Clase 05-03-21

jueves, 4 de marzo de 2021 12:11 p. m.

Definición 7 Subespacio vectorial

Se dice que *H* es un subespacio vectorial de *V* si *H* es un subconjunto no vacío de *V* y *H* es un espacio vectorial, junto con las operaciones de suma entre vectores y multiplicación por un escalar definidas para *V*.

Teorema 2 Subespacio Vectorial

Un subconjunto no vacío *H* de un espacio vectorial *V* es un subespacio de *V* si se cumplen las dos reglas de cerradura:

$$\left.\begin{array}{l} \text{i) Si } \bar{x} \in H \text{ y } \bar{y} \in H\text{, entonces } \bar{x}+\bar{y} \in H. \\ \text{ii) Si } \bar{x} \in H\text{, entonces } \alpha\bar{x} \in H \text{ para todo escalar } \alpha. \end{array}\right\} \text{supuestos o hipótesis}$$

Demostración de que *H* es un espacio vectorial:

Para demostrar que *H* es un espacio vectorial, se necesitan cumplir los 10 axiomas mencionados en la Definición 3 bajo las operaciones de suma y multiplicación por escalar definidas en *V*.

- Las dos operaciones de cerradura S1 y M1 se cumplen por hipótesis.
- Como los vectores en *H* son también vectores en *V*, las identidades asociativa S2, conmutativa S5, de distribución M2 y M3, asociativa del producto por un escalar M4 y M5 se cumplen en *H.*
- Sea $\bar{x} \in H$. Entonces $0\bar{x} \in H$ por hipótesis ii) de Teorema 2; pero por Teorema 1 inciso 2), $0\bar{x} = \bar{0}$. De este modo $\bar{0} \in H$ y se cumple el axioma S3.
- Por último, por Teorema 2 inciso ii), $(-1)\bar{x} \in H$ para todo $\bar{x} \in H$. Y por el Teorema 1 inciso 4), $-\bar{x} = (-1)\bar{x}$, por tanto se cumple el axioma S4 y la prueba queda completa.

Teorema 1

Sea V un espacio vectorial. Entonces:

1) $\alpha\bar{0} = \bar{0}$ para todo escalar α.

2) $\underbrace{0}_{\text{escalar } 0}\bar{x} = \underbrace{\bar{0}}_{\text{vector } \bar{0}}$ para todo $\bar{x} \in V$.

3) Si $\alpha\bar{x} = \bar{0}$, entonces $\alpha = 0$ ó $\bar{x} = \bar{0}$ (o ambos).

4) $(-1)\bar{x} = -\bar{x}$ para todo $\bar{x} \in V$.

Ejemplos en clase pp. 313 probs 1, 3, 4, 6. Grossman.

Determine si el subconjunto dado H del espacio vectorial V es un subespacio de V.

1) $V = \mathbb{R}^2$; $H = \{(x,y);\ x = 3,\ y \in \mathbb{R}\}$

$$\left.\begin{array}{l} 3)\ V = \mathbb{R}^2;\ H = \{(x,y);\ x = y\} \\ 4)\ V = \mathbb{R}^2;\ H = \{(x,y);\ y = 2x\} \end{array}\right\} \text{tarea}$$

6) $V=\mathbb{R}^2$; $H=\{(x,y): x^2+y^2\leq 1\}$

Problemas 8, 11, 12, 16 pag 313 Grossman en clase.

1) Sean $\bar{x}, \bar{y} \in H$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

S1) $\bar{x}+\bar{y} \in H$

si $\bar{x}+\bar{y} \in H$: $x=3$, $y \in \mathbb{R}$

Verificación:

$\bar{x}=(x_1,y_1)=(3,y_1)$ Sustituyendo la condición

$\bar{y}=(x_2,y_2)=(3,y_2)$

$$\bar{x}+\bar{y}=(x_1+x_2,y_1+y_2)=(\underbrace{6}_{x},\underbrace{y_1+y_2}_{y})$$

$x\neq 3$

$y=y_1+y_2 \in \mathbb{R}$

$\therefore \bar{x}+\bar{y} \notin H$

M1) $\alpha\bar{x} \in H$

si $\alpha\bar{x} \in H$, $x=3$, $y \in \mathbb{R}$

Verificación:

$\alpha\bar{x}=\alpha(x_1,y_1)=\alpha(3,y_1)$ Sustituyendo la condición

$=(\underbrace{3\alpha}_{x},\underbrace{\alpha y_1}_{y})$ Producto de vector por escalar

$x=3\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ $\therefore$ x no necesariamente es igual a 3 siempre

$\therefore \alpha\bar{x} \notin H$.

H no es subespacio de $\mathbb{R}^2$.

