_3$ vir Poly_3 uit Voorbeeld 2.2.7.

Oplossing.

(a) We use the properties of the integral.

$$I(\mathbf{p}+\mathbf{q}) = \int_{-1}^{1} (\mathbf{p}(x) + \mathbf{q}(x))\ dx = \int_{-1}^{1} \mathbf{p}(x)\, dx + \int_{-1}^{1} \mathbf{q}(x)\, dx = I(\mathbf{p}) + I(\mathbf{q}).$$

$$I(k\mathbf{p}) = \int_{-1}^{1} k\mathbf{p}(x)\, dx = k\int_{-1}^{1} \mathbf{p}(x)\, dx = kI(\mathbf{p})$$

(b)

$$I(\mathbf{p}_0) = \int_{-1}^{1} 1dx = x|_{-1}^{1} = 2 I(\mathbf{p}_1) = \int_{-1}^{1} xdx = \frac{1}{2}x^2|_{-1}^{1} = 0 I(\mathbf{p}_2) = \int_{-1}^{1} x^2dx = \frac{1}{3}x^3|_{-1}^{1} = \frac{2}{3} I(\mathbf{p}_3) =$$

(c) We use the results above:

$$I(\mathbf{q}_0) = \int_{-1}^{1} 1dx = x|_{-1}^{1} = 2 I(\mathbf{q}_1) = \int_{-1}^{1} xdx = \frac{1}{2}x^2|_{-1}^{1} = 0 I(\mathbf{q}_2) = \int_{-1}^{1} 2x^2 - 1dx = 2\int_{-1}^{1} x^2dx - \int_{-1}$$

9. Bereken die aksie van die differensiasie-afbeelding $D : \text{Poly}_4 \to \text{Poly}_3$ uit Voorbeeld 3.1.15 met betrekking tot die standaard basisse van die twee vektorruimtes.

Oplossing.

$$D(\mathbf{p}_0) = D(1) = 0D(\mathbf{p}_1) = D(x) = 1 = \mathbf{p}_0 D(\mathbf{p}_2) = D(x^2) = 2x = 2\mathbf{p}_1 D(\mathbf{p}_3) = D(x^3) = 3x^2 = 3\mathbf{p}_2 D(\mathbf{p}_4$$

10. Beskou die kruisproduk-lineêre afbeelding $C : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uit Voorbeeld 3.1.13 in die geval $\mathbf{w} = (1, 2, 3)$. Bereken die aksie van C met betrekking tot die standaard basis van $\mathbb{R}^3$.

Oplossing.

$$\begin{aligned} C((1,0,0)) &= (1,2,3) \times (1,0,0) = (0,3,-2) \\ C((0,1,0)) &= (1,2,3) \times (0,1,0) = (-3,0,1) \\ C((0,0,1)) &= (1,2,3) \times (0,0,1) = (2,-1,0). \end{aligned}$$

11. Prove that if V is a finite dimensional vector space then the set of all linear maps from V to $\mathbb{R}$,$\mathcal{L}(V, \mathbb{R})$, is itself a vector space. Since we already know that the set of all real valued functions from V to $\mathbb{R}$ forms a vector space, you will only have to show that $\mathcal{L}(V, \mathbb{R})$ contains the function $\mathbf{0}$, and is closed under both addition and scalar multiplication.

Oplossing. For all $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$, for all $S, T \in \mathcal{L}(V, \mathbb{R})$ and for all $a, b \in \mathbb{R}$:

(a)

$$\mathbf{0}(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = 0 = \mathbf{0v} + \mathbf{0w} 0(a\mathbf{v}) = 0 = a\mathbf{0}$$

and hence $\mathbf{0} \in \mathcal{L}(V, \mathbb{R})$.

(b)

$$(aS)(\mathbf{v}+\mathbf{W}) = a(S(\mathbf{v}+\mathbf{w})) = a(S\mathbf{v}+S\mathbf{w}) = (aS)\mathbf{v}+(aS)\mathbf{w}(aS)(b\mathbf{v}) = (ab)S\mathbf{v} = b(aS\mathbf{v})$$

and hence $aS \in \mathcal{L}(V, \mathbb{R})$.

(c)

$$(S+T)(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = S(\mathbf{v}+\mathbf{w})+T(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = S\mathbf{v}+S\mathbf{w}+T\mathbf{v}+T\mathbf{w} = (S+T)\mathbf{v}+(S+T)\mathbf{w}(S+T)(a\mathbf{v}) = S(a\mathbf{v})$$

and hence $S + T \in \mathcal{L}(V, \mathbb{R})$.

12. If V is a finite dimensional vector space, find a basis for $\mathcal{L}(V, \mathbb{R})$.

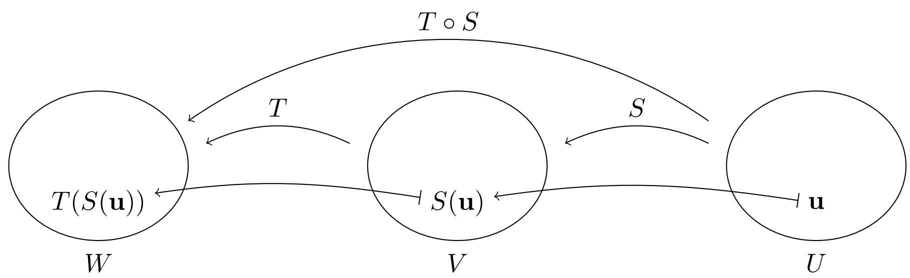
3.2 Samestelling van lineêre afbeeldings

Definisie 3.2.1 As $S : U \to V$ en $T : V \to W$ lineêre afbeeldings is, dan word die **samestelling van** T **met** S die afbeelding $T \circ S : U \to W$ gedefinieer as

$$(T \circ S)(\mathbf{u}) := T(S(\mathbf{u}))$$

waar $\mathbf{u}$ in U is. $\Diamond$

Sien Figuur 3.2.2.



Figuur 3.2.2 Samestelling van lineêre afbeeldings.

> Volgens wiskundige konvensie skryf ons die evaluasie van funksies van regs na links, bv. $f(x)$. Met ander woorde, jy begin met die regterkantste simbool, x, en dan pas jy f daarop toe. Daarom is die mees natuurlike manier om hierdie prentjies te teken van regs na links!

Voorbeeld 3.2.3 Laat $S : \mathbb{R}^3 \to \text{Poly}_2$ en $T : \text{Poly}_2 \to \text{Poly}_4$ lineêre afbeeldings wees wat as volg gedefinieer word:

$$S((a,b,c)) := ax^2 + (a-b)x + c, T(p(x)) = x^2 p(x).$$

Dan kan $T \circ S$ soos volg bereken word:

$$\begin{aligned}(T \circ S)((a,b,c)) &= T(S((a,b,c))) \\ &= T(ax^2 + (a-b)x + c) \\ &= x^2(ax^2 + (a-b)x + c) \\ &= ax^4 + (a-b)x^3 + cx^2.\end{aligned}$$

□

Stelling 3.2.4 *As $S : U \to V$ en $T : V \to W$ lineêre afbeeldings is, dan is $T \circ S : U \to W$ ook 'n lineêre afbeelding.*
Bewys. Laat $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2} \in U$. Dan:

$$\begin{aligned}(T \circ S)(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) &= T(S(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2)) && (\text{defn van } T \circ S) \\ &= T(S(\mathbf{u}_1) + S(\mathbf{u}_2)) && (S \text{ is lineêr }) \\ &= T(S(\mathbf{u}_1)) + T(S(\mathbf{u}_2)) && (T \text{ is lineêr }) \\ &= (T \circ S)(\mathbf{u}_1) + (T \circ S)(\mathbf{u}_2) && (\text{defn van } T \circ S)\end{aligned}$$

Op soortgelyke wyse het ons

$$\begin{aligned}(T \circ S)(k\mathbf{u}) &= T(S(k\mathbf{u})) && (\text{defn van } T \circ S) \\ &= T(kS(\mathbf{u})) && (S \text{ is lineêr }) \\ &= kT(S(\mathbf{u})) && (T \text{ is lineêr }) \\ &= k(T \circ S)(\mathbf{u}) && (\text{defn van } T \circ S)\end{aligned}$$

■

Voorbeeld 3.2.5 Oorweeg as lineêre afbeeldings die anti-afgeleide (A) en die afgeleide (D)

$$A : \text{Poly}_n \to \text{Poly}_{n+1}$$

$$D : \text{Poly}_{n+1} \to \text{Poly}_n \,.$$

Is $D \circ A = \text{id}_{\text{Poly}_n}$?

Oplossing. Ons bereken die aksie van $D \circ A$ op die basis x^k, $k = 0 \dots n$ van Poly_n:

$$x^k \overset{A}{\mapsto} \frac{x^{k+1}}{k+1} \overset{D}{\mapsto} \frac{k+1}{k+1} x^k = x^k$$

Daarom, het ons vir $k = 0 \dots n$ dat

$$\begin{aligned}(D \circ A)(x^k) &= x^k \\ &= \text{id}_{\text{Poly}_n}(x^k).\end{aligned}$$

Omdat $D \circ A$ en $\text{id}_{\text{Poly}_n}$ op 'n basis van Poly_n ooreenstem, stem hulle ooreen met alle vektore $\mathbf{p} \in \text{Poly}_n$ volgens Proposisie 3.1.27. Daarom is $D \circ A = \text{id}_{\text{Poly}_n}$.

Om die waarheid te sê, die stelling dat $D \circ A = \text{id}_{\text{Poly}_n}$ is presies Deel I van die Fundamentele Stelling van Calculus, toegepas op die spesiale geval van polinome! □

Verstaanpunt 3.2.6 Is $A \circ D = \text{id}_{\text{Poly}_{n+1}}$? As dit is, bewys dit. Indien nie, gee 'n eksplisiete teenvoorbeeld.

Oplossing. The statement is not true! For example, let $\mathbf{p}(x) = x + 1$. Then

$$(A \circ D)(x+1) = A(1) = x \neq x + 1.$$

3.2.1 Oefeninge

1. Laat R_θ die 'rotasie deur θ' afbeelding uit Example 3.1.29 wees:

$$\begin{aligned} R_\theta : \text{Col}_2 &\to Col_2 \\ \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} &\mapsto \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Gaan algebraïes na dat $R_\phi \circ R_\theta = R_{\phi+\theta}$ deur die aksie van die lineêre afbeeldings op beide kante van die vergelyking op 'n arbitrêre vektor $\mathsf{v} \in \text{Col}_2$ te bereken.

Oplossing.

$$\begin{aligned} R_\phi R_\theta(x,y) &= R_\phi(x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta) \\ &= ((x\cos\theta - y\sin\theta)\cos\phi - (x\sin\theta + y\cos\theta)\sin\phi,\ (x\cos\theta - y\sin\theta)\sin\phi + (x\sin\theta + y\cos\theta) \\ &= (x(\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi) - y(\sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi),\ x(\cos\theta\sin\phi + \sin\theta\cos\phi) + y(\cos\theta\, c \\ &= \big(x\cos(\theta+\phi) - y\sin(\theta+\phi),\ x\sin(\theta+\phi) + y\cos(\theta+\phi_)\big) \\ &= R_{\phi+\theta}(x,y) \end{aligned}$$

2. Laat $M : \text{Poly}_3 \to \text{Poly}_4$ die 'vermenigvuldig met x'-afbeelding wees, $M(p)(x) = xp(x)$. Laat $S : \text{Poly}_4 \to \text{Poly}_4$ die afbeelding $S(p)(x) = p(x-1)$ wees. Net so, laat $T : \text{Poly}_3 \to \text{Poly}_3$ die afbeelding $T(p)(x) = p(x-1)$ wees. Bereken $S \circ M$ en $M \circ T$. Is hulle gelyk?

Oplossing.

$$(S \circ M)(p(x)) = S(M(p(x))) = S(xp(x)) = (x-1)p(x-1)$$

terwyl

$$(M \circ S)(p(x)) = M(p(x-1)) = xp(x-1).$$

Dus is $S \circ M \neq M \circ S$.

3.3 Isomorfismes van vektorruimtes

Veronderstel jy het twee versamelings,

Die elemente van A en B is nie *dieselfde* nie, so A is nie *gelyk* aan B nie. Maar dit is nie heeltemal bevredigend nie — duidelik is die elemente van A net die Afrikaanse beskrywings van die Sjinese simbole in B. Hoe kan ons dit noukeurig wiskundig beskryf?

Ons kan twee afbeeldings definieer, byvoorbeeld

Dan neem ons waar dat

$$T \circ S = \mathrm{id}_A \ \text{ en } S \circ T = \mathrm{id}_B\,. \tag{3.3.1}$$

'n Paar afbeeldings $S : A \to B$ en $T : B \to A$ wat (3.3.1) bevredig word 'n *isomorfisme van versamelings* tussen A en B genoem. As jy wil, kan jy T as S^{-1} herdoop, omdat $S^{-1} \circ S = \mathrm{id}_A$ en $S \circ S^{-1} = \mathrm{id}_B$. (Om T van die begin af S^{-1} te noem sou voortydig gewees het. Ek moes dit eers definieer en seker maak dat dit (3.3.1) bevredig. Slegs dan het ek die reg om dit S^{-1} te noem!)

Dalk is jy 'n ietwat spaarsamige persoon. Jy sien die nut van die Afrikaans-na-Sjinese afbeelding S, maar nie die nut van die Sjinees-na-Afrikaanse afbeelding T nie. Buitendien, aangesien geen twee verskillende Afrikaanse woorde in A na dieselfde Sjinese simbool in B afgebeeld word nie ('S is een-tot-een') en elke Sjinese simbool $y \in B$ is gelyk aan $S(x)$ vir een of ander $x \in A$ ('S is *op*'), het ons nie T nodig nie. Dit is oorbodig!

Hierop sou ek as volg reageer: jy is reg, maar is dit nie nuttig om 'n eksplisiete Sjinees-na-Afrikaanse afbeelding T te hê nie? In boekwinkels word woordeboeke in pare geskep, in 'n enkele volume. Buitendien, as mens die Afrikaanse woord vir `BIRD` wil opsoek, sal dit lastig wees om deur die hele Afrikaans-na-Sjinese woordeboek te werk, om die Afrikaanse woord vir `BIRD` te vind!

Dit lei tot die volgende definisie.

Definisie 3.3.1 Ons sê dat 'n lineêre afbeelding $T : V \to W$ 'n **isomorfisme** is as daar 'n lineêre afbeelding $T^{-1} : W \to V$ bestaan, sodat

$$T^{-1} \circ T = \mathrm{id}_V \ \text{ en } T \circ T^{-1} = \mathrm{id}_W\,. \tag{3.3.2}$$

$\diamond$

Hulpstelling 3.3.2 Inverse is Uniek. *As $T : V \to W$ lineêre afbeeldings is, en $S, S' : W \to V$ bevredig*

$$\begin{aligned} S \circ T &= \mathrm{id}_V, & T \circ S &= \mathrm{id}_W \\ T' \circ S &= \mathrm{id}_V, & T \circ S' &= \mathrm{id}_W \end{aligned}$$

dan is $S = S'$.

Hierdie lemma beteken dat dit maak sin om te praat van "die inverse" (in plaas van "'n inverse") van 'n lineêre afbeelding. So dit maak sin vir oms om die notasieT^{-1} te gebruik, wat gelees word as "die" inverse van T.

Bewys. Om te wys dat $S = S'$, moet ons wys dat vir alle $\mathbf{w} \in W$ geld

$S(\mathbf{w}) = S'(\mathbf{w})$. Inderdaad:

$$\begin{aligned}
S(\mathbf{w}) &= S(\mathrm{id}_W(\mathbf{w})) && \text{(Defn van } \mathrm{id}_W) \\
&= S((T \circ S')(\mathbf{w})) && (T \circ S' = \mathrm{id}_W) \\
&= S(T(S'(\mathbf{w}))) && \text{(Defn of } T \circ S') \\
&= (S \circ T)(S'(\mathbf{w})) && \text{(Defn of } S \circ T) \\
&= \mathrm{id}_V(S'(\mathbf{w})) && (S \circ T = \mathrm{id}_V) \\
&= S'(\mathbf{w}) && \text{(Defn of } \mathrm{id}_V).
\end{aligned}$$

■

Definisie 3.3.3 Ons sê twee vektorruimtes V en W is **isomorf** as daar 'n isomorfisme tussen hulle bestaan. ♢

Voorbeeld 3.3.4 Wys dat $\mathbb{R}^n$ isomorf aan Poly_{n-1} is.

Oplossing. Ons definieer die volgende lineêre afbeeldings:

$$\begin{aligned}
T : \mathbb{R}^n &\to \mathrm{Poly}_{n-1} \\
(a_1, a_2, \ldots, a_n) &\mapsto a_1 + a_2 x + \cdots + a_n x^{n-1} \\
T^{-1} : \mathrm{Poly}_{n-1} &\to \mathbb{R}^n \\
a_1 + a_2 x + \cdots + a_n x^{n-1} &\mapsto (a_1, a_2, \ldots, a_n)
\end{aligned}$$

Ons het duidelik dat $T^{-1} \circ T = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ en $T \circ T^{-1} = \mathrm{id}_{\mathrm{Poly}_{n-1}}$. □

Verstaanpunt 3.3.5 Maak seker dat hierdie afbeeldings lineêr is.

Ons sal nou wys dat tot op die vlak van isomorfisme, bestaan daar net een vektorruimte van elke dimensie!

Stelling 3.3.6 *Twee eindigdimensionele vektorruimtes V en W is isomorf as en slegs as hulle dieselfde dimensie het.*

Bewys. $\Rightarrow$. Veronderstel V en W is isomorf, d.m.v. 'n paar lineêre afbeeldings $S : V \rightleftarrows W : T$. Laat $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m\}$ 'n basis vir V wees. Dan beweer ek dat $\mathcal{C} = \{S(\mathbf{e}_1), \ldots, S(\mathbf{e}_m)\}$ 'n basis vir W is. Dit is omdat die lys vektore $\mathcal{C}$ lineêr onafhanklik is, want as

$$a_1 S(\mathbf{e}_1) + a_2 S(\mathbf{e}_2) + \cdots + a_m S(\mathbf{e}_m) = \mathbf{0}_W,$$

dan lewer die toepassing van T aan beide kante

$$\begin{aligned}
T(a_1 S(\mathbf{e}_1) + a_2 S(\mathbf{e}_2) + \cdots + a_m S(\mathbf{e}_m)) &= T(\mathbf{0}_W) \\
\therefore a_1 T(S(\mathbf{e}_1)) + a_2 T(S(\mathbf{e}_2)) + \cdots + a_m T(S(\mathbf{e}_m)) &= \mathbf{0}_V && (T \text{ is lineêr}) \\
\therefore a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + \cdots + a_m \mathbf{e}_m &= \mathbf{0}_V && (T \circ S = \mathrm{id}_V)
\end{aligned}$$

wat impliseer dat $a_1 = a_2 = \cdots = a_m = 0$, aangesien $\mathcal{B}$ lineêr onafhanklik is. Verder onderspan die lys vektore $\mathcal{C}$ vir W, want as $\mathbf{w} \in W$, dan kan ons

$$T(\mathbf{w}) = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + \cdots + a_m \mathbf{e}_m$$

skryf vir skalare a_i aangesien$\mathcal{B}$ vir V onderspan. Maar dan

$$\begin{aligned}
\mathbf{w} &= S(T(\mathbf{w})) && \text{(since } S \circ T = \mathrm{id}_W) \\
&= S(a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + \cdots + a_m \mathbf{e}_m) \\
&= a_1 S(\mathbf{e}_1) + a_2 S(\mathbf{e}_2) + \cdots + a_m S(\mathbf{e}_m) && (S \text{ is lineêr})
\end{aligned}$$

sodat $\mathcal{C}$ W span. Daarom is $\mathcal{C}$ 'n basis vir V, so $\dim V$ = aantal vektore in $\mathcal{B}$ = n, terwyl $\dim W$ = aantal vektore in $\mathcal{C} = m$.

$\Leftarrow$. Veronderstel $\dim V = \dim W$. Laat $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m$ 'n basis vir V wees, en laat $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m$ 'n basis vir W wees. (Ons weet dat die aantal basisvektore dieselfde is, want $\dim V = \dim W$.)

Om lineêre afbeeldings te definieer

$$S : V \rightleftarrows W : T$$

is dit voldoende, volgens Proposisie 3.1.27 (Voldoende om 'n Line{\^e}re Afbeelding te Definieer op 'n Basis), om die aksie van S en T op die basisvektore te definieer. Ons pen neer:

$$\mathbf{e}_i \overset{S}{\mapsto} \mathbf{f}_i$$
$$\mathbf{f}_i \overset{T}{\mapsto} \mathbf{e}_i$$

Duidelik het ons $T \circ S = \mathrm{id}_V$ en $S \circ T = \mathrm{id}_W$. ■

Voorbeeld 3.3.7 Wys dat $\mathrm{Mat}_{n,m}$ isomorf is aan $\mathbb{R}^{mn}$.

Oplossing. Ons let op volgens Voorbeeld 2.3.13, $\dim \mathrm{Mat}_{n,m} = mn$, terwyl uit Voorbeeld 2.3.4, is $\dim \mathbb{R}^{mn}$ ook gelyk aan mn. □

Daar is een baie belangrike isomorfisme wat ons herhaaldelik gaan gebruik. Laat V 'n vektorruimte weest met 'n basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m\}$. Oorweeg die afbeelding

$$\begin{aligned} [\cdot]_{\mathcal{B}} : V &\to \mathrm{Col}_m \\ \mathbf{v} &\mapsto [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}, \end{aligned}$$

wat 'n vektor $\mathbf{v} \in V$ na sy ooreenstemmende koördinaatvektor $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} \in \mathrm{Col}_m$ stuur. Lemma 2.4.10 sê presies dat $[\cdot]_{\mathcal{B}}$ 'n lineêre afbeelding is. Ons gaan nou die inverse beskryf.

