



Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Estudios Superiores Acatlán

Apuntes
Procesos Estocásticos

Autor:

17 de enero de 2025

Índice

1. 29/01/2024	3
1.1. Contacto	3
1.2. Evaluacion	3
2. 31/01/2024	3
2.1. Repaso de probabilidad	3
2.2. Espacio Muestral	3
2.3. Evento	3
2.4. Eventos mutuamente excluyentes	3
2.5. Función de Probabilidad	3
2.6. Probabilidad condicional	4
2.7. Ley multiplicativa de la probabilidad	4
2.8. Variable aleatoria	5
2.9. Distribucion de probabilidad	5
3. 02/02/2024	6
3.1. Repaso de probabilidad	6
3.2. Distribuciones discretas	6
3.3. Esperanza matematica de distribuciones discretas	6
3.4. Varianza de una variable aleatoria discreta	6
3.5. Distribuciones continuas	6
3.6. Esperanza matematica de distribuciones continuas	7
4. 07/02/2024	8
4.1. Unidad 1. Elementos de procesos estocásticos	8
5. 09/02/2024	8
5.1. Clasificacion de los pcesos estocasticos	8
6. Proceso de Bernoulli	9
7. Caminata Aleatoria Simple	10
8. El Problema del Jugador	13
9. Cadenas de Markov	16
9.1. Probabilidades de Transición	16
9.2. Ejemplo	17
9.3. Ejemplo	18
10. Problemas de transición	18
10.1. Vector de Probabilidad Inicial	18
10.1.1. Ejemplo	19
11. Ecuaciones de Chapman Kolmogorov	20
12. Clasificación de los estados	21
13. Comportamiento Asintótico	22

14.Tiempos de primera pasada	24
14.1. Probabilidades de absorcion	26
14.2. Practica 5	26
15.Enumeración exhaustiva de políticas	27
16.12 de abril del 2024 IMPORTANTE	29
16.1. Solución por programacion lineal	33
17.17 de abril del 2024	34
18.Método de Mejoramiento de Politicas	35
18.1. Algoritmo	36
19.Método de Mejoramiento de Politicas con Descuento	37
20.Método de Aproximaciones Sucesivas	39
21.Practica	43
22.Proceso de Poisson, markovianos y no markovianos	46
23.Procesos de Markov	49
24.Proceso de muerte pura	50
25.13/05/2024	50
25.1. Proceso de nacimiento y muerte	50
26.Ejemplo	52
26.1. Parámetros del Sistema	52
27.Fórmulas	52
27.1. Cálculos	52

1. 29/01/2024

1.1. Contacto

- Numero: 5531185399
- Clave SEA: fvuzef

1.2. Evaluacion

- 2 Exámenes parciales 60 %
 - 1er examen → viernes de la semana 9
 - 2o examen → viernes de la semana 15
- Tareas, Ejercicios, Practicas 20 %
- Proyecto final 20 %
 - Paquete, software de 6 algoritmos que resuelvan cualquier proceso markoviano de decision

2. 31/01/2024

2.1. Repaso de probabilidad

2.2. Espacio Muestral

El espacio muestral, generalmente denotado por S , representa el conjunto completo de todos los posibles resultados individuales de un experimento aleatorio. Este conjunto puede ser finito o infinito, y los elementos dentro de él pueden ser numerables o no numerables. En esencia, el espacio muestral abarca todas las eventualidades que pueden surgir en un experimento, configurando así el universo de posibilidades a considerar en el análisis probabilístico.

2.3. Evento

Un evento, en el contexto de la probabilidad, se refiere a cualquier subconjunto específico del espacio muestral. Esencialmente, es una colección de resultados del espacio muestral que comparten una o más características comunes. Los eventos son fundamentales en el estudio de la probabilidad, ya que representan los diferentes resultados que se pueden analizar y sobre los cuales se calculan las probabilidades.

2.4. Eventos mutuamente excluyentes

También llamados eventos disjuntos son aquellos que no tienen resultados en común, es decir:

$$E_1 \cap E_2 = \emptyset$$

2.5. Función de Probabilidad

Sean S cualquier espacio muestral y E cualquier evento de este. Se llamará función de probabilidad sobre el espacio muestral S a $P(E)$ si satisface los siguientes axiomas:

1. **Axioma 1 (No negatividad):** Para cualquier evento E en S , la probabilidad de E es siempre no negativa. Es decir, $P(E) \geq 0$.

2. **Axioma 2 (Certidumbre):** La probabilidad del espacio muestral completo es 1. Es decir, $P(S) = 1$.
3. **Axioma 3 (Aditividad):** Para cualquier secuencia de eventos mutuamente excluyentes E_1, E_2, E_3, \dots en S , la probabilidad de la unión de estos eventos es igual a la suma de sus probabilidades individuales. Es decir,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$$

, siempre y cuando $E_i \cap E_j = \emptyset$ para $i \neq j$.

2.6. Probabilidad condicional

La probabilidad condicional de un evento A dado que otro evento B ha ocurrido, denotada como $P(A|B)$, se define como la probabilidad de que ocurra el evento A una vez que se sabe que B ha ocurrido. Esto se expresa matemáticamente por la fórmula:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

donde:

- $P(A \cap B)$ es la probabilidad de que ocurran ambos eventos A y B .
- $P(B)$ es la probabilidad del evento B .

Esta definición es válida siempre que $P(B) > 0$.

Eventos independientes

Dos eventos A y B en un espacio muestral S se consideran independientes si la ocurrencia de uno no afecta la probabilidad de ocurrencia del otro. Matemáticamente, esto se expresa diciendo que dos eventos A y B son independientes si y solo si:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

En otras palabras, la probabilidad de que ambos eventos ocurran juntos (la intersección de A y B) es igual al producto de sus probabilidades individuales. Si esta relación no se cumple, entonces los eventos se consideran dependientes.

2.7. Ley multiplicativa de la probabilidad

La ley multiplicativa de la probabilidad se utiliza para calcular la probabilidad de la intersección de dos eventos. Si tenemos dos eventos A y B , la probabilidad de que ambos A y B ocurran, denotada como $P(A \cap B)$, se calcula como:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A)$$

si $P(A) > 0$.

De manera alternativa, si $P(B) > 0$, se puede calcular como:

$$P(A \cap B) = P(B) \times P(A|B)$$

Esta ley es una extensión de la definición de probabilidad condicional y es crucial en el cálculo de probabilidades para eventos dependientes.

2.8. Variable aleatoria

Una variable aleatoria es una función que asigna un valor numérico a cada resultado en un espacio muestral. Se denota comúnmente con letras mayúsculas, como X , Y , etc. Hay dos tipos principales de variables aleatorias:

- **Variable Aleatoria Discreta:** Toma un número finito o contablemente infinito de valores distintos. La función de probabilidad de una variable aleatoria discreta, denominada función de masa de probabilidad (fmp), asigna una probabilidad a cada valor posible de la variable.
- **Variable Aleatoria Continua:** Toma un número infinito de posibles valores. La función de probabilidad de una variable aleatoria continua, conocida como función de densidad de probabilidad (fdp), asigna probabilidades a intervalos de valores.

La variable aleatoria es fundamental en el estudio de la probabilidad, ya que proporciona el enlace entre los eventos aleatorios y los análisis numéricos.

2.9. Distribucion de probabilidad

La función de probabilidad de una Variable Aleatoria (V.A) describe cómo se asignan las probabilidades a los diferentes valores que la V.A puede tomar. Esta función varía según si la V.A es discreta o continua:

- **Para una V.A Discreta:** La función de probabilidad es la función de masa de probabilidad (fmp), que proporciona la probabilidad para cada valor posible que la variable aleatoria puede asumir. La fmp $f(x)$ satisface dos propiedades:
 1. $f(x) \geq 0$ para todo x .
 2. La suma de $f(x)$ sobre todos los posibles valores de x es igual a 1.
- **Para una V.A Continua:** La función de probabilidad es la función de densidad de probabilidad (fdp), que asigna probabilidades a intervalos de valores de la V.A. La fdp $f(x)$ cumple con:
 1. $f(x) \geq 0$ para todo x .
 2. La integral de $f(x)$ sobre todo el espacio es igual a 1.

Estas funciones son fundamentales para comprender la naturaleza y el comportamiento de las variables aleatorias en el estudio de la probabilidad y estadística.

Resumen

- **Función de Probabilidad de v.a X :** $p(x) = P(X = x)$. Esta función asigna la probabilidad de que la variable aleatoria X tome un valor específico x .
- **Función de Probabilidad de un Evento A :** $P(A)$. Representa la probabilidad de que ocurra el evento A .
- **Distribución de Probabilidad de v.a X :** Describe cómo se distribuyen las probabilidades a través de los diferentes valores que puede tomar la variable aleatoria X . Se diferencia en distribuciones discretas y continuas.
- **Función de Distribución Acumulada:** Proporciona la probabilidad acumulativa de que la variable aleatoria X sea menor o igual a un valor específico. Se representa como $F(x) = P(X \leq x)$ y varía para variables aleatorias discretas y continuas.

3. 02/02/2024

3.1. Repaso de probabilidad

3.2. Distribuciones discretas

- **Uniforme Discreta:** Esta distribución asigna la misma probabilidad a cada uno de los n resultados diferentes en un espacio de muestra finito. La función de masa de probabilidad (PMF) es $P(X = x) = \frac{1}{n}$ para $x = 1, 2, \dots, n$.
- **Bernoulli:** Modela experimentos que tienen exactamente dos resultados posibles, "éxito" (con probabilidad p) y "fracaso" (con probabilidad $1 - p$). La PMF es $P(X = x) = p^x(1 - p)^{1-x}$ para $x = 0, 1$.
- **Binomial:** Extiende la distribución de Bernoulli a n ensayos independientes, con p siendo la probabilidad de éxito en cada ensayo. La PMF es $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$ para $k = 0, 1, \dots, n$.
- **Geométrica:** Mide el número de ensayos necesarios para obtener el primer éxito. La PMF es $P(X = k) = (1 - p)^{k-1} p$ para $k = 1, 2, \dots$.
- **Binomial Negativa o de Pascal:** Cuenta el número de ensayos requeridos para obtener un número fijo r de éxitos. La PMF es $P(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1 - p)^{k-r}$ para $k = r, r + 1, \dots$.
- **Hipergeométrica:** Modela el número de éxitos en una muestra sin reemplazo. La PMF es $P(X = k) = \frac{\binom{K}{k} \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$, donde N es el tamaño de la población, K es el número total de éxitos en la población, y n es el tamaño de la muestra.
- **Poisson:** Modela el número de eventos en un intervalo fijo de tiempo o espacio. La PMF es $P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ para $k = 0, 1, 2, \dots$, donde λ es el número promedio de eventos en el intervalo.

3.3. Esperanza matemática de distribuciones discretas

Sea x una variable aleatoria discreta con función de probabilidad $(p(x))$ entonces el valor esperado de x , $E(x)$ está definido por

$$E(X) = \sum x p(x)$$

Regularmente asociamos la esperanza con la media poblacional μ

3.4. Varianza de una variable aleatoria discreta

Se define como el valor esperado de $(X - \mu)^2$ es decir

$$V(X) = E((X - \mu)^2)$$

3.5. Distribuciones continuas

- **Uniforme:** La distribución uniforme continua describe un experimento donde todos los resultados en un intervalo $[a, b]$ son igualmente probables. Su función de densidad es $f(x) = \frac{1}{b-a}$ para $x \in [a, b]$. La media es $\mu = \frac{a+b}{2}$ y la varianza es $\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$.

- **Normal:** También conocida como la distribución Gaussiana, caracterizada por su función de densidad en forma de campana $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$, donde μ es la media y σ es la desviación estándar. Es fundamental en teoría de probabilidad y estadística debido a su propiedad de regresión al promedio y el Teorema del Límite Central.
- **Exponencial:** Modela el tiempo entre eventos en un proceso de Poisson, con tasa de ocurrencia λ . Su función de densidad es $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ para $x \geq 0$. La media y la varianza son $\frac{1}{\lambda}$.
- **Gamma:** Generaliza las distribuciones exponencial y χ^2 , útil para modelar tiempos de espera para múltiples eventos. Su función de densidad es $f(x) = \frac{x^{k-1} e^{-x/\theta}}{\theta^k \Gamma(k)}$ para $x > 0$, donde k es el parámetro de forma y θ el parámetro de escala.
- **Beta:** Modela variables aleatorias que toman valores entre 0 y 1, útil para modelar proporciones. Su función de densidad es $f(x) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)}$ para $0 < x < 1$, donde α y β son parámetros de forma.
- **Triangular:** Una distribución simple definida por un mínimo, un máximo, y un valor modal. Su función de densidad cambia linealmente entre estos puntos. Es útil para simulaciones y modelado de fenómenos con un conocimiento limitado.
- **Weibull:** Extiende la distribución exponencial para permitir una tasa de fallo variable. Su función de densidad es $f(x) = \frac{k}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-(x/\lambda)^k}$ para $x \geq 0$, donde k es el parámetro de forma y λ el de escala. Es muy utilizada en análisis de confiabilidad y duración de vida.

