Clase 18-11-20

martes, 8 de octubre de 2019 05:34 p. m.

Teorema 24

Sea $p(x)$ un polinomio en x con coeficientes en $\mathbb{R}$. Si $\alpha = a+bi$, con $b \neq 0$ es una raíz de $p(x)$, entonces $\bar{\alpha} = a - bi$ es otra raíz de $p(x)$.

Ejemplo Hallar el valor de $k \in \mathbb{R}$ de tal forma que $\alpha = 1-i$ sea raíz del polinomio $p(x) = x^5 - x^4 - 8x^3 + 12x^2 + kx - 12$, y determinar las otras raíces de $p(x)$.

Solución Ya que $k \in \mathbb{R}$, $p(x)$ es de coeficientes reales y por el Teorema 24, $\bar{\alpha} = 1+i$ es también raíz de $p(x)$. Entonces el producto

$(x-(1-i))(x-(1+i)) = x^2 - 2x + 2$ será un factor de $p(x)$.

$(x-1+i)(x-1-i) = x^2 - 2x + 2$

En consecuencia:

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^3 + x^2 - 8x - 6 \\
\hline
x^2 - 2x + 2 & x^5 - x^4 - 8x^3 + 12x^2 + kx - 12 \\
 & -x^5 + 2x^4 - 2x^3 \\
\hline
 & x^4 - 10x^3 + 12x^2 + kx - 12 \\
 & -x^4 + 2x^3 - 2x^2 \\
\hline
 & -8x^3 + 10x^2 + kx - 12 \\
 & 8x^3 - 16x^2 + 16x \\
\hline
 & \cancel{-6x^2} + (16+k)x - \cancel{12} \\
 & \cancel{6x^2} - 12x + \cancel{12} \\
\hline
 & (4+k)x
\end{array}
$$

$4 + k = 0 \Rightarrow k = -4$

Por lo que $p(x) = x^5 - x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 4x - 12$

con $\boxed{\begin{array}{l}\alpha_1 = 1-i \\ \alpha_2 = 1+i\end{array}}$

Veamos los cambios de signo en $p(x)$:

$p(x) = x^5 - x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 4x - 12$ 3 ó 1 rrp

$p(-x) = -x^5 - x^4 + 8x^3 + 12x^2 + 4x - 12$ 2 ó cero rrn

	1a	2a	3a	4a
rrp	3	1	3	1
rrn	2	2	0	0
rc	0	2	2	4
TOTAL	5	5	5	5

$p(x) = (x-(1-i))(x-(1+i))\, q_1(x)$

$p(x) = (x^2 - 2x + 2)\, q_1(x)$

donde $q_1(x) = x^3 + x^2 - 8x - 6$ 1 rrp

$q_1(-x) = -x^3 + x^2 + 8x - 6$ 2 ó cero rrp factores de $a_0 = -6$ (p): $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

factores de $a_n = 1$ (q): ± 1

prr $\left(\frac{p}{q}\right)$: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

Con $\alpha_3 = 1$:

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 1 & -8 & -6 \\ & & 1 & 2 & -6 \\ \hline & 1 & 2 & -6 & \boxed{-12} \end{array}$$ no es raíz

con $\alpha_3 = 2$:

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 1 & -8 & -6 \\ & & 2 & 6 & -4 \\ \hline & 1 & 3 & -2 & \boxed{-10} \end{array}$$ no es raíz

con $\alpha_3 = 3$:

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & 1 & -8 & -6 \\ & & 3 & 12 & 12 \\ \hline & 1 & 4 & 4 & \boxed{6} \end{array}$$ no es raíz

con $\alpha_3 = 6$:

$$\begin{array}{r|rrrr} 6 & 1 & 1 & -8 & -6 \\ & & 6 & 42 & \\ \hline & 1 & 7 & 34 & \boxed{+} \end{array}$$ no es raíz

Probamos con las raíces reales negativas:

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 1 & -8 & -6 \\ & & -1 & 0 & 8 \\ \hline & 1 & 0 & -8 & \boxed{2} \end{array}$$ no es

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 1 & -8 & -6 \\ & & -2 & 2 & 12 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & \boxed{+6} \end{array}$$ no es

$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & 1 & 1 & -8 & -6 \\ & & -3 & 6 & 6 \\ \hline & 1 & -2 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$ $\boxed{\alpha_3 = -3}$ es raíz

Entonces $q_1(x) = (x+3)\, q_2(x)$

$q_2(x) = x^2 - 2x - 2$

$$\alpha_{4,5} = \frac{2 \pm \sqrt{4+8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2}$$