Definisie 3.3.8 Laat V 'n m-dimensionele vektorruimte met basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m\}$ wees. Laat $\mathsf{c} \in \mathrm{Col}_m$ 'n m-dimensionele kolomvektor wees. Dan is die **vektor in V wat ooreenstem met c relatief tot die basis $\mathcal{B}$**

$$\mathbf{vec}_{V,\mathcal{B}}(\mathsf{c}) := \mathsf{c}_1\mathbf{e}_1 + \mathsf{c}_2\mathbf{e}_2 + \cdots + \mathsf{c}_m\mathbf{e}_m.$$

◊

Voorbeeld 3.3.9 Die polinome $\mathcal{B} = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$ waar

$$\mathbf{p}_1 := 1 + x, \mathbf{p}_2 := 1 + x + x^2, \mathbf{p}_3 := 1 - x^2$$

is 'n basis vir Poly_2 (bevestig dit self). Dan, byvoorbeeld,

$$\begin{aligned} \mathbf{vec}_{\mathrm{Poly}_3,\mathcal{B}}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}\right) &= 2(1+x) - 3(1+x+x^2) + 3(1-x^2) \\ &= 2 - x - 6x^2 \in \mathrm{Poly}_3 \ . \end{aligned}$$

□

Verstaanpunt 3.3.10 Wys dat:

- *(a).*
  $\mathbf{vec}_{V,\mathcal{B}}(\mathsf{c} + \mathsf{c}') = \mathbf{vec}_{V,\mathcal{B}}(\mathsf{c}) + \mathbf{vec}_{V,\mathcal{B}}(\mathsf{c}')$
- *(b).*
  $\mathbf{vec}_{V,\mathcal{B}}(k\mathsf{c}) = k\,\mathbf{vec}_{V,\mathcal{B}}(\mathsf{c})$.

Dit beteken dat $\mathbf{vec}_{V,\mathcal{B}} : \mathrm{Col}_m \to V$ 'n lineêre afbeelding is.

Oplossing.

1.

$$\begin{aligned}
\mathbf{vec}_{V,\mathcal{B}}(\mathsf{c}+\mathsf{c}') &= \mathbf{vec}_{V,\mathcal{B}}\left(\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1' \\ \vdots \\ c_n' \end{bmatrix}\right) \\
&= \mathbf{vec}_{V,\mathcal{B}}\left(\begin{bmatrix} c_1 + c_1' \\ \vdots \\ c_n + c_n' \end{bmatrix}\right) \\
&= (c_1 + c_1')\mathbf{e}_1 + \cdots + (c_n + c_n')\mathbf{e}_n \\
&= (c_1\mathbf{e}_1 + \cdots + c_n\mathbf{e}_n) + (c_1'\mathbf{e}_1 + \cdots + c_n'\mathbf{e}_n) \\
&= \mathbf{vec}_{V,\mathcal{B}}(\mathsf{c}) + \mathbf{vec}_{V,\mathcal{B}}(\mathsf{c}')
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\mathbf{vec}_{V,\mathcal{B}}(k\mathsf{c}) &= \mathbf{vec}_{V,\mathcal{B}}\left(k\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}\right) \\
&= \mathbf{vec}_{V,\mathcal{B}}\left(\begin{bmatrix} kc_1 \\ \vdots \\ kc_n \end{bmatrix}\right) \\
&= (kc_1\mathbf{e}_1 + \cdots + kc_n\mathbf{e}_n) \\
&= k(c_1\mathbf{e}_1 + \cdots + c_n\mathbf{e}_n) \\
&= k\,\mathbf{vec}_{V,\mathcal{B}}(\mathsf{c})
\end{aligned}$$

Stelling 3.3.11 *Laat V 'n vektorruimte met basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m\}$ wees. Die afbeelding*

$$\begin{aligned}
[\cdot]_{\mathcal{B}} : V &\rightleftarrows \mathrm{Col}_m \\
\mathbf{v} &\mapsto [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}
\end{aligned}$$

is 'n isomorfisme, met inverse

$$\begin{aligned}
\mathbf{vec}_{V,\mathcal{B}} : \mathrm{Col}_m &\to V \\
\mathsf{c} &\mapsto \mathbf{vec}_{V,\mathcal{B}}(\mathsf{c}).
\end{aligned}$$

Bewys. Gegee $\mathbf{v} \in V$, brei dit in die basis $\mathcal{B}$ uit:

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{e}_1 + \ldots + a_m\mathbf{e}_m.$$

Dan,

$$\begin{aligned}
(\mathbf{vec}_{V,\mathcal{B}} \circ [\cdot]_{\mathcal{B}})(\mathbf{v}) &= \mathbf{vec}_{V,\mathcal{B}}([\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}) \\
&= \mathbf{vec}_{V,\mathcal{B}}\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}\right) \\
&= a_1\mathbf{e}_1 + \cdots + a_m\mathbf{e}_m \\
&= \mathbf{v}
\end{aligned}$$

sodat $\mathbf{vec}_{V,\mathcal{B}} \circ [\cdot]_{\mathcal{B}} = \mathrm{id}_V$. Aan die ander kant, gegee

$$\mathsf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} \in \mathrm{Col}_m ,$$

het ons

$$\begin{aligned} \left([\cdot]_{\mathcal{B}} \circ \mathbf{vec}_{V,\mathcal{B}}\right)(\mathsf{c}) &= \left[\mathbf{vec}_{V,\mathcal{B}}(\mathsf{c})\right]_{\mathcal{B}} \\ &= \left[\mathsf{c}_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \mathsf{c}_m\mathbf{e}_m\right] \\ &= \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} \\ &= \mathsf{c} \end{aligned}$$

waar die tweede laaste stap die *definisie* van die koördinaatvektor van $\mathbf{v} = \mathsf{c}_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \mathsf{c}_m\mathbf{e}_m$ gebruik. Gevolglik is $[\cdot]_{\mathcal{B}} \circ \mathbf{vec}_{V,\mathcal{B}} = \mathrm{id}_{\mathrm{Col}_m}$. ■

Die bostaande resultaat is baie belangrik in lineêre algebra. Dit sê dat, sodra ons 'n basis vir 'n abstrakte eindig dimensionele vektorruimte V gekies het, dan kan ons die elemente van V behandel asof hulle kolomvektore is!

3.3.1 Oefeninge

1. Is die volgende vektorruimtes isomorf?

$$V = \left\{ \mathsf{v} \in \mathrm{Col}_4 : \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathsf{v} = \mathsf{0} \right\}$$
$$W = \left\{ p \in \mathrm{Poly}_2 : \int_0^2 p(x)dx = 0 \right\}.$$

As hulle is, gee 'n eksplisiete isomorfisme tussen hulle. Indien nie, bewys dat hulle nie isomorf is nie.

Oplossing. V consists of all vectors (x, y, z, w) satisyfing the linear equations

$$\begin{aligned} x + 2y - w &= 0 \\ -x + y + z &= 0. \end{aligned}$$

We are free to choose x and y arbitrarily, but then (1) above fixes w and (2) fixes z. Hence V is a 2 dimensional subspace.

Onto W. Let $p(x) = ax^2 + bx + c$. For $p(x)$ to be in W, $p(x)$ must satisfy the following equation:

$$\int_0^2 ax^2 + bx + c\,dx = \frac{8a}{3} + 2b + 2c = 0.$$

Thus, for any choice of a and b, c is uniquely determined. Hence W is a 2 dimensional subspace.

Since both V and W are 2 dimensional vector spaces, they are isomorphic by Stelling 3.3.6. To exhibit an explicit isomorphism between the V and W we shall need find bases for both spaces.

Since V is 2 dimensional, a basis for V consists of any two non-zero vectors in V that are not scalar multiples of one another. By inspection, we find the basis $\mathcal{B}_V = \{(1,0,1,1),(0,1,-1,2)\}$. By similar reasoning, we find a basis $\mathcal{B}_W = \{\frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{2}, x-1\}$. By Stelling 3.1.27, there is a unique linear map $T : V \to W$ such that

$$T((1,0,1,1)) = \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{2}$$
$$T((0,1,-1,2)) = x - 1.$$

This map is an isomorphism, as demonstrated by the proof of Stelling 3.3.6.

2. Is die volgende vektorruimtes isomorf?

$$V = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{v} \times (1,2,3) = \mathbf{0}\}$$

$$W = \left\{M \in \mathrm{Mat}_{2,2} : M^T = -M\right\}.$$

As hulle is, gee 'n eksplisiete isomorfisme tussen hulle. Indien nie, bewys dat hulle nie isomorf is nie.

Oplossing. We use some geometry to find the dimension of V. $\mathbf{v} \in V$ if and only if

$$|\mathbf{v}||(1,2,3)|\sin\theta = 0$$

where θ is the angle between $\mathbf{v}$ and $(1,2,3)$. Thus V consists of $\mathbf{0}$ as well as all those vectors parallel to $(1,2,3)$. But this set is precisely all vectors of the form $k(1,2,3)$ with $k \in \mathbb{R}$. Hence V is 1 dimensional with basis $\{(1,2,3)\}$.

W consists of all matrices (a_{ij}) satisfying

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{bmatrix}.$$

Thus $a_{11} = a_{22} = 0$ and $b = -c$. So W consists of all those matrices of the form

$$\begin{bmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{bmatrix}.$$

This also shows that

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

is a basis for W. Hence V and W are isomorphic with the isomorphism given by the unique linear map $V \to W$ satisfying

$$(1,2,3) \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Are the following vector spaces

$$V = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^4 : (1,-1,2,1) \cdot \mathbf{v} = 0\}$$

and

$$\mathrm{Poly}_1[x,y]$$

isomorphic?

If they are, construct an explicit isomorphism between them. If not, prove that they are not isomorphic.

4. Are the following vector spaces isomorphic?

$$V = \{\mathbf{p} \in \mathbb{P}\rtimes\lessdot\curvearrowright_3[x,y] : \iint_D p\, dA \cdot \mathbf{v} = 0\} D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

$$\mathrm{Vect}_2(\mathbb{R}^2)$$

3.4 Lineêre afbeeldings en matrikse

Definisie 3.4.1 Laat $T : V \to W$ 'n lineêre afbeelding vanaf 'n vektorruimte V na 'n vektorruimte W wees. Laat $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m\}$ 'n basis vir V en $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n\}$ 'n basis vir W wees. Die **matriks van T relatief tot die basisse $\mathcal{B}$ en $\mathcal{C}$** word gedefinieer as die $n \times m$-matriks waarvan die kolomme die koördinaatvektore van $T(\mathbf{b}_i)$ relatief tot die basis $\mathcal{C}$ is:

$$[T]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} := \left[\begin{bmatrix} \\ T(\mathbf{b}_1) \\ \\ \end{bmatrix}_{\mathcal{C}} \quad \begin{bmatrix} \\ T(\mathbf{b}_2) \\ \\ \end{bmatrix}_{\mathcal{C}} \quad \cdots \quad \begin{bmatrix} \\ T(\mathbf{b}_m) \\ \\ \end{bmatrix}_{\mathcal{C}} \right]$$

$\Diamond$

Verstaan jy hoekom $[T]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$ 'n $n \times m$-matriks is?

Voorbeeld 3.4.2 Matriks van 'n Lineêre Afbeelding. Laat

$$T : \mathrm{Poly}_2 \to \mathrm{Poly}_3$$

gedefineer word deur

$$T(p)(x) := xp(x)$$

Laat

$$\mathcal{B} = \{b_1 = 1 + x, b_2 = 1 - x, b_3 = 1 + x + x^2\}$$

en

$$\mathcal{C} = \{c_1 = 1, c_2 = 1 + x, c_3 = 1 + x + x^2, c_4 = x^3\}$$

basisse vir Poly_2 en Poly_3 onderskeidelik wees. Bepaal $[T]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$.

Oplossing. Ons bereken:

$$\begin{aligned} T(b_1) &= x(1+x) \\ &= x + x^2 \\ &= -c_1 + c_3 \\ \therefore [T(b_1)]_{\mathcal{C}} &= \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ T(b_2) &= x(1-x) \\ &= x - x^2 \\ &= -c_1 + 2c_2 - c_3 \\ \therefore [T(b_2)]_{\mathcal{C}} &= \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(b_3) &= x(1+x+x^2) \\ &= x + x^2 + x^3 \\ &= -c_1 + c_3 + c_4 \\ \therefore [T(b_3)]_{\mathcal{C}} &= \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Deur al hierdie koördinaatvektore te versamel kry ons

$$[T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

□

Stelling 3.4.3 Lineêre afbeeldings en matriksvermenigvulding van koördinaatvektore. *Laat $T : V \to W$ 'n lineêre afbeelding vanaf 'n vektorruimte V na 'n vektorruimte W wees. Laat $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m\}$ 'n basis vir V en $\mathcal{C}$ 'n basis vir W wees. Dan vir alle vektore $\mathbf{v}$ in V geld dat*

$$[T(\mathbf{v})]_{\mathcal{C}} = [T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}, \tag{3.4.1}$$

waar die regterkant die produk van die matriks $[T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ met die koörindaatvektor $\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ is.

Bewys. Die bewys is soortgelyk aan die bewys van die Basisveranderingstelling (Stelling 2.5.7). Laat $\mathbf{v} \in V$. Brei dit uit in die basis $\mathcal{B}$:

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{b}_1 + a_2\mathbf{b}_2 + \cdots + a_m\mathbf{b}_m, \text{i.e. } [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}.$$

Dan,

$$\begin{aligned} [\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} &= [T(a_1\mathbf{b}_1 + \cdots + a_m\mathbf{b}_m)]_{\mathcal{C}} \\ &= [a_1T(\mathbf{b}_1) + \cdots + a_nT(\mathbf{b}_m)]_{\mathcal{C}} && (T \text{ is lineêr}) \\ &= a_1[T(\mathbf{b}_1)]_{\mathcal{C}} + \cdots + a_n[T(\mathbf{b}_m)]_{\mathcal{C}} && (\text{Hulpstelling 2.4.10}) \\ &= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} T(\mathbf{b}_1) \end{bmatrix}_{\mathcal{C}} & \begin{bmatrix} T(\mathbf{b}_2) \end{bmatrix}_{\mathcal{C}} & \cdots & \begin{bmatrix} T(\mathbf{b}_m) \end{bmatrix}_{\mathcal{C}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \\ &= [T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}\,. \end{aligned}$$

■

Voorbeeld 3.4.4 Bevestiging van Stelling 3.4.3 in 'n voorbeeld. Kom ons bevestig dat Stelling 3.4.3 inderdaad werk, in die konteks van Voorbeeld 3.4.2. Neem die vektor $\mathbf{v} \in \text{Poly}_2$ as, byvoorbeeld, x.

Brei x uit relatief tot die basis $\mathcal{B}$. Ons kry:

$$x = \frac{1}{2}(p_1 - p_2).$$

So,

$$[x]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Verder, $T(x) = x^2 = -q_2 + q_3$, so

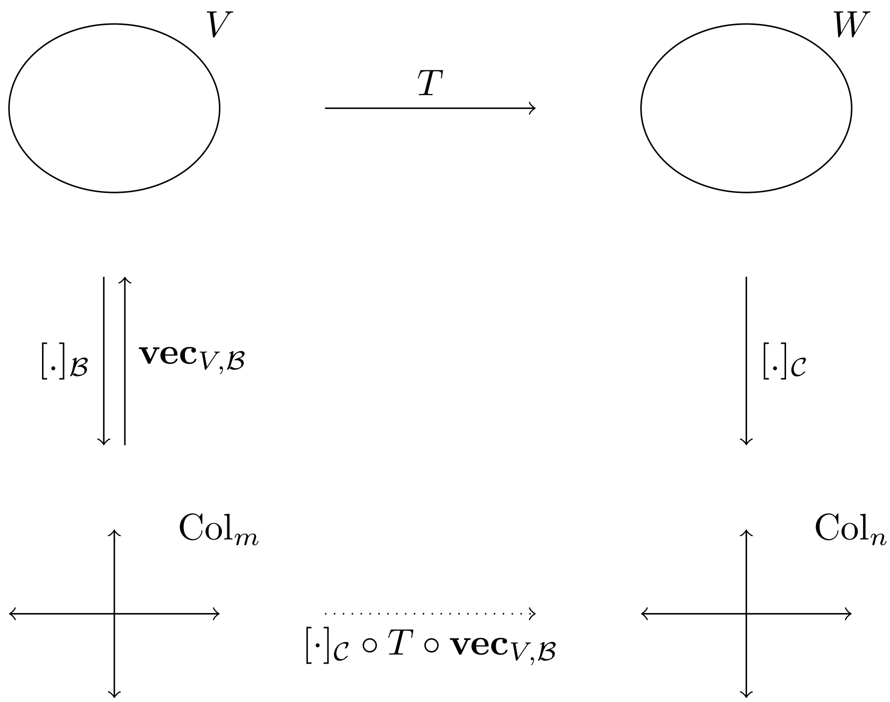
$$[T(x)]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ons kan nou die linker- en regterkante van Vergelyking (3.4.1) uitwerk en sien of hulle wel gelyk aan mekaar is.

$$\begin{aligned} \text{LK van (3.4.1)} &= [T(x)]_{\mathcal{C}} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \\ \text{RK van (3.4.1)} &= [T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[x]_{\mathcal{B}} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

So die Stelling werk inderdaad — ten minste in hierdie geval! □

Ons kan Stelling 3.4.3 as volg in ’n meer abstrakte manier interpreteer. Ons het die volgende diagram van lineêre afbeeldings van vektorruimtes:



Figuur 3.4.5

Die boonste afbeelding is die lineêre afbeelding $T : V \to W$. Die afbeelding links van V na Col_m is die koördinaatvektorafbeelding $[\cdot]_{\mathcal{B}}$ geassosieer met die basis $\mathcal{B}$. Sy inverse afbeelding $\mathbf{vec}_{V,\mathcal{B}} : \mathrm{Col}_m \to V$ word ook geteken. Die afbeelding aan die regterkant is die koördinaatvektorafbeedling $[\cdot]_{\mathcal{C}}$ vanaf W na Col_n wat met basis C assosieer word. Die stippelpyl heel onder is die saamgestelse afbeelding, en kan soos volg eksplisiet bereken word.

Hulpstelling 3.4.6 *Die saamgestelde afbeelding*

$$[\cdot]_{\mathcal{C}} \circ T \circ \mathbf{vec}_{V,\mathcal{B}} : \mathrm{Col}_m \to \mathrm{Col}_n$$

is matriksvermenigvuldiging met $[T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$. *Dit is, vir alle kolomvektore* u *in* Col_m*,*

$$\left([\cdot]_{\mathcal{C}} \circ T \circ \mathbf{vec}_{V,\mathcal{B}}\right)(\mathsf{u}) = [T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}\, \mathsf{u}.$$

Bewys. Laat u 'n kolomvektor in Col_m wees. Definieer $\mathbf{v} := \mathbf{vec}_{V,\mathcal{B}}(\mathsf{u})$. Dan is $\mathbf{v}$ die vektor in V waarvan die koördinaatvektor met betrekking tot basis $\mathcal{B}$ gelyk aan u is. Dit is, $\mathsf{u} = [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$. So,

$$\begin{aligned}
\left([\cdot]_{\mathcal{C}} \circ T \circ \mathbf{vec}_{V,\mathcal{B}}\right)(\mathsf{c}) &= [\cdot]_{\mathcal{C}}\left(T\left(\mathbf{vec}_{V,\mathcal{B}}(\mathsf{u})\right)\right) && \text{(Defn van saamgestelde afbeelding)} \\
&= [\cdot]_{\mathcal{C}}(T(\mathbf{v})) && \text{(Defn van } \mathbf{v}\text{)} \\
&= [T(\mathbf{v})]_{\mathcal{C}} && \text{(Defn van } [\cdot]_{\mathcal{C}}\text{)} \\
&= [T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} && \text{(Stelling 3.4.3).}
\end{aligned}$$

■

Voor ons aanbeweeg, moet ons nog iets van matrikse hersien. Veronderstel A is 'n matriks met n rye. Laat

$$\mathsf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \mathsf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \mathsf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

die standaard basis vir Col_n wees. Dan kan die $i$de kolom van A verkry word deur A met e_i te vermenigvuldig:

$$i\text{de column of } \mathsf{A} = A\mathsf{e}_i. \tag{3.4.2}$$

Verstaanpunt 3.4.7 Bevestig dit!

Nou kan ons die volgende stelling bewys.

Stelling 3.4.8 Funktorialiteit van die Matriks-Lineêre Afbeelding. *Laat $S : U \to V$ en $T : V \to W$ lineêre afbeeldings tussen eindig-dimensionele vektorruimtes wees. Laat $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ en $\mathcal{D}$ basisse vir U, V en W onderskeidelik wees. Dan,*

$$[T \circ S]_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{C}}[S]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$$

waar die regterkant die matriksproduk van $[T]_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{C}}$ en $[S]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ is.