3.6. Esperanza matemática de distribuciones continuas

Sea x una variable aleatoria continua

Resumen Probabilidad

En teoría de probabilidad, las variables aleatorias se clasifican en continuas o discretas, y cada una tiene asociada una función de densidad o una función de distribución acumulativa, respectivamente.

Variables Aleatorias Discretas

Para una variable aleatoria discreta X , la función de probabilidad, también conocida como función de masa de probabilidad (PMF), se denota por $p(x)$ y se define como:

$$p(x) = P(X = x)$$

donde $P(X = x)$ es la probabilidad de que X tome el valor x .

La función de distribución acumulativa (CDF), $F(x)$, para una variable aleatoria discreta se define como la probabilidad de que X tome un valor menor o igual a x :

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i)$$

Variables Aleatorias Continuas

Para una variable aleatoria continua X , la función de densidad de probabilidad (PDF) se denota por $f(x)$ y satisface:

$$f(x) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

La PDF describe la densidad de probabilidad en cada punto de la línea real.

La función de distribución acumulativa (CDF), $F(x)$, para una variable aleatoria continua se define como la probabilidad de que X sea menor o igual a x :

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

La CDF es una función no decreciente que se aproxima a 0 a medida que x se aproxima a $-\infty$ y se aproxima a 1 a medida que x se aproxima a ∞ .

4. 07/02/2024

4.1. Unidad 1. Elementos de procesos estocásticos

Definición de procesos estocásticos

La primera idea básica es identificar a un proceso estocástico como una sucesión de variables aleatorias $X_n; n \in \mathbb{N}$ donde el subíndice indica el instante de tiempo o espacio correspondiente. La idea puede generalizarse de manera que los instantes de tiempo sean continuos donde $X_t; t \in \mathbb{R}$

Conjunto de estados

Se denomina conjunto de estados S , al conjunto de los posibles valores que pueden tomar las variables aleatorias

Conjunto paramétrico

Se denomina conjunto paramétrico T , al conjunto de subíndices que puede tomar t

Al igual que en las variables aleatorias, este conjunto puede ser discreto o continuo

Ejemplo

Se lanza una moneda varias veces, supongase que cada vez que sale cara un jugador gana 1 dólar y cada vez que sale cruz pierde un dólar. Defina lo anterior como un proceso estocástico planteando el conjunto de estados, el conjunto paramétrico y la forma en que se definirían las probabilidades

X_t : Ganancia o pérdida en el t -ésimo lanzamiento de la moneda

$S = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

$T = \{1, 2, 3, \dots\}$

Si fijo el parámetro, $t = 3$

Podemos hacer realizaciones: (t, t, c)

Ver como se modifica el conjunto de estados

5. 09/02/2024

5.1. Clasificación de los procesos estocásticos

Se subdividen dependiendo de acuerdo a la estructura de los conjuntos S y T .

De acuerdo a las características probabilísticas de la variable aleatoria X_t

6. Proceso de Bernoulli

Un proceso estocástico $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ se denomina proceso de Bernoulli si cumple con las siguientes condiciones:

- Las variables aleatorias X_1, X_2, \dots son mutuamente independientes.
- Cada variable aleatoria X_n sigue una distribución de Bernoulli, donde la probabilidad de éxito (denotado por $X_n = 1$) es p , y la probabilidad de fracaso (denotado por $X_n = 0$) es $1 - p$, que también podemos denotar por q . Es decir:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_n = 1) &= p, \\ \mathbb{P}(X_n = 0) &= 1 - p = q.\end{aligned}$$

En este contexto, al evento $X_n = 1$ lo llamamos *éxito* y al evento $X_n = 0$, *fracaso*.

Sea $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ un proceso de Bernoulli con probabilidad de éxito p . Definimos S_n como el número total de éxitos en los primeros n ensayos. Es decir, S_n se define como:

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i,$$

También lo encontramos como:

$$N_i = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ X_1 + X_2 + \dots + X_n & \text{si } n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

donde cada X_i es una variable aleatoria que indica el éxito ($X_i = 1$) o fracaso ($X_i = 0$) en el i -ésimo ensayo. Por lo tanto, S_n sigue una distribución binomial con parámetros n y p , lo cual se puede expresar como:

$$S_n \sim \text{Bin}(n, p),$$

donde la probabilidad de obtener exactamente k éxitos en n ensayos está dada por la función de probabilidad:

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k},$$

para $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

La esperanza (valor esperado) y la varianza de S_n , donde $S_n \sim \text{Bin}(n, p)$, se pueden calcular de la siguiente manera:

- **Esperanza:** La esperanza de S_n indica el número promedio de éxitos en n ensayos y se calcula como

$$\mathbb{E}[S_n] = np.$$

- **Varianza:** La varianza de S_n mide la dispersión de los éxitos alrededor de la esperanza y se calcula como

$$\text{Var}(S_n) = np(1 - p) = npq.$$

Estas fórmulas nos permiten entender las propiedades estadísticas del número de éxitos en un proceso de Bernoulli.

7. Caminata Aleatoria Simple

Una *caminata aleatoria simple* sobre el conjunto de los enteros es un proceso estocástico a tiempo discreto $\{X_n : n \in \mathbb{Z}^+\}$, donde \mathbb{Z}^+ representa los enteros positivos incluyendo el cero. Iniciando en el estado 0, el proceso se define de tal manera que, en cada paso n , el proceso puede moverse al estado $i + 1$ con una probabilidad p o al estado $i - 1$ con una probabilidad q , donde i es el estado actual y $p + q = 1$.

El valor de X_n representa la posición del proceso en el tiempo n . La regla de transición se aplica de manera idéntica en cada paso, independientemente de la posición actual, lo que implica que la caminata tiene la propiedad de incrementos independientes e idénticamente distribuidos (i.i.d.).

Las probabilidades de transición válidas para cualquier $n \geq 0$, y para cualquier par de enteros i y j , se expresan como:

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i) = \begin{cases} p, & \text{si } j = i + 1, \\ q, & \text{si } j = i - 1, \\ 0, & \text{de lo contrario.} \end{cases}$$

Esto significa que la probabilidad de moverse de un estado i a un estado j en el siguiente paso depende únicamente de si j es inmediatamente adyacente a i y se ajusta a la regla de que $p + q = 1$.

Dado que estas probabilidades no dependen de n , se dice que son homogéneas en el tiempo, es decir, son las mismas para cualquier valor de n . A partir de estas consideraciones, se dice que este proceso cumple con la propiedad de Markov; es decir, el estado futuro del proceso depende únicamente del estado presente y no de los estados previos.

Definición Formal de una Caminata Aleatoria

Sean $\{\epsilon_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas tales que $\mathbb{P}(\epsilon_i = 1) = p$ y $\mathbb{P}(\epsilon_i = -1) = q$, donde $p + q = 1$. Entonces, para $n \geq 1$, se define $X_n = X_0 + \epsilon_1 + \epsilon_2 + \dots + \epsilon_n$. Sin pérdida de generalidad, supondremos que $X_0 = 0$, lo que implica que el proceso inicia en el origen. Por lo tanto, la posición en el tiempo n está dada por la suma de los incrementos individuales representados por las variables ϵ_i .

De esta manera, la caminata aleatoria se puede representar como:

$$X_n = \sum_{i=1}^n \epsilon_i.$$

Cada ϵ_i toma el valor de 1 o -1, correspondiendo a un paso hacia la derecha o hacia la izquierda, respectivamente, en la línea de los enteros.

Esperanza de X_n

La esperanza de X_n se calcula como sigue:

$$\mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n \epsilon_i\right] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[\epsilon_i].$$

Dado que cada ϵ_i tiene una distribución con $\mathbb{P}(\epsilon_i = 1) = p$ y $\mathbb{P}(\epsilon_i = -1) = q$, la esperanza de ϵ_i es:

$$\mathbb{E}[\epsilon_i] = 1 \cdot p + (-1) \cdot q = p - q.$$

Por lo tanto, la esperanza de X_n es:

$$\mathbb{E}[X_n] = n(p - q).$$

Varianza de X_n

La varianza de X_n se puede calcular utilizando la propiedad de la varianza de sumas de variables aleatorias independientes:

$$\text{Var}(X_n) = \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n \epsilon_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(\epsilon_i).$$

La varianza de cada ϵ_i es:

$$\text{Var}(\epsilon_i) = \mathbb{E}[\epsilon_i^2] - (\mathbb{E}[\epsilon_i])^2.$$

Ya que $\epsilon_i^2 = 1$ para $\epsilon_i = 1$ o $\epsilon_i = -1$, tenemos $\mathbb{E}[\epsilon_i^2] = 1$. Por lo tanto:

$$\text{Var}(\epsilon_i) = 1 - (p - q)^2 = 1 - (p^2 + q^2 - 2pq) = 1 - (p^2 + (1 - p)^2 - 2p(1 - p)).$$

Simplificando, obtenemos:

$$\text{Var}(\epsilon_i) = 4pq.$$

Finalmente, la varianza de X_n es:

$$\text{Var}(X_n) = n \cdot 4pq.$$

Probabilidades de Transición

Suponiendo que la caminata aleatoria inicia en 0, es fácil deducir que después de efectuar un número par de pasos, la cadena solo puede terminar en posiciones pares, y si se efectúa un número impar de pasos, la posición final debe ser impar. Además, sabemos que después de efectuar n pasos, la caminata solo puede llegar a una distancia máxima de n unidades a la izquierda o a la derecha del origen.

Teniendo esto como base, definiremos las probabilidades de transición para cualesquiera números enteros x y y , tales que $-n \leq x \leq n$ y para el caso cuando x y n son ambos pares o ambos impares, la probabilidad de transición de la posición x a la posición y en n pasos, denotada por $P\{X_n = x | X_0 = X_0\}$, es dada por:

$$P\{X_n = x | X_0 = X_0\} = \binom{n}{\frac{n+x}{2}} p^{\frac{n+x}{2}} q^{\frac{n-x}{2}},$$
$$P\{X_n = x | X_0 = y\} = \binom{n}{\frac{n+x-y}{2}} p^{\frac{n+x-y}{2}} q^{\frac{n-x+y}{2}},$$

donde $\binom{n}{k}$ es el coeficiente binomial que representa el número de formas de elegir k elementos de un total de n elementos, y se asume que $p + q = 1$. Esta fórmula es válida bajo la condición de que tanto $(n + y - x)$ como $(n - y + x)$ sean no negativos y pares, lo cual asegura que los exponentes de p y q sean enteros no negativos. En cualquier otro caso, $P_{x,y}^{(n)} = 0$, reflejando la imposibilidad de moverse una cantidad impar de posiciones en un número par de pasos, y viceversa.

Ejemplo

Considere una partícula que realiza una caminata aleatoria simétrica.

- Encuentre todas las posibles secuencias de movimiento de la partícula en una caminata de 4 pasos, indicando la posición final en la que se encuentra la partícula al realizar cada una de las secuencias posibles.

Para una caminata de 4 pasos, cada paso puede ser hacia la derecha (+1) o hacia la izquierda (-1). Las posibles secuencias de 4 pasos y sus posiciones finales son:

Secuencia	Posición Final
++++	4
+++ -	2
++ - +	2
++ - -	0
+ - ++	2
+ - + -	0
+ - - +	0
+ - - -	-2
- +++	2
- ++ -	0
- + - +	0
- + - -	-2
- - ++	0
- - + -	-2
- - - +	-2
- - - -	-4

■ ¿Con qué probabilidad ocurre cada una de estas secuencias?

Dado que la caminata es simétrica, cada paso tiene una probabilidad de $1/2$. La probabilidad de cualquier secuencia específica de 4 pasos es entonces $(1/2)^4 = 1/16$.

■ ¿Con qué probabilidad termina la partícula en cada posición?

- $\mathbb{P}(X_4 = 4) = \frac{1}{16}$
- $\mathbb{P}(X_4 = 2) = \frac{4}{16}$
- $\mathbb{P}(X_4 = 0) = \frac{6}{16}$
- $\mathbb{P}(X_4 = -2) = \frac{4}{16}$
- $\mathbb{P}(X_4 = -4) = \frac{1}{16}$

■ ¿Cuál es el valor medio de la posición final X ?

El valor medio de la posición final, o el valor esperado $\mathbb{E}[X]$, para una caminata aleatoria simétrica de 4 pasos se calcula como la suma de las posiciones finales multiplicadas por sus respectivas probabilidades. En este caso, $\mathbb{E}[X] = 0$, ya que la caminata es simétrica y las posiciones finales positivas y negativas se equilibran entre sí.

