Clase 23-11-20

domingo, 22 de noviembre de 2020 01:34 p. m.

Solución problemas pares Grossman pp. 6

2) $2x+3y=3$
$-2x-3y=-3$

$\Delta=(2)(-3)-(3)(-2)=-6+6=0$ → infinidad de soluciones ó no hay solución

Resolviendo:

$$\begin{array}{r} 2x+3y=3 \\ -2x-3y=-3 \\ \hline 0=0 \end{array}$$

Sistema Consistente Indeterminado → infinidad de soluciones.

Solución general: $\left(x, \overset{y}{\frac{3-2x}{3}}\right),\ x\in\mathbb{R}$

o bien: $\left(\overset{x}{\frac{3-3y}{2}}, y\right),\ y\in\mathbb{R}$

4) $-2x \quad =1$
$4x-3y=0$

$\Delta=\det S=|S|$

$\Delta=(-2)(-3)-4(0)=6 \Rightarrow$ solución única

Resolviendo:

$$\begin{array}{r} -2x \quad =1 \\ 4x-3y=0 \end{array} \quad (2) \quad \begin{array}{r} -4x \quad =2 \\ 4x-3y=0 \\ \hline -3y=2 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \therefore y=-\frac{2}{3} \\ x=-\frac{1}{2} \end{array}\right\} P=\left(-\frac{1}{2},-\frac{2}{3}\right)$$

solución única
Sistema Consistente Determinado

6) $3x-7y=-5$
$4x-3y=-2$

$\Delta=-9+28=19\neq 0 \Rightarrow$ sol. única

$$x_1=\frac{(-3)(-5)-(-7)(-2)}{19}=\frac{15-14}{19}=\frac{1}{19}$$

$$x_2=\frac{(3)(-2)-(4)(-5)}{19}=\frac{-6+20}{19}=\frac{14}{19}$$

utilizando la sol. 4a) y 4b)

$$x_1=\frac{a_{22}b_1-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \quad (4a)$$

$$x_2=\frac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \quad (4.b)$$

$$\boxed{P=\left(\frac{1}{19},\frac{14}{19}\right)}$$

SOLUCIÓN ÚNICA

8) $$\begin{array}{r} 7x+4y=10 \\ -7x-4y=0 \\ \hline 0=10 \end{array}$$ → No hay solución: Sistema Inconsistente

<u>SISTEMAS DE m ecuaciones con n incógnitas: eliminación de Gauss-Jordan y eliminación gaussiana.</u> (Grossman pag. 8)

$$
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \qquad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
\end{array}
\qquad (A)
$$

Se describe un método para encontrar todas las soluciones (si las hay), de un sistema de m-ecuaciones con n incógnitas. Al igual que en el caso de 2x2, estos sistemas tendrán solución única o infinidad de soluciones o no tendrán solución.

Sea el sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas:

$$
\left.
\begin{array}{l}
2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 18 \\
4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 24 \\
3x_1 + x_2 - 2x_3 = 4
\end{array}
\quad (S1) \right\} \text{Sistema Lineal no Homogéneo}
$$

Definición 33 Matriz de Coeficientes de un sistema de ecuaciones

Es un arreglo rectangular de números. Por ejemplo, la matriz de coeficientes del sistema (S1) es:

$$
A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}
$$

Definición 34 Orden o Tamaño de una matriz

Una matriz con m renglones y n columnas tiene tamaño $m \times n$.

Por ejemplo, la matriz A es de tamaño 3×3.

Definición 35 Matriz aumentada de un sistema

Es cuando agregamos la columna de términos independientes a la matriz de coeficientes. Para el sistema (S1) tendremos la siguiente matriz aumentada:

$$
A|\bar{b} = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right]
$$

OPERACIONES ELEMENTALES POR RENGLONES.- Sirven para obtener la solución de un sistema, y son 3: (Grossman pag. 11)

1) Multiplicar o dividir un renglón por un número diferente de cero.

2) Sumar un múltiplo de un renglón a otro renglón.

3) Intercambiar dos renglones.

El proceso de aplicar las operaciones elementales por renglones para simplificar una matriz aumentada se llama REDUCCIÓN POR RENGLONES.

Notación o Codificación (Grossman pag. 11)

1) $R_i \to cR_i$ reemplaza el i-ésimo renglón por ese mismo renglón multiplicado por c.

2) $R_j \to R_j + cR_i$ sustituye el j-ésimo renglón por la suma del renglón j más el renglón i multiplicado por c.

3) $R_i \leftrightarrow R_j$ intercambia los renglones i y j.

Definición 36 Forma escalonada reducida por renglones FERR (Grossman pag. 14)

Una matriz se encuentra en la forma escalonada reducida por renglones si se cumplen las siguientes condiciones:

1) Todos los renglones (si los hay) cuyos elementos son todos cero aparecen en la parte inferior de la matriz.

2) El primer número diferente de cero (comenzando por la izquierda) en cualquier renglón cuyos elementos no todos son cero, es 1.

3) Si dos renglones sucesivos tienen elementos distintos de cero, entonces el primer 1 en el renglón de abajo está más hacia la derecha que el primer 1 en el renglón de arriba.

4) Cualquier columna que contiene el primer 1 en un renglón, tiene ceros en el resto de sus elementos. El primer número diferente de cero en un renglón (si lo hay) se llama <u>pivote</u> para ese renglón.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplos de matrices en la FERR

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Las matrices a) y b) tienen 3 pivotes. Las demás tienen 2 pivotes.

Definición 37 Eliminación de Gauss-Jordan

Se escribe la matriz de coeficientes aumentada del sistema $A|\vec{b}$.
A continuación se reduce por renglón la matriz de coeficientes a la FERR. La columna de términos independientes también se ve afectada por la reducción por renglones.

Ejemplo Resolver el sistema (S1) utilizando las operaciones elementales por renglón (o proceso de reducción por renglones).

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 18 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 24 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 4 \end{aligned} \quad \text{(S1)}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[R_1 \to \frac{R_1}{2}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{R_2 \to R_2 - 4R_1 \\ R_3 \to R_3 - 3R_1}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{array}\right] \xrightarrow[R_2 \to \frac{R_2}{-3}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{R_1 \to R_1 - 2R_2 \\ R_3 \to R_3 + 5R_2}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to -R_3]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{R_2 \to R_2 - 2R_3 \\ R_1 \to R_1 + R_3}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 4 \\ x_2 &= -2 \\ x_3 &= 3 \end{aligned}\right\} \text{Sistema consistente determinado}$$

La solución del sistema es SOLUCIÓN ÚNICA

Ejemplo Resolver el siguiente sistema por medio de la Eliminación de Gauss-Jordan y clasificarlo.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 18 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 24 \\ 2x_1 + 7x_2 + 12x_3 &= 30 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 2 & 7 & 12 & 30 \end{array}\right] \xrightarrow[R_1 \to \frac{R_1}{2}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 2 & 7 & 12 & 30 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{R_2 \to R_2 - 4R_1 \\ R_3 \to R_3 - 2R_1}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & 3 & 6 & 12 \end{array}\right] \xrightarrow[R_2 \to \frac{R_2}{-3}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & 12 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{R_1 \to R_1 - 2R_2 \\ R_3 \to R_3 - 3R_2}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 1 + x_3 \\ x_2 &= 4 - 2x_3 \\ x_3 &\in \mathbb{R} \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} \text{Sistema Consistente Indeterminado} \\ \text{(infinidad de soluciones)} \end{array}$$