Bewys. Ons het:

$$\begin{aligned}
&i\text{-ste kolom van } [T \circ S]_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{B}} \\
&\qquad = [(T \circ S)(\mathbf{b}_i)]_{\mathcal{D}} && \text{(Defn van } [T \circ S]_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{B}}) \\
&\qquad = [T(S(\mathbf{b}_i))]_{\mathcal{D}} && \text{(Defn van } T \circ S) \\
&\qquad = [T]_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{C}}\,[S(\mathbf{b}_i)]_{\mathcal{C}} && \text{(Stelling 3.4.3)} \\
&\qquad = [T]_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{C}}\,[S]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}\,[\mathbf{b}_i]_{\mathcal{B}} && \text{(Stelling 3.4.3)} \\
&\qquad = [T]_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{C}}\,[S]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}\,\mathsf{e}_i && \text{(want } [\mathbf{b}_i]_{\mathcal{B}} = \mathsf{e}_i) \\
&\qquad = i\text{-ste kolom van } [T]_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{C}}[S]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} && \text{(3.4.2).}
\end{aligned}$$

■

Gevolg 3.4.9 *Laat $T : V \to W$ 'n lineêre afbeelding wees, en veronderstel $\mathcal{B}$ is 'n basis vir V, en $\mathcal{C}$ is 'n basis vir W. Dan*

$$(T \text{ is 'n isomorfisme} \iff [T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} \text{ is inverteerbaar.}$$

Bewys. $\Rightarrow$. Veronderstel die lineêre afbeelding T is 'n isomorfisme. Dit beteken dat bestaan 'n lineêre afbeelding $S : W \to V$ bestaan sodat

$$S \circ T = \mathrm{id}_V \;\text{ en } T \circ S = \mathrm{id}_W \,/$$

Daarom,

$$[S \circ T]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}} = [\mathrm{id}_V]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}} \text{ en } [T \circ S]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{C}} = [\mathrm{id}_W]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{C}}.$$

Daarom, volgens die Funktorialiteit van die Matriks van 'n Lineêre Afbeelding (Stelling 3.4.8),

$$[S]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}[T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = I \text{ en } [T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[S]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}} = I$$

Daarom is die matriks $[T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ inverteerbaar, met inverse

$$[T]^{-1}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = [S]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}.$$

$\Leftarrow$. Veronderstel die matriks $[T] \equiv [T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ is inverteerbaar. Definieer die lineêre afbeelding

$$S : W \to V$$

deur dit eerstens op die basisvektore in $\mathcal{C}$ te definieer as

$$S(\mathbf{c}_i) := \sum_{p=1}^{\dim V} [T]^{-1}_{pi} \lfloor_p$$

en dit dan tot die hele W deur lineariteit uit te brei. Dan het ons

$$\begin{aligned}(T \circ S)(\rfloor_i) &= T(S(\rfloor_i))\\ &= T\left(\sum_{p=1}^{\dim V} [T]^{-1}_{pi}\mathbf{b}_p\right)\\ &= \sum_{p=1}^{\dim V}\sum_{q=1}^{\dim W} [T]^{-1}_{pi}[T]_{qp}\mathbf{c}_q\\ &= \sum_{q=1}^{\dim W}\left(\sum_{p=1}^{\dim V} [T]_{qp}[T]^{-1}_{pi}\right)\mathbf{c}_q\\ &= \sum_{q=1}^{\dim W}\left([T][T]^{-1}\right)_{qi}\mathbf{c}_q\\ &= \sum_{q=1}^{\dim W} I_{qi}\mathbf{c}_q\\ &= \sum_{q=1}^{\dim W} \delta_{qi}\mathbf{c}_q\\ &= \mathbf{c_i}.\end{aligned}$$

Daarom, $T \circ S = \mathrm{id}_W$. Op 'n soortgelyke manier kan ons bewys dat $S \circ T = \mathrm{id}_V$. Daarom is die lineêre afbeelding T 'n isomorfisme, met inverse $T^{-1} = S$. ■

Ons kan dit nog verder verfyn, naamlik, 'die inverse van die matriks van 'n lineêre afbeelding is gelyk aan die matriks van die inverse van die lineêre afbeelding'.

Gevolg 3.4.10 *Veronderstel $\mathcal{B}$ en $\mathcal{C}$ is basisse vir vektorruimtes V en W onderskeidelik. Veronderstel 'n lineêre afbeelding $T : V \to W$ het inverse $T^{-1} : W \to V$. Dan*

$$[T]^{-1}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = [T^{-1}]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}.$$

Bewys. Ons het

$$\begin{aligned}[T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[T^{-1}]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}} &= [T \circ T^{-1}]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{C}} && (\text{Stelling 3.4.8})\\ &= [\mathrm{id}_W]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{C}} && (T \circ T^{-1} = \mathrm{id}_W)\\ &= I\end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned}[T^{-1}]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}[T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} &= [T^{-1} \circ T]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}} && (\text{Stelling 3.4.8})\\ &= [\mathrm{id}_V]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}} && (T^{-1} \circ T = \mathrm{id}_V)\\ &= I.\end{aligned}$$

■

Die volgende Lemma sê dat die basisomskakelingsmatriks in Afdeling 2.5 gewoon die matriks van die identiteitsafbeelding met betrekking tot die betrokke basisse is.

Hulpstelling 3.4.11 *Laat $\mathcal{B}$ en $\mathcal{C}$ basisse vir 'n m-dimensionele vektorruimte V wees. Dan*

$$\mathsf{P}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = [\mathrm{id}]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}.$$

Bewys.

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} &= [[\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}} \cdots [\mathbf{b}_m]_{\mathcal{C}}] && (\text{Defn van } \mathsf{P}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}) \\
&= [[\mathrm{id}(\mathbf{b}_1)]_{\mathcal{C}} \cdots [\mathrm{id}(\mathbf{b}_m)]_{\mathcal{C}}] \\
&= [\mathrm{id}]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}. && (\text{Defn van } [\mathrm{id}]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}})
\end{aligned}$$

■

Die volgende Stelling sê vir ons hoe die matriks van 'n lineêre bewerking verander as ons die basis verander waarmee ons die matriks bereken.

Stelling 3.4.12 *Laat $\mathcal{B}$ en $\mathcal{C}$ basisse vir 'n vektorruimte V wees, en laat $T : V \to V$ 'n lineêre operator op V wees. Dan*

$$[T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{C}} = \mathsf{P}^{-1}[T]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}}P$$

waar $P \equiv P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$.
Bewys.

$$\begin{aligned}
\text{RK} &= \mathsf{P}^{-1}[T]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}}P \\
&= [\mathrm{id}]^{-1}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}[T]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}}[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}} && (\text{Hulpstelling 3.4.11}) \\
&= [\mathrm{id}]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}}[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}} && (\text{Gevolg 3.4.10}) \\
&= [\mathrm{id} \circ T \circ \mathrm{id}]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{C}} && (\text{Stelling 3.4.8}) \\
&= [T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{C}} \\
&= \text{LK}.
\end{aligned}$$

■

3.4.1 Oefeninge

1. Let

$$T : \mathrm{Trig}_1 \to \mathrm{Trig}_2$$

be the 'multiply with $\sin x$' linear map, $T(f)(x) = \sin x f(x)$. Compute $[T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ with respect to the standard basis $\mathcal{B}$ of Trig_1 and $\mathcal{C}$ of Trig_2.

Oplossing. Recall the standard double angle formulae:

$$\begin{aligned}
\sin(2x) &= 2\sin x \cos x \\
\cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x.
\end{aligned}$$

With these in mind, we compute:

$$\begin{aligned}
T(T_0) &= \sin x = T_2 \\
T(T_1) &= \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin(2x) = \frac{1}{2}T_4 \\
T(T_2) &= \sin x \sin x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x) = \frac{1}{2}T_0 - \frac{1}{2}T_3.
\end{aligned}$$

Thus

$$[T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Laat

$$S : \mathrm{Trig}_2 \to \mathrm{Trig}_2$$

die 'skuif met $\frac{\pi}{6}$'-afbeelding wees, $S(f)(x) = f(x - \frac{\pi}{6})$.

(a) Bereken $[S]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{C}}$ met betrekking tot die standaardbasis $\mathcal{C}$ van Trig_2.

(b) Bereken $[S]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$ waar $\mathcal{B}$ die volgende basis vir Trig_2 is:

$$\mathcal{B} = \{1, \cos x, \sin x, \cos^2 x, \sin^2 x\}$$

Oplossing. In this exercise, we shall use the standard angle addition formulae for trigonometric functions:

$$\begin{aligned}\cos(x-y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y\\ \sin(x-y) &= \sin x \cos y - \cos x \sin y.\end{aligned}$$

We compute

$$\begin{aligned}
S(T_0) &= 1 = T_0\\
S(T_1) &= \cos(x - \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}T_1 + \frac{1}{2}T_2\\
S(T_2) &= \sin(x - \frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = -\frac{1}{2}T_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}T_2\\
S(T_3) &= \cos(2x - \frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos^2 x + \sin x \cos x\\
&= -\frac{\sqrt{3}}{2}(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos x) + \frac{\sqrt{3}}{2}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x) + \frac{1}{2}\sin 2x\\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}T_3 + \frac{1}{2}\sin 2x.
\end{aligned}$$

Similarly,

$$S(T_4) = \sin(2x - \frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x = -\frac{1}{2}T_3 + \frac{\sqrt{3}}{2}T_4.$$

Hence

$$[S]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}.$$

3. Bevestig Stelling 3.4.3 vir die lineêre afbeelding $S : \mathrm{Mat}_{2,2} \to \mathrm{Mat}_{2,2}$ gegee deur $S(\mathsf{M}) = \mathsf{M}^T$, vir die vektor gegee deur

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

deur die volgende basisse van $\mathrm{Mat}_{2,2}$ te gebruik:

$$\mathcal{B} = \mathcal{C} = \{\mathsf{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}, \mathsf{M}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}, \mathsf{M}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}, \mathsf{M}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\}.$$

4. Verify Stelling 3.4.3 for the linear map

$$T : \mathrm{Poly}_3 \to \mathrm{Trig}_3$$

defined by

$$T(p)(x) := p(\cos x).$$

Use the standard bases $\mathcal{B}$ for Poly_3 and $\mathcal{C}$ for Trig_3.

5. Maak seker dat die lineêre afbeeldings T en S van Oefeninge 3.4.1.1 en 3.4.1.2 die vergelyking $[S \circ T]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = [S]_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}} [T]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$ bevredig.

6. Verifieer Stelling 3.4.8 vir die 'gradiënt' and 'divergensie' lineêre afbeeldings

$$\begin{aligned} G : \text{Poly}_3[x,y] &\to \text{Vect}_2(\mathbb{R}^2) \\ G(p) &:= \nabla p \\ \text{Div} : \text{Vect}_2(\mathbb{R}^2) &\to \text{Poly}_1[x,y] \\ \text{Div}((P,Q)) &:= \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \end{aligned}$$

Gebruik die standaardbasisse

$$\mathcal{B} = \{1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3\}$$

$$\mathcal{C} = \{(1,0), (x,0), (y,0), (x^2,0), (xy,0), (y^2,0), (0,1), (0,x), (0,y), (0,x^2), (0,xy), (0,y^2)\}$$

$$\mathcal{D} = \{1, x, y\}$$

vir $\text{Poly}_3[x,y]$, $\text{Vect}_2(\mathbb{R}^2)$, $\text{Poly}_1[x,y]$ onderskeidelik. Dit wil sê, bereken

$$[\text{Div}]_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{C}} [G]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$$

en

$$[\text{Div} \circ G]_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{C}}$$

en bevestig dat hulle is gelyk aan mekaar.

7. Verifieer Stelling 3.4.8 in die geval van die lineêre afbeeldings

$$\begin{aligned} S : \text{Mat}_{2,3} &\to \text{Col}_3 \\ \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{bmatrix} &\mapsto \begin{bmatrix} A_{11} + A_{21} \\ A_{12} + A_{22} \\ A_{13} + A_{23} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T : \text{Col}_3 &\to \text{Poly}_2[x,y] \\ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} &\mapsto a + b(x-y-1)^2 + c(x+y+1)^2 \end{aligned}$$

Gebruik die standaardbasis $\mathcal{B}$ vir $\text{Mat}_{2,3}$ (sien Voorbeeld 2.3.13), die basis

$$\mathcal{C} = \{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \}$$

vir Col_3, en die standaardbasis

$$\mathcal{C} = \{1, x, y, x^2, xy, y^2\}$$

vir $\text{Poly}_2[x,y]$. Dit wil sê, bereken

$$[T \circ S]_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{B}}$$

en

$$[T]_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{C}}[S]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$$

and verifieer dat hulle gelyk aan mekaar is.

3.5 Kern en Beeld 'n Lineêre Afbeelding

Definisie 3.5.1 Laat $T : V \to W$ 'n lineêre afbeelding tussen vektorruimtes V en W wees. Die **kern** van T, geskryf $\mathrm{Ker}(T)$, is die versameling van alle vektore $\mathbf{v} \in V$ wat deur T op $\mathbf{0}_W$ afgebeeld word. Dit is,

$$\mathrm{Ker}(T) := \{\mathbf{v} \in V : T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_W\}.$$

Die **beeld** van T, geskryf $\mathrm{Be}(T)$, is die versameling van alle vektore $\mathbf{w} \in W$ sodat $\mathbf{w} = T(\mathbf{v})$ vir ten minste een $\mathbf{v} \in V$. Dit is,

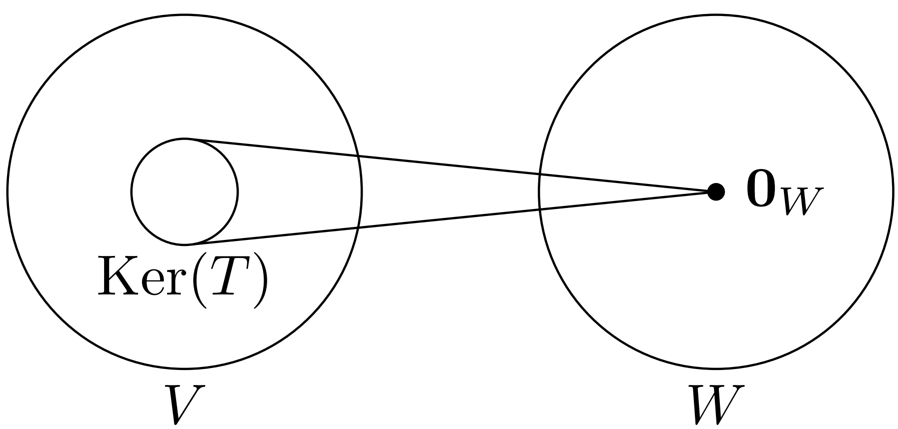
$$\mathrm{Be}(T) := \{\mathbf{w} \in W : \mathbf{w} = T(\mathbf{v}) \text{ vir 'n } \mathbf{v} \in V\}$$

$\Diamond$

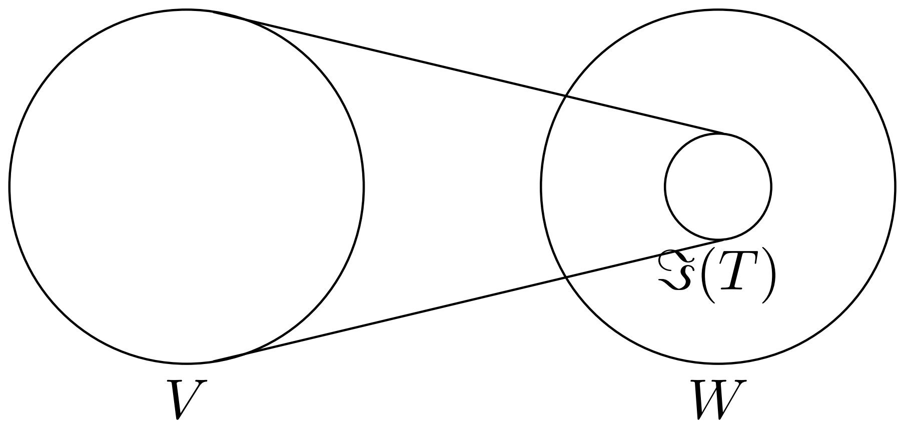
Sien Figuur 3.5.2 en Figuur 3.5.3 vir 'n skematiese voorstelling.

Soms, om absoluut duidelik te wees, sal ek 'n onderskrif op die nulvektor sit om aan te dui aan watter vektorruimte dit behoort, bv. $\mathbf{0}_W$ verwys na die nulvektor in W, terwyl $\mathbf{0}_V$ na die nulvektor in V verwys.

Nog 'n naam vir die kern van T is die *nulruimte* van T, en nog 'n naam vir die beeld van T is die *waardeversameling* van T.



Figuur 3.5.2 $\mathrm{Ker}(T)$



Figuur 3.5.3 Be(T)

Hulpstelling 3.5.4 *Laat $T : V \to W$ 'n lineêre afbeelding wees. Dan:*

1. Ker(T) *is 'n deelruimte van V*

2. Be(T) *is 'n deelruimte van W*

Bewys. (i) Ons moet seker maak dat die drie vereistes van 'n deelruimte bevredig word.

1. Ker(T) is geslote onder optelling.

   Veronderstel $\mathbf{v}$ en $\mathbf{v}'$ is in Ker(T). Met ander woorde, $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ en $T(\mathbf{v}') = \mathbf{0}$. Ons moet wys dat $\mathbf{v} + \mathbf{v}'$ in Ker(T) is, met ander woorde, dat$T(\mathbf{v} + \mathbf{v}') = \mathbf{0}$. Inderdaad,

$$T(\mathbf{v} + \mathbf{v}') = T(\mathbf{v}) + T(\mathbf{v}') = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

2. $\mathbf{0}_V \in$ Ker(T).

   Om te wys dat $\mathbf{0}_V$ in Ker(T) is, moet ons wys dat $T(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$. Inderdaad, dit is waar want T is 'n lineêre afbeelding, volgens Lemma 3.1.26.

3. Ker(T) is geslote onder skalaarvermenigvuldiging.

   Veronderstel $\mathbf{v} \in$ Ker(T) en $k \in \mathbb{R}$ is 'n skalaar. Ons moet wys dat $k\mathbf{v} \in$ Ker(T), dit is, ons moet wys dat $T(k\mathbf{v}) = \mathbf{0}$. Inderdaad,

$$T(k\mathbf{v}) = kT(\mathbf{v}) = k\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

(ii) Weereens moet ons die drie vereistes van 'n deelruimte nagaan.

1. Be(T) is geslote onder optelling.

   Veronderstel $\mathbf{w}$ en $\mathbf{w}'$ is in Be(T). Met ander woorde, daar bestaan vektore $\mathbf{v}$ en $\mathbf{v}'$ in V sodat $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$ en $T(\mathbf{v}') = \mathbf{w}'$. Ons moet wys dat $\mathbf{w} + \mathbf{w}'$ ook in Be(T) is, met ander woorde, dat daar 'n vekor $\mathbf{u}$ in V bestaan, sodat $T(\mathbf{u}) = \mathbf{w} + \mathbf{w}'$. Inderdaad, stel $\mathbf{u} := \mathbf{v} + \mathbf{v}'$. Dan,

$$T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v} + \mathbf{v}') = T(\mathbf{v}) + T(\mathbf{v}') = \mathbf{w} + \mathbf{w}'.$$

2. $\mathbf{0}_W \in$ Be(T).

   Om te wys dat $\mathbf{0}_W \in$ Be(T), moet ons wys dat daar 'n $\mathbf{v} \in V$ bestaan, sodat $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_W$. Inderdaad, kies $\mathbf{v} = \mathbf{0}_V$. Dan is $T(\mathbf{v}) = T(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$ volgens Lemma 3.1.26.

3. *c.*.

   Be(T) is geslote onder skalaarvermenigvuldiging.

   Veronderstel $\mathbf{w} \in \text{Be}(T)$ en k is 'n skalaar. Ons moet wys dat $k\mathbf{w} \in \text{Be}(T)$. Die feit dat $\mathbf{w}$ in Be(T) is, beteken dat daar 'n $\mathbf{v}$ in V bestaan, sodat $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$. Ons moet wys dat daar 'n $\mathbf{u} \in V$ bestaan, sodat $T(\mathbf{u}) = k\mathbf{w}$. Inderdaad, stel $\mathbf{u} := k\mathbf{v}$. Dan

$$T(\mathbf{u}) = T(k\mathbf{v}) = kT(\mathbf{v}) = k\mathbf{w}.$$

■

Nou dat ons weet dat die kern en beeld van 'n lineêre afbeelding deelruimtes is en dus vektorruimtes in eie reg, kan ons die volgende definisie gee.

Definisie 3.5.5 Laat $T : V \to W$ 'n lineêre afbeelding vanaf 'n eindig-dimensionele vektorruimte V na 'n vektorruimte W wees. Die **nulheidsgraad** van T is die dimensie van Ker(T), en die **rang** van T is die dimensie van Be(T):

$$\begin{aligned} \text{Nhg}(T) &:= \text{Dim}(\text{Ker}(T)) \\ \text{Rang}(T) &= \text{Dim}(\text{Be}(T)) \end{aligned}$$

◊

> Die 'dimensie van Ker(T)' maak sin, want Ker(T) is 'n deelruimte van 'n eindig-dimensionele vektorruimte V, en daarom is dit eindig-dimensioneel volgens Proposisie 2.3.25. Ons weet nog nie dat Be(T) eindig-dimensioneel is nie, maar dit sal volg uit die Rang-Nulheidgraad-stelling (Stelling 3.5.12).

Voorbeeld 3.5.6 Laat $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ 'n konstante nie-nul vektor wees. Oorweeg die 'kruisproduk met $\mathbf{a}$'-lineêre afbeelding van Voorbeeld 3.1.13,

$$\begin{aligned} C : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{v} &\mapsto \mathbf{a} \times \mathbf{v} \end{aligned}$$

Bepaal die kern, beeld en nulheidsgraad van C.