Ejemplo

Una partícula realiza una caminata aleatoria sobre los enteros comenzando en la posición 4. Se desea encontrar la probabilidad de que la partícula se encuentre en la posición 5 después de 7 pasos, con una probabilidad de moverse hacia la derecha del 75 %.

$$P\{X_7 = 5 | X_0 = 4\} = \binom{7}{\frac{7+5-4}{2}} p^{\frac{7+5-4}{2}} q^{\frac{7-5+4}{2}},$$

$$P\{X_7 = 5 | X_0 = 4\} = \binom{7}{4} (0,75)^4 (0,25)^3 = 0,173$$

8. El Problema del Jugador

Consideramos un caso particular de una caminata aleatoria, donde un jugador A apuesta sucesivamente una unidad monetaria contra otro jugador B . El capital inicial para cada jugador es k y $n - k$ respectivamente, lo que implica que hay un capital total igual a N . En cada apuesta, A tiene una probabilidad p de ganar y una probabilidad q de perder, asumiendo que $p + q = 1$ y que no hay empates. Denotemos por X_n la fortuna del jugador A al tiempo n , de manera que se modela como una caminata aleatoria que inicia en el estado k y eventualmente puede terminar en uno de los estados absorbentes 0 o N .

Estos dos estados, 0 y N , son denominados estados absorbentes ya que, una vez alcanzados, el juego termina. La caminata aleatoria representada por X_n ofrece un marco para analizar la evolución del capital de A a través del tiempo hasta que se alcance uno de estos estados absorbentes.

Regularmente, en este escenario la pregunta típica es: ¿Cuál es la probabilidad de que eventualmente el jugador A se arruine? Por tal motivo a este problema se le llama **Problema de la Ruina del Jugador**.

Sea γ el primer momento en el que la caminata aleatoria visita alguno de los 2 estados absorbentes, es decir, $\gamma = \min\{n \geq 0 \mid X_n = 0 \text{ o } X_n = N\}$. La probabilidad de ruina a partir de tener k unidades monetarias es una probabilidad condicional que se plantea como:

$$U_k = P(X_\gamma = 0 \mid X_0 = k)$$

Definición

La probabilidad de ruina del jugador A , a partir de tener k unidades monetarias es:

$$U_k = \begin{cases} \frac{N-k}{N} & \text{si } p = q = \frac{1}{2}, \\ \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^k - \left(\frac{q}{p}\right)^N}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N} & \text{si } p \neq q \text{ y } p, q \neq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Número Esperado de Apuestas

Sea m_k el número esperado de apuestas antes de que termine el juego, en donde el jugador A tiene un capital inicial de k unidades y B tiene $N - k$. Así:

$$m_k = \begin{cases} K(N - K) & \text{si } p = q = \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{q-p} \left(K - N \left(\frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^K}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N} \right) \right) & \text{si } p \neq q \text{ y } p, q \neq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Ejemplos

¿Cuál es la probabilidad de que un jugador se arruine si comenzó jugando con 5 pesos y el jugador contrario con 12, lanzando para tales efectos una moneda, donde si sale cruz el jugador gana 1 peso y si sale cara el jugador pierde 1 peso?

Datos Disponibles

- Capital inicial del jugador A (k): 5 pesos.
- Capital total (N): k (del jugador A) + capital del jugador B = $5 + 12 = 17$ pesos.
- Probabilidades de ganar (p) y perder (q): 0,5, ya que es una moneda justa.

Fórmulas a Utilizar

Para calcular la probabilidad de ruina del jugador A (U_k), usamos la fórmula:

$$U_k = \frac{N - k}{N}$$

Sustitución y Cálculo

Sustituyendo $k = 5$ y $N = 17$ en la fórmula, obtenemos:

$$U_5 = \frac{17 - 5}{17} = \frac{12}{17}$$

Realizando el cálculo, encontramos que:

$$U_5 = 0,7058823529411765$$

Por lo tanto, la probabilidad de que el jugador se arruine es aproximadamente 70,6 %.

¿Qué sucede si la moneda está cargada a favor del jugador A con un 63 %?

Datos Disponibles

- Capital inicial del jugador A (k): 5 pesos.
- Capital total (N): 17 pesos.
- Probabilidad de ganar (p): 0,63 (moneda cargada a favor del jugador A).
- Probabilidad de perder (q): 0,37 (resultado de $1 - p$).

Fórmula a Utilizar

Para calcular la probabilidad de ruina del jugador A (U_k) con una moneda cargada, usamos la fórmula:

$$U_k = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^k - \left(\frac{q}{p}\right)^N}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N}$$

Sustitución y Cálculo

Sustituyendo los valores de $p = 0,63$, $q = 0,37$, $k = 5$ y $N = 17$ en la fórmula, obtenemos:

$$U_5 = \frac{\left(\frac{0,37}{0,63}\right)^5 - \left(\frac{0,37}{0,63}\right)^{17}}{1 - \left(\frac{0,37}{0,63}\right)^{17}}$$

Realizando el cálculo, encontramos que la probabilidad de ruina del jugador A es aproximadamente 0,070 o 7,0 %.

Por lo tanto, con la moneda cargada a favor, la probabilidad de que el jugador A se arruine disminuye significativamente.

¿Cuál es el número esperado de apuestas antes de la ruina para ambos casos?

Caso de Moneda Justa ($p = q = 0,5$)

Para el caso de una moneda justa, el número esperado de apuestas antes de la ruina, m_k , se calcula como:

$$m_k = k(N - k)$$

donde $k = 5$ y $N = 17$.

Sustituyendo los valores, obtenemos:

$$m_k = 5(17 - 5) = 60$$

Por lo tanto, el número esperado de apuestas antes de la ruina del jugador A con una moneda justa es de **60** apuestas.

Caso de Moneda Cargada ($p = 0,63$, $q = 0,37$)

Para el caso de una moneda cargada a favor del jugador A, el número esperado de apuestas antes de la ruina, m_k , se calcula como:

$$m_k = \frac{1}{q - p} \left(k - N \left(\frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^k}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N} \right) \right)$$

donde $k = 5$, $N = 17$, $p = 0,63$ y $q = 0,37$.

Sustituyendo los valores, obtenemos:

$$m_k = \frac{1}{0,37 - 0,63} \left(5 - 17 \left(\frac{1 - \left(\frac{0,37}{0,63}\right)^5}{1 - \left(\frac{0,37}{0,63}\right)^{17}} \right) \right)$$
$$m_k \approx 41,59$$

Por lo tanto, el número esperado de apuestas antes de la ruina del jugador A con una moneda cargada es aproximadamente **41.59** apuestas.

9. Cadenas de Markov

Objetivo: El alumno explicará las cadenas de Markov, sus propiedades de transición en una y varias unidades de tiempo, las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov, el análisis matricial de estas probabilidades, y las clasificaciones de los estados utilizando la teoría de grafos. Asimismo, se abordará el comportamiento asintótico con el fin de aplicar estos conceptos a casos básicos.

En términos intuitivos, una cadena de Markov es un tipo de proceso estocástico que posee un número finito de estados. Las probabilidades de transición a cada estado dependen únicamente del estado actual, no de la secuencia de eventos que condujo a él.

Definición

Un proceso estocástico X_t tiene la propiedad de Markov si y solo si la probabilidad de transitar al estado j en el tiempo $t + 1$, dado el estado actual i en el tiempo t , es independiente de la trayectoria pasada. Esto se expresa matemáticamente como:

$$P(X_{t+1} = j | X_0 = k_0, X_1 = k_1, \dots, X_{t-1} = k_{t-1}, X_t = i) = P(X_{t+1} = j | X_t = i)$$

para $t = 0, 1, 2, \dots$

Esta propiedad, conocida como la propiedad Markoviana, establece que la probabilidad condicional de cualquier evento futuro, dados los eventos pasados y el estado actual, es independiente de los eventos pasados y depende únicamente del estado presente.

Definición

Un proceso estocástico es una *cadena de Markov* si satisface la propiedad Markoviana.

9.1. Probabilidades de Transición

Las probabilidades condicionales $P(X_{t+1} = j | X_t = i)$ en una cadena de Markov se llaman probabilidades de transición (de un paso).

Si para cada i y j , se cumple que $P(X_{t+1} = j | X_t = i) = P(X_1 = j | X_0 = i)$ para todo $t \geq 1$, entonces se dice que las probabilidades de transición de un paso son estacionarias. Es decir, tener probabilidades de transición estacionarias implica que las probabilidades de transición no cambian con el tiempo.

Obsérvese además que la existencia de probabilidades de transición de un paso estacionarias, implica que para cada i y j y para todo $n \geq 0$, se tiene que

$$P(X_{t+n} = j | X_t = i) = P(X_n = j | X_0 = i)$$

para todo $t \geq 0$.

A estas probabilidades de transición se les llama probabilidades de transición de n pasos.

Para simplificar la notación de las probabilidades de transición estacionarias, sea

$$p_{ij} = P(X_{t+1} = j | X_t = i)$$

$$p_{ij}^{(n)} = P(X_{t+n} = j | X_t = i)$$

Cuando $n = 1$, observe que $p_{ij}^{(1)} = p_{ij}$.

Cuando $n = 0$, $p_{ij}^{(0)}$ es $P(X_0 = j | X_0 = i)$ que es igual a 1 cuando $i = j$ y 0 en otro caso.

Estas probabilidades, como cualquier otra, deben ser no negativas y, como el proceso debe hacer una transición a algún estado, deben satisfacer las siguientes propiedades:

1. $p_{ij}^{(n)} \geq 0$ para todo i, j y $n = 0, 1, 2, \dots$
2. $\sum_{j=0}^S p_{ij}^{(n-1)} = 1$ para todo i , y $n = 0, 1, 2, \dots$

Una notación conveniente para representar las probabilidades de transición de n pasos es la forma matricial:

$$\mathbf{P}^{(n)} = \begin{pmatrix} p_{00}^{(n)} & p_{01}^{(n)} & \cdots & p_{0m}^{(n)} \\ p_{10}^{(n)} & p_{11}^{(n)} & \cdots & p_{1m}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m0}^{(n)} & p_{m1}^{(n)} & \cdots & p_{mm}^{(n)} \end{pmatrix}$$

Esta es la *Matriz de Transición* en n pasos.

Cuando $n = 1$, el superíndice n no se escribe y se hace referencia a esta como una matriz de transición simple.

9.2. Ejemplo

El clima en un pueblo puede cambiar rápidamente de un día a otro. Sin embargo, las posibilidades de tener un clima seco mañana, es de alguna forma, mayor si hoy está seco, es decir, si no llueve. En particular, la probabilidad de que mañana esté seco es de 0.8 si hoy está seco, pero es de solo 0.6 si hoy llueve. Estas probabilidades no cambian si se considera la información acerca del clima en los días anteriores a hoy.

Defina espacio de estados, conjunto paramétrico e indique la matriz y el diagrama de transición.

Espacio de Estados

Definimos el espacio de estados como:

$$S = \{\text{Seco}, \text{Lluvioso}\}$$

Conjunto Paramétrico

Las probabilidades de transición son las siguientes:

$$\begin{aligned} p_{\text{seco}, \text{seco}} &= 0,8 \\ p_{\text{seco}, \text{lluvioso}} &= 0,2 \\ p_{\text{lluvioso}, \text{seco}} &= 0,6 \\ p_{\text{lluvioso}, \text{lluvioso}} &= 0,4 \end{aligned}$$

Matriz de Transición

La matriz de transición P para el sistema es:

$$P = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$$

Diagrama de Transición

El diagrama de transición no se puede representar gráficamente en este documento, pero se describe como sigue:

- Dos estados: "Seco" "Lluvioso".
- Transiciones desde "Seco": "Seco" con probabilidad 0.8, y de "Seco" a "Lluvioso" con probabilidad 0.2.
- Transiciones desde "Lluvioso": "Seco" con probabilidad 0.6, y de "Lluvioso" a "Lluvioso" con probabilidad 0.4.

9.3. Ejemplo

Consideremos un profesor que decide si realizará un examen en su clase o no. El profesor nunca realiza exámenes en días consecutivos. Si un día no hay examen, entonces el profesor puede decidir realizar un examen el día siguiente con cierta probabilidad.

Espacio de Estados

Definimos el espacio de estados como:

$$S = \{\text{Examen}, \text{No Examen}\}$$

Conjunto Paramétrico

Las probabilidades de transición son las siguientes:

$$\begin{aligned}p_{\text{Examen}, \text{No Examen}} &= 1 \\p_{\text{Examen}, \text{Examen}} &= 0 \\p_{\text{No Examen}, \text{Examen}} &= 0,5 \\p_{\text{No Examen}, \text{No Examen}} &= 0,5\end{aligned}$$

Matriz de Transición

La matriz de transición P para el sistema es:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$$

10. Problemas de transición

10.1. Vector de Probabilidad Inicial

El estado en que un proceso empieza puede conocerse definitivamente o puede decidirse por una regla de probabilidades. En cualquiera de los casos, deberá establecerse un vector de probabilidad inicial, tal que $\mathbf{p} = (a_1, a_2, \dots, a_m)$, en el que los elementos a_i son probabilidades de que el estado inicial del proceso sea s_i .

