Clase 14-10-20

martes, 13 de octubre de 2020 01:17 p. m.

<u>Ejemplo</u> Demostrar que $n+n^2$ es par, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Solución:- $n+n^2 = 2p,\quad p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}$

Para $n=1$:

$$1+1 = 2p$$
$$2 = 2 \text{ para } p=1.$$

Para $n=k$: (Hipótesis)

$$k+k^2 = 2p, \quad p \in \mathbb{N} \text{ para algún } k \in \mathbb{N} \quad ①$$

Para $n=k+1$ (Tesis):

$$(k+1)+(k+1)^2 = 2m, \quad m \in \mathbb{N} \quad ②$$

Desarrollando la tesis:

$$k+1+k^2+2k+1 = 2m$$

$$\underbrace{k+k^2}_{2p} + \underbrace{2k+2}_{2(k+1)} = 2m$$

$$2p+2(k+1) = 2m$$

Dividiendo ambos miembros entre 2:

$$p+k+1 = m$$

donde:

$1 \in \mathbb{N}$
$p \in \mathbb{N}$
$k \in \mathbb{N}$

y $p+k+1 \in \mathbb{N}$ por la cerradura de la suma $\Rightarrow m \in \mathbb{N}$
y la tesis se demuestra porque $2m$ es múltiplo de 2, por lo tanto es un número par y la proposición n^2+n es par, es válida $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$\therefore \; n^2+n = n(n+1) \text{ es par } \forall n \in \mathbb{N}$$

<u>Ejemplo</u> Demostrar que $n(n^2+5)$ es divisible entre 6.

$$n(n^2+5) = 6p, \quad p \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N}.$$

Para $n=1$:

$$1(1+5) = 6p$$
$$6 = 6 \text{ para } p=1 \; ✓$$

Para $n=k$ (Hipótesis):

$$k(k^2+5) = 6p, \quad p \in \mathbb{N} \text{ para algún } k \in \mathbb{N} \quad ①$$

Para $n=k+1$ (Tesis):

$$(k+1)\left[(k+1)^2+5\right]=6m,\ m\in\mathbb{N} \quad ②$$

Desarrollando la tesis:

$$(k+1)\ (k^2+2k+1+5)=6m$$

$$k(k^2+5)+2k^2+k+k^2+2k+1+5=6m$$

$$\underbrace{k(k^2+5)}_{6p}+3k^2+3k+6=6m$$

$$\therefore\ 6p+3k^2+3k+6=6m$$

Dividiendo entre 6:

$$p+\frac{3}{6}(k^2+k+2)=m \longrightarrow ③$$

Ahora: k^2+k es par $\Rightarrow k^2+k=2q,\ q\in\mathbb{N}$

$k^2+k\in\mathbb{N}$

Sustituyendo $k^2+k=2q$ en ③:

$$p+\frac{3}{6}(2q+2)=m$$

$$p+\frac{3(2q)+6}{6}=m$$

$$p+\frac{6q+6}{6}=m$$

$$p+q+1=m,\ m\in\mathbb{N}?$$

$1\in\mathbb{N}$

$p\in\mathbb{N}$

$q\in\mathbb{N}$

$p+q+1\in\mathbb{N}$, $\therefore\ m\in\mathbb{N}$ y $6m\in\mathbb{N}$

$6m$ es múltiplo de 6 y la proposición $n(n^2+5)$ es divisible entre 6, es válida $\forall\ n\in\mathbb{N}$.

Ejemplo. Demostrar por inducción matemática que:

$n(n+1)\underbrace{(n+2)(n+3)(n+4)}$ es múltipo de 12.

Solución:

Como $n(n+1)$ es múltiplo de 2, busquemos probar que:

$(n+2)(n+3)(n+4)$ es múltipo de 6.

Para $n=1$:

$$(1+2)(1+3)(1+4)=(3)(4)(5)=6(10) \text{ es múltiplo de } 6$$

Para $n=k$:

$\underbrace{(k+2)(k+3)(k+4)=6a}$ (Hipótesis), $a\in\mathbb{N}$ ①

Para $n=k+1$: (Tesis) $=6m$ $\quad k+5$

$(k+3)(k+4)(k+5) = (k+3)(k+4)(k+2+3)$ ②

$$= \underbrace{(k+2)(k+3)(k+4)}_{6a} + 3(k+3)(k+4) \quad \text{(factorizamos)}$$

$$= 6a + 3(k+3)(k+4)$$

$$= 6a + 3(k^2+7k+12) = 6a + 3k^2 + 3(7)k + 36$$

$$= 6a + 3k(k+7) + 36 \qquad k(3k+7(3)) \quad 3k(k+7)$$

pero $k(k+7)$ es par (por la misma razón que $k(k+1)$ lo es)

y escribimos: $k(k+7) = 2b,\ b \in \mathbb{N}$

Entonces: $(k+3)(k+4)(k+5) = 6a + 3(2b) + 36 = 6\underbrace{(a+b+6)}_{m}$, $m \in \mathbb{N}$ ya que $a, b, 6 \in \mathbb{N}$ y $a+b+6 \in \mathbb{N}$ por la cerradura de la suma.

Se comprueba la tesis y por tanto $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$ es múltipo de 12.

Ejercicios en clase

1) Demostrar por inducción matemática que $n(n+1)(n+2)$ es divisible entre 3.

2) Demostrar por inducción matemática que $n+(n+1)+(n+2)$ es divisible entre 6.