Clase 11-01-21

domingo, 10 de enero de 2021 01:39 p. m.

De la clase anterior, teníamos:

Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -5 \end{bmatrix}$ $\det A = 16$

Multiplicando la 3ª columna por -3 se tiene:

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}} \longrightarrow \underset{B}{\begin{bmatrix} 1 & -1 & -6 \\ 3 & 1 & -12 \\ 0 & -2 & -15 \end{bmatrix}}$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -6 \\ 3 & 1 & -12 \\ 0 & -2 & -15 \end{vmatrix} = -48 = -3(16) = -3 \det A$$

$$\therefore \det A = \frac{\det B}{-3} = \frac{-48}{-3} = 16$$

Intercambiando el renglón 1 y el renglón 2 de B:

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -12 \\ 1 & -1 & -6 \\ 0 & -2 & -15 \end{bmatrix} \; ; \; \det C = 0(-6-12) + 2(-18+12) - 15(-3-1)$$

$$\det C = -12 + 60 = 48 \quad ; \quad \det C = -\det B$$

Ahora, juntando las operaciones:

$$\underset{C_3 \to -3C_3}{\overset{A}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix}}} \xrightarrow{-1/3} \underset{R_1 \leftrightarrow R_2}{\overset{B}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -6 \\ 3 & 1 & -12 \\ 0 & -2 & -15 \end{vmatrix}}} \xrightarrow{-} \overset{C}{\begin{vmatrix} 3 & 1 & -12 \\ 1 & -1 & -6 \\ 0 & -2 & -15 \end{vmatrix}} \quad |C| = 48$$

$$\det A = -\frac{1}{3}(-1) \det C = \frac{1}{3}(48) = 16$$

<u>Ejemplo</u> Calcule $|A|$, donde $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 9 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 9 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & -11 & 2 \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -16 & -18 \\ 0 & 0 & -32 & -26 \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -16 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} \cdots \\ 2 & 1 & 9 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{R_3 \to R_3 - 2R_1 \\ R_4 \to R_4 - 3R_1}} \begin{vmatrix} \cdots \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & -11 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{R_3 \to R_3 - 5R_2 \\ R_4 \to R_4 - 7R_2}} \begin{vmatrix} \cdots \\ 0 & 0 & -16 & 10 \\ 0 & 0 & -32 & -26 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_4 \to R_4 - 2R_3} \begin{vmatrix} \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}$$

$$\therefore |A| = (1)(-1)(-16)(10) = 160$$

Ejercicios Evalúe el determinante usando los métodos de esta sección:

10) $$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 5 & -2 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow[C_1 \leftrightarrow C_2]{-} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ -2 & 5 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow[C_1 \to (-1)C_1]{\left(\frac{1}{-1}\right)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow[R_2 \leftrightarrow R_3]{-} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 6 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 4R_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 18 \end{vmatrix}$$

$$\therefore |A| = (-)(-)(-)(1)(1)(18) = -18$$

11) $$\begin{array}{ccc} + & - & + \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow[R_1 \leftrightarrow R_2]{-} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow[R_2 \leftrightarrow R_3]{-} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$ Determinante de una matriz triangular superior

$$\therefore |A| = (-)(-)(1)(-2)(5) = -10$$

15) $$\begin{vmatrix} -10 & 7 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & -1 & -7 \\ -10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -1 \end{vmatrix} = ?$$

Tarea Pág 206 ejercicios 18-27

Pag 206 probs 28-36 Grossman Clase

Teorema 37

Si A es invertible, entonces:

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

Demostración

$$AA^{-1} = I \quad \text{def } 54$$

$$\det(AA^{-1}) = \det I$$

$$(\det A)(\det A^{-1}) = 1 \quad \text{Teorema } 35$$

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

Definición 66 Matriz Adjunta Grossman pag. 210

Sea A una matriz de $n \times n$ y sea B la matriz de sus cofactores. Entonces, la adjunta de A, denotada como adj A, es la transpuesta de la matriz B, es decir:

$$B = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \cdots & A_{2n} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \cdots & A_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad \text{adj } A = B^t = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \cdots & A_{n2} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & \cdots & A_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \quad ; \quad A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$$

Ejemplo Cálculo de la adjunta de $A_{3\times3}$ Grossman pag. 211

$$A = \begin{bmatrix} \overset{+}{2} & \overset{-}{4} & \overset{+}{3} \\ \overset{-}{0} & \overset{+}{1} & \overset{-}{-1} \\ \overset{+}{3} & \overset{-}{5} & \overset{+}{7} \end{bmatrix}$$

Solución

$$A_{11} = +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 12, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{13} = +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = -13 \quad A_{22} = +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 5 \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = -13, \quad A_{22} = +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{31} = +\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -7, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{33} = +\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

Entonces:

$$B = \begin{bmatrix} 12 & -3 & -3 \\ -13 & 5 & 2 \\ -7 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{adj} A = B^t = \begin{bmatrix} 12 & -13 & -7 \\ -3 & 5 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

¿Para qué sirve??

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A \quad \text{def. 67}}$$

$$\det A = 3 \implies A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 12 & -13 & -7 \\ -3 & 5 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Y si $\det A \neq 0$: $\bar{x} = A^{-1} \bar{b}$ SOLUCIÓN ÚNICA

$$A\bar{x} = b$$
$$A^{-1} A \bar{x} = A^{-1} \bar{b}$$
$$I \bar{x} = A^{-1} \bar{b}$$
$$\bar{x} = A^{-1} \bar{b}$$

LA ADJUNTA Y LA INVERSA DE UNA MATRIZ DE 2X2

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$A_{11} = +a_{22}$ $\qquad$ $A_{12} = -a_{21}$

$A_{21} = -a_{12}$ $\qquad$ $a_{22} = a_{11}$

$A_{21} = -a_{12}$ $\quad a_{22} = a_{11}$

$\therefore B = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}$ $\quad \boxed{\text{adj}\, A = B^t = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \quad \text{def. } 68}$

$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj} A \longrightarrow \boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \quad \text{def. } 69}$

Grossman pag. 214 Nota 1

<u>Teorema Resumen</u> Sea $A_{n \times n}$. Entonces:

1) A es invertible.
2) El sistema $A\bar{x} = \bar{0}$ tiene solución única $(\bar{x} = \bar{0})$
3) El sistema $A\bar{x} = \bar{b}$ tiene solución única $(\bar{x} = A^{-1}\bar{b})$
4) $[A|I] \to \cdots \to [I|A^{-1}]$
5) A es el producto de matrices elementales.
6) n pivotes
7) $\det A \neq 0$.