10.1.1. Ejemplo

1. Si se tira una moneda normal, y se anota cada vez que sale cara o cruz, estaría claro que el vector $\mathbf{a} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
2. En el ejemplo de la fila de 5 asientos: A, B, C, D, E, si el proceso inicia en el estado C, el vector $\mathbf{a} = (0, 0, 1, 0, 0)$.
3. De una baraja estándar de 52 cartas, la probabilidad de seleccionar cualquier carta específica es la misma. Por lo tanto, el vector de probabilidad inicial sería:

$$\mathbf{a} = \left(\frac{1}{52}, \frac{1}{52}, \dots, \frac{1}{52}\right)$$

4. En un proceso de Markov con tres estados s_1, s_2, s_3 y suponiendo que el sistema comienza en el estado s_2 con certeza, el vector de probabilidad inicial sería:

$$\mathbf{a} = (0, 1, 0)$$

Probabilidad de cualquier sucesión dada

El cálculo de esta probabilidad, conociendo la secuencia de estados que se han presentado, dependerá del tipo de problema que estudiemos:

Lanzamiento de una moneda

Para el caso de la moneda, si al lanzarla 6 veces, la secuencia es cara, cruz, cara, cara, cruz, cara, la probabilidad de esta sucesión (por ser eventos independientes) sería:

$$P(\text{cara, cruz, cara, cara, cruz, cara}) = P(\text{cara})^4 \cdot P(\text{cruz})^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{64} \quad (1)$$

Experimento del asiento

Para el caso del experimento del asiento, en donde los eventos dependen de la posición final del proceso si se tuviera la sucesión de estados C, D, C, B, A, A, A, la probabilidad de la sucesión estaría dada por:

$$P(C, D, C, B, A, A, A) = P(C) \cdot P_{CD} \cdot P_{DC} \cdot P_{CB} \cdot P_{BA} \cdot P_{AA} \cdot P_{AA} = \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{16} \quad (2)$$

Definición de una Cadena de Markov Finita y Estacionaria

Una cadena estacionaria y finita de Markov queda completamente definida por los siguientes elementos:

1. Un espacio de estados finito.
2. Una matriz P de probabilidades de transición de un solo paso estacionaria.
3. Un vector de probabilidad inicial \mathbf{a} .

11. Ecuaciones de Chapman Kolmogorov

Estas ecuaciones proporcionan un método para calcular las probabilidades de transición de “ n ” pasos:

$$P_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^m P_{ik}^{(m)} \cdot P_{kj}^{(n-m)} \quad \text{para toda } i, j, n \text{ y } 0 \leq m \leq n$$

Estas ecuaciones señalan que al ir del estado i al estado j en “ n ” pasos, el proceso estará en algún estado k después de exactamente m pasos (menor que n). Así, $P_{ik}^{(m)}$ es la probabilidad condicional de que, si se comienza en el estado i , el proceso vaya al estado k después de m pasos y después al estado j en $n - m$ pasos. Al resumir estas probabilidades sobre todos los estados posibles k se obtendría $P_{ij}^{(n)}$. Los casos especiales de $m = 1$ y $m = n - 1$ conducen a las expresiones:

$$P_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^m P_{ik}^{(1)} \cdot P_{kj}^{(n-1)} \quad (3)$$

$$P_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^m P_{ik}^{(n-1)} \cdot P_{kj}^{(1)} \quad (4)$$

De lo cual resulta que las probabilidades de transición de n pasos se pueden obtener a partir de las probabilidades de transición de un paso, de manera recursiva.

Para $n = 2$, estas expresiones se vuelven

$$P_{ij}^{(2)} = \sum_{k=0}^m P_{ik}^{(1)} \cdot P_{kj}^{(1)} \quad (5)$$

que es la fórmula del producto de una matriz de transición consigo misma, esto es:

$$P = P \cdot P = P^2 \quad (6)$$

Generalizando, se llega entonces a concluir que la matriz de transiciones de n pasos puede obtenerse elevando la matriz de transición de un paso a la potencia n .

Ejemplo

Tomando como base el ejemplo del detergente Colgate, cuya matriz de transición es:

$$P = \begin{bmatrix} 0,75 & 0,25 \\ 0,45 & 0,55 \end{bmatrix}$$

Suponga que la directiva de la compañía desea saber el comportamiento de las probabilidades de transición durante los dos primeros meses:

$$P^{(2)} = P \cdot P = \begin{bmatrix} 0,675 & 0,325 \\ 0,585 & 0,415 \end{bmatrix}$$

PROBABILIDADES DE TRANSICIÓN INCONDICIONALES

Se ha hecho notar que las probabilidades de transición de uno o n pasos son probabilidades condicionales, es decir $P_{ij}^{(n)} = P(X_n = j | X_0 = i)$.

Si se desea la probabilidad incondicional $P(X_n = j)$, se usará el vector de estado inicial \vec{a} , de tal manera que esta probabilidad se calcularía:

$$P(X_n = j) = a_0 P_{0j}^{(n)} + a_1 P_{1j}^{(n)} + \dots + a_m P_{mj}^{(n)}$$

Retomando el ejemplo de Colgate, si la directiva quisiera saber si conviene continuar con la promoción estos dos meses si se sabe que hasta el momento el 50 % de las personas usan su detergente

$$\vec{a} = (0,50, 0,50)$$

$$P(X_2 = U) = 0,5(0,675) + 0,5(0,585) = 0,63$$

Esto implicaría que el 63 % lo usaría después de dos meses, lo que indica que sí conviene seguir con la promoción.

12. Clasificación de los estados

Estados accesibles

Se dice que el estado j es accesible desde el estado i , si $p_{ij}^{(n)} > 0$ para alguna $n \geq 0$.

Puede ser que el estado i no sea accesible desde el estado j , pero el estado j sí sea accesible desde el estado i . No obstante, si el estado j es accesible desde el estado i y el estado i es accesible desde el estado j , entonces se dice que los estados se comunican.

En general:

1. Cualquier estado se comunica consigo mismo (porque $p_{ii}^{(0)} = 1$).
2. Si el estado i se comunica con el estado j , entonces el estado j se comunica con el estado i .
3. Si el estado i se comunica con el estado j y el estado j se comunica con el estado k , entonces el estado i se comunica con el estado k .

Clases y cadenas irreducibles

Como resultado de estas propiedades de comunicación, se puede hacer una partición del espacio de estados en clases separadas, donde se dice que dos estados que se comunican pertenecen a la misma clase.

Si existe sólo una clase, es decir, que todos los estados se comunican, se dice que la cadena de Markov es irreducible.

Estados ergodicos (Recurrentes)

Sea E , un subespacio del espacio de estados S y E' su complementario en S .

Si cada estado de E puede alcanzarse desde cualquier otro estado de E , pero ningún estado de E' se puede alcanzar desde cualquiera de E , entonces E , se llama conjunto ergódico.

Una vez que un proceso se mueve hacia un conjunto ergódico ya no puede salir de él, pero se moverá a partir de entonces entre los estados del conjunto.

Un estado ergódico es un elemento de un conjunto ergódico.

Estados transitorios

Sea T un subespacio de S y T' su complementario. Si cada estado de T puede ser alcanzado desde otro estado de T , y es posible, al menos, moverse de un estado T a otro de T' , entonces a T se le llama conjunto transitorio.

Un estado transitorio, es un elemento de un conjunto transitorio.

En términos más simples, es todo estado, en el que existe la posibilidad de salir de él, y nunca regresar.

Estados absorbentes

Si un conjunto ergódico contiene solamente un estado, el estado es llamado absorbente. Una vez que el proceso entra en ese estado, se queda en él.

Cabe señalar, que toda cadena finita de Markov tiene por lo menos un conjunto ergódico, aunque pueden haber dos o más.

No obstante, puede ser que no haya ningún estado transitorio.

13. Comportamiento Asintótico

Vector de distribución estacionario

Este teorema dice que, cualquiera que sea el estado de comienzo del proceso, la probabilidad de estar en un estado dado de una cadena regular, tiene un valor constante cuando el número de pasos desde el principio toma valores elevados.

Esto es, que si n es lo suficientemente grande, al calcular la matriz de transición de n pasos, todos los renglones tendrán valores idénticos, lo que significa que la probabilidad de que el sistema esté en el estado j ya no depende del estado inicial del sistema.

definición

Para una cadena de Markov regular, el $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)}$ existe y es independiente de i . Aún más, $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j > 0$ donde las π_j , satisfacen de manera única, las siguientes ecuaciones de estado estable:

1. $\pi_j = \sum_{i=0}^M \pi_i p_{ij}$ para $j = 0, 1, 2, \dots, M$
2. $\sum_{j=0}^M \pi_j = 1$

Las π_j se llaman probabilidades de estado estable, y al vector que forman se le conoce como vector de distribución estacionario.

probabilidad de estado estable

El término de probabilidad de estado estable significa que la probabilidad de encontrar el proceso en cierto estado, después de un número grande de transiciones, tiende al valor π_j , y es independiente de la distribución de probabilidad inicial definida por los estados.

Observe que las ecuaciones de estado estable consisten en $M + 2$ ecuaciones con $M + 1$ incógnitas. Como el sistema tiene solución única, alguna de las ecuaciones será redundante, por lo que puede ser eliminada. Por supuesto que la ecuación que establece que la suma de los valores del vector sea igual a 1 no podría eliminarse.

ejemplo 1

Considere el ejemplo del clima cuyas probabilidades de transición están dadas en la siguiente matriz. Obtenga el vector de estado estable.

$$P = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 \end{bmatrix}$$

Sistema 1

$$\pi_0 = \pi_0 P_{00} + \pi_1 P_{10}$$

$$\pi_1 = \pi_0 P_{01} + \pi_1 P_{11}$$

$$\pi_0 + \pi_1 = 1$$

Sistema 2

$$\pi_0 = \pi_0 0,8 + \pi_1 0,6$$

$$\pi_1 = \pi_0 0,2 + \pi_1 0,4$$

$$\pi_0 + \pi_1 = 1$$

Sistema 3

$$\pi_0 0,2 - \pi_1 0,6 = 0$$

$$\pi_0 + \pi_1 = 1$$

Solucion

$$\pi_0 = 3/4 \quad \pi_1 = 1/4$$

Nunca deben dar numeros negativos

ejemplo 2

Encontrar la distribución estacionaria para

$$P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Sistema 1

$$\pi_0 = \pi_0 P_{00} + \pi_1 P_{10} + \pi_2 P_{20}$$

$$\pi_1 = \pi_0 P_{01} + \pi_1 P_{11} + \pi_2 P_{21}$$

$$\pi_2 = \pi_0 P_{02} + \pi_1 P_{12} + \pi_2 P_{22}$$

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$$

Sistema 2

$$\pi_0 = \pi_0 0 + \pi_1 1/3 + \pi_2 1/4$$

$$\pi_1 = \pi_0 1/2 + \pi_1 0 + \pi_2 1/4$$

$$\pi_2 = \pi_0 1/2 + \pi_1 2/3 + \pi_2 1/2$$

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$$

Sistema 3

$$\pi_0 = \pi_0 0 + \pi_1 1/3 + \pi_2 1/4$$

$$\pi_1 = \pi_0 1/2 + \pi_1 0 + \pi_2 1/4$$

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$$

sistema 4

$$\pi_0 - 1/3\pi_1 - 1/4\pi_2 = 0$$

$$-\pi_0 1/2 - \pi_1 - 1/4\pi_2 = 0$$

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$$

Solucion

$$\pi_0 = 8/37 \quad \pi_1 = 9/37 \quad \pi_2 = 20/37$$

probabilidad de estado estable

Existen otros resultados importantes respecto de las probabilidades de estado estable. En particular, si i y j son estados recurrentes que pertenecen a clases distintas, entonces $p_{ij}^{(n)} = 0, \forall n$, lo cual es consecuencia de la definición de clase.

De manera similar, si j es un estado transitorio entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = 0$ para todo i . De este modo, la probabilidad de encontrar el proceso en un estado transitorio después de un número grande de transiciones tiende a 0.

costo promedio esperado por unidad de tiempo

Suponga que se incurre en un costo $C(X_t)$ cuando el proceso se encuentra en el estado X_t . Entonces el costo promedio esperado en el que se incurre a lo largo de los primeros n períodos está dado por:

$$C(E) = \sum_{j=0}^M \pi_j C(j)$$

Esta ecuación será de suma importancia para el tema de procesos markovianos de decisión.

14. Tiempos de primera pasada

Con frecuencia es necesario conocer cuántas transiciones son necesarias para llegar de un estado a otro por primera vez. A este tiempo se le conoce como tiempo de primera pasada.

De igual manera, a veces queremos saber cuántas transiciones son necesarias para regresar a un estado por primera vez, a lo que se le llama tiempo de recurrencia.

Considérese un ejemplo, donde el registro de la cadena de Markov es:

$$X_0 = 3, X_1 = 2, X_2 = 1, X_3 = 0, X_4 = 3, X_5 = 1$$

En este caso, el tiempo de primera pasada para ir del estado 3 al estado 1 es 2; el tiempo de primera pasada para ir del estado 3 al estado 0 es 3 y el tiempo de recurrencia del estado 3 es 4.

Para obtener el tiempo promedio de primera pasada de un estado i a un estado j :

$$\mu_{ij} = 1 + \sum_{k \neq j} p_{ik} \cdot \mu_{kj}$$

Esta ecuación reconoce que la primera transición del estado i puede ser al estado j o algún otro estado k . Si es el estado j , el tiempo de primera pasada es 1. Dado que la primera transición es a algún estado k (distinto de j), lo que ocurre con probabilidad p_{ik} , el tiempo esperado de primera pasada condicional del estado i al estado j es $1 + \mu_{kj}$. Al combinar estos hechos y sumar todas las posibilidades de la primera transición es que se llega a esta ecuación.