6) $V=\mathbb{R}^2$; $H=\{(x,y); x^2+y^2\leq 1\}$

Sean $\bar{x}, \bar{y} \in H$ y $\alpha \in \mathbb{R}$

S1) $\bar{x}+\bar{y} \in H$

si $\bar{x}+\bar{y} \in H$: $x^2+y^2 \leq 1$

Verificación:

$\bar{x} = (x_1, y_1)$: $x_1^2+y_1^2 \leq 1$

$\bar{y} = (x_2, y_2)$: $x_2^2+y_2^2 \leq 1$

$\bar{x}+\bar{y} = (x_1+x_2, y_1+y_2)$: $(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2 \leq 1$

$x_1^2+2x_1x_2+x_2^2+y_1^2+2y_1y_2+y_2^2 \leq 1$?

Reacomodando: $\underbrace{x_1^2+y_1^2}_{\leq 1} + \underbrace{x_2^2+y_2^2}_{\leq 1} + \underbrace{2x_1x_2+2y_1y_2}_{\leq 1} \leq 1$?

no necesariamente

$\therefore \bar{x}+\bar{y} \notin H$

M1) $\alpha\bar{x} \in H$

si $\alpha\bar{x} \in H$: $x^2+y^2 \leq 1$

Verificación

$\alpha\bar{x} = \alpha(x_1, y_1)$: $x_1^2+y_1^2 \leq 1$

$= (\underbrace{\alpha x_1}_{x}, \underbrace{\alpha y_1}_{y})$

$x^2+y^2 \leq 1$?

$(\alpha x_1)^2+(\alpha y_1)^2 \leq 1$?

$\alpha^2(x_1^2+y_1^2) \leq 1$? No necesariamente

Si $\alpha > 1$ no se cumple.

Por tanto, H no es subespacio de $\mathbb{R}^2$.

8) $V = M_{mn}$; $H = \{D \in M_{mn}$; D es diagonal$\}$

Sean $D_1, D_2 \in H$ y $\alpha \in \mathbb{R}$

S1) $D_1+D_2 \in H$

Si $D_1 + D_2 \in H$: $D_1 + D_2$ es diagonal

Verificación:

$D_1 = [a_{ij}] \mid a_{ij} = 0$ si $i \neq j$ ✓

$D_2 = [b_{ij}] \mid b_{ij} = 0$ si $i \neq j$ ✓

$D_1 + D_2 = [a_{ij}] + [b_{ij}]$

$= [a_{ij} + b_{ij}]$; $a_{ij} + b_{ij} = 0$ si $i \neq j$

$\therefore D_1 + D_2 \in H$

M1) $\alpha D_1 \in H$

Si $\alpha D_1 \in H$: αD_1 es diagonal

Verificación:

$\alpha D_1 = \alpha [a_{ij}]$ sustitución

$= [\alpha a_{ij}]$ producto de matriz por escalar

donde $\alpha a_{ij} = 0$ si $i \neq j$

$\therefore \alpha D_1 \in H$

H es subespacio de M_{mn}

11) $V = M_{mn}$; $H = \{ S \in M_{nn}$; S es simétrica$\}$

Sean $A, B \in H$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

S1) $A + B \in H$

Si $A + B \in H$, $A + B = (A+B)^t$

Verificación:

$A = A^t$
$B = B^t$ } por hipótesis

$A + B = A^t + B^t$ Sumando

$(A^t + B^t) = (A+B)^t$ por Teorema 2.5.1 inciso iii) Grossman pág 128

$(A^t + B^t) = (A+B)^t$ por Teorema 2.5.1 inciso iii) Grossman pág 128

$\therefore\ A+B \in H$

Mi) $\alpha A \in H$

Si $\alpha A \in H$: $\alpha A = (\alpha A)^t$

Verificación:

$\alpha A = (\alpha A)^t$

$= \alpha^t A^t = \alpha A^t$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$= \alpha A$ por hipótesis

$\therefore\ \alpha A \in H$

H es un subespacio vectorial de M_{mn}

Tarea probs 9, 13, 14, 15, 17, 18

16) $V = M_{22}$; $H = \left\{ A = \begin{bmatrix} a+2 & a-2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\}$

Sean $A, B \in H$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

Si) $A+B \in H$

Si $A+B \in H$: $A+B = \begin{bmatrix} a+2 & a-2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$

Verificación:

$A = \begin{bmatrix} a_1+2 & a_1-2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} b_1+2 & b_1-2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$A+B = \begin{bmatrix} a_1+b_1+4 & a_1+b_1-4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad a_1+b_1 = a \in \mathbb{R}$

$A+B = \begin{bmatrix} a+4 & a-4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\therefore$

$A+B \notin H$

$\therefore$ H no es subespacio de M_{22}