Oplossing. Die kern van C is die deelruimte van $\mathbb{R}^3$ wat uit al die vektore $\mathbf{v} \in V$ bestaan, sodat $\mathbf{a} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Uit die meetkundige formule van die kruisproduk,

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{a}||\mathbf{v}| \sin\theta$$

waar θ die hoek tussen $\mathbf{a}$ en $\mathbf{v}$ is, sien ons dat

$$\mathbf{a} \times \mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ of } \theta = 0 \text{ of } \theta = \pi.$$

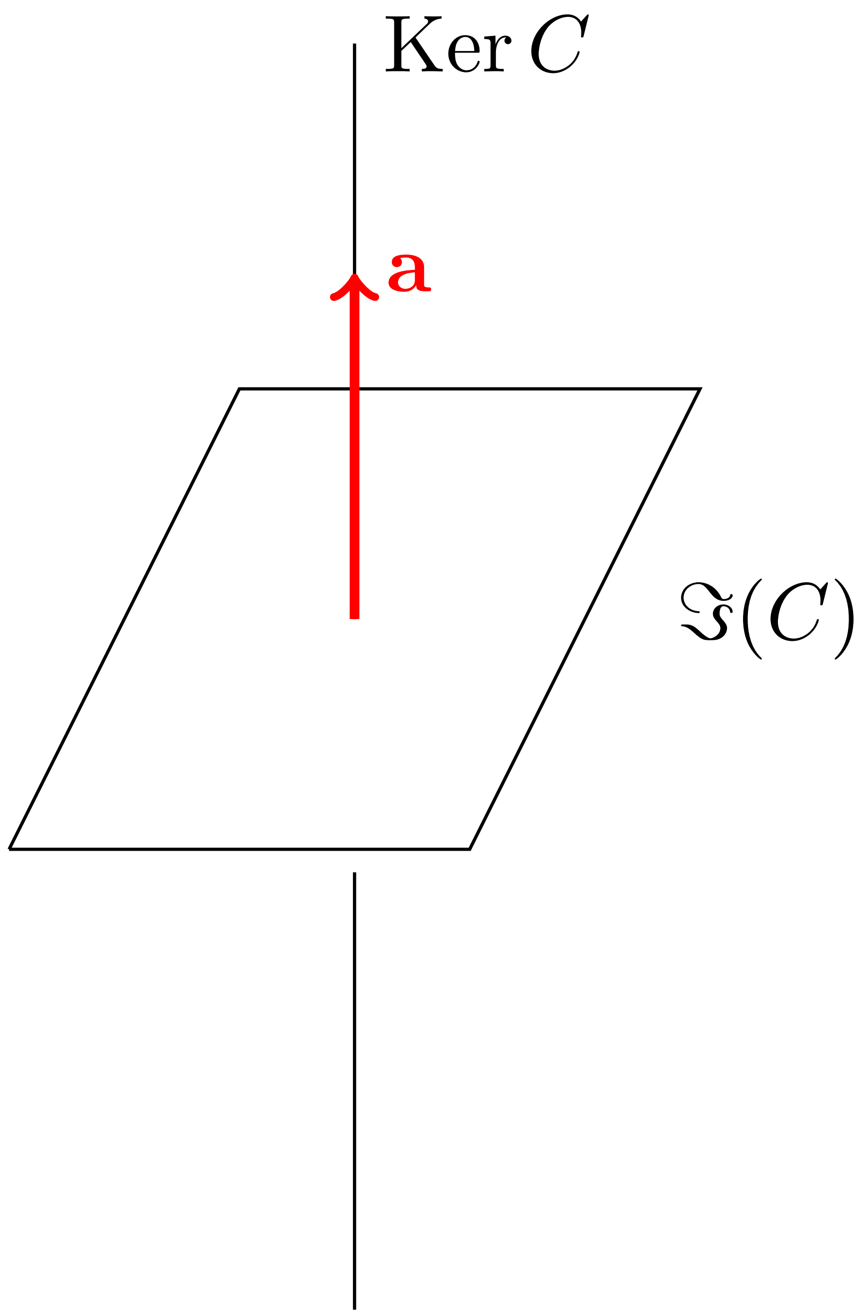
Met ander woorde, $\mathbf{v}$ moet 'n skalaarveelvoud van $\mathbf{a}$ wees. So,

$$\text{Ker}(C) = \{k\mathbf{a}, k \in \mathbb{R}\}.$$

Ek beweer dat die *beeld* van C die deelruimte van *alle* vektore loodreg op $\mathbf{a}$ is, i.e.

$$\text{Be}(C) := \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{u} \cdot \mathbf{a} = 0\}. \tag{3.5.1}$$

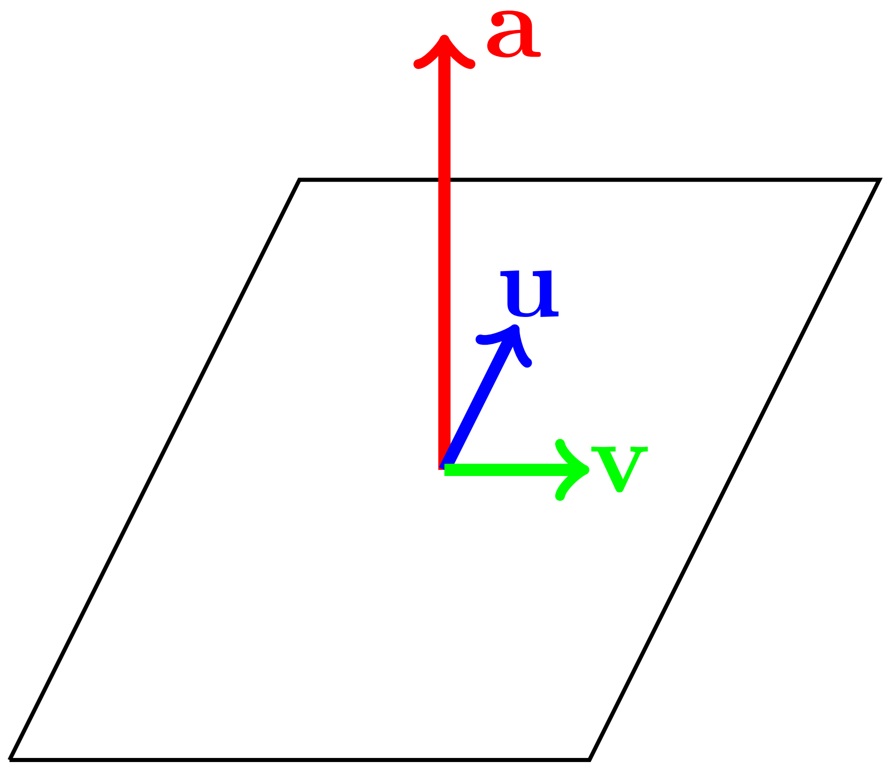
As jy my glo, dan is die prentjie soos volg:



Figuur 3.5.7

Kom ons bewys vergelyking (3.5.1). Per definisie is die beeld van C die deelruimte van $\mathbb{R}^3$ wat bestaan uit alle vektore $\mathbf{w}$ van die vorm $\mathbf{w} = \mathbf{a} \times \mathbf{v}$ vir een of ander $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Dit impliseer dat $\mathbf{w}$ loodreg op $\mathbf{a}$ is. Dit was die 'maklike' deel. Die 'moeliker' deel is om die omgekeerde rigting te bewys. Dit is, ons moet wys dat as $\mathbf{u}$ loodreg op $\mathbf{a}$ is, dan is $\mathbf{u}$ in die beeld van C, i.e. daar bestaan 'n vektor $\mathbf{v}$ sodat $C(\mathbf{v}) = \mathbf{u}$.

Ons kan inderdaad $\mathbf{v}$ kies om die vektor te wees wat verkry word deur $\mathbf{u}$ met 90 grade kloksgewys te roteer in die vlak I, en dit soos nodig te skaleer:



Figuur 3.5.8

In terme van 'n formule het ons

$$\mathbf{v} = \frac{|\mathbf{u}|}{|\mathbf{a}|}\mathbf{u} \times \mathbf{a}.$$

Let daarop dat dit nie die *enigste* vektor $\mathbf{v}$ is waarvoor $C(\mathbf{v}) = \mathbf{u}$ nie. Inderdaad, as ons by $\mathbf{v}$ enige vektor op die lyn deur$\mathbf{a}$ tel, sal die resulterende vektor

$$\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v} + k\mathbf{a}$$

ook $C(\tilde{\mathbf{v}}) = \mathbf{u}$ bevredig, want

$$C(\tilde{\mathbf{v}}) = C(\mathbf{v} + k\mathbf{a}) = C(\mathbf{v}) + C(k\mathbf{a}) = \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}.$$

□

Voorbeeld 3.5.9 Bepaal die kern, beeld en nulheidsgraad van die lineêre afbeelding

$$\begin{aligned} I : \mathrm{Trig}_2 &\to \mathbb{R} \\ T &\mapsto \int_0^\pi T(x)dx. \end{aligned}$$

Oplossing. Die kern van I bestaan uit alle tweede graadse trigonometriese polinome

$$T(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x$$

sodat

$$\int_0^\pi (a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x)\, dx = 0.$$

Deur die integrale te bereken, word die vergelyking

$$\pi a_0 + 2b_1 = 0$$

met geen beperkings op die ander konstantes a_1, a_2, b_2 nie. Met ander woorde,

$$\text{Ker}(I) = \Big\{\text{alle trigonometriese polinome van die vorm}(a_0(1 - \frac{\pi}{2}\sin x) + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x),\ \text{waa}$$

Daarom is $\text{Nhg}(I) = \text{Dim}(\text{Ker}(I)) = 4$.

Die beeld van I bestaan uit alle reële getalle $p \in \mathbb{R}$, sodat daar 'n $T \in \text{Trig}_2$ bestaan waarvoor $I(T) = p$. Ek beweer nou dat

$$\text{Be}(I) = \mathbb{R}.$$

Inderdaad, gegee $p \in \mathbb{R}$, dan kies ons $T(x) = \frac{p}{2}\sin x$, want

$$I(T) = \frac{p}{2}\int_0^{\pi} \sin x \, dx = p.$$

Daarom is $\text{Be}(I) = \mathbb{R}$, en $\text{Rang}(I) = 1$.

Let daarop dat die keuse van $T(x) = \frac{p}{2}\sin(x)$ wat $I(T) = p$ bevredig nie uniek is nie. Ons kan sê $\tilde{T} = T + S$ waar $S \in \text{Ker}(I)$ en ons sal steeds hê dat $I(\tilde{T}) = p$:

$$I(\tilde{T}) = I(T + S) = I(T) + I(S) = p + 0 = p.$$

$\square$

Voorbeeld 3.5.10 Oorweeg die funksie

$$\begin{aligned} T : \text{Poly}_2 &\to \mathbb{R}^2 \\ p &\mapsto (p(1), p'(1)). \end{aligned}$$

Wys dat T 'n lineêre afbeelding is, en bepaal T se kern, beeld, rang en nulheidsgraad.

Oplossing. Ons wys eers dat T 'n lineêre afbeelding is. Laat $p, q \in \text{Poly}_2$. Dan

$$\begin{aligned} T(p+q) &= ((p+q)(1),\, (p+q)'(1)) && \text{(Defn van } T\text{)} \\ &= (p(1)+q(1),\, (p+q)'(1)) && \text{(Defn van die funksie } p+q\text{)} \\ &= (p(1)+q(1),\, (p'+q')(1)) && ((p+q)' = p'+q') \\ &= (p(1)+q(1),\, p'(1)+q'(1)) && \text{(Defn van } p'+q'\text{)} \\ &= (p(1),\, p'(1)) + (q(1),\, q'(1)) && \text{(Defn van optelling in } \mathbb{R}^2\text{)} \\ &= T(p) + T(q). \end{aligned}$$

Die bewys van $T(kp) = kT(p)$ is soortgelyk.

Die kern van T is die versameling van alle polinome

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

sodat $T(p) = (0, 0)$. Ons kan dit herskryf om die vergelyking

$$(a_0 + a_1 + a_2,\, a_1 + 2a_2) = (0, 0)$$

te kry.

Dit lei dan verder na die twee vergelykings:

$$a_0 + a_1 + a_2 = 0$$

$$a_1 + 2a_2 = 0$$

waarvan die vergelyking $a_2 = t$, $a_1 = -2t$, $a_0 = -t$ is, waar $t \in \mathbb{R}$. Daarom

$$\mathrm{Ker}(T) = \left\{\text{polinome van die vorm } -t - 2tx + tx^2 \text{ waar } t \in \mathbb{R}\right\}.$$

Daarom is $\mathrm{Nhg}(T) = 1$.

Die beeld van T is die versameling van alle $(v, w) \in \mathbb{R}^2$ sodat daar 'n polinoom $p = a_0 + a_1x + a_2x^2$ in Poly_2 bestaan waarvoor $T(p) = (v, w)$. So, (v, w) is in die beeld van T as en slegs as ons 'n polinoom $p = a_0 + a_1x + a_2x^2$ kan vind sodat

$$(a_0 + a_1 + a_2, a_1 + 2a_2) = (v, w).$$

Met ander woorde, (v, w) is in die beeld van T as en slegs as die vergelykings

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 + a_2 &= v \\ a_1 + 2a_2 &= w \end{aligned}$$

'n oplossing het vir een of ander a_0, a_1, a_2. Maar hierdie vergelykings het *altyd* 'n oplossing, vir *alle* $(v, w) \in \mathbb{R}^2$. Byvoorbeeld, een oplossing is

$$a_2 = 0,\ a_1 = w,\ a_0 = v - w$$

wat ooreenstem met die polinoom

$$p(x) = v - w + wx. \tag{3.5.2}$$

Let daarop dat $T(p) = (v, w)$. Daarom,

$$\mathrm{Be}(T) = \{\text{alle } (v, w) \in \mathbb{R}^2\} = \mathbb{R}^2.$$

Daarom is $\mathrm{Rang}(T) = \mathrm{Dim}(\mathrm{Be}(T)) = 2$.

Let daarop dat die keuse van die polinoom $p(x) = v - w + wx$ van (3.5.2) wat $T(p) = (v, w)$ bevredig nie die *enigste* moontlike keuse is nie. Inderdaad, enige polinoom van die vorm $\tilde{p} = p + q$ waar $q \in \mathrm{Ker}(T)$ sal $T(\tilde{p}) = (v, w)$ ook bevredig, want

$$T(\tilde{p}) = T(p + q) = T(p) + T(q) = (v, w) + (0, 0) = (v, w).$$

□

Voorbeeld 3.5.11 Hierdie voorbeeld is 'n wysiging van Voorbeeld 3.5.10. Bereken die kern, beeld, nulheidsgraad en rang van die volgende afbeleding:

$$\begin{aligned} T : \mathrm{Poly}_2 &\to \mathrm{Col}_3 \\ p :&\mapsto \begin{bmatrix} p(1) \\ p'(1) \\ p(2) - \frac{1}{2}p''(3) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Oplossing. Ons begin deur $\mathrm{Ker}(T)$ te bereken. Ons het

$$p \in \mathrm{Ker}(T) \quad \Leftrightarrow \quad T(p) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.5.3}$$

Skryf

$$p = a + bx + cx^2$$

Dan word vergelying (3.5.3):

$$\begin{bmatrix} a+b+c \\ b+2c \\ a+2b+3c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Hierdie vergelyking tussen kolomvektore is bevredig as en slegs as die volgende stelsel van gelyktydige line\^{e}re vergelykings is bevredig:

$$\begin{aligned} a+b+c &= 0 \\ b+2c &= 0 \\ a+2b+3c &= 0 \end{aligned}$$

Ons neem waar dat die derde vergelyking gelyk is aan die som van die eerste en tweede vergelykings. So wanneer ons hierdie vergelykings bewerk tot hul rytrapvorm, kry ons:

$$\begin{aligned} a+b+c &= 0 \\ b+2c &= 0 \end{aligned}$$

Die algemene oplossing is:

$$c = t,\ b = -2t,\ a = t, \quad t \in \mathbb{R}$$

Dus,

$$\mathrm{Ker}(T) = \{t - 2tx + tx^2 : t \in \mathbb{R}\}$$

'n Basis vir Ker(T) is gekry deur die waarde van die parameter t te kies as $t = 1$:

$$\text{Basis for } \mathrm{Ker}(T) = \{1 - 2x + x^2\}$$

So

$$\mathrm{Nhg}(T) = \mathrm{Dim}(\mathrm{Ker}(T)) = 1.$$

Kom ons bereken nou Be(T). Ons het

$$\mathsf{w} \equiv \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} \in \mathrm{Be}(T)$$

$$\Leftrightarrow \text{there exists } p \in \mathrm{Poly}_2 \text{ such that } T(p) = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$$

Skryf $p = a + bx + cx^2$. Dan is

$$\begin{aligned} T(p) &= \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a+b+c \\ b+2c \\ a+2b+3c \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Met ander woorde, $\mathsf{w} \in \mathrm{Be}(T)$ as en slegs as daar bestaan 'n *sekere* oplossing van die volgende vergelykings vir a, b, c:

$$\begin{aligned} a+b+c &= w_1 \\ b+2c &= w_2 \end{aligned}$$

$$a + 2b + 3c = w_3$$

Kom ons los hierdie vergelykings op deur ry reduksie te gebruik:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & w_1 \\ 0 & 1 & 2 & w_2 \\ 1 & 2 & 3 & w_3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3-R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & w_1 \\ 0 & 1 & 2 & w_2 \\ 0 & 1 & 2 & w_3 - w_1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3-R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & w_1 \\ 0 & 1 & 2 & w_2 \\ 0 & 0 & 0 & w_3 - w_1 - w_2 \end{array}\right]$$

So: daar bestaan *geen* oplossing vir a, b, c tensy $w_3 - w_1 - w_2 = 0$, want andersins sal ons 'n vergelyking van die vorm 'nul is gelyk aan 'n nie nul waarde' h\^{e}. Bovendien, *as* $w_3 - w_1 - w_2$, dan *kan* di\'{e} vergelykings opgelos word vir a, b, c, want hulle is in toegevoegde ry-trap vorm met geen ongeldige rye. Dus,

$$\text{Be}(T) = \left\{ \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} : -w_1 - w_2 + w_3 = 0 \right\}.$$

So, 'n basis vir $\text{Be}(T)$ is gegee deur:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

and hence

$$\text{Rang}(T) = 2.$$

□

Stelling 3.5.12 Rang-Nulheidsgraadstelling. *Laat $T : V \to W$ 'n lineêre afbeelding vanaf 'n eindig dimensionele vektorruimte V na 'n vektorruimte W wees. Dan*

$$\text{Nhg}(T) + \text{Rang}(T) = \text{Dim}(V).$$

Bewys. Laat $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$ 'n basis vir $\text{Ker}(T)$ wees. Omdat $\mathcal{B}$ 'n lys onafhanklike vektore in V is, kan ons dit uitbrei na 'n basis $\mathcal{C} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k, \mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_p\}$ vir V, volgens Gevolgtrekking 2.3.31. Ek beweer dat

$$\mathcal{D} := \{T(\mathbf{f}_1), \ldots, T(\mathbf{f}_p)\}$$

'n basis vir $\text{Be}(T)$ is. As ek dit kan bewys, sal ons klaar wees, want dan het ons

$$\begin{aligned} \text{Nhg}(T) + \text{Rang}(T) &= k + p \\ &= \text{Dim}(V). \end{aligned}$$

Kom ons bewys dat $\mathcal{D}$ 'n basis vir $\text{Be}(T)$ is.

$\mathcal{D}$ is lineêr onafhanklik. Veronderstel

$$b_1 T(\mathbf{f}_1) + \cdots + b_p T(\mathbf{f}_p) = \mathbf{0}_W.$$

Ons herken die linkerkant as $T(b_1\mathbf{f}_1 + \cdots + b_p\mathbf{f}_p)$. Daarom

$$b_1\mathbf{f}_1 + \cdots + b_p\mathbf{f}_p \in \text{Ker}(T)$$

wat beteken ons kan dit as 'n lineêre kombinasie van vektore in $\mathcal{B}$ skryf,

$$b_1\mathbf{f}_1 + \cdots + b_p\mathbf{f}_p = a_1\mathbf{e}_1 + \cdots + a_k\mathbf{e}_k.$$

Deur al die terme aan een kant te versamel, word dit die vergelyking

$$-a_1\mathbf{e}_1 - \cdots - a_k\mathbf{e}_k + b_1\mathbf{f}_1 + \cdots + b_p\mathbf{f}_p = \mathbf{0}_V.$$

Ons herken die linkerkant as 'n lineêre kombinasie van die $\mathcal{C}$-basisvektore. Aangesien hulle lineêr onafhanklik is, moet al die skalare nul wees. Onder andere, $b_1 = \cdots = b_p = 0$, wat is wat ons wou bewys.