Para obtener el tiempo de recurrencia del estado i :

$$\mu_{ii} = \frac{1}{\pi_i}$$

Ejemplos

Ejemplo 1

Dada la matriz de transición, calcule el primer tiempo de transición para ir del estado 0 al estado 1. También el tiempo de recurrencia de 2.

$$P = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 & 0,6 \\ 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0,7 & 0 & 0,3 \end{pmatrix}$$

Estan pidiendo μ_{01} y μ_{22}

$$\mu_{01} = 1 + P_{00}\mu_{01} + P_{02}\mu_{21}$$

$$\mu_{21} = 1 + P_{20}\mu_{01} + P_{22}\mu_{21}$$

$$\mu_{01} = 1 + 0,2\mu_{01} + 0,6\mu_{21}$$

$$\mu_{21} = 1 + 0,7\mu_{01} + 0,3\mu_{21}$$

$$0,8\mu_{01} - 0,6\mu_{21} = 1$$

$$-0,7\mu_{01} - 0,7\mu_{21} = 1$$

$$\mu_{01} = 9,28$$

$$\mu_{21} = 10,71$$

b)

$$\mu_{22} = \frac{1}{\pi_2}$$

$$\pi_0 = 0,2\pi_0 + 0,8\pi_1 + 0,7\pi_2$$

$$\pi_1 = 0,2\pi_0 + 0,1\pi_1 + 0\pi_2$$

$$\pi_2 = 0,6\pi_0 + 0,1\pi_1 + 0,3\pi_2$$

$$0,8\pi_0 - 0,8\pi_1 - 0,7\pi_2 = 0$$

$$-0,2\pi_0 + 0,9\pi_1 = 0$$

$$\mu_0 = 0,4736$$

$$\mu_1 = 0,1052$$

$$\mu_2 = 0,4210$$

$$\mu_{22} = 2,37$$

Ejemplo 2

Sea la siguiente matriz de transición, obtenga el tiempo de primera pasada de 0 a 2.

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\mu_{02} = 1 + P_{00}\mu_{02} + P_{01}\mu_{12}$$

$$\mu_{12} = 1 + P_{10}\mu_{02} + P_{11}\mu_{12}$$

$$\mu_{02} = 1 + 0\mu_{02} + 1\mu_{12}$$

$$\mu_{12} = 1 + 1\mu_{02} + 0\mu_{12}$$

$$\mu_{02} = 1 + \mu_{12}$$

$$\mu_{12} = 1 + \mu_{02}$$

14.1. Probabilidades de absorción

Se ha señalado que el estado k se llama absorbente si $p_{kk} = 1$, de manera que una vez que la cadena llega al estado k , permanece ahí para siempre. Si k es un estado absorbente y el proceso comienza en el estado i , la probabilidad de llegar en algún momento a k se llama probabilidad de absorción al estado k , dado que el sistema comenzó en el estado i . Esta probabilidad se denota como f_{ik} .

Si existen dos o más estados absorbentes en una cadena de Markov y es evidente que tarde o temprano el proceso será absorbido en uno de esos estados, es deseable encontrar esas probabilidades de absorción. Así:

$$f_{ik} = \sum_{j=0} p_{ij} f_{jk}$$

donde $f_{kk} = 1$ y $f_{ik} = 0$, si el estado i es absorbente e i es distinto de k .

Ejemplo 1

Suponga que dos jugadores A y B con 2 pesos cada uno, juegan de tal forma que van a apostar 1 peso cada vez, hasta que uno de ellos quiebre. La probabilidad de que A gane una apuesta es $\frac{1}{3}$, por lo que la probabilidad de que B gane es $\frac{2}{3}$. Si se inicia en el estado 2, obtenga la probabilidad de absorción hacia el estado 0.

Obtenga además, la probabilidad de que A termine con 4 pesos, cuando comienza con 2.

14.2. Practica 5

1. Una urna contiene dos bolas sin pintar. Se selecciona una bola al azar y se lanza una moneda. Si la bola elegida no est

a) Obtenga matriz de transición

b) Obtenga el vector de distribución estacionaria

Tip: Identifique a cada estado como vectores con el siguiente formato (S,R,N), donde S es el número de bolas sin pintar, R es el número de bolas rojas y N es el número de bolas negras que hay en la urna.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,25 & 0,5 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0,5 & 0,25 & 0 & 0 & 0,25 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Unidad 2 - Procesos Markovianos de decisión

Objetivo: El alumno aplicara el analisis de decisiones a los procesos markovianos, estudiando los diferentes algoritmos que permiten llegar a las políticas optimas

15. Enumeración exhaustiva de políticas

El método básico para resolver un PMD consiste en definir todas las políticas que pueden establecerse en un PMD. Cabe mencionar que existen k^{m+1} políticas distintas, pero en ocasiones pueden omitirse aquellas que sean absurdas o irrelevantes.

Ejemplo base:

Un fabricante opera una máquina clave en el núcleo de uno de sus procesos. Debido al uso intensivo, esta máquina se deteriora rápidamente. Por lo tanto, al final de cada semana, la máquina se evalúa y se clasifica en uno de los cuatro estados posibles, dependiendo de su nivel de deterioro:

Estados

Estado	Condicion
0	Nueva
1	Deterioro menor
2	Deterioro mayor
3	Inoperable

Decisiones

En este proceso existen 3 decisiones posibles:

Decisión	Acción	Estado en que Aplica
1	No hacer nada	0, 1, 2
2	Hacer una reparación	2
3	Hacer un reemplazo	1, 2, 3

Cada decisión tiene consecuencias distintas asociadas a cada estado y a sus costos.

Por ejemplo, el tomar la decisión de no hacer nada cuando se está en el estado 0, no tiene ninguna consecuencia, ya que la máquina es nueva. Sin embargo, el no hacer nada cuando la máquina tiene cierto grado de deterioro afecta en un costo por producir artículos defectuosos. En el caso del deterioro menor (estado 1) ese costo sería de 1000 dólares y en el caso del deterioro mayor sería de 3000 dólares. Observe que no es posible tomar la decisión de no hacer nada cuando la máquina es inoperable, ya que en este caso se detendría la producción de manera indefinida (lo cual es intolerable para el sistema). El tomar la decisión 2, de realizar una reparación general, se aplicaría solo al estado 2, con un costo de 2000 dólares por repararla, más otros 2000 dólares por producción perdida; esto es, un costo de 4000 dólares en total. Así mismo, al reparar la máquina, esta volvería al estado 1 (deterioro menor).

Por último, el tomar la decisión 3, de reemplazar la máquina por otra, nos llevaría a un costo de 4000 dólares más la producción perdida de 2000 dólares, o sea 6000 dólares. Esta decisión se podría tomar en los estados 1, 2 o 3. Nunca en el estado 0, ya que es obvio pensar que nunca se reemplaza una máquina nueva.

Así, la estructura de costos quedaría:

$C_{0,1} = 0$	es el costo de no hacer nada en el estado 0
$C_{1,1} = 1000$	es el costo de no hacer nada en el estado 1
$C_{2,1} = 3000$	es el costo de no hacer nada en el estado 2
$C_{2,2} = 4000$	es el costo de reparar en el estado 2
$C_{1,3} = 6000$	es el costo de reemplazar en el estado 1
$C_{2,3} = 6000$	es el costo de reemplazar en el estado 2
$C_{3,3} = 6000$	es el costo de reemplazar en el estado 3

Algoritmo de enumeración exhaustiva de políticas

1. Definir los estados, decisiones y costos del PMD.
2. Definir exhaustivamente todas las políticas viables para el problema, combinando los estados y las decisiones posibles para cada estado.
3. Calcular el costo promedio esperado a largo plazo para cada política. Esto es, obtener

$$E(C) = \sum_{i=0}^m C_{ik} * \pi(i)$$

4. De todos los $E(C)$ obtenidos por cada política, seleccionar el mínimo si es un costo, o el máximo si es un beneficio.

16. 12 de abril del 2024 IMPORTANTE

Ejemplo

Drake y Josh trabajan en una gasolinera y tiene una imprenta en casa. Se estima que cada día que la imprenta funciona bien se obtiene un ingreso de 1200 dólares. Sin embargo, la máquina se descompone frecuentemente. Si la máquina no trabaja al empezar el día, Drake la puede arreglar para el principio del día siguiente con probabilidad de 0.6. Si Josh trabaja en la máquina esta probabilidad es de 0.5. Si Drake trabaja en la máquina cuando esta es operable tienen una probabilidad de 0.6 de que funcione al día siguiente. Si Josh la trabaja, la probabilidad de que se descomponga es de 0.6. Suponga que todas las descomposturas ocurren al final del día.

- Identifique estados, decisiones, costos y matrices de transición para cada decisión.
- Obtenga la política óptima que minimice el costo promedio a largo plazo por unidad de tiempo.

Estados

Estado	Acción
0	Maquina funciona
1	Maquina descompuesta

Decisiones

Decisión	Acción	Estado en que aplica
1	Drake trabaja en imprenta	0,1
2	Josh trabaja en imprenta	0,1

Estructura de costos

- $C_{0,1} = 0$ es el costo de que Drake se quede en imprenta cuando funciona.
- $C_{0,2} = 0$ es el costo de que Josh se quede en imprenta cuando funciona.
- $C_{1,1} = 1200$ es el costo de que Drake se quede en imprenta cuando no funciona.
- $C_{1,2} = 1200$ es el costo de que Josh se quede en imprenta cuando no funciona.

Matrices de transición

k=1, Se queda drake en la imprenta

$$\begin{bmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,6 & 0,4 \end{bmatrix}$$

k=2, Se queda josh en la imprenta

$$\begin{bmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}$$

Políticas

$$\text{Políticas} = \text{Decisiones}^{\text{estados}}$$

$$R_x = (y, z)$$

donde y y z representan la posición dentro de la tupla y son los estados, en este caso las posiciones son $(0, 1)$

$$\blacksquare R_1 = (1, 1)$$

$$\begin{bmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,6 & 0,4 \end{bmatrix}$$

$$\pi_0 = 0,6\pi_0 + 0,6\pi_1$$

$$1 = \pi_0 + \pi_1$$

Solución del sistema

- $\pi_0 = \frac{3}{5}$
- $\pi_1 = \frac{2}{5}$

$$R(C_{R_1}) = \frac{3}{5}(0) + \frac{2}{5}(1200) = 480$$

$$\blacksquare R_2 = (1, 2)$$

$$\begin{bmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}$$

$$\pi_0 = 0,6\pi_0 + 0,5\pi_1$$

$$1 = \pi_0 + \pi_1$$

Solución del sistema

- $\pi_0 = \frac{5}{9}$
- $\pi_1 = \frac{4}{9}$

$$R(C_{R_1}) = \frac{5}{9}(0) + \frac{4}{9}(1200) = 533,33$$

$$\blacksquare R_3 = (2, 1)$$

$$\begin{bmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,6 & 0,4 \end{bmatrix}$$

$$\pi_0 = 0,4\pi_0 + 0,6\pi_1$$

$$1 = \pi_0 + \pi_1$$

Solución del sistema

- $\pi_0 = \frac{1}{2}$
- $\pi_1 = \frac{1}{2}$

$$R(C_{R_1}) = \frac{1}{2}(0) + \frac{1}{2}(1200) = 600$$

■ $R_4 = (2, 2)$

$$\begin{bmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}$$

$$\pi_0 = 0,4\pi_0 + 0,5\pi_1$$

$$1 = \pi_0 + \pi_1$$

Solucion del sistema

- $\pi_0 = \frac{5}{11}$
- $\pi_1 = \frac{5}{11}$

$$R(C_{R_1}) = \frac{5}{11}(0) + \frac{5}{11}(1200) = 545,45$$

Ejemplo

Un estudiante está preocupado por su auto, pues no le gustan las abolladuras. En la escuela puede estacionarlo en la calle en un espacio, en dos espacios o en el estacionamiento. En la calle en un espacio, la probabilidad de que lo abollen es de $\frac{1}{10}$. En dos espacios es $\frac{1}{50}$ y la probabilidad de una infracción de \$15 es de $\frac{3}{10}$. El estacionamiento le cuesta \$5, pero no lo abollarán. Si lo abollan y lo lleva a reparar, se queda sin auto un día y el costo asciende a \$50 por la reparación y el transporte en taxi. También puede manejar su auto abollado, pero piensa que la pérdida del valor y su orgullo equivale a un costo de \$9 por día de escuela. Desea determinar la política óptima para estacionarse y repararlo o no si lo abollan a fin de minimizar su costo promedio esperado a largo plazo por día de escuela.

- Identifique estados, decisiones, costos y matrices de transición para cada decisión.
- Obtenga la política óptima que minimice el costo promedio a largo plazo por unidad de tiempo.