$\boxed{\alpha_4 = 1 + \sqrt{3}}$ raíz real positiva

$\boxed{\alpha_5 = 1 - \sqrt{3}}$ raíz real negativa

$\Big\}$ raíces irracionales

$\therefore$ La 2ª alternativa fue la ganadora.

$$p(x) = (x-1-i)(x-1+i)(x+3)(x-(1+\sqrt{3}))(x-(1-\sqrt{3}))$$

Ejemplo Encontrar todas las raíces del polinomio:

$$f(x) = 4x^6 - 5x^4 + ax^2 + 2, \quad \text{si } f(i) = 0.$$

Solución:

Si i es raíz, por el Teorema 24 podemos establecer que $-i$ también es raíz; por lo tanto, el producto de los factores $(x-i)$ y $(x+i)$ también será un factor de $f(x)$.

Hagamos el producto: $(x-i)(x+i) = x^2 + ix - ix - i^2 = x^2+1$

Por lo tanto $f(x)$ es divisible entre x^2+1, es decir:

$$\begin{array}{r|l}
 & 4x^4 - 9x^2 + 9+a \\
\hline
x^2+1 & 4x^6 + 0x^5 - 5x^4 + 0x^3 + ax^2 + 0x + 2 \\
 & -4x^4 \\
\hline
 & \cancel{-9x^4} \quad + ax^2 \quad + 2 \\
 & \cancel{+9x^4} \quad + 9x^2 \\
\hline
 & (9+\cancel{a})x^2 \\
 & -(\cancel{9}+a)x^2 \quad -9-a \\
\hline
 & -7-a
\end{array} \implies a = -7$$

$\therefore f(x) = (x^2+1)\, q_1(x)$ $\qquad \alpha_1 = i$, $\alpha_2 = -i$

donde:

$$q_1(x) = 4x^4 - 9x^2 + 2$$

Aplicando la Regla de los Signos de Descartes:

$q_1(x) = 4x^4 - 9x^2 + 2$ $\quad$ 2 ó 0 rrp

$q_1(-x) = 4x^4 - 9x^2 + 2$ $\quad$ 2 ó 0 rrn

El cuadro de alternativas quedaría así:

	1ª	2ª	3ª	4ª
rrp	2	0	2	0
rrn	2	2	0	0
rc	2	4	4	6
TOTAL	6	6	6	6

Factores de $a_0 = 2$ (p): $\pm1, \pm2$

Factores de $a_n = 4$ (q): $\pm1, \pm2, \pm4$

prr $\left(\frac{p}{q}\right)$: $\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}, \pm 2$

Probando con $\alpha_3 = 1$:

$$\begin{array}{c|ccccc} 1 & 4 & 0 & -9 & 0 & 2 \\ & & 4 & 4 & -5 & -5 \\ \hline & 4 & 4 & -5 & -5 & \lfloor -3 \end{array} \text{ no es}$$

Con $\alpha_3 = \frac{1}{2}$:

$$\begin{array}{c|ccccc} \frac{1}{2} & 4 & 0 & -9 & 0 & 2 \\ & & 2 & 1 & -4 & -2 \\ \hline & 4 & 2 & -8 & -4 & \lfloor 0 \end{array} \text{ sí es raíz} \quad \boxed{\alpha_3 = \frac{1}{2}}$$

$\therefore q_1(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right) q_2(x)$

donde $q_2(x) = 4x^3 + 2x^2 - 8x - 4$

Con $\alpha_4 = \frac{1}{2}$:

$$\begin{array}{c|cccc} \frac{1}{2} & 4 & 2 & -8 & -4 \\ & & 2 & 2 & -3 \\ \hline & 4 & 4 & -6 & \lfloor -7 \end{array} \text{ no es}$$

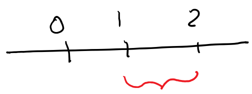
Con $\alpha_4 = \frac{1}{4}$:

$$\begin{array}{c|cccc} \frac{1}{4} & 4 & 2 & -8 & -4 \\ & & 1 & \frac{3}{4} & -29 \\ \hline & 4 & 3 & -\frac{29}{4} & \lfloor -33 \end{array} \text{ no es}$$

Con $\alpha_4 = 2$:

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 4 & 2 & -8 & -4 \\ & & 8 & 20 & 24 \\ \hline & 4 & 10 & 12 & \lfloor +20 \end{array}$$

hay un cambio de signo entre 2 y 1

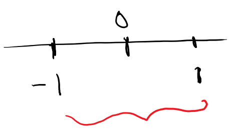


aquí hay una raíz

Con $\alpha_4 = -1$:

$$\begin{array}{c|cccc} -1 & 4 & 2 & -8 & -4 \\ & & -4 & 2 & 6 \\ \hline & 4 & -2 & -6 & \lfloor 2 \end{array}$$

no es raíz, pero hay un cambio de signo entre 1 y -1

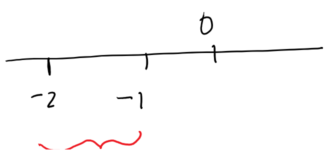


aquí hay una raíz

con $\alpha_4 = -2$:

$$\begin{array}{c|cccc} -2 & 4 & 2 & -8 & -4 \\ & & -8 & 12 & -8 \\ \hline & 4 & -6 & 4 & \lfloor -12 \end{array}$$

hay un cambio de signo entre -1 y -2



$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & & -8 & 12 & -8 \\ \hline & 4 & -6 & 4 & \boxed{-12} \end{array}$$ hay un cambio de signo entre -1 y -2

-2 -1

aquí hay una raíz

Con $\alpha_4 = -\frac{1}{2}$:

$$\begin{array}{r|rrrr} -\frac{1}{2} & 4 & 2 & -8 & -4 \\ & & -2 & 0 & 4 \\ \hline & 4 & 0 & -8 & \underline{0} \end{array} \quad \alpha_4 = -\frac{1}{2} \text{ es raíz}$$

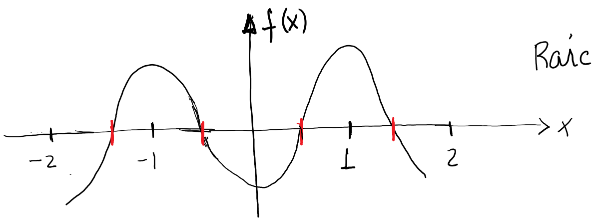
$\therefore q_1(x) = \left(x+\frac{1}{2}\right) q_2(x)$

$q_2(x) = 4x^2 - 8$

$$\alpha_{5,6} = \frac{\pm\sqrt{128}}{8} = \frac{\pm 8\sqrt{2}}{8} = \pm\sqrt{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_5 = \sqrt{2} \\ \alpha_6 = -\sqrt{2} \end{array}\right\} \text{raíces irracionales}$$

$$\therefore f(x) = 4(x+i)(x-i)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)$$



Raíces reales del polinomio $f(x) = 4x^6 - 5x^4 - 7x^2 + 2$, si $f(i) = 0$.

Tarea Resolver:

1) $p(x) = 6x^5 - 5x^4 - 41x^3 + 71x^2 - 37x + 6$

2) $p(x) = 8x^7 - 4x^5 + 3x^4 - 2x^2$

3) $p(x) = x^4 - 9x^3 + 25x^2 - 19x - 6$

4) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1$

Ejercicio Obtener las raíces del polinomio

$$p(x) = x^6 + 4x^4 - x^2 - 4$$

Solución: el polinomio es de grado 6, por lo que se tendrán 6 raíces.

Haciendo un cambio de variable: $x^2 = \omega$ tenemos:

$$p(\omega) = \omega^3 + 4\omega^2 - \omega - 4$$

Por Regla de los Signos de Descartes:

$p(w) = w^3 + 4w^2 - w - 4$ 1 rrp

$p(-w) = -w^3 + 4w^2 + w - 4$ 2 ó 0 rrn

por el cambio de variable ésto no puede suceder al mismo tiempo

Factores de $a_0 = -4$ (p) : $\pm 1, \pm 2, \pm 4$

Factores de $a_n = 1$ (q) : ± 1

prr: $\pm 1, \pm 2, \pm 4$

Con $\alpha_1 = 1$: $w = x^2$

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 4 & -1 & -4 \\ & & 1 & 5 & 4 \\ \hline & 1 & 5 & 4 & \underline{0} \end{array}$$

$\alpha_1 = 1 \Rightarrow x_{1,2}^2 = 1$; $x_{1,2} = \pm\sqrt{1}$ → $x_1 = 1$, $x_2 = -1$

$p(w) = (w-1)\, q_1(w)$

$q_1(w) = w^2 + 5w + 4$

$q_1(w) = (w+4)(w+1) \Longrightarrow \alpha_3 = -4$; $x_{3,4}^2 = -4$; $x_{3,4} = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i$ → $x_3 = 2i$, $x_4 = -2i$

$\alpha_5 = -1$; $x_{5,6}^2 = -1$; $x_{5,6} = \pm\sqrt{-1}$ → $x_5 = +i$, $x_6 = -i$

$\therefore\ p(x) = (x-1)(x+1)(x-2i)(x+2i)(x-i)(x+i)$