$\mathcal{D}$ span W. Veronderstel $\mathbf{w} \in \mathrm{Be}(T)$. Ons moet wys dat $\mathbf{w}$ 'n lineêre kombinasie van vektore in $\mathcal{D}$ is. Aangesien $\mathbf{w}$ in die beeld van T is, bestaan daar 'n $\mathbf{v} \in V$ sodat $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$. Omdat $\mathcal{C}$ 'n basis vir V is, kan ons

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{e}_1 + \cdots + a_k\mathbf{e}_k + b_1\mathbf{f}_1 + \cdots + b_p\mathbf{f}_p$$

skryf vir skalare $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_p$. Dan

$$\begin{aligned}
\mathbf{w} &= T(\mathbf{v}) \\
&= T(a_1\mathbf{e}_1 + \cdots + a_k\mathbf{e}_k + b_1\mathbf{f}_1 + \cdots + b_p\mathbf{f}_p) \\
&= a_1T(\mathbf{e}_1) + \cdots + a_kT(\mathbf{e}_k) + b_1T(\mathbf{f}_1) + \cdots + b_pT(\mathbf{f}_p) \\
&= b_1T(\mathbf{f}_1) + \cdots + b_pT(\mathbf{f}_p) && (\mathbf{e}_i \in \mathrm{Ker}(T))
\end{aligned}$$

sodat $\mathbf{w}$ wel 'n lineêre kombinasie van die vektore in $\mathcal{D}$ is. ■

Voorbeeld 3.5.13 Die identiteitsafbeelding op 'n vektorruimte. Beskou die identiteitsafbeelding op 'n eindig-dimensionele vektorruimte V:

$$\mathrm{id}_V : V \to V$$

Ons het

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{id}_V) = \{\mathbf{0}\}$$

want die enige vektor wat na die nulvektore toe gestuur is deur die identiteitsafbeelding is die nulvektor self. Dus,

$$\mathrm{Nhg}(\mathrm{id}_V) = 0.$$

Soortgelyk,

$$\mathrm{Be}(\mathrm{id}_V) = V$$

want *elke* vektor $\mathbf{v} \in V$ is in die beeld van id_V. Inderdaad, ons het $\mathrm{id}_V(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$, wat bewys dat $\mathbf{v} \in \mathrm{Be}(\mathrm{id}_V)$. Dus,

$$\mathrm{Rang}(\mathrm{id}_V) = \mathrm{Dim}(V).$$

So inderdaad die Rang-Nulheidsgraad Stelling (Stelling 3.5.12) is waar in hierdie geval, want

$$\underbrace{\mathrm{Rang}(\mathrm{id}_V)}_{=\mathrm{Dim}(V)} + \underbrace{\mathrm{Nhg}(\mathrm{id}_V)}_{=0} = \mathrm{Dim}(V).$$

□

Voorbeeld 3.5.14 Die nulafbeelding. Beskou die nulafbeelding Z op 'n eindig-dimensionele vektorruimte V:

$$\begin{aligned} Z : V &\to V \\ \mathbf{v} &\mapsto \mathbf{0} \end{aligned}$$

Ons het
$$\mathrm{Ker}(Z) = V$$
want *elke* vektor $\mathbf{v} \in V$ is na die nulvektor toe gestuur deur Z. So,
$$\mathrm{Nhg}(Z) = \mathrm{Dim}(V).$$
Soortgelyk, het ons
$$\mathrm{Be}(Z) = \{\mathbf{0}\}$$
want die *enigste* vektor in die beeld van Z is die nulvektor $\mathbf{0}$. Want, vir alle vektore $\mathbf{v} \in V$, $Z(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$. So,
$$\mathrm{Rang}(Z) = 0.$$
Dus is die Rang-Nulheidsgraad Stelling (Stelling 3.5.12) waar in hierdie geval, want
$$\underbrace{\mathrm{Rang}(Z)}_{=0} + \underbrace{\mathrm{Ker}(Z)}_{=\mathrm{Dim}(V)} = \mathrm{Dim}(V).$$
□

Voorbeeld 3.5.15 Verifieering dat Voorbeeld 3.5.11 die Rang-Nulheidsgraad Stelling bevredig. Kom ons verifieer dat die line\^{e}re afbeelding T uit Voorbeeld 3.5.11 die Stelling 3.5.12 bevredig. In Voorbeeld 3.5.11, het ons bereken dat
$$\mathrm{Nhg}(T) = 1, \quad \mathrm{Rang}(T) = 2.$$
Dus,
$$\underbrace{\mathrm{Rang}(T)}_{=2} + \underbrace{\mathrm{Nhg}(T)}_{=1} = \underbrace{\mathrm{Dim}(\mathrm{Poly}_2)}_{=3}$$
so dit bevredig wel Stelling 3.5.12. □

3.5.1 Oefeninge

1. Verifieer die Rang-Nulheidgraad-stelling vir die volgende lineêre afbeeldings. D.w.s., vir elke afbeelding T, (a) bepaal $\mathrm{Ker}(T)$ en $\mathrm{Be}(T)$ eksplisiet, (b) bepaal die dimensie van $\mathrm{Ker}(T)$ en $\mathrm{Be}(T)$, (c) maak seker dat die getalle die Rang-Nulheidsgraad-stelling bevredig.

(a) Die identiteitsafbeelding $\mathrm{id}_V : V \to V$ op 'n eindig-dimensionele vektorruimte V.

(b) Die nul-afbeelding
$$\begin{aligned} Z : V &\to V \\ \mathbf{v} &\mapsto \mathbf{0} \end{aligned}$$
op 'n eindig-dimensionele vektorruimte V.

(c) Die afbeelding
$$\begin{aligned} T : \mathrm{Poly}_3 &\to \mathrm{Col}_3 \\ p &\mapsto \begin{bmatrix} p(1) \\ p(2) \\ p(3) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(d) Die afbeelding
$$S : \mathrm{Trig}_2 \to \mathrm{Col}_2$$

$$f \mapsto \begin{bmatrix} \int_0^\pi f(x)\cos x dx \\ \int_0^\pi f(x)\sin x dx \end{bmatrix}$$

(e) Die 'krul' afbeelding

$$\begin{aligned} C : \mathrm{Vect}_2(\mathbb{R}^2) &\to \mathrm{Poly}_1[x,y] \\ (P,Q) &\mapsto \frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial x} \end{aligned}$$

Bonus vraag: Watter soort vektorvelde is in die kern van C?

(f) (Poole 6.5.12) Die afbeelding

$$\begin{aligned} T : \mathrm{Mat}_{2,2} &\to \mathrm{Mat}_{2,2} \\ \mathsf{A} &\mapsto \mathsf{AB} - \mathsf{BA} \end{aligned}$$

waar

$$\mathsf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Oplossing.

(a) id_V sends only a single vector to 0, namely the vector $\mathbf{0}_v$. Thus $\mathrm{Ker}(\mathrm{id}_v) = \{\mathbf{0}_v\}$ and hence $\mathrm{Nullity}(\mathrm{id}_v) = 0$. $\Im(\mathrm{id}_V) = V$ and so $\mathrm{Rank}(\mathrm{id}_V) = \mathrm{Dim}(V)$. The equation

$$\mathrm{Dim}\, V + 0 = \mathrm{Dim}\, V.$$

verifies the Rank-Nullity Theorem for this example.

(b) The zero map spends every element in V to $\mathbf{0}$. Hence $\mathrm{Ker}(Z) = V$ and so $\mathrm{Nullity}(Z) = \mathrm{Dim}\, V$. For the same reason $\Im(Z) = \{0\}$ and thus $\mathrm{Rank}(Z) = 0$. The equation

$$\mathrm{Dim}\, V + 0 = \mathrm{Dim}\, V.$$

verifies the Rank-Nullity Theorem for this example.

(c) $\mathbf{p}(x) \in \mathrm{Ker}(T)$ if and only if

$$p(1) = p(2) = p(3) = 0.$$

But any degree 3 polynomial with $1, 2$ and 3 as roots must be of the form

$$a(x-1)(x-2)(x-3)$$

where $a \in \mathbb{R}$. Conversely, any element of this form is in $\mathrm{Ker}\, T$. Hence

$$\mathrm{Ker}(T) = \{a(x-1)(x-2)(x-3) \in \mathrm{Poly}_3 \,:\, a \in \mathbb{R}\}$$

and thus $\mathrm{Nullity}(T) = 1$.

I claim that $\Im(T) = \mathrm{Col}_3$. That is, for any

$$\begin{bmatrix} s \\ t \\ u \end{bmatrix} \in \mathrm{Col}_3,$$

we can find a polynomial $\mathbf{p}$, of degree 3 or less, such that $p(1) = s, p(2) = t, p(3) = u$. To show this, you could set up the system of linear equations

$$\begin{aligned} a + b + c + d &= s \\ 8a + 4b + 2c + d &= t \\ 27b + 9b + 3c + d &= u \end{aligned}$$

and solve for the coefficients of $\mathbf{p}$. What is perhaps more elegant is to use the theory of Lagrange interpolation polynomials [1]. Given any 3 distinct points in $\mathbb{R}^2$, we can always find a degree two polynomial going through these 3 points. In our case, let the points be $(1, s), (2, t), (3, u)$. The degree two Lagrange polynomial going through these points is

$$\mathbf{p}(x) = u\left[\frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)}\right] + s\left[\frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)}\right] + t\left[\frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}\right].$$

It is easy to check that $p(1) = s, p(2) = t, p(3) = u$. Hence $\Im(T) = \mathrm{Col}_3$ and so $\mathrm{Rank}(T) = 3$.

$$\mathrm{Rank}(T) + \mathrm{Nullity}(T) = 1 + 3 = 4 = \mathrm{Dim}(\mathrm{Poly}_3).$$

(d) It will be useful to have the following integrals at hand:

$$\begin{aligned} &\int_0^\pi \cos(x) = 0 \\ &\int_0^\pi \sin(x) = 0 \\ &\int_0^\pi \cos^2(x) = \pi/2 \\ &\int_0^\pi \sin^2(x) = \pi/2 \\ &\int_0^\pi \sin(x)\cos(x) = 0 \\ &\int_0^\pi \cos(2x)\cos(x) = 0 \\ &\int_0^\pi \sin(2x)\cos(x) = \frac{4}{3} \\ &\int_0^\pi \cos(2x)\sin(x) = -\frac{2}{3} \\ &\int_0^\pi \sin(2x)\sin(x) = 0 \end{aligned}$$

Now suppose

$$\mathbf{f}(x) = a + b\cos(x) + c\sin(x) + d\cos(2x) + e\sin(2x) \in \mathrm{Ker}(S).$$

Then

$$\int_0^\pi f(x)\cos(x)\,dx = b\frac{\pi}{2} + e\frac{4}{3} = 0 \tag{3.5.4}$$

$$\int_0^\pi f(x)\sin(x)\,dx = c\frac{\pi}{2} - d\frac{2}{3} = 0. \tag{3.5.5}$$

Conversely, any f satisfying the linear equations above is certainly in $\mathrm{Ker}(S)$. Hence

$$\mathrm{Ker}(S) = \{a+b\cos(x)+c\sin(x)+d\cos(2x)+e\sin(2x)\ :\ b\frac{\pi}{2}+e\frac{4}{3} = 0 \text{ and } c\frac{\pi}{2}-d\frac{2}{3} = 0\}$$

We can freely choose a since the constant will not affect the integrals. We are free to choose b, but then e is fully determined by (1) above. Similarly, we can freely choose c but then d is determined by (2). Hence

$$\mathrm{Nullity}(S) = 3.$$

We claim that $\Im(S) = \mathrm{Col}_2$. To see this, suppose

$$\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} \in \mathrm{Col}_2\,.$$

Now consider

$$f(x) = \frac{2s}{\pi}\cos(x) + \frac{2t}{\pi}\sin(x).$$

Using the table of integrals above, we see that

$$S(T) = \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}.$$

Hence

$$\mathrm{Rank}(T) = 2.$$

Since $\mathrm{Dim}(\mathrm{Trig}_2) = 5$, the Rank-Nullity theorem is verified for S.

2. Gee 'n voorbeeld van 'n lineêre afbeelding $T : \mathrm{Col}_4 \to \mathrm{Col}_4$ sodat $\mathrm{Rang}(T) = \mathrm{Nhg}(T)$.

Oplossing. Define T by

$$T : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\mathrm{Ker}(T) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \\ w \end{bmatrix} \in \mathrm{Col}_4 \right\}.$$

and

$$\Im(T) = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{Col}_4 \right\}.$$

Both $\mathrm{Ker}(T)$ and $\Im(T)$ are isomorphic to Col_2 and hence

$$\mathrm{Rank}(T) = \mathrm{Nullity}(2) = 2.$$

3. Vir elk van die volgende bewerings, sê of dit *waar* of *onwaar* is. As dit

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Lagrange_polynomial

waar is, bewys dit. Indien nie, bewys dit.

(a) Daar bestaan 'n lineêre afbeelding $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ sodat

$$\mathrm{Ker}(T) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : x_1 = 3x_2 \text{ en } x_3 = x_4 = x_5\}.$$

(b) Daar bestaan 'n lineêre afbeelding $F : \mathrm{Trig}_3 \to \mathrm{Trig}_3$ sodat $\mathrm{Rang}(T) = \mathrm{Nhg}(T)$.

Oplossing.

(a) The statement is false. To see this, notice that if such a map were to exist then its kernel would be 2-dimensional since any choice of x_1 and x_3 uniquely determines an element in $\mathrm{Ker}(T)$. But then by the Rank-Nullity theorem, $\mathrm{Rang}(T) = 3$ since $\mathbb{R}^5$ is 5 dimensional. But $\mathrm{Be}(T)$ is a subspace of $\mathbb{R}^2$ - which is absurd, since $\mathbb{R}^2$ itself is 2-dimensional.

(b) The statement is false. Suppose such a map were to exist. Recall that $\mathrm{Dim}(\mathrm{Trig}_3) = 7$. Then by the Rank-Nullity theorem,

$$7 = \mathrm{Rang}(T) + \mathrm{Nhg}(T) = 2\,\mathrm{Rang}(T).$$

But 7 is odd, so we have a contradiction! Thus no such map can exist.

4. Laat $f(x, y, z)$ 'n funksie op $\mathbb{R}^3$ wees en laat $\mathbf{p} = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ 'n konstante punt wees. Vir elke vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$, kan ons die afgeleide van f in die rigting van $\mathbf{u}$ by $\mathbf{p}$ as 'n afbeelding

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{p}} : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R} \\ \mathbf{u} &\mapsto (\nabla f)(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{u} \end{aligned}$$

sien.

(a) Wys dat $D_{\mathbf{p}}$ soos hierbo gedefinieer 'n lineêre afbeelding is.

(b) Beskou die voorbeeld van $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Bepaal $\mathrm{Ker}(D_{\mathbf{p}})$ vir alle punte $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$.

Oplossing.

(a) $D_{\mathbf{p}}$ being a linear maps follows from the usual properties of the dot product:

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{p}}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{p}) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{p}) \\ \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{p}) \end{bmatrix} \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{p}) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{p}) \\ \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{p}) \end{bmatrix} \cdot \mathbf{u} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{p}) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{p}) \\ \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{p}) \end{bmatrix} \cdot \mathbf{v} \\ &= D_{\mathbf{p}}(\mathbf{u}) + D_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}). \end{aligned}$$

Similarly,

$$D_{\mathbf{p}}(k\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{p}) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{p}) \\ \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{p}) \end{bmatrix} \cdot \mathbf{k}u$$

$$= \begin{bmatrix} k\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{p}) \\ k\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{p}) \\ k\frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{p}) \end{bmatrix} \cdot \mathbf{u}$$

$$= k \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{p}) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{p}) \\ \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{p}) \end{bmatrix} \cdot \mathbf{u}$$

$$= kD_{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{u}.$$

And so $D_{\mathbf{p}}$ is linear.

(b) $\mathbf{u} = (x_1, y_1, z_1) \in \mathrm{Ker}(D_{\mathbf{p}})$ if and only if

$$D_{\mathbf{p}}(\mathbf{u}) = 0 \tag{3.5.6}$$

$$\iff \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{p}), \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{p}), \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{p})\right) \cdot (u_0, u_1, u_2) = 0 \tag{3.5.7}$$

$$\iff 2x_0x_1 + 2y_0y_1 + 2z_0z_1 = 0. \tag{3.5.8}$$

Geometrically, $\mathrm{Ker}(D_{\mathbf{p}}$ consists of all vectors $\mathbf{v}$ that lie tangent to a circle of radius $|\mathbf{p}|$ centred at the origin at the point $\mathbf{p}$.

5. Gee, met behulp van die Rang-Nulheidgraad-stelling, 'n ander bewys van die feit dat die beeld van die afbeelding C in Voorbeeld 3.5.6 $\{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{u} \cdot \mathbf{a} = 0\}$ is.

Oplossing. For reference, we reproduce a portion of the proof in in Example 3.5.6:

> The kernel of C is the subspace of $\mathbb{R}^3$ consisting of all vectors $\mathbf{v} \in V$ such that $\mathbf{a} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$. From the geometric formula for the cross-product,
>
> $$|\mathbf{a} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{a}||\mathbf{v}| \sin\theta$$
>
> where θ is the angle from $\mathbf{a}$ to θ, we see that
>
> $$\mathbf{a} \times \mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ of } \theta = 0 \text{ of } \theta = \pi.$$
>
> In other words, $\mathbf{v}$ must be a scalar multiple of $\mathbf{a}$. So,
>
> $$\mathrm{Ker}(C) = \{k\mathbf{a}, k \in \mathbb{R}\}.$$
>
> I claim that the *image* of C is the subspace of *all* vectors perpendicular to $\mathbf{a}$, i.e.
>
> $$\Im(C) := \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{u} \cdot \mathbf{a} = 0\}. \tag{3.5.9}$$
>
> If you believe me, then the picture is as follows:
>
> Let me prove equation (3.5.1). By definition, the image of C is the subspace of $\mathbb{R}^3$ consisting of all vectors $\mathbf{w}$ of the form $\mathbf{w} = \mathbf{a} \times \mathbf{v}$ for some $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. This implies that $\mathbf{w}$ is perpendicular to $\mathbf{a}$.

And thus we know that

$$\Im(C) \subset \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{u} \cdot \mathbf{a} = 0\}$$

We shall use the Rank-Nullity theorem to show the converse in a fantastically succint way. By the Rank-Nullity theorem

$$\begin{aligned} &\mathrm{Dim}(\mathbb{R}^3) = \mathrm{Nullity}(C) + \mathrm{Rank}(C) \\ \implies &3 = 1 + \mathrm{Rank}(C). \end{aligned}$$

And so we also know the $\Im(C)$ is a 2-dimensional subspace of $\mathbb{R}^3$. Of course,

$$\{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{u} \cdot \mathbf{a} = 0\}$$

is also 2-dimensional. But now, if one 2-dimensional subspace is contained in another 2-dimensional subspace then the two subspaces must necessarily be *the same*! Hence

$$\Im(C) = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{u} \cdot \mathbf{a} = 0\}$$

(By using the Rank-Nullity theorem, we managed to bypass the trickest part of Voorbeeld 3.5.6!)

6. Determine the kernel and image of the linear map

$$T : \mathrm{Poly}_2[x, y, z] \to \mathrm{Poly}_2$$

defined by

$$T(p)(x) := p(x, x, x).$$

7. Laat V 'n eindig-dimensionele vektorruimte wees. Laat U 'n deelruimte van V wees. Toon aan dat daar 'n lineêre afbeelding $T : V \to V$ bestaan met $\mathrm{Ker}\, T = U$.

Oplossing. To do.

8. Beskou die funksie $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gedefineer deur

$$F(x, y, z) = (x^2 + y^2, xy).$$

Beskou nou DF_p, die Jakobiaan matriks van F by die punt $p = (1, 2)$. Bepaal $\mathrm{Ker}(DF_p)$ en $\mathrm{Be}(DF_p)$ en dus bepaal ook $\mathrm{Nhg}(DF_p)$ and $\mathrm{Rang}(DF_p)$.

Oplossing.

3.6 Injektiewe en surjektiewe lineêre afbeeldings

Definisie 3.6.1 'n Funksie $f : X \to Y$ vanaf 'n versameling X na 'n versameling Y word **een-tot-een** (of **injektief**) genoem as wanneer $f(x) = f(x')$ vir $x, x' \in X$ dit noodwendig volg dat $x = x'$. Die funksie f word "**op**" (of **surjektief**) genoem as, vir alle $y \in Y$ daar 'n $x \in X$ bestaan sodat $f(x) = y$. $\Diamond$

As f 'n *lineêre afbeelding* tussen vektorruimtes is (en nie net enige arbitrêre funksie tussen versamelings is nie), dan is daar 'n eenvoudige manier om te toets of f injektief is.

Hulpstelling 3.6.2 *Laat $T : V \to W$ tussen vektorruimtes. Dan is T injektief as en slegs as*

$$\mathrm{Ker}(T) = \{\mathbf{0}_V\}.$$

Bewys. $\Rightarrow$. Veronderstel dat $T : V \to W$ een-tot-een is. Ons weet reeds van een element in $\mathrm{Ker}(T)$, naamlik $\mathbf{0}_V$, aangesien $T(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$, want T is lineêr. Aangesien T een-tot-een is, moet dit die enigste element in $\mathrm{Ker}(T)$ wees.

$\Leftarrow$. Veronderstel nou $\text{Ker}(T) = \{\mathbf{0}_V\}$ en dat

$$T(\mathbf{v}) = T(\mathbf{v}')$$

vir vektore $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V$. Dan het ons $T(\mathbf{v}) - T(\mathbf{v}') = \mathbf{0}_W$, en aangesien T lineêr is, beteken dit dat $T(\mathbf{v} - \mathbf{v}') = \mathbf{0}_W$. Gevolglik $\mathbf{v} - \mathbf{v}' \in \text{Ker}(T)$, en so $\mathbf{v} - \mathbf{v}' = \mathbf{0}_V$, met ander woorde, $\mathbf{v} = \mathbf{v}'$, wat is wat ons wou wys. ■

'n Verdere vereenvoudiging kom voor as T 'n lineêre afbeelding vanaf 'n vektorruimte V na ditself is (i.e. T is 'n lineêre operator op V), en V eindig-dimensioneel is.