Estados

Estado	Acción
0	Con abolladura
1	Sin abolladura

Decisiones

Decisión	Acción	Estado en que aplica
1	Estacionarse en un espacio.	0,1
2	Estacionar en la calle en dos espacios.	0,1
3	Estacionar en el estacionamiento.	0,1
4	Reparar la abolladura	0
5	No reparar la abolladura	0

Estructura de costos

- $C_{0,1} = 0 + \$9$
- $C_{0,2} = \$15 + \9
- $C_{0,3} = \$5 + \9
- $C_{0,4} = \$50$
- $C_{0,5} = 0 + \$9$
- $C_{1,1} = 0$
- $C_{1,2} = \$15$
- $C_{1,3} = \$5$

Matrices de transición

k=1 Estacionarse en un espacio.

k=2 Estacionar en la calle en dos espacios.

k=3 stacionar en el estacionamiento.

k=4 Reparar la abolladura.

k=5 No reparar la abolladura.

16.1. Solución por programacion lineal

La técnica anterior consiste en enumerar de forma exhaustiva todas las políticas de interés, lo cual puede ser muy laborioso, dependiendo del número de estados y decisiones. Por eso, se puede tratar el problema con programación lineal.

La siguiente matriz representa la política R :

ESTADO	DECISIÓN			
	1	2	...	k
0	$D01$	$D02$...	$D0k$
1	$D11$	$D12$...	$D1k$
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
m	$Dm1$	$Dm2$...	Dmk

Donde $D_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{si en el estado } i \text{ se toma la decisión } k \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

Cada renglón contendrá un 1 y los demás serán 0.

Puede formularse un PPL donde el costo esperado puede expresarse como una función lineal de las D_{ik} sujeto a restricciones iniciales. Sin embargo, las D'_{ik} s son enteros y para aplicar programación lineal se requiere que sean continuos. Para corregir este problema, se cambiará la interpretación de la política. La nueva interpretación consiste en la determinación de la distribución de probabilidad para la decisión en cada estado:

$$D_{ik} = P(k/i)$$

probabilidad de tomar la decisión "k" dado que el sistema está en el estado "i"

A esta política se le llamará aleatorizada mientras que la anterior era determinística.

Cambiando la interpretación de la política, y usando una nueva variable Y_{ik} que representa la probabilidad incondicional de estado estacionario de que el sistema se encuentre en el estado "i" y que se tome la decisión "k", el problema de programación lineal (PPL) a resolverse sería:

17. 17 de abril del 2024

Edos	Decisiones	Edos Viables
0	1	0,1,2
1	2	2
2	3	1,2,3
3		

- $C_{0,1} = 0$
- $C_{1,1} = 1000$
- $C_{1,3} = 6000$
- $C_{2,1} = 3000$
- $C_{2,2} = 4000$
- $C_{2,3} = 6000$
- $C_{3,3} = 6000$

Matriz de costos:

$$\begin{bmatrix} 0 & - & - \\ 1000 & - & 6000 \\ 3000 & 4000 & 6000 \\ - & - & 6000 \end{bmatrix}$$

				k			
1				2			
0	7/8	1/16	1/16	-	-	-	-
0	3/4	1/8	1/8	-	-	-	-
0	0	1/2	1/2	0	1	0	0
-	-	-	-	-	-	-	-

$$\text{Min } z = 0y_{01} + 1000y_{11} + 6000y_{13} + 3000y_{21} + 4000y_{22} + 6000y_{23} + 6000y_{33}$$

S.A

$$y_{01} + y_{11} + y_{13} + y_{21} + y_{22} + y_{23} + y_{33} = 1$$

$$\text{Edo1 } y_{01} - [y_{01}P_{00}(1) + y_{11}P_{10}(1) + y_{13}P_{10}(3) + y_{21}P_{20}(1) + y_{22}P_{20}(2) + y_{23}P_{20}(3) + y_{33}P_{30}(3)]$$

$$\text{Edo2 } y_{11} + y_{13} - [y_{01}P_{01}(1) + y_{11}P_{11}(1) + y_{13}P_{11}(3) + y_{21}P_{21}(1) + y_{22}P_{21}(2) + y_{23}P_{21}(3) + y_{33}P_{31}(3)]$$

$$\text{Edo2 } y_{21} + y_{22} + y_{23} - [y_{01}P_{02}(1) + y_{11}P_{12}(1) + y_{13}P_{12}(3) + y_{21}P_{22}(1) + y_{22}P_{22}(2) + y_{23}P_{22}(3) + y_{33}P_{32}(3)]$$

Sustituyendo las probabilidades

$$\text{Min } z = 0y_{01} + 1000y_{11} + 6000y_{13} + 3000y_{21} + 4000y_{22} + 6000y_{23} + 6000y_{33}$$

$$y_{01} + y_{11} + y_{13} + y_{21} + y_{22} + y_{23} + y_{33} = 1 \quad y_{01} - y_{13} - y_{23} - y_{33} = 0 \quad -7/8y_{01} + 1/4y_{11} + y_{13} - y_{22} - 1/16y_{01} - 1/8y_{11} + 1/2y_{21} + y_{22} + y_{33} \quad y_{ij} \geq 0$$

18. Método de Mejoramiento de Políticas

Para este metodo deben definirse:

- Estados ($m + 1$)
- Decisiones (K)
- Matriz de transición para cada decisión
- Costos

Como resultado conjunto de estar en el estado i y tomar la decisión k , es decir, $di(R) = k$, ocurren dos cosas:

1. Se incurre en un costo que puede depender del estado i , de la decisión k y del siguiente estado j .
2. El sistema se mueve hacia un nuevo estado j en el siguiente período con probabilidad $p_{ij}(k)$.

Sea $q_{ij}(k)$ el costo esperado en el que se incurre cuando el sistema se encuentra en el estado i , se toma la decisión k y el sistema pasa al estado j en el siguiente período.

De acuerdo a esto:

$$c_{ik} = \sum_{j=0}^m q_{ij}(k) \cdot p_{ij}(k)$$

Costo Total Esperado

Sea $V_i^n(R)$ el costo total esperado de un sistema que se inicia en el estado i y que se desarrolla durante n períodos. Entonces $V_i^n(R)$ tendrá dos componentes:

1. c_{ik} , o sea el costo del primer período.
2. $\sum_{j=0}^m p_{ij}(k) V_j^{n-1}(R)$, o sea el costo total esperado de los $n - 1$ períodos restantes.

Entonces:

$$V_i^n(R) = c_{ik} + \sum_{j=0}^m p_{ij}(k) V_j^{n-1}(R) \quad \text{para } i = 0, 1, 2, \dots, m$$

Costo Promedio Esperado a Largo Plazo

El costo promedio esperado a largo plazo por unidad de tiempo al seguir cualquier política R se puede expresar como:

$$g(R) = \sum_{i=0}^m \pi_i c_{ik}$$

que es independiente del estado inicial i .

Relacionando ambos costos, se forma el método conocido como *mejoramiento de políticas*.

18.1. Algoritmo

Paso 0. Se elige arbitrariamente una política inicial de prueba R , se hace $n = 1$.

Paso 1. Determinación del valor. Para cada política R_n se usa $p_{ij}(k)$, c_{ik} y $V_m(R_n) = 0$ (la última variable V_m se hace cero), para resolver el sistema de ecuaciones:

$$g(R_n) = c_{ik} + \sum_{j=0}^m p_{ij}(k) V_j(R_n) - V_i(R_n) \quad \text{para } i = 0, 1, \dots, m$$

Para todos los $m + 1$ valores desconocidos de $g(R_n)$, $V_0(R_n)$, $V_1(R_n)$, \dots , $V_m(R_n)$.

Paso 2. Mejoramiento de la política. Con los valores actuales de $V_i(R_n)$, se encuentra la política alternativa R_{n+1} tal que para cada estado i , $d_i(R_{n+1}) = k$, es la decisión que minimiza:

$$c_{ik} + \sum_{j=0}^m p_{ij}(k) V_j(R_n) - V_i(R_n)$$

Es decir, para cada estado i se quiere minimizar $c_{ik} + \sum_{j=0}^m p_{ij}(k) V_j(R_n) - V_i(R_n)$ para $k = 1, 2, \dots, K$.

Y después se establece $d_i(R_{n+1})$ igual al valor de k que proporciona el mínimo. Este procedimiento define una nueva política R_{n+1} .

Prueba de Optimalidad. Si la política $R_{n+1} = R_n$, se detiene el algoritmo. Si no, $n = n + 1$ y regresar al Paso 1.

19. Método de Mejoramiento de Políticas con Descuento

Para este método deben definirse:

Si se especifica un factor de descuento α para el que:

$$\alpha = \frac{1}{1+i}$$

donde i es la tasa de interés actual por período, entonces puede calcularse el valor presente del costo total esperado a largo plazo, utilizando el factor de descuento.

El criterio de costo descontado es preferible al criterio del costo promedio cuando los períodos de la cadena de Markov son suficientemente largos como para que el valor del dinero en el tiempo se deba tomar en cuenta al momento de sumar los costos en períodos futuros al costo del período actual.

Requisitos del Método:

1. Estados ($m+1$)
2. Decisiones (K)
3. Matriz de transición para cada decisión
4. Costos
5. Factor de descuento α o tasa de interés i

Algoritmo:

Paso 0. Se elige arbitrariamente una política inicial de prueba, R , se hace $n = 1$.

Paso 1. Determinación del Valor. Para cada política R_n se usa $p(i, j)$, c_{ik} para resolver el sistema de ecuaciones:

$$V_i(R_n) = c_{ik} + \alpha \times \sum_{j=0}^m p_{ij}(k) V_j \quad \text{para } i = 0, 1, \dots, m$$

Para todos los $m+1$ valores desconocidos de $V_0(R_n), V_1(R_n), \dots, V_m(R_n)$.

Paso 2. Mejoramiento de la Política. Con los valores actuales de $V_i(R_n)$ se encuentra la política alternativa R_{n+1} tal que para cada estado i , $d_i(R_{n+1}) = k$, es la decisión que minimiza:

$$c_{ik} + \alpha \times \sum_{j=0}^m p_{ij}(k) V_j(R_n)$$

Es decir, para cada estado i se quiere minimizar:

$$\min_{k=1,2,\dots,K} \left(c_{ik} + \alpha \times \sum_{j=0}^m p_{ij}(k) V_j(R_n) \right)$$

Y después se establece $d_i(R_{n+1})$ igual al valor de k que proporciona el mínimo. Este procedimiento define una nueva política R_{n+1} .

Paso 0 Arbitrario $\alpha = 0,1$

Políticas: (1, 1, 2, 3)

Iteración 1:

Despejando i de $0,9 = \frac{1}{1+i}$, encontramos que $i = 0,111$.

Para $i = 0$

$$\begin{aligned}V_0 &= C_{01} + 0,9 [P_{00}(1)V_0 + P_{01}(1)V_1 + P_{02}(1)V_2 + P_{03}(1)V_3] \\&= 0 + 0,9 \left[\frac{7}{8}V_1 + \frac{1}{16}V_2 + \frac{1}{16}V_3 \right] \\&= 0 + \left[\frac{63}{80}V_1 + \frac{9}{160}V_2 + \frac{9}{160}V_3 \right] \\0 &= -V_0 + \frac{63}{80}V_1 + \frac{9}{160}V_2 + \frac{9}{160}V_3\end{aligned}$$

Para $i = 1$

$$\begin{aligned}V_1 &= C_{11} + 0,9 [P_{10}(1)V_0 + P_{11}(1)V_1 + P_{12}(1)V_2 + P_{13}(1)V_3] \\&= 1000 + 0,9 \left[\frac{3}{4}V_1 + \frac{1}{8}V_2 + \frac{1}{8}V_3 \right] \\&= 1000 + \left[\frac{27}{40}V_1 + \frac{9}{80}V_2 + \frac{9}{80}V_3 \right] \\-1000 &= -V_1 + \frac{27}{40}V_1 + \frac{9}{80}V_2 + \frac{9}{80}V_3 \\-1000 &= -\frac{13}{40}V_1 + \frac{9}{80}V_2 + \frac{9}{80}V_3\end{aligned}$$

Para $i = 2$

$$\begin{aligned}V_2 &= C_{22} + 0,9 [P_{20}(1)V_0 + P_{21}(1)V_1 + P_{22}(1)V_2 + P_{23}(1)V_3] \\&= 4000 + 0,9 [V_1] \\-4000 &= 0,9V_1 - V_2\end{aligned}$$

Para $i = 3$

$$V_3 = C_{33} + 0,9 [P_{30}(1)V_0 + P_{31}(1)V_1 + P_{32}(1)V_2 + P_{33}(1)V_3]$$

Sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}-V_0 + \frac{63}{80}V_1 + \frac{9}{160}V_2 + \frac{9}{160}V_3 &= 0 \\-\frac{13}{40}V_1 + \frac{9}{80}V_2 + \frac{9}{80}V_3 &= -1000 \\0,9V_1 - V_2 &= -4000 \\0,9V_0 - V_3 &= -6000\end{aligned}$$

20. Método de Aproximaciones Sucesivas

Este método se utiliza para encontrar la política óptima y el valor de los estados en un proceso de decisión de Markov, donde los costos y decisiones dependen del estado.

Notación:

- c_{ik} : Costo de tomar la acción k en el estado i .
- V_i^n : Valor estimado del estado i en la n -ésima iteración.
- α : Factor de descuento que pondera la importancia relativa de los costos futuros respecto a los inmediatos.
- $p_{ij}(k)$: Probabilidad de transición del estado i al estado j bajo la acción k .
- ε : Umbral de error para la convergencia de los valores.
- N : Número máximo de iteraciones permitidas.

Algoritmo:

Paso 1: Inicialización

- Hacer $n = 1$.
- Definir N como el número máximo de iteraciones.
- Obtener $V_i^1 = \min_k(c_{ik})$ para cada estado i , lo que proporciona una estimación inicial basada solo en los costos inmediatos.

Paso 2: Iteración

- Hacer $n = n + 1$.
- Actualizar el valor de cada estado i según la siguiente regla:

$$V_i^n = \min_k \left(c_{ik} + \alpha \sum_{j=0}^m p_{ij}(k) V_j^{n-1} \right)$$

- Evaluar la convergencia para cada estado i con:

$$|V_i^n - V_i^{n-1}| < \varepsilon$$

- Si todos los valores han convergido dentro del error tolerado ε o $n = N$, finalizar. Si no, regresar al Paso 2.

Datos

Edos	Decisiones	Edos Viables
0	1	0,1,2
1	2	2
2	3	1,2,3
3		

- $C_{0,1} = 0$
- $C_{1,1} = 1000$
- $C_{1,3} = 6000$
- $C_{2,1} = 3000$
- $C_{2,2} = 4000$
- $C_{2,3} = 6000$
- $C_{3,3} = 6000$

Matriz de costos:

$$\begin{bmatrix} 0 & - & - \\ 1000 & - & 6000 \\ 3000 & 4000 & 6000 \\ - & - & 6000 \end{bmatrix}$$

k															
1				2				3							
0	7/8	1/16	1/16	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
0	3/4	1/8	1/8	-	-	-	-	1	0	0	0	-	-	-	-
0	0	1/2	1/2	0	1	0	0	1	0	0	0	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-	1	0	0	0	-	-	-	-

Paso 1: Inicialización

- Establecer $n = 1$, indicando la primera iteración.
- Definir $N = 3$ como el número máximo de iteraciones.
- Calcular V_i^1 para cada estado i usando los costos mínimos iniciales dados:
 - Para el estado 0: $V_0^1 = \min(C_{0,1}) = 0$ (única opción disponible).
 - Para el estado 1: $V_1^1 = \min(C_{1,1}, C_{1,3}) = \min(1000, 6000) = 1000$.
 - Para el estado 2: $V_2^1 = \min(C_{2,1}, C_{2,2}, C_{2,3}) = \min(3000, 4000, 6000) = 3000$.
 - Para el estado 3: $V_3^1 = C_{3,3} = 6000$ (sin decisiones adicionales).

Por lo tanto V^1 es igual A

$$V^1 = (0, 1000, 3000, 6000)$$

Paso 2: Iteración

$$V_i^n = \min_k \left(c_{ik} + \alpha \sum_{j=0}^m p_{ij}(k) V_j^{n-1} \right)$$

- Incrementar n a 2.
- Actualizar el valor de cada estado i usando la regla de actualización:
 - Para el estado $i = 0$:
 - en la decision $k = 1$

$$\begin{aligned} & (C_{01} + \alpha (p_{00}(1) \cdot V_0^1 + p_{01}(1) \cdot V_1^1 + p_{02}(1) \cdot V_2^1 + p_{03}(1) \cdot V_3^1)) \\ & \left(0 + \alpha \left(0 \cdot V_0^1 + \frac{7}{8} \cdot V_1^1 + \frac{1}{16} \cdot V_2^1 + \frac{1}{16} \cdot V_3^1 \right) \right) \\ & \left(0 + \alpha \left(0 \cdot 0 + \frac{7}{8} \cdot 1000 + \frac{1}{16} \cdot 3000 + \frac{1}{16} \cdot 6000 \right) \right) \\ & = 1437,5 \end{aligned}$$

$$V_0^2 = \min(1437,5) = 1437,5$$

- Para el estado $i = 1$:
 - en la decision $k = 1$

$$\begin{aligned} & (C_{11} + \alpha (p_{10}(1) \cdot V_0^1 + p_{11}(1) \cdot V_1^1 + p_{12}(1) \cdot V_2^1 + p_{13}(1) \cdot V_3^1)) \\ & \left(1000 + \alpha \left(0 \cdot V_0^1 + \frac{3}{4} \cdot V_1^1 + \frac{1}{8} \cdot V_2^1 + \frac{1}{8} \cdot V_3^1 \right) \right) \\ & \left(1000 + \alpha \left(0 \cdot 0 + \frac{3}{4} \cdot 1000 + \frac{1}{8} \cdot 3000 + \frac{1}{8} \cdot 6000 \right) \right) \\ & = 2875 \end{aligned}$$

- en la decision $k = 3$

$$\begin{aligned} & (C_{13} + \alpha (p_{10}(3) \cdot V_0^1 + p_{11}(3) \cdot V_1^1 + p_{12}(3) \cdot V_2^1 + p_{13}(3) \cdot V_3^1)) \\ & (6000 + \alpha (1 \cdot V_0^1 + 0 \cdot V_1^1 + 0 \cdot V_2^1 + 0 \cdot V_3^1)) \\ & (6000 + \alpha (1 \cdot 0 + 0 \cdot 1000 + 0 \cdot 3000 + 0 \cdot 6000)) \\ & = 6000 \end{aligned}$$

$$V_1^2 = \min(2875, 6000) = 2875$$

-
-

- Evaluar la convergencia para cada estado i con:

$$|V_i^2 - V_i^1| < \varepsilon$$

- Si todos los valores han convergido dentro del error tolerado ε o si $n = N$, finalizar. Si no, regresar al Paso 2 para la siguiente iteración.

21. Practica

Una empresa se puede anunciar por radio, TV o en periódicos. Los costos semanales de publicidad en los tres medios se estiman en 200, 900 y 300 respectivamente. La empresa puede clasificar sus volúmenes de ventas durante cada semana en 1) Regular, 2) Bueno y 3) Excelente. A continuación se ve un resumen de las probabilidades de transición correspondientes a cada medio publicitario:

$$\text{Radio} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,5 & 0,1 \\ 0,1 & 0,7 & 0,2 \\ 0,1 & 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\text{TV} = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 0,6 & 0,1 \\ 0,1 & 0,7 & 0,2 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$\text{Periódico} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0 & 0,7 & 0,3 \\ 0 & 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \quad (9)$$

Los ingresos semanales correspondientes en miles de dólares son:

$$\text{Radio} = \begin{pmatrix} 400 & 520 & 600 \\ 300 & 400 & 700 \\ 200 & 250 & 500 \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$\text{TV} = \begin{pmatrix} 1000 & 1300 & 1600 \\ 800 & 1000 & 1700 \\ 600 & 700 & 1100 \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$\text{Periódico} = \begin{pmatrix} 400 & 530 & 710 \\ 350 & 450 & 800 \\ 250 & 400 & 650 \end{pmatrix} \quad (12)$$

Obtenga la política óptima de publicidad mediante los algoritmos enumeración exhaustiva de políticas, mejoramiento de políticas, mejoramiento de políticas con descuento y plantee el PPL.

- $C_{0,1} = 0$
- $C_{1,1} = 1000$
- $C_{1,3} = 6000$
- $C_{2,1} = 3000$
- $C_{2,2} = 4000$
- $C_{2,3} = 6000$
- $C_{3,3} = 6000$

Matriz de costos:

$$\begin{bmatrix} 0 & - & - \\ 1000 & - & 6000 \\ 3000 & 4000 & 6000 \\ - & - & 6000 \end{bmatrix}$$

Edos	Decisiones	Edos Viabiles
1	1	1,2,3
2	2	1,2,3
3	3	1,2,3

k											
1				2				3			
0,4	0,5	0,1		0,7	0,2	0,1		0,2	0,5	0,3	
0,1	0,7	0,2		0,3	0,6	0,1		0	0,7	0,3	
0,1	0,2	0,7		0,1	0,7	0,2		0	0,2	0,8	

k											
1				2				3			
400	520	600		1000	1300	1600		400	530	710	
300	400	700		800	1000	1700		350	450	800	
200	250	500		600	700	1100		250	400	650	

$$\text{Políticas} = 3^3 = 27$$

Las posiciones de la políticas son:

- Medio elegido cuando las ventas son Regular
- Medio elegido cuando las ventas son Buenas
- Medio elegido cuando las ventas son Excelentes

$$c_{1,1}=400(0,4)+520(0,5)+600(0,1)-200=280$$

$$c_{2,1}=300(0,1)+400(0,7)+700(0,2)-200=250$$

$$c_{3,1}=200(0,1)+250(0,2)+500(0,7)-200=220$$

$$c_{1,2}=1000(0,7)+1300(0,2)+1600(0,1)-900=220$$

$$c_{2,2}=800(0,3)+1000(0,6)+1700(0,1)-900=110$$

$$c_{3,2}=600(0,1)+700(0,7)+1100(0,2)-900$$

$$c_{1,3}=$$

$$c_{2,3}=$$

$$c_{3,3}=$$

22. Proceso de Poisson, markovianos y no markovianos

Objetivo: El alumno caracterizara el proceso de poisson su relacion con la dist exponencial y sus aplicaciones al proceso de nacimiento y muerte.

Proceso de Poisson

Distribución de Poisson como un caso límite

La distribución de Poisson es un caso límite de la distribución binomial $B(n, P_n)$ cuando la probabilidad de éxito es variable.

$$p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Y si $\lambda = E(X) = np$ se mantiene constante cuando n y p varían, entonces:

$$\pi_k(\lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} p(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad \forall k \geq 0$$

Una variable aleatoria X tiene distribución de Poisson $P(\lambda)$ si toma valores enteros positivos y

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

donde $k \geq 0$ y $\lambda > 0$.

Propiedades:

- $E(X) = \lambda$
- $\text{Var}(X) = \lambda$

Proceso de conteo

Se dice que un proceso estocástico $\{N(t); t \geq 0\}$ es un proceso de conteo si representa el número de eventos ocurridos hasta el tiempo t , esto es, satisface:

- $N(t) \geq 0$
- $N(t)$ toma valores enteros
- Si $s \leq t \rightarrow N_s \leq N_t$ (Es no decreciente)
- Para $s < t$, $N_t - N_s$ es igual al número de eventos que ocurrieron en el intervalo $(s, t]$

La trayectoria de un proceso de conteo es la gráfica $(t; N(t))$ para $t \geq 0$.

Una colección de variables aleatorias $\{N(t); t \geq 0\}$ se llama proceso de Poisson (homogéneo) con intensidad $\lambda > 0$ si satisface las siguientes propiedades:

- $P(N(0) = 0) = 1$, esto es, $N(0)$ es siempre 0.
- Para todo $0 \leq s < t$, $N(t) - N(s)$ tiene distribución de Poisson de parámetro $\lambda(t - s)$.
- Para $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$, las variables aleatorias $N(t_n) - N(t_{n-1}), \dots, N(t_2) - N(t_1), N(t_1) - N(0)$ son independientes. Esta propiedad se conoce como propiedad de incrementos independientes.
- Es un proceso de conteo que tiene incrementos estacionarios, es decir, el número de eventos en el intervalo $(t, t + h]$ tiene la misma distribución que el número de eventos en cualquier otro intervalo de la misma longitud.

- En sí, este proceso de Poisson es un proceso de conteo donde $N_{t+h} - N_t$ es el número de eventos o llegadas que ocurren en el intervalo $[t, t+h]$ con parámetro λt .

Definición: Sea $\{N_t : t \geq 0\}$ un proceso Poisson con intensidad λ , entonces para alguna $s \geq 0$

$$P(N_{t+s} - N_t = k \mid N_u; u \leq t) = P(N_{t+s} - N_t = k) = \frac{(\lambda s)^k e^{-\lambda s}}{k!} \quad k = 0, 1, \dots$$

Definición: Sea L_t un proceso Poisson con intensidad λ y M_t un proceso Poisson con intensidad μ , ambos son independientes. Si definimos a $N_t = L_t + M_t$, entonces N_t es un proceso Poisson con intensidad $\lambda + \mu$.

Viendo las trayectorias de un proceso de Poisson podemos preguntarnos qué distribución tienen los tiempos de llegada del proceso, entendiendo a estos como los tiempos en los que ocurre un éxito.

Para poder ver la distribución de los tiempos de llegada asociaremos a una variable aleatoria, entonces:

$$T_1 = \min\{t \geq 0 : N(t) = 1\} \quad \text{el tiempo de la primera llegada}$$

$$T_m = \min\{t \geq 0 : N(t) = m\} \quad \text{el tiempo de la m-ésima llegada}$$

De esta forma se sabe que para todo $t \geq 0$ y $m \geq 0$ tenemos que si $T_m \leq t$ entonces $\{N(t) \geq m\}$, o sea, que las llegadas se incrementan con el tiempo.