Hulpstelling 3.6.3 *Laat $T : V \to V$ 'n lineêre operator op 'n eindigdimensionele vektorruimte V wees. Dan:*

$$T \text{ is injektief} \Longleftrightarrow T \text{ is surjektief.}$$

Bewys. $\Rightarrow$. Veronderstel T is injektief.

$$\begin{aligned}
&\therefore \text{Ker}(T) = \{\mathbf{0}_V\} && \text{(Hulpstelling 3.6.2)}\\
&\therefore \text{Nhg}(T) = 0 && \\
&\therefore \text{Rank}(T) = \text{Dim}(V) && \text{(Stelling 3.5.12)}\\
&\therefore \text{Be}(T) = V && \text{(Stelling 2.3.25)}
\end{aligned}$$

Daarom is T surjektief.

$\Leftarrow$. Veronderstel T is surjektief.

$$\begin{aligned}
&\therefore \text{Be}(T) = V && \\
&\therefore \text{Rank}(T) = \text{Dim}(V) && \\
&\therefore \text{Nhg}(T) = 0 && \text{(Stelling 3.5.12)}\\
&\therefore \text{Ker}(T) = \{\mathbf{0}_V\} && \\
&\therefore T \text{ is injektief.} && \text{(Hulpstelling 3.6.3)}
\end{aligned}$$

■

Stelling 3.6.4 *'n Lineêre afbeelding $T : V \to W$ is 'n isomorfisme as en slegs as T injektief en surjektief is.*

Bewys. $\Rightarrow$. Veronderstel dat V en W isomorf is. Dan bestaan daar 'n paar lineêre afbeeldings $T : V \rightleftarrows W : S$ sodat $T \circ S = \text{id}_W$ en $S \circ T = \text{id}_C$. Ons sal wys dat T injektief en surjektief is.

$$\begin{aligned}
\text{Veronderstel dat } T(\mathbf{v}_1) &= T(\mathbf{v}_2).\\
\therefore S(T(\mathbf{v}_1)) &= S(T(\mathbf{v}_2))\\
\therefore \text{id}_V(\mathbf{v}_1) &= \text{id}_V(\mathbf{v}_2)(\text{want } S \circ T = \text{id}_V)\\
\therefore \mathbf{v}_1 &= \mathbf{v}_2
\end{aligned}$$

wat wys dat T injektief is. Om te wys dat T surjektief is, laat $\mathbf{w} \in W$. Ons moet wys dat daar$\mathbf{v} \in V$ bestaan sodat $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$. Inderdaad, stel $\mathbf{v} := S(\mathbf{w})$. Dan

$$\begin{aligned}
T(\mathbf{v}) &= T(S(\mathbf{w}))\\
&= \text{id}_W(\mathbf{w})(\text{deur } T \circ S = \text{id}_W)\\
&= \mathbf{w}.
\end{aligned}$$

$\Leftarrow$. Veronderstel dat daar 'n lineêre afbeelding $T : V \to W$ bestaan wat injektief en surjektief is. Ons wil wys dat daar 'n lineêre afbeelding $S : W \to V$ bestaan sodat $S \circ T = \text{id}_V$ en $T \circ S = \text{id}_W$, wat sal bewys dat V en W isomorf is.

Ons definieer die inverse-afbeelding S soos volg:

$$\begin{aligned} S : W &\to V \\ \mathbf{w} &\mapsto \text{die unieke } \mathbf{v} \in V \text{ sodat } T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}. \end{aligned}$$

Hierdie afbeelding is wel-gedefinieerd. Inderdaad, gegee $\mathbf{w} \in W$, die feit dat T surjektief is beteken daar bestaan *ten minste een* $\mathbf{v} \in V$ sodat $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$. Die feit dat T injektief is impliseer dat $\mathbf{v}$ uniek is. Want, as daar nog 'n $\mathbf{v}' \in V$ bestaan met $S(\mathbf{v}') = \mathbf{w}$, dan het ons $\mathbf{v}' = \mathbf{v}$, want T is injektief.

Nou het ons 'n wel-gedefinieerde *funksie* $S : W \to V$ wat $T \circ S = \mathrm{id}_W$ en $S \circ T = \mathrm{id}_V$ bevredig. Ons moet slegs nagaan dat S lineêr is.

Laat $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in W$. Dan

$$\begin{aligned} S(a\mathbf{w}_1 + b\mathbf{w}_2) &= S\big(aT(S(\mathbf{w}_1)) + bT(S(\mathbf{w}_2))\big) && (\text{using } T \circ S = \mathrm{id}_W) \\ &= S\big(aT(\mathbf{v}_1) + bT(\mathbf{v}_2)\big) && (\text{setting } \mathbf{v}_1 := S(\mathbf{w}_1), \mathbf{v}_2 := S(\mathbf{w}_2))) \\ &= S\big(T(a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2)\big) && (T \text{ is linear}) \\ &= a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 && ((S \circ T = \mathrm{id}_V) \end{aligned}$$

Gevolglik is S lineêr, wat die bewys voltooi. ■

Stelling 3.6.5 *Laat $T : V \to V$ 'n lineêre bewerking op 'n eindig-dimensionele vektorruimte V wees. Die volgende stellings is ekwivalent:*

- *1..*

  T is injektief.

- *2..*

  T is surjektief.

- *3..*

  T is 'n isomorfisme.

Bewys. (1) is ekwivalent aan (2) deur Lemma 3.6.3. Aan die ander kant is (1) en (2) ekwivalent aan (3) volgens Proposisie 3.6.4. ■

Hoofstuk 4

Eiewaardes en eievektore

4.1 Eiewaardes

Definisie 4.1.1 Laat $T : V \to V$ 'n lineêre operator op 'n vektorruimte V wees. Ons sê dat $\lambda \in \mathbb{R}$ is 'n **eiewaarde van** T as daar 'n nie-nul vektor $\mathbf{v} \in V$ bestaan, sodat $T(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$. ♢

Stelling 4.1.2 *Veronderstel $T : V \to V$ is 'n lineêre afbeelding, en V is eindig-dimensioneel. Dan is die volgende ekwivalent:*

- *1..*

  λ is 'n eiewaarde van T.

- *2..*

  $\lambda \operatorname{id}_V - T$ is nie injektief nie.

- *3..*

  $\lambda \operatorname{id}_V - T$ is nie surjektief nie.

- *4..*

  $\lambda \operatorname{id}_V - T$ is nie inverteerbaar nie.

Kom ons neem 'n oomblik om die notasie hier te analiseer. As $S, T : V \to W$ lineêre afbeeldings is, kan ons hulle *saamtel* om 'n nuwe lineêre afbeelding

$$S + T : V \to W$$

te verkry wat gedefinieer word as $(S+T)(\mathbf{v}) := S(\mathbf{v}) + T(\mathbf{v})$. So as ek skryf '$T - \lambda \operatorname{id}_V$', verwys ek na die lineêre afbeelding $V \to V$ gedefineer deur

$$(\lambda \operatorname{id}_V - T)(\mathbf{v}) := \lambda \operatorname{id}_V(\mathbf{v}) - T(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v} - T(\mathbf{v}).$$

Bewys. (1) $\Rightarrow$ (2). Veronderstel λ is 'n eiewaarde van T.

$$\begin{aligned}
&\therefore \text{Daar bestaan 'n nie-nul } \mathbf{v} \in V, \text{ sodat } T(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}. \\
&\therefore T(\mathbf{v}) - \lambda\mathbf{v} = \mathbf{0} \\
&\therefore (T - \lambda \operatorname{id}_V)(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \\
&\therefore \mathbf{v} \in \operatorname{Ker}(T - \lambda \operatorname{id}_V)
\end{aligned}$$

Maar $\mathbf{v}$ is nie-nul. So ons het 'n nie-nul vektor in die kern van $T - \lambda \operatorname{id}_V$, so $T - \lambda\,\mathrm{id}_V$ is nie injektief nie, volgens Lemma 3.6.2.

(2) $\Rightarrow$ (1). Veronderstel $T - \lambda\,\mathrm{id}_V$ is nie injektief nie.

$\therefore \mathrm{Ker}(T - \lambda\,\mathrm{id}_V) \neq \{\mathbf{0}\}$ (deur Lemma 3.6.2)

$\therefore$ daar bestaan 'n nie-nul ($\mathbf{v} \in V$, sodat

$(T - \lambda\,\mathrm{id}_V)(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$.

Dit is, $T(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$, so λ is 'n eiewaarde van T.

Duidelik het ons (2) $\Leftrightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (4) deur Proposisie 3.6.5. ■

Daar is 'n eenvoudige toets om te sien wanneer 'n *matriks* A inverteerbaar is — bereken die determinant $\det(A)$. As $\det(A) = 0$, Dan is die matriks *nie* inverteerbaar *nie*. As $\det(A) \neq 0$, dan is die matriks inverteerbaar.

> Dit is inderwaarheid waar die woord 'determinant' vandaan kom!. Dit *bepaal* (Eng. *determine*) of die matriks inverteerbaar is of nie.

Maar hoe weet ons of 'n *lineêre operator* inverteerbaar is?

Definisie 4.1.3 Die **determinant** van 'n lineêre operator $T : V \to V$ op 'n eindig-dimensionele vektorruimte V is die determinant van die matriks van T met betrekking tot enige basis $\mathcal{B}$ van V. Dit is,

$$\det(T) := \det\left([T]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}}\right), \mathcal{B} \text{ enige basis vir } V.$$

$\lozenge$

Hulpstelling 4.1.4 *Die determinant van 'n lineêre operator, soos hierbo gedefinieer, is wel-gedefinieerd. Dit is, as $\mathcal{B}$ en $\mathcal{C}$ basisse vir V is, dan*

$$\det\left([T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{C}}\right) = \det\left([T]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}}\right).$$

Bewys. Ons weet vanaf Stelling 3.4.12 dat

$$[T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{C}} = \mathsf{P}^{-1}[T]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}}\mathsf{P}$$

waar $\mathsf{P} = \mathsf{P}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$. Daarom,

$$\begin{aligned}
\det\left([T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{C}}\right) &= \det\left(\mathsf{P}^{-1}[T]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}}\mathsf{P}\right) \\
&= \det(\mathsf{P}^{-1})\det\left([T]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}}\right)\det(\mathsf{P}) \quad (\det(\mathsf{AB}) = \det(\mathsf{A})\det(\mathsf{B})) \\
&= \frac{1}{\det(\mathsf{P})}\det\left([T]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}}\right)\det(\mathsf{P}) \\
&= \det\left([T]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}}\right).
\end{aligned}$$

■

Nou dat ons weet hoe om die determinant van 'n lineêre operator te definieer, kan ons die volgende definisie gee.

Definisie 4.1.5 Die **karakteristieke polinoom** χ_T van 'n lineêre operator $T : V \to V$ op 'n eindig-dimensionele vektorruimte V word gedefinieer as

$$\chi_T(\lambda) := \det(\lambda\,\mathrm{id} - T).$$

$\lozenge$

Die rede dat χ_T 'n *polinoom* is (en nie bloot 'n arbitrêre funksie is nie) spruit uit die formule vir die determinant. Meer hieroor volg later.

Om op te som, sien ons dat λ 'n eiewaarde van 'n lineêre operator T is as en slegs as λ 'n wortel van die karakteristieke polinoom van T is. Kom ons noteer dit formeel as 'n uitbreiding van Proposisie 4.1.2.

Stelling 4.1.6 *Laat T 'n lineêre operator op 'n eindig-dimensionele vektorruimte V wees, en $\lambda \in \mathbb{R}$. Dan is die volgende stellings ekwivalent:*

- *1..*

  λ is an eiewaarde van T.

- *2..*

  $\lambda \operatorname{id} - T$ is nie inverteerbaar nie.

- *3..*

  $\chi_T(\lambda) = 0$.

Bewys. Die enigste ding wat ons moet wys is dat (2) $\Leftrightarrow$ (3). Inderdaad, as $\mathcal{B}$ 'n basis vir V is, dan

$$\begin{aligned} &\lambda \operatorname{id} - T \text{ is nie inverteerbaar nie} \\ \Leftrightarrow\ &\text{die matriks } [\lambda \operatorname{id} - T]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}} \text{ is nie inverteerbaar nie} && \text{(Gevolgtrekking 3.4.9)} \\ \Leftrightarrow\ &\det\left([\lambda \operatorname{id} - T]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}}\right) = 0 && \text{(Eienskap van } \det) \\ \Leftrightarrow\ &\chi_T(\lambda) = 0 && \text{(Defn van } \chi_T(\lambda)) \end{aligned}$$

■

Voorbeeld 4.1.7 Vind die eiewaardes van die lineêre operator

$$T : \text{Poly}_2 \to \text{Poly}_2$$

gedefinieer deur

$$T(p)(x) := p(2x + 3)$$

Oplossing. Ons moet eers die matriks van T relatief tot 'n basis vir Poly_2 bereken. Laat

$$\mathcal{B} := \{p_0, p_1, p_2\}$$

die standaardbasis vir Poly_2 wees, dit is

$$p_0(x) = 1, p_1(x) = x, p_2(x) = x^2.$$

Dan

$$\begin{aligned} T(p_0)(x) &= p_0(2x + 3) \\ &= 1 \\ \therefore T(p_0) &= p_0 \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

$$\begin{aligned} T(p_1)(x) &= p_1(2x + 3) \\ &= 2x + 3 \\ \therefore T(p_1) &= 3p_0 + 2p_1 \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

$$T(p_2)(x) = p_2(2x + 3)$$

$$\begin{aligned} &= (2x+3)^2 \\ &= 4x^2 + 12x + 9 \\ \therefore T(p_2) &= 9p_0 + 12p_1 + 4p_0. \end{aligned} \tag{4.1.3}$$

So die matriks van T relatief tot $\mathcal{B}$ is

$$[T]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

So die karakteristieke polinoom van T is

$$\begin{aligned} \chi_T(\lambda) &= \det(\lambda\,\mathrm{id} - T) && \text{(defn van } \chi_T) \\ &= \det\left([\lambda\,\mathrm{id} - T]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}}\right) && \text{(defn van } \det) \\ &= \det\left([\lambda\,\mathrm{id}]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}} - [T]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}}\right) \\ &= \det\left(\begin{bmatrix} \lambda-1 & -3 & -9 \\ 0 & \lambda-2 & -12 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}\right) \\ &= (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-4). \end{aligned}$$

Die eiewaardes van T is die wortels van die karakteristieke polinoom van T. So die eiewaardes van T is 1, 2 en 4. □

As ons van die eiewaardes en eievektore van 'n $n \times n$ *matriks* A praat, verwys ons na die eiewaardes en eievektore van die geassosieerde lineêre operator

$$\begin{aligned} T_{\mathsf{A}} : \mathrm{Col}_n &\to \mathrm{Col}_n \\ \mathbf{v} &\mapsto \mathsf{A}\mathbf{v}. \end{aligned}$$

Nou, Col_n het die standaard basis

$$\mathsf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \mathsf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots, \mathsf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Die matriks van T_{A} met betrekking tot hierdie standaardbasis $\mathcal{B} = \{\mathsf{e}_1, \ldots, \mathsf{e}_n\}$ is bloot A self.

Verstaanpunt 4.1.8 Bevestig dit. Met ander woorde, gaan na dat 'n $n \times n$-matriks A, $[T_{\mathsf{A}}]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}} = \mathsf{A}$.

So die eiewaardes van 'n matriks A is maar net die oplossings van die vergelyking $\det(\lambda I - \mathsf{A}) = 0$.

Die volgende voorbeelde kom van die aanlyn Desmos-werkblad van eiewaardes by `student.desmos.com`, klaskode `RGJ93S`. In die Desmos-werkblad kry jy die eiewaardes grafies, deur inspeksie. Werk eers deur daardie werkblad, en doen daarna die volgende algebraïese metode soos hieronder aangetoon.

Voorbeeld 4.1.9 Vind die eiewaardes van $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$.

Oplossing. Die karakteristieke polinoom van A is

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \det\left(\begin{bmatrix} \lambda-2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \lambda-\frac{5}{2} \end{bmatrix}\right) \\ &= (\lambda-2)(\lambda-\frac{5}{2}) - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$=\Leftrightarrow \lambda^2 - \frac{9}{2}\lambda + \frac{9}{2}.$$

Die eiewaardes is die wortels van die karakteristieke polinoom. So:

$$\begin{aligned}\chi_A(\lambda) = 0 &\Leftrightarrow (\lambda - \frac{3}{2})(\lambda - 3) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda = \frac{3}{2} \text{ of } \lambda = 3.\end{aligned}$$

So die eiewaardes van A is $\lambda = \frac{3}{2}$ en $\lambda = 3$. Dit kan visueel in Desmos nagegaan word: vir sekere vektore $\mathbf{v}$, $A\mathbf{v} = \frac{3}{2}\mathbf{v}$ en vir sekere ander vektore $\mathbf{v}$, $A\mathbf{v} = 3\mathbf{v}$. □

Voorbeeld 4.1.10 Vind die eiewaardes van $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$.

Oplossing. Die karakteristieke polinoom van A is

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 3 \\ \lambda + 2 & 2 \end{bmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 8.$$

Die vergelyking vir eiewaardes is daarom

$$\lambda^2 - 3\lambda + 8 = 0$$

wat geen reële wortels het nie. So A het geen eiewaardes nie. Dit kan visueel op Desmos gesien word: rofweg, $A\mathbf{v}$ roteer die vektor $\mathbf{v}$ kloksgewys met 'n sekere hoek. So $A\mathbf{v}$ kan nooit 'n veelvoud van $\mathbf{v}$ wees nie. □

4.2 Eievektore

In die vorige afdeling het ons opp eiewaardes gefokus. Nou gaan ons eievektore bestudeer.

Definisie 4.2.1 'n **Eievektor** van 'n lineêre operator $T : V \to V$ is 'n nie-nul vektor $\mathbf{v} \in V$, sodat $T(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$ vir een of ander skalaar $\lambda \in \mathbb{R}$ (die gepaardgaande eiewaarde). ◊

Let dat ons daarop aandring dat $\mathbf{v}$ nie-nul moet wees om 'n eievektor van T genoem te word. Die rede hiervoor is dat, andersins sal die nulvektor vir *elke* operator T 'n eievektor (met eiewaarde 0) wees, aangesien $T(\mathbf{0}) = 0\mathbf{0}$ altyd waar is. In daardie geval sal dit minder betekenis dra om 'n eievektor van T te wees.

Dit is nogsteeds moontlik vir nul om 'n *eiewaarde* van T te wees nie. Maar die konvensie is dat 'n *eievektor* nie die nulvektor kan wees nie.

In plaas daarvan om 'n *enkele* vektor $\mathbf{v} \in V$ waarvoor $T(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$ te oorweeg, maak dit meer sin om die versameling van *al* sulke vektore te bestudeer.

Definisie 4.2.2 Laat $T : V \to V$ 'n lineêre operator op 'n vektorruimte V wees, en laat λ 'n eiewaarde van T wees. Die **eieruimte van T wat ooreenstem met** λ is die versameling

$$E_\lambda := \{\mathbf{v} \in V : T(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}.\}$$

◊

> Let daarop dat asλ 'n eiewaarde van T is, dan is die nulvektor $\mathbf{0}$ *wel* in die *eieruimte* E_λ van T wat met λ gepaardgaan. Maar dit is nie 'n *eievektor* van T nie. Dit is hoe die terminologie gedefinieer is.

Let daarop dat ons E_λ as

$$E_\lambda = \operatorname{Ker}(\lambda \operatorname{id} - T) \tag{4.2.1}$$

kan uitdruk, want $T(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$ is ekwivalent daaraan om te sê dat $(\lambda \operatorname{id} - T)(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$.