Distribuciones de Tiempos de Llegada en Procesos de Poisson

Distribución del tiempo de la primera llegada:

T_1 , el tiempo de la primera llegada, tiene distribución exponencial, con parámetro $\lambda > 0$. Donde el tiempo esperado de la primera llegada es $E(T_1) = \frac{1}{\lambda}$.

$$f(T_1) = \lambda e^{-\lambda t}$$

Distribución del tiempo de la m-ésima llegada:

T_m , el tiempo de la m-ésima llegada, tiene distribución Gamma con parámetros m y λ , entonces es la suma de m variables aleatorias exponenciales.

$$f_{T_m}(t) = \frac{\lambda^m t^{m-1} e^{-\lambda t}}{\Gamma(m)} \quad \text{si } t \geq 0$$

Tiempos entre llegadas:

$T_i - \min\{S > t : N(S) - N(t) = 1\}$ para $n \geq 1$, las variables aleatorias T_1, T_2, \dots, T_n son independientes y con la misma distribución exponencial, entonces,

$$E(T_i - T_{i-1}) = \frac{1}{\lambda}$$

$$\text{Var}(T_i - T_{i-1}) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Referencia Rápida: Exponencial vs. Poisson

Exponencial

- **Variable Aleatoria:** Tiempo entre llegadas sucesivas $t \geq 0$
- **Función de Densidad o Distribución de Prob:** $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0$
- **Esperanza:** $E(X) = \frac{1}{\lambda}$

- **Probabilidad Acumulada:** $P(t \leq A) = 1 - e^{-\lambda A}$
- **Probabilidad de que no haya llegadas durante el periodo A :** $P(t > A) = e^{-\lambda A}$

Poisson

- **Variable Aleatoria:** Cantidad “n” de llegadas durante un periodo t
- **Función de Probabilidad:** $P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$
- **Esperanza:** λt llegadas durante t
- **Probabilidad Acumulada:** $P_n \leq n = P_0(t) + \dots + P_n(t)$
- **Probabilidad de que no haya llegadas durante el periodo A :** $P_0(A) = e^{-\lambda A}$

23. Procesos de Markov

En este proceso los clientes llegan (nacen) y nunca parten. En este caso, la probabilidad de que hayan “n” nacimientos (llegadas) en “t” unidades de tiempo están dadas por

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}$$

para $n = 0, 1, 2, \dots$

Donde λ es la tasa de llegadas por unidad de tiempo, con el número esperado de llegadas durante t igual a λt .

Esto es, que si el tiempo de llegadas es exponencial con media $1/\lambda$, la cantidad de llegadas durante un período “t” específico tendrá una distribución de Poisson con media λt .

Ejemplo:

Suponga que los nacimientos en un país están separados en el tiempo con una distribución exponencial, presentándose un nacimiento cada 7 minutos en promedio.

A) ¿Cuál es la probabilidad de que no haya nacimientos en un día?

$$\lambda = \frac{24 \times 60}{7} = 205,7 \text{ nacimientos por día}$$

24 horas con 60 minutos cada una, y cada nacimiento ocurre cada 7 minutos

$$P_0(1) = \frac{(205,7 \times 1)^0 e^{-205,7 \times 1}}{0!} \approx 0 \quad n = 0 \text{ (no hay nacimientos)} \quad t = 1 \text{ (un día)}$$

B) ¿Cuál es la probabilidad de emitir 45 actas de nacimiento al final de un período de 3 hrs si se pudieran emitir 35 actas en las primeras 2 hrs?

$n = 10$ (son las actas que se deben imprimir en la última hora, o sea 45-35)

$$\lambda = \frac{60}{7} = 8,57 \text{ (nacimientos por hora)}$$

$$P_{10} = \frac{(8,57 \times 1)^{10} e^{-8,57 \times 1}}{10!} = 0,11172$$

Ejercicio:

Un coleccionista de arte viaja una vez al mes, en promedio, para asistir a subastas. En cada viaje se garantiza una compra. El tiempo entre los viajes tiene una distribución exponencial. Determine:

- La probabilidad de que el coleccionista no compre obras de arte en un período de tres meses (respuesta=0.04978).
- La probabilidad de que le coleccionista no compre más de 8 obras de arte por año (respuesta=0.1550) Tip: Observe que es una distribución acumulada de 0 a 8.
- La probabilidad de que el tiempo entre viajes sucesivos sea mayor que un mes (respuesta = 0.3678) Tip: Ahora la variable aleatoria es el tiempo, por lo que no se trabaja con la distribución Poisson, sino con la exponencial. Observe además que piden $P(t > 1)$.

24. Proceso de muerte pura

En este proceso los clientes se retiran o salen (mueren) de un abasto inicial. Se sigue una distribución truncada de Poisson

$$P_n(t) = \frac{(\mu t)^N - ne^{-\mu t}}{(N-n)!} \quad n = 1, 2, \dots, N \quad \text{y} \quad P_0(t) = 1 - \sum_{n=1}^N P_n(t)$$

Las salidas se hacen con la frecuencia de μ clientes por unidad de tiempo.

Ejemplo:

Al inicio de la semana se almacenan 15 unidades de un artículo de inventario para utilizarse durante la semana. Solo se hacen retiros del almacenamiento durante los primeros 6 días (la empresa cierra los domingos) y sigue una distribución Poisson con media de 3 unidades por día. Cuando el nivel de existencia llega a 5 unidades se coloca un nuevo pedido de 15 unidades para ser entregados al principio de la semana entrante. Debido a la naturaleza del artículo, se desechan todas las unidades que sobran al final de la semana.

a) ¿Cuál es la probabilidad de tener 5 unidades al cuarto día?

$$P_5(4) = \frac{(3 \times 4)^{15-5} e^{-3 \times 4}}{(15-5)!} = 0,1048$$

b) ¿Cuál es la probabilidad de hacer un nuevo pedido para el segundo día?

$$P_{\leq 5}(2) = P_0(2) + P_1(2) + \dots + P_5(2) = \frac{(3 \times 2)^{15-0} e^{-3 \times 2}}{(15-0)!} + \frac{(3 \times 2)^{15-1} e^{-3 \times 2}}{(15-1)!} + \dots + \frac{(3 \times 2)^{15-5} e^{-3 \times 2}}{(15-5)!} = 0,0839$$

25. 13/05/2024

25.1. Proceso de nacimiento y muerte

La mayor parte de los modelos elementales de colas suponen que las entradas (llegadas de clientes) y las salidas (clientes que se van) del sistema ocurren de acuerdo a un proceso de nacimiento y muerte. En el contexto de la teoría de colas, el término de nacimiento se refiere a la llegada de un nuevo cliente, mientras que el término de muerte se refiere a la salida del cliente servido.

El estado del sistema con tiempo t ($t \geq 0$) del proceso de nacimiento y muerte denotado por $N(t)$ es el número de clientes que hay en el sistema en el tiempo t . El proceso de nacimiento y muerte describe en términos probabilísticos cómo cambia $N(t)$ al aumentar t .

De manera precisa se trabaja con 3 supuestos:

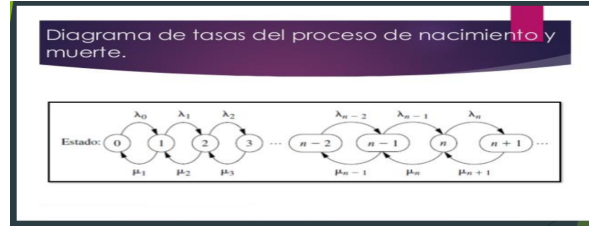
- **Supuesto 1.** Dado $N(t) = n$, la distribución de probabilidad actual al tiempo que falta para el proceso de nacimiento (llegada) es exponencial con parámetro λ_n ($n = 0, 1, 2, \dots$).
- **Supuesto 2.** Dado $N(t) = n$, la distribución actual del tiempo que falta para la próxima muerte (terminación del servicio) es exponencial con parámetro μ_n ($n = 1, 2, \dots$).
- **Supuesto 3.** La variable aleatoria del Supuesto 1 y la variable aleatoria del Supuesto 2 /Tiempo que falta hasta el próximo nacimiento y el tiempo que falta hasta la siguiente muerte son mutuamente independientes.

Entonces: $n = n + 1$ (un solo nacimiento) ó $n = n - 1$ (una sola muerte)

En el caso de un sistema de colas μ_n y λ_n representan la tasa promedio de terminación del servicio y la tasa promedio de llegada, respectivamente, cuando hay n clientes en el sistema.

Este proceso es un tipo especial de cadena de Markov de tiempo continuo. Como las λ_n y μ_n son tasas medias, entonces podemos representar el proceso:

Diagrama de tasas del proceso de nacimiento y muerte



En base a esto se define un principio llamado principio de tasa de entrada=tasa de salida, que se aplica a cualquier estado n ($n = 0, 1, 2, \dots$) del sistema.

La ecuación que expresa este principio se llama ecuación de balance del estado n .

Considere el estado 0. El proceso entra a este estado solo desde el estado 1. En consecuencia, la probabilidad de encontrarse en el estado 1 (P_1) representa la proporción del tiempo que es posible que el proceso entre al estado 0. Dado que el proceso se encuentra en el estado 1, la tasa media de entrada al estado 0 es μ_1 . Así la tasa media global a la que el proceso deja su estado actual para entrar al estado 0 es:

$$\mu_1 P_1 + 0(1 - P_1) = \mu_1 P_1$$

Con el mismo razonamiento, la tasa media de salida es:

$$\lambda_0 P_0 + 0(1 - P_0) = \lambda_0 P_0$$

Así la ecuación de balance es:

$$\mu_1 P_1 = \lambda_0 P_0$$

Todos los demás estados tienen 2 transiciones posibles, hacia adentro y hacia afuera del estado. Así las ecuaciones de balance son:

Estado	Tasa de entrada = Tasa de salida	
0	$\mu_1 P_1$	$\lambda_0 P_0$
1	$\lambda_0 P_0 + \mu_2 P_2$	$(\lambda_1 + \mu_1) P_1$
2	$\lambda_1 P_1 + \mu_3 P_3$	$(\lambda_2 + \mu_2) P_2$
\vdots	\vdots	\vdots
$n-1$	$\lambda_{n-2} P_{n-2} + \mu_n P_n$	$(\lambda_{n-1} + \mu_{n-1}) P_{n-1}$
n	$\lambda_{n-1} P_{n-1} + \mu_{n+1} P_{n+1}$	$(\lambda_n + \mu_n) P_n$
\vdots	\vdots	\vdots

Despejando cada P_i en función de P_0 , se tendrían una serie de ecuaciones recursivas, llegando finalmente a la relación:

$$P_n = \frac{\lambda_{n-1} \lambda_{n-2} \cdots \lambda_0}{\mu_n \mu_{n-1} \cdots \mu_1} (P_0)$$

Haciendo un cambio de variable, donde $C_n = \frac{\lambda_{n-1} \lambda_{n-2} \cdots \lambda_0}{\mu_n \mu_{n-1} \cdots \mu_1}$, y definiendo además que $C_n = 1$ con $n = 0$, entonces:

$$P_n = C_n P_0 \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots$$

El requisito $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$ implica que $(\sum_{n=0}^{\infty} C_n) P_0 = 1$, así que $P_0 = (\sum_{n=0}^{\infty} C_n)^{-1}$.

Cuando un proceso de colas se basa en el proceso de nacimiento y muerte, se obtendrán unas medidas claves del desempeño del sistema, que servirán como base para tomar decisiones.

26. Ejemplo

Se estima que en una línea de espera de un hospital los pacientes llegan a una tasa promedio de uno cada media hora. Un médico requiere un promedio de 20 minutos para atender a un paciente. A continuación, se obtienen las medidas de desempeño del sistema:

26.1. Parámetros del Sistema

- Tasa de llegada (λ): Si llega un paciente cada media hora, esto implica que llegan 2 pacientes por hora.
- Tasa de servicio (μ): El tiempo de servicio es de 20 minutos en promedio, es decir, $\frac{1}{3}$ horas por paciente. Por lo tanto, $\mu = 3$ pacientes por hora.

27. Fórmulas

$$p = \frac{\lambda}{\mu} \quad (13)$$

$$P_0 = 1 - p \quad (14)$$

$$P_n = (1 - p)p^n \quad (15)$$

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \quad (16)$$

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} \quad (17)$$

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda} \quad (18)$$

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} \quad (19)$$

27.1. Cálculos

- $\lambda = 2$ pacientes por hora
- $\mu = 3$ pacientes por hora
- Factor de utilización (p):

$$p = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2}{3}$$

- Probabilidad de que no haya pacientes en el sistema (P_0):

$$P_0 = 1 - p = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

- Probabilidad de que haya exactamente 6 pacientes en el sistema (P_6):

$$P_6 = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^6 = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} \right)^6 \approx 0,029$$

- Número esperado de pacientes en el sistema (L):

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{2}{3 - 2} = 2$$

- Número esperado de pacientes en la cola (L_q):

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{2^2}{3(3 - 2)} = \frac{4}{3} \approx 1,333$$

- Tiempo esperado en el sistema (W):

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{3 - 2} = 1 \text{ hora}$$

- Tiempo esperado en la cola (W_q):

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{2}{3} \text{ horas}$$