Stelling 4.2.3 *E_λ is 'n deelruimte van V.*

Bewys. Dit volg direk uit die feit (vergelyking (4.2.1)) dat ons E_λ as 'n kern van 'n lineêre operator kan skryf. Die kern van enige lineêre operator op V is 'n deelruimte van V, volgens Lemma 3.5.4. ■

Stelling 4.2.4 Eievektore uit verskillende eieruimtes is lineêr onafhanklik. *Laat $T : V \to V$ 'n lineêre operator van 'n eindig-dimensionele vektorruimte V wees, en veronderstel dat $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ eievektore van T met verskillende eiewaardes $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ onderskeidelik is. Dan is $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ lineêr onafahanklik.*

Bewys. Veronderstel $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ is *nie* lineêr onafhanklik nie, met andewr woorde, dit is lineêr afhanklik. Dan, volgens die Lineêre Kombinasie van Voorafgaande Vektore-stelling (Stelling 2.2.8), is óf $\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$ (onmoontlik, want eievektore kan nie die nul-vektor wees nie), óf een van die $\mathbf{v}_i$ is 'n lineêre kombinasie van die voorafgaande vektore. Laat i die *kleinste* indeks wees waarvoor dit waar is. So, vir 'n i met $2 \leq i \leq k$, het ons

$$\mathbf{v}_i = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{i-1}\mathbf{v}_{i-1} \tag{4.2.2}$$

vir skalare $a_1, \ldots, a_{i-1}$, nie almal nul nie, en verder is die lys vektore

$$\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}\}$$

lineêr onafhanklik (andersins sou i nie die *kleinste* indeks wees waarvoor $\mathbf{v}_i$ 'n lineêre kombinasie van die voorafgaande vektore is nie). Deur T aan beide kante van (4.2.2) toe te pas, kry ons 'n nuwe vergelyking:

$$\begin{aligned}
T(\mathbf{v}_i) &= T(a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{i-1}\mathbf{v}_{i-1}) \\
&= a_1T(\mathbf{v}_1) + a_2T(\mathbf{v}_2) + \cdots + a_{i-1}T(\mathbf{v}_{i-1}) \quad (T \text{ is lineêr}) \\
\therefore \lambda_i\mathbf{v}_i &= a_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + a_2\lambda_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{i-1}\lambda_{i-1}\mathbf{v}_{i-1} \quad (T(\mathbf{v}_r) = \lambda_r\mathbf{v}_r) \qquad (4.2.3)
\end{aligned}$$

Deur vergelyking (4.2.2) met λ_i te vermenigvuldig en (4.2.3) af te trek, kry ons:

$$\mathbf{0} = (\lambda_i - \lambda_1)a_1\mathbf{v}_1 + (\lambda_i - \lambda_2)a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + (\lambda_i - \lambda_{i-1})a_{i-1}\mathbf{v}_{i-1}.$$

Aangesien die lys vektore $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}\}$ lineêr afhanklik is, het ons

$$(\lambda_i - \lambda_1)a_1 = 0,\ (\lambda_i - \lambda_2)a_2 = 0\ \ldots,\ (\lambda_i - \lambda_{i-1})a_{i-1} = 0.$$

Alle eiewaardes is verskillend (volgens aanname), so dit kan nie wees dat $\lambda_i - \lambda_r = 0$ vir $r \neq i$ nie. Daarom $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, …, $a_{i-1} = 0$. Maar dit is in teenstelling met (4.2.2) wat impliseer het dat die skalare *nie* almal nul is nie. So ons oorpronklike aanname moes verkeerd wees. Daarom is $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ lineêr afhanklik. ■

Voorbeeld 4.2.5 Bepaal die eiewaardes en ooreenstemmende eieruimtes vir die lineêre operator

$$\begin{aligned} T &: \mathrm{Poly}_4 \to \mathrm{Poly}_4 \\ T(p)(x) &= x^2 \frac{d^2}{dx^2}(p). \end{aligned}$$

Oplossing. Ons bereken die aksie van T op die standaard basis van Poly_2,

$$p_0(x) = 1,\, p_1(x) = x,\, p_2(x) = x^2,\, p_3(x) = x^3,\, p_4(x) = x^4$$

soos volg:

$$\begin{aligned} p_0 &\mapsto 0 \\ p_1 &\mapsto 0 \\ p_2 &\mapsto 2p_2 \\ p_3 &\mapsto 6p_3 \\ p_4 &\mapsto 12p_4 \end{aligned}$$

Deur inspeksie, sien ons dat p_0 en p_1 eievektore is met eiewaarde 0, p_1 'n eievektore met eiewaarde 2 is, p_3 'n eievektor met eiewaarde 6 is, en p_4 'n eievektor is met eiewaarde 12. So die eiewaardes en geassosieerde eieruimtes van T is:

$$\begin{aligned} \lambda = 0, &\qquad E_0 = \{sp_0 + tp_1,\, s, t \in \mathbb{R}\} \\ \lambda = 2, &\qquad E_1 = \{tp_2,\, t \in \mathbb{R}\} \\ \lambda = 6, &\qquad E_2 = \{tp_3,\, t \in \mathbb{R}\} \\ \lambda = 12, &\qquad E_12 = \{tp_4,\, t \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

□

Voorbeeld 4.2.6 Bepaal die eieruimtes van die lineêre operator

$$\begin{aligned} T &: \mathrm{Poly}_2 \to \mathrm{Poly}_2 \\ T(p(x)) &= p(2x+3) \end{aligned}$$

van Voorbeeld 4.1.7.

Oplossing. Die eiewaardes van T is $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ en $\lambda_3 = 4$. Kom ons dink na vir 'n oomblik. Aangesien die eiewaardes almal verskillend is, dan as ons eievektore q_1, q_2 en q_3 met eiewaardes λ_1, λ_2 and λ_3 onderskeidelik vind, dan sal $\mathcal{Q} = \{q_1, q_2, q_3\}$ lineêr onafhanklik wees volgens Proposisie 4.2.4. Dit beteken dat die eieruimtes E_1, E_2 en E_4 wat met die eiewaardes gepaard gaan 1-dimensioneel sal wees. Dit is nuttige inligting. Ok, nou is ons gereed om eieruimtes te bereken.

- $\lambda = 1$: Ons soek polinome q sodat

  $$T(q) = 1q$$

  Deur inspeksie van die formules (4.1.1), (4.1.2) en (4.1.3) vir hoe T werk, sien ons reeds ons eerste polinoom, naamlik $q = p_0$, aangesien $T(p_0) = p_0$. Aangesien E_1 een-dimensioneel is, kan ons aflei dat p_0 'nn basis vir E_1 is, so

  $$E_1 = \{tp_0,\, t \in \mathbb{R}\}.$$

- $\lambda = 2$: Ons soek polinome q sodat
$$T(q) = 2q.$$
Brei q met die standaard basis uit:
$$q = a_0 p_0 + a_1 p_1 + a_2 p_2.$$
So ons soek skalare a_0, a_1, a_2 sodat
$$T(a_0 p_0 + a_1 p_1 + a_2 p_2) = 2(a_0 p_0 + a_1 p_1 + a_2 p_2). \tag{4.2.4}$$
Met die formules (4.2.1) vir hoe T op die standaard basis werk, word (4.2.4)
$$(-a_0 + 3a_1 + 9a_2)p_0 + 12a_2 p_1 + 2a_2 p_2 = 0.$$
Aangesien $\{p_0, p_1, p_2\}$ lineêr onafhanklik is, word dit die volgende stel vergelykings:
$$-a_0 \quad +3a_1 + 9a_2 = 0 \tag{4.2.5}$$
$$12a_2 = 0 \tag{4.2.6}$$
$$2a_2 = 0 \tag{4.2.7}$$
Die algemene oplossing vir hierdie vergelykings is
$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \; t \in \mathbb{R}.$$
Met ander woorde, 'n eievektor vir T met eiewaarde 2 is
$$q_2(x) = 3 + x,$$
en die hele eieruimte wat met die eiewaarde 2 gepaard gaan, is
$$E_2 = \{tq_2, \, t \in \mathbb{R}\}.$$
Kom ons gaan dit na. Oorweeg die berekening van $T(q_2)$ met behulp van die *definisie* van T, naamlik $T(p)(x) = p(2x + 3)$ vir enige polinoom p. Dit gee vir ons:
$$\begin{aligned} T(q_2)(x) &= q_1(2x + 3) \\ &= 3 + 3(2x + 3) \\ &= 6 + 6x \\ &= 2(3 + 3x) \\ &= (2q_2)(x) \\ \therefore T(q_2) &= 2q_1 \text{ (soos verwag!)} \end{aligned}$$

- $\lambda = 4$: Ons soek polinome q sodat
$$T(q) = 4q.$$
Brei q in die standaard basis uit soos volg:
$$q = a_0 p_0 + a_1 p_1 + a_2 p_2.$$
So ons benodig skalare a_0, a_1, a_2 sodat
$$T(a_0 p_0 + a_1 p_1 + a_2 p_2) = 4(a_0 p_0 + a_1 p_1 + a_2 p_2).. \tag{4.2.8}$$

Met behulp van die formules (4.2.1) vir hoe T op die standaard basis tewerk gaan, word (4.2.8)

$$(-3a_0 + 3a_1 + 9a_2)p_0 + (-2a_1 + 12a_2)p_1 + 0p_2 = 0.$$

Aangesien $\{p_0, p_1, p_2\}$ lineêr onafhanklik is, word dit die volgende stel vergelykings:

$$-3a_0 \quad +3a_1 + 9a_2 = 0 \tag{4.2.9}$$
$$-2a_1 + 12a_2 = 0 \tag{4.2.10}$$

Die algemene oplossing vir hierdie vergelykings is

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

Met ander woorde, 'n eievektor van T met eiewaarde 4 is

$$q_4(x) = 9 + 6x + x^2,$$

en die hele eieruimte wat met die eiewaarde 4 gepaardgaan, is

$$E_2 = \{tq_4,\ t \in \mathbb{R}\}.$$

Kom ons gaan dit na. Oorweeg die berekening van $T(q_4)$ met die *definisie* van T, naamlik $T(p)(x) = p(2x+3)$ vir enige polinoom p. Dit lewer:

$$\begin{aligned} T(q_4)(x) &= q_4(2x+3) \\ &= 9 + 6(2x+3) + (2x+3)^2 \\ &= 36 + 24x + 4x^2 \\ &= 4(9 + 6x + x^2) \\ &= (4q_4)(x) \\ \therefore T(q_4) &= 4q_4 \text{ (soos verwag!)} \end{aligned}$$

□

Voorbeeld 4.2.7 Bepaal die eieruimtes van die matriks

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

vanuit Voorbeeld 4.1.9.

Oplossing. Vanuit (4.2.1), het ons dat die eieruimte E_λ as volg bereken kan word

$$E_\lambda = \mathrm{Ker}(\mathsf{A} - \lambda I) = \mathrm{Ker}\left(\begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} - \lambda \end{bmatrix}\right)$$

Die eiewaardes van A is $\lambda = \frac{3}{2}$ en $\lambda = 3$.

- $\lambda = \frac{3}{2}$: Ons moet soos volg bereken

$$E_{\frac{3}{2}} = \mathrm{Ker}\left(\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}\right).$$

Met ander woorde, ons moet die kolomvektore $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ vind waarvoor

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dit kom neer op die enkele vergelyking

$$\frac{1}{2}v_1 + v_2 = 0$$

wat die algemene oplossing $v_2 = t$, $v_1 = -2t$, $t \in \mathbb{R}$ het. Daarom,

$$E_{\frac{3}{2}} = \left\{ t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Jy kan visueel bevestig dat hierdie lyn wel 'n eieruimte van A met gepaardgaande eiewaarde $\frac{3}{2}$ is deur inspeksie van die Desmos-werkblad. Wanneer jy vektore op hierdie lyn met A vermenigvuldig, word hulle met 'n faktor $\frac{3}{2}$ skaleer.

- $\lambda = 3$: Ons moet bereken

$$E_3 = \operatorname{Ker}\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \right).$$

Met ander woorde, ons moet die kolomvektore $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ vind waarvoor

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dit kom op die enkele vergelyking

$$-v_1 + v_2 = 0$$

neer wat die algemene oplossing $v_2 = t$, $v_1 = t$, $t \in \mathbb{R}$ het. Daarom,

$$E_{\frac{3}{2}} = \left\{ t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Jy kan op die Desmos-werkblad visueel verifieer dat hierdie lyn wel 'n eieruimte van A met ooreenstemmende eiewaarde 3 is. As jy vektore op hierdie lyn met A vermenigvuldig, word hulle met 'n faktor 3 vergroot.

□

Let daarop dat die 'kern van'n matriks'-metode wat ons gebruik het om die eieruimtes in Voorbeeld 4.2.7 te bereken, gebruik kan word om die eievektore van *enige* lineêre operator te bereken.

Voorbeeld 4.2.8 Bepaal die eieruimtes van die lineêre operator T uit Voorbeeld 4.2.6 met die 'kern-van-'n-matriks'-metode.

Oplossing. Die eieruimte E_λ wat met die eiewaarde λ ooreenstem is die kern van die lineêre operator $T - \lambda\,\mathrm{id}$. Dit wil sê, ons benodig die polinome $q \in \mathrm{Poly}_2$ sodat

$$(T - \lambda\,\mathrm{id})(q) = 0. \tag{4.2.11}$$

Ons brei q in die standaard basis $\mathcal{B}$ uit:

$$q = a_0 p_0 + a_1 p_1 + a_2 p_2 \tag{4.2.12}$$

Ons bereken die matriks van T relatief tot die basis $\mathcal{B}$:

$$[T]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Dan kan vergelyking (4.2.11) in matriksvorm geskryf word:

$$[T - \lambda\,\mathrm{id}]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Met ander woorde, vir elke eiewaarde λ, verg die berekening van E_λ dat ons die kern van die *matriks*

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 3 & 9 \\ 0 & 2-\lambda & 12 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{bmatrix}$$

moet bereken en dan dat ons die resulterende kolomvektore as polinome in die vorm (4.2.12) herskryf.

- $\lambda = 1$: Ons benodig skalare a_0, a_1, a_2 sodat

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

  Die vergelyking het die algemene oplossing

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \; t \in \mathbb{R}.$$

  So,

$$E_1 = \{tp_0,\, t \in \mathbb{R}\}.$$

- $\lambda = 2$: Ons benodig skalare a_0, a_1, a_2 sodat

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

  Hierdie vergelyking het die algemene oplossing

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \; t \in \mathbb{R}.$$

  So,

$$E_2 = \{tq_2,\, t \in \mathbb{R}\}$$

  waar $q_2(x) = 3 + x$.

- $\lambda = 4$: Ons benodig skalare a_0, a_1, a_2 sodat

$$\begin{bmatrix} -3 & 3 & 9 \\ 0 & -2 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Hierdie vergelyking het die algemene oplossing

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}, \, t \in \mathbb{R}.$$

So,

$$E_2 = \{tq_4, \, t \in \mathbb{R}\}$$

waar $q_4(x) = 9 + 6x + 1$.

□

4.2.1 Oefeninge

1. Bepaal die eiewaardes en eieruimtes van die lineêre operator

$$T : \mathrm{Poly}_2 \to \mathrm{Poly}_2$$
$$T(p)(x) := \frac{d^2}{dx^2} p(x^2 + x - 2).$$

2. Bepaal die eiewaardes en eieruimtes van die lineêre operator

$$T : \mathrm{Poly}_2 \to \mathrm{Poly}_2$$
$$T(p)(x) := x^2 p\left(\frac{1}{x}\right)$$

4.3 Diagonalisering van matrikse

Definisie 4.3.1 Ons sê dat 'n $n \times n$-matriks A is **diagonaliseerbaar** as daar 'n inverteerbare $n \times n$-matriks P bestaan sodat $\mathsf{P}^{-1}\mathsf{A}\mathsf{P}$ 'n diagonaalmatriks is. ◊

Voorbeeld 4.3.2 $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$ is diagonaliseerbaar, want as

$$\mathsf{P} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

dan

$$\mathsf{P}^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

en ons gaan na,

$$\begin{aligned} \mathsf{P}^{-1}\mathsf{A}\mathsf{P} &= -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ -3 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} -\frac{9}{2} & 0 \\ 0 & -9 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

wat wel 'n diagonaalmatriks is. Meer hieroor volg in die tweede semester! Vir nou is dit al wat jy moet weet. □

Bylaag A

Matrikshersiening

Kom ons hersien 'n paar goed oor matrikse en stel vas watter notasie ons gaan gebruik.

'n $n \times m$-*matriks* A is 'n reghoekige skikking van getalle, met n rye en m kolomme:

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} \mathsf{A}_{11} & \mathsf{A}_{12} & \cdots & \mathsf{A}_{1m} \\ \mathsf{A}_{21} & \mathsf{A}_{22} & \cdots & \mathsf{A}_{2m} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathsf{A}_{n1} & \mathsf{A}_{n2} & \cdots & \mathsf{A}_{nm} \end{bmatrix}$$

Elke A_{ij} dui hier 'n reële getal aan.

> Ek sal altyd matrikse in *'sans serif'*-lettertipe skryf, bv. A. Dit is moeilik om in handgeskrewe teks 'van lettertipe te verander,' maar ek moedig jou aan om ten minste die letters A, B, C, ens. vir matrikse te reserveer, en S, T, ens. vir lineêre afbeeldings!

Twee $n \times m$ matrikse A en B kan bymekaargetel word, om 'n nuwe $n \times m$ matriks $\mathsf{A} + \mathsf{B}$ te verkry:

$$(\mathsf{A} + \mathsf{B})_{ij} := \mathsf{A}_{ij} + \mathsf{B}_{ij}$$

Daar is die *nul* $n \times m$-*matriks*:

$$\mathsf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Jy kan ook 'n $n \times m$-matriks A met 'n skalaar k vermenigvuldig, om 'n nuwe $n \times m$ matriks $k\mathsf{A}$ te verkry:

$$(k\mathsf{A})_{ij} := k\mathsf{A}_{ij}$$

Hulpstelling A.0.1

1. *Saam met hierdie bewerkings is die versameling* $\mathrm{Mat}_{n,m}$ *van alle* $n \times m$ *matrikse 'n vektorruimte.*

2. *Die dimensie van* Mat_{nm} *is* nm*, met die matrikse*

$$\mathsf{E}_{ij}, i = 1 \ldots n,\ j = 1 \ldots m$$

as basis, elk met 'n 1 *in die inskrywing in ry* i *en kolom* j *en nulle orals anders.*

Bewys. Die bewys word aan die leser as 'n oefening oorgelaat. ■

Voorbeeld A.0.2 $\mathrm{Mat}_{2,2}$ het basis

$$\mathsf{E}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathsf{E}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathsf{E}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathsf{E}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

□

Gewoonlik is A 'n matriks, en is A_{ij} die element van die matriks by posisie (i, j). Maar hier is E_{ij} 'n matriks in eie reg! Sy element by posisie (k, l) sal geskryf word as $(\mathsf{E}_{ij})_{kl}$. Ek hoop dit is nie te verwarrend nie. Ons kan 'n elegante formule vir die elemente van E_{ij} skryf met die Kronecker-delta-simbool:

$$(\mathsf{E}_{ij})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl} \tag{A.0.1}$$

Bevestig dat (A.0.1) wel die korrekte formule vir die matrikselemente van E_{ij} is.

Voorbeeld A.0.3 Ons skryf Col_n vir die vektorruimte $\mathrm{Mat}_{n,1}$ van n-dimensional *kolomvektore*, en ons sal die standaard basisvektore E_{i1} van Col_n op eenvoudiger wyse as $\mathbf{e}_i$ skryf:

$$\mathbf{e}_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \mathbf{e}_n := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vektore in Col_n sal in vetdruk, sans-serif geskryf word, bv. $\mathbf{v} \in \mathrm{Col}_n$. □

Toegerus met hierdie bewerkings, vorm die versameling $\mathrm{Mat}_{n,m}$ van alle $n \times m$ matrikse 'n vektorruimte (sien Voorbeeld 1.4.14), met dimensienm Ons skryf Col_n vir die vektorruimte $\mathrm{Mat}_{n,1}$ van n-dimensionele *kolomvektore*.

Die belangrikste bewerking is *matriksvermenigvuldiging*. 'n $n \times k$-matriks A kan van regs met 'n $k \times m$-matriks B vermenigvuldig word om 'n $n \times m$-matriks AB te kry,

$$\begin{bmatrix} \mathsf{A}_{11} & \mathsf{A}_{12} & \cdots & \mathsf{A}_{1k} \\ \mathsf{A}_{21} & \mathsf{A}_{22} & \cdots & \mathsf{A}_{2k} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathsf{A}_{n1} & \mathsf{A}_{n2} & \cdots & \mathsf{A}_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathsf{B}_{11} & \mathsf{B}_{12} & \cdots & \mathsf{B}_{1m} \\ \mathsf{B}_{21} & \mathsf{B}_{22} & \cdots & \mathsf{B}_{2m} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathsf{B}_{k1} & \mathsf{B}_{k2} & \cdots & \mathsf{B}_{km} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathsf{AB})_{11} & (\mathsf{AB})_{12} & \cdots & (\mathsf{AB}_{1m} \\ (\mathsf{AB})_{21} & (\mathsf{AB})_{22} & \cdots & (\mathsf{AB})_{2m} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ (\mathsf{AB})_{k1} & (\mathsf{AB})_{k2} & \cdots & (\mathsf{AB})_{nm} \end{bmatrix}$$

deur die inskrywings van AB as

$$(\mathsf{AB})_{ij} := \mathsf{A}_{i1}\mathsf{B}_{1j} + \mathsf{A}_{i2}\mathsf{B}_{2j} + \cdots + \mathsf{A}_{ik}\mathsf{B}_{kj}$$

te definieer.

Stelling A.0.4 *Die bostaande bewerkings op matrikse bevredig die volgende reëls wanneer ook al die somme en produkte gedefinieer is:*

1. $(\mathsf{A} + \mathsf{B})\mathsf{C} = \mathsf{AC} + \mathsf{BC}$
2. $\mathsf{A}(\mathsf{B} + \mathsf{C}) = \mathsf{AB} + \mathsf{AC}$
3. $(k\mathsf{A})\mathsf{B} = \mathsf{A}(k\mathsf{B}) = k(\mathsf{AB})$

4. $(\mathsf{AB})\mathsf{C} = \mathsf{A}(\mathsf{BC})$

Bewys. Die bewyse van (1) - (3) is roetinewerk wat jy hopelik al voorheen gedoen het. Kom ons bewys (4), om te oefen om Σ-notasie te gebruik! Veronderstel A, B en C het groottes $n \times k$, $k \times r$ en $r \times m$ onderskeidelik, sodat die matriksprodukte sinmaak. Dan:

$$\begin{aligned} ((\mathsf{AB})\mathsf{C})_{ij} &= \sum_{p=1}^{r} (\mathsf{AB})_{ip} \mathsf{C}_{pj} \\ &= \sum_{p=1}^{r} \left(\sum_{q=1}^{k} \mathsf{A}_{iq} \mathsf{B}_{qp} \right) \mathsf{C}_{pj} \\ &= \sum_{p,q} \mathsf{A}_{iq} \mathsf{B}_{qp} \mathsf{C}_{pj} \\ &= \sum_{q=1}^{k} \mathsf{A}_{iq} \left(\sum_{p=1}^{r} \mathsf{B}_{qp} \mathsf{C}_{pj} \right) \\ &= \sum_{q=1}^{k} \mathsf{A}_{iq} (\mathsf{BC})_{qj} \\ &= (\mathsf{A}(\mathsf{BC}))_{ij}. \end{aligned}$$

■

Ek hoop nie die Σ-notasie in die bostaande bewys is te verwarrend nie! Kom ek skryf presies dieselfde bewys uit *sonder* Σ-notasie, in die eenvoudige geval waar A, B en C almal 2×2-matrikse is en ons wil die inskrywing by posisie 11 uitwerk.

$$\begin{aligned} ((\mathsf{AB})\mathsf{C})_{11} &= (\mathsf{AB})_{11} \mathsf{C}_{11} + (\mathsf{AB})_{12} \mathsf{C}_{21} \\ &= (\mathsf{A}_{11}\mathsf{B}_{11} + \mathsf{A}_{12}\mathsf{B}_{21})\mathsf{C}_{11} + (\mathsf{A}_{11}\mathsf{B}_{12} + \mathsf{A}_{12}\mathsf{B}_{22})\mathsf{C}_{21} \\ &= \mathsf{A}_{11}\mathsf{B}_{11}\mathsf{C}_{11} + \mathsf{A}_{12}\mathsf{B}_{21}\mathsf{C}_{11} + \mathsf{A}_{11}\mathsf{B}_{12}\mathsf{C}_{21} + \mathsf{A}_{12}\mathsf{B}_{22}\mathsf{C}_{21} \\ &= \mathsf{A}_{11}(\mathsf{B}_{11}\mathsf{C}_{11} + \mathsf{B}_{12}\mathsf{C}_{21}) + \mathsf{A}_{12}(\mathsf{B}_{21}\mathsf{C}_{11} + \mathsf{B}_{22}\mathsf{C}_{21}) \\ &= \mathsf{A}_{11}(\mathsf{BC})_{11} + \mathsf{A}_{12}(\mathsf{BC})_{21} \\ &= (\mathsf{A}(\mathsf{BC}))_{11}. \end{aligned}$$

Verstaan jy nou die Σ-notasie-bewys? Die kritieke stap (om van die tweede tot die vierde lyn te gaan) word *omruil van die optellingsvolgorde* genoem.

Die *transponent* van 'n $n \times m$-matriks A is die $m \times n$-matriks A^T waarvan die inskrywings gegee word deur

$$(\mathsf{A}^T)_{ij} := \mathsf{A}_{ji}.$$

Bewys dat indien $A \in \mathrm{Mat}_{2,2}$

$$AB = BA$$

vir alle $B \in \mathrm{Mat}_{2,2}$ bevredig, dan is A van die vorm

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}.$$

Bylaag B

Hiper-oppervlaktes

Definisie B.0.1 Laat $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ 'n funksie wees. Die **nul-versameling** van f is die deelversameling $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ gegee deur

$$M := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} : f(\mathbf{x}) = 0\}.$$

$\Diamond$

Definisie B.0.2 Ons sê 'n deelversameling $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ is 'n n**-dimensionele hiper-oppervlakte** as daar 'n funksie $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ bestaan, sodat M die nulversameling van f is, en as vir alle $\mathbf{p} \in M$,

$$\nabla_{\mathbf{p}} f \text{ bestaan en is ongelyk aan } \mathbf{0}.$$

$\Diamond$

Voorbeeld B.0.3 Hiperbool. Laat $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die funksie

$$f(x, y) = y^2 - x^2 - 1$$

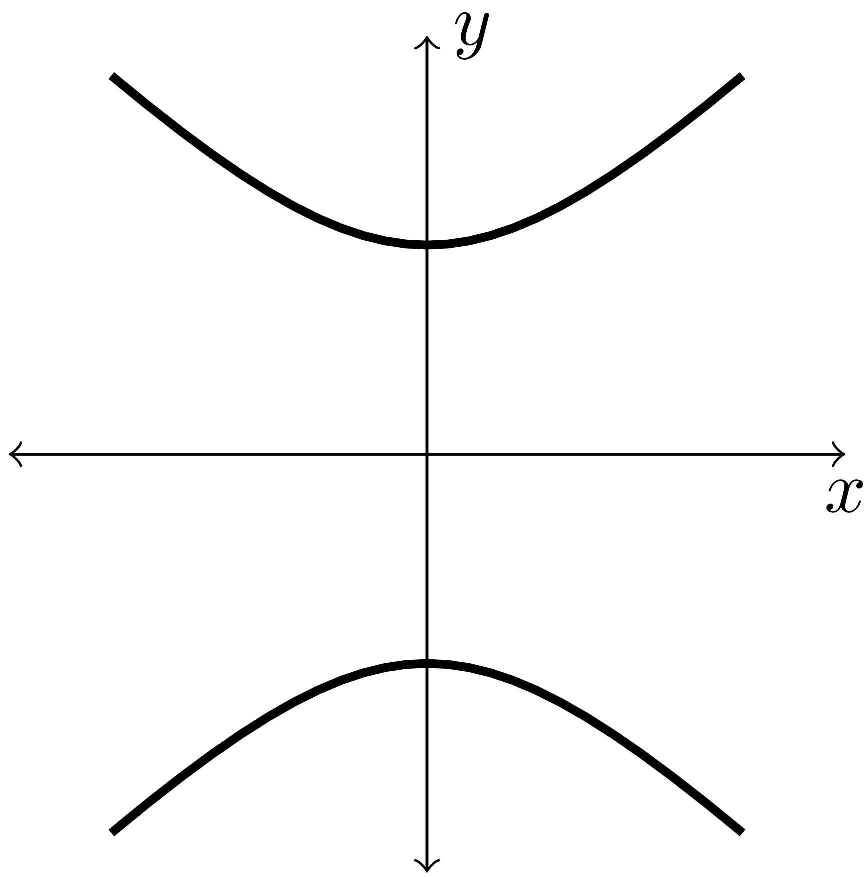
wees.

Teken 'n prentjie van die nul-versameling M van f, en wys dat dit 'n hiper-oppervlakte is.

Oplossing. Die nul-vlak-versameling van f is

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - x^2 - 1 = 0\}$$

wat 'n hiperbool is:



Figuur B.0.4

Om te wys dat M 'n hiper-oppervlakte is, bereken ons eers die gradiënt van f by 'n algemene punt $\mathbf{r} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\nabla_{\mathbf{r}} f = (2y, -2x)$$

Die gradiënt bestaan duidelik oral. Verder, vir 'n punt $\mathbf{p} = (a, b)$ op M, het ons

$$\nabla_{\mathbf{p}} f = (2b, -2a) \text{ waar } b^2 = 1 + a^2$$

Veronderstel $\nabla_{\mathbf{p}} f = (0, 0)$. Dan is, onder andere, $2b = 0$, sodat $b = 0$, wat beteken dat $0 = 1 + a^2$ volgens die vergelyking vir M. Dit is onmoontlik. Daarom $\nabla_{\mathbf{p}} f \neq (0, 0)$ vir alle $\mathbf{p} \in M$, sodat M 'n hiper-oppervlakte is. $\square$

Voorbeeld B.0.5 Twee-sfeer. Laat $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die funksie

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$$

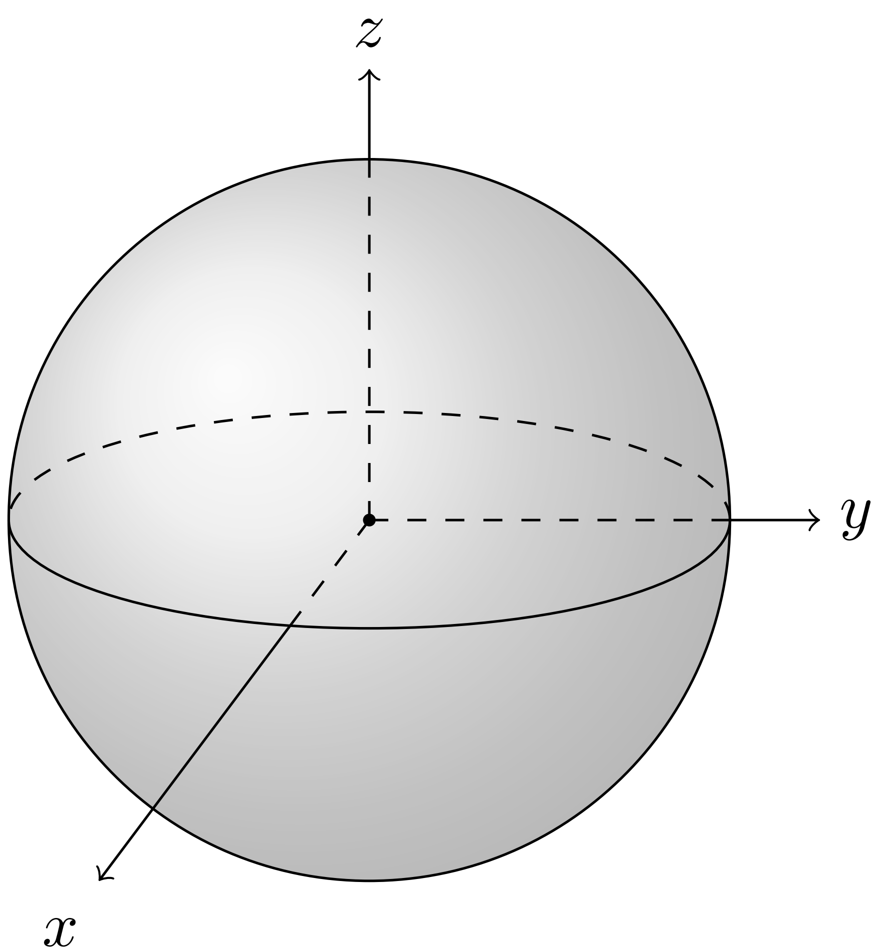
wees.

Teken 'n prentjie van M_f, en wys dat dit 'n differensieerbare hiper-oppervlakte is.

Oplossing. Dan is die vlakversameling van f

$$M_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0\}$$

Dit word die *2-sfeer* genoem, en word hieronder uitgebeeld:



Figuur B.0.6

Om te wys dat dit 'n hiper-oppervlakte is, bereken ons eers ∇f by 'n algemene punt $\mathbf{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\nabla_{\mathbf{r}} f = (2x, 2y, 2z)$$

Dit bestaan duidelik oral. Verder, vir 'n punt $\mathbf{p} = (a, b, c)$ op M, het ons

$$\nabla_{\mathbf{p}} f = (2a, 2b, 2c) \neq (0, 0, 0)$$

aangesien $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Daarom is M 'n hiper-oppervlakte. □

Voorbeeld B.0.7 Laat $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die funksie

$$f(x, y, z) = (2 - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2 - 1$$

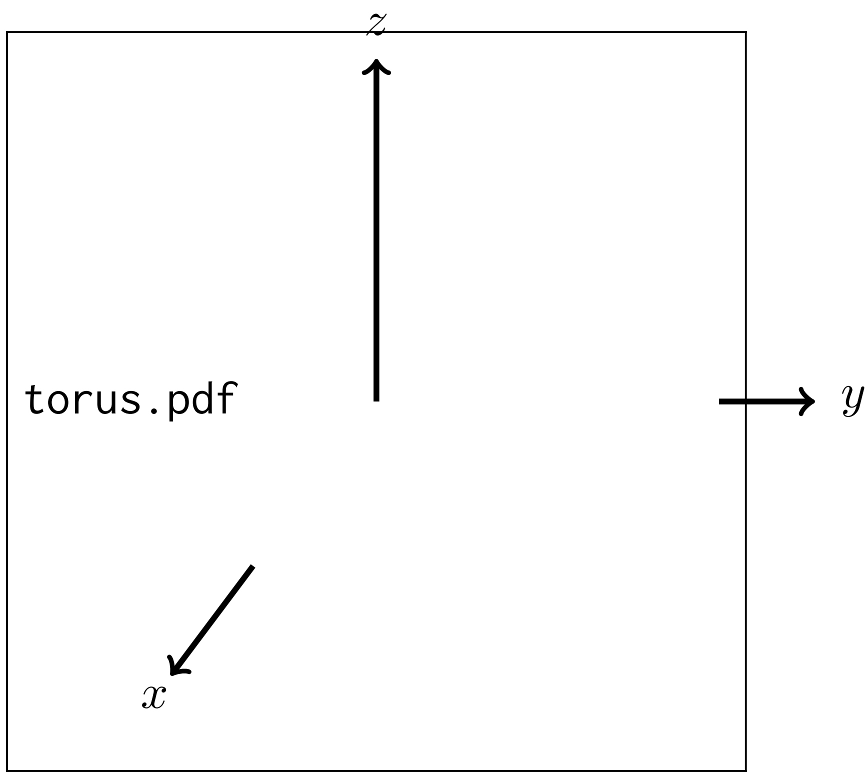
wees.

Teken 'n prentjie van die vlak-versameling M van f, en bewys dat dit 'n hiper-oppervlakte is.

Oplossing. Die nul-versameling van f is

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (2 - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2 - 1 = 0\}$$

Dit is 'n *torus*, en word hieronder uitgebeeld:



Figuur B.0.8

Om te wys dat M 'n hiper-oppervlakte is, moet ons eers ∇f by 'n algemene punt $\mathbf{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ bereken:

$$\nabla_{\mathbf{r}} f = \left(\frac{2x(2 - \sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{2y(2 - \sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 2z \right)$$

Let daarop dat ∇f nie *oral* in $\mathbb{R}^3$ bestaan nie, aangesien daar 'n probleem is as $x^2 + y^2 = 0$ (d.w.s. op die z-as). Maar vir 'n punt $\mathbf{p} = (a, b, c)$ op M, kan ons nie $a^2 + b^2 = 0$ kry nie, aangesien dit volgens die vergelyking vir M sou impliseer dat

$$(2 - \sqrt{0})^2 + c^2 - 1 = 0,$$

met ander woord, $c^2 = -3$, wat onmoontlik is. So $\nabla_{\mathbf{p}} f$ bestaan oral op M. Verder, veronderstel $\nabla_{\mathbf{p}} f = (0, 0, 0)$ en $\mathbf{p}$ lê op M. In besonder het ons dan $2c = 0$ so $c = 0$, en daarom, volgens die vergelyking vir M,

$$(2 - \sqrt{a^2 + b^2})^2 = 1,$$

wat impliseer dat a en b nie albei nul kan wees nie. Dit is 'n teenstelling, daarom is $\nabla_{\mathbf{p}} \neq \mathbf{0}$ oral op M. So M is 'n hiper-oppervlakte. $\square$

Definisie B.0.9 Laat $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 'n hiper-oppervlakte geassosieer met 'n funksie $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ wees. Die **raakruimte** van M at $\mathbf{p} \in M$ is:

$$T_{\mathbf{p}} M := \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ \nabla_{\mathbf{p}} f \cdot \mathbf{v} = 0\}$$

$\Diamond$

Uit Meerveranderlike Calculus, weet ons dat ons die raakruimte van M by p soos volg kan uitdruk:

$$\begin{aligned} T_{\mathbf{p}}M &= \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n+1} \,:\, D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{p}) = 0\} \\ &= \left\{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n+1} \,:\, \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(\mathbf{p} + t\mathbf{v}) = 0\right\} \end{aligned}$$

Hulpstelling B.0.10 *As M ....*

Voorbeeld B.0.11 Bereken 'n basis vir die raakruimte aan die hiperbool M in Voorbeeld B.0.3 by $\mathbf{p} = (1, \sqrt{2})$. Teken 'n prentjie om die resultaat te illustreer.

Oplossing. Ons het reeds die gradi(ë)nt van f by 'n punt $\mathbf{p} = (a, b) \in M$ bereken:

$$\nabla_{\mathbf{p}} = (2b, -2a) \text{ waar } b^2 = 1 + a^2.$$

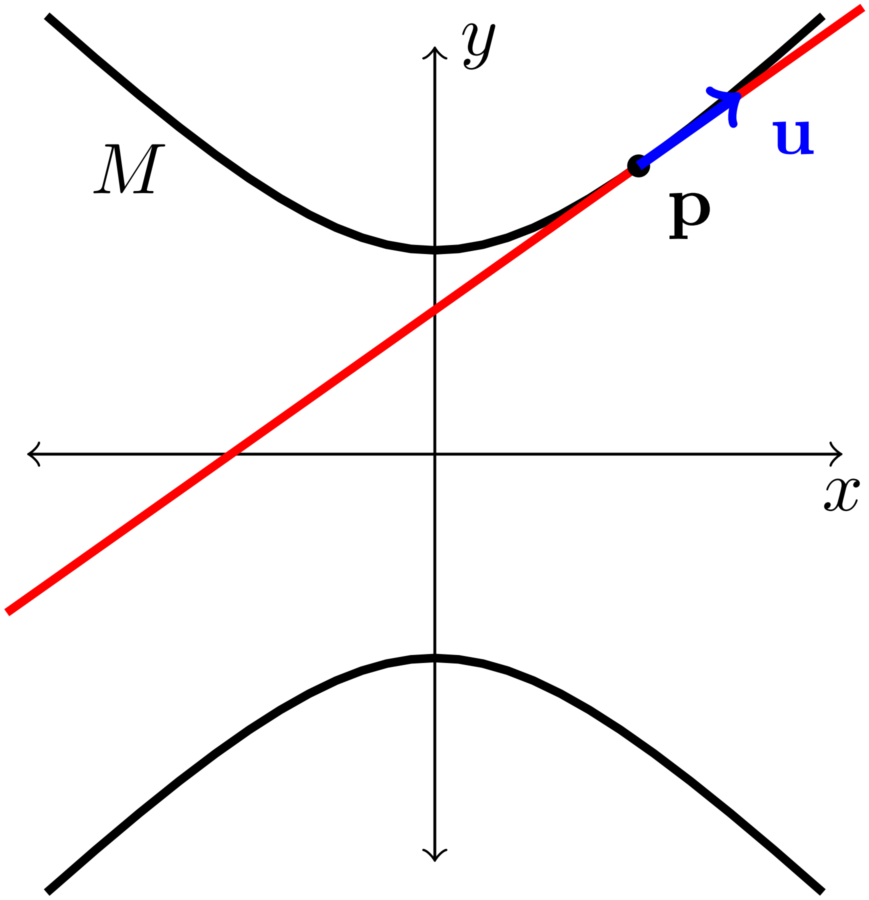
Gevolglik het ons by $\mathbf{p} = (1, \sqrt{2})$ dat

$$\nabla_{\mathbf{p}} f = (2\sqrt{2}, -2).$$

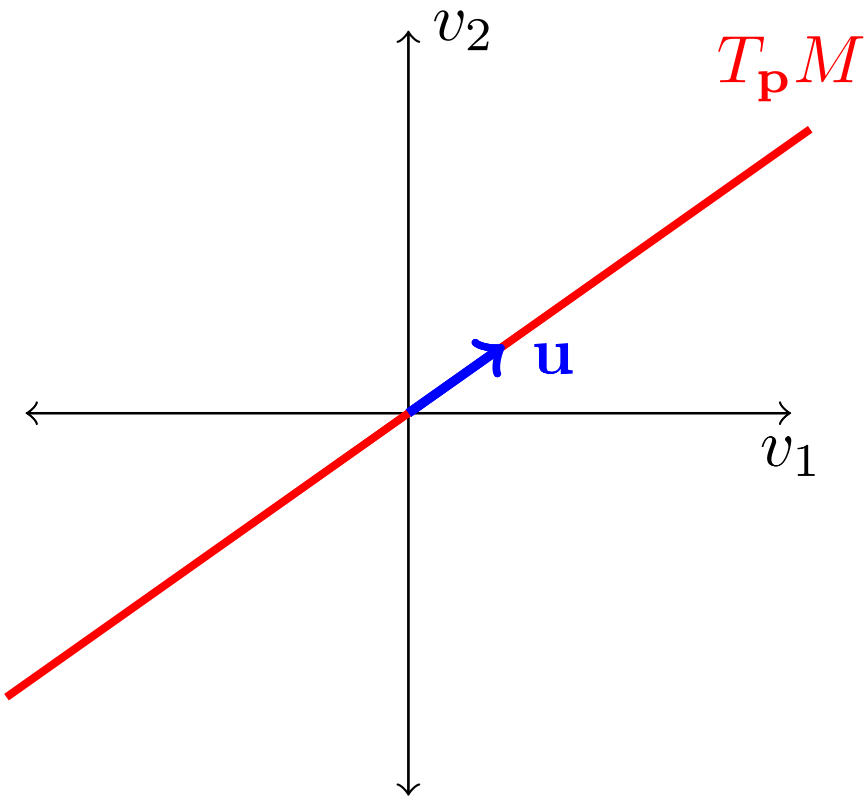
Daarom

$$\begin{aligned} T_{\mathbf{p}}M &= \{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 : \nabla_{\mathbf{p}} f \cdot (v_1, v_2) = 0\} \\ &= \{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 : 2\sqrt{2}v_1 - 2v_2 = 0\} \end{aligned}$$

'n Basis vir $T_{\mathbf{p}}M$ is $\mathbf{u} = (1, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Die visualisering is:



Figuur B.0.12



Figuur B.0.13

Die rooi lyn in die eerste beeld, wat vir illustrasie doeleindes geteken is, is die raakruimte wat geskuif is sodat dit deur $\mathbf{p}$ loop. Die ware raakruimte $T_{\mathbf{p}}M$ loop deur die oorsprong soos in die tweede beeld. $\square$