Clase 08-01-21

jueves, 7 de enero de 2021 01:58 p. m.

Teorema 39

El determinante de una matriz triangular es igual al producto de las componentes en la diagonal:

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

Demostración

Sea $A=[a_{ij}]$ una matriz triangular inferior:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

para el primer renglón: $A_{ij}=(-1)^{i+j}|M_{ij}|$

$$\det A = a_{11}A_{11} + 0A_{12} + 0A_{13} + \cdots + 0A_{1n}$$
$$= a_{11}(-1)^{1+1}|M_{11}| + 0 + 0 + \cdots + 0$$

$$=+a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + 0 + 0 + \cdots + 0$$

$$= a_{11}\left(a_{22}B_{22} + 0B_{23} + \cdots + 0B_{2n}\right)$$

$$= a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

Ejemplo Calcular $\det A$ si $A=\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 7 & 0 & 0 \\ 5 & 8 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

Para el primer renglón:

$$\det A = -3A_{11} + 0A_{12} + 0A_{13} + 0A_{14}$$

$$=-3(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 8 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

Para el primer renglón:

$$= -3\left(7\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}\right) = -3(7)(-1)(6) = 126$$

O bien, para la 4ª columna:

$$\det A = 0A_{14} + 0A_{24} + 0A_{34} + 6A_{44}$$

$$= 6(-1)^{4+4}\begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -4 & 7 & 0 \\ 5 & 8 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 6\left[-3\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 8 & -1 \end{vmatrix}\right] = 6(-3(7)(-1)-8(0)) = (6)(-3)(7)(-1) = 126$$

Ejercicio 14 pag 187.

Teorema básico

Sea $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ una matriz de $n \times n$

Entonces:

$\det A = |A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}$ desarrollo por cofactores para cualquier renglón

$\det A = |A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}$ desarrollo por cofactores para cualquier columna

Ejemplo Calcular $\det A$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 3 & -5 & 1 \\ -8 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (-1)^{1+1} & (-1)^{1+2} & (-1)^{1+3} \\ (-1)^{2+1} & (-1)^{2+2} & (-1)^{2+3} \\ (-1)^{3+1} & (-1)^{3+2} & (-1)^{3+3} \end{bmatrix}$$

para la 3ª columna:

$$|A| = -2\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -8 & 6 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ -8 & 6 \end{vmatrix} + 9\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}$$

$$|A| = -2(18-40) - (24+56) + 9(-20-21)$$

$$= -2(-22) - 80 + 9(-41)$$

$$= -405$$

para el 2º renglón:

$$|A| = -3\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -8 & 9 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ -8 & 6 \end{vmatrix}$$

$= -3(63+12)-5(36-16)-(24+56)$

$= -3(75)-5(20)-80$

Prob 10 pag. 187

$$\begin{vmatrix} -2 & -10 & 7 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & -1 \\ 0 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}A_{41}$$

$$= -2\begin{vmatrix} -5 & 4 & -1 \\ -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} - 0 + 0 - 0$$

$$= -2\left(0-0+6\begin{vmatrix} -5 & 4 \\ -10 & 0 \end{vmatrix}\right)$$

$$= -2(6(0+40))$$

$$= -480$$

Prob. 15 pag 187 Grossman

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & -2 & -7 \\ 9 & -9 & 0 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 0A_{11} + 0A_{12} + 0A_{13} + 0A_{14} + 0A_{15} = 0$$

Teorema 35

Sean A y B dos matrices de $n \times n$. Entonces:

$$\det AB = (\det A)(\det B)$$

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -5 & 7 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$\det A = 18$ $\qquad$ $\det B = -31$

$$(\det A)(\det B) = -558$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5 & 7 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 13 \\ 38 & -16 \end{bmatrix}$$

$\det AB = -558$

Pero: $\det(A+B) \neq \det A + \det B$

Calculando $A+B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & 7 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} -4 & 10 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}$

$\det(A+B) = -32+10 = -22$

$\det A + \det B = 18-31 = -13$

$\Rightarrow \det(A+B) \neq \det A + \det B$

Teorema 36

$\det A = \det A^t$

del ejemplo $A = \begin{bmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 3 & -5 & 1 \\ -8 & 6 & 9 \end{bmatrix}$

$\det A = -405$

$A^t = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -8 \\ 7 & -5 & 6 \\ -2 & 1 & 9 \end{bmatrix}$

Para el 1er renglón: $|A| = 4\begin{vmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 7 & 6 \\ -2 & 9 \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} 7 & -5 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$

$= 4(-45-6) - 3(63+12) - 8(7-10)$

$= 4(-51) - 3(75) - 8(-3)$

$= -204 - 225 + 24$

$= -405$

PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

1.- Si cualquier renglón o columna de A es un vector cero, entonces $\det A = 0$

$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}$

$= 0A_{i1} + 0A_{i2} + \dots + 0A_{in} = 0$

$$= 0A_{i1} + 0A_{i2} + \dots + 0A_{in} = 0$$

2.- Si A tiene dos renglones o columnas iguales, $\det A = 0$

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & 7 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det A = 1(14+3) + 1(10-3) + 2(-5-7)$$
$$= 17 + 7 - 24 = 0$$

3.- Si un renglón o columna de A es un múltiplo escalar de otro renglón o columna de A, entonces $\det A = 0$.

Ejemplo

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -3 & 7 & 6 \\ 5 & 2 & -10 \end{vmatrix} = 2(-70-12) - (30-30) - 4(-6-35)$$

$$= 2(-82) - 4(-41) = -164 + 164 = 0$$

Problemas Grossman pag. 205, 206.

4.- Si el renglón i o la columna j de A se multiplica por un escalar c, entonces $\det B$ se multiplica por c. (1ª operación)

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \qquad \det A = 16$$

Multiplicando la 3ª columna por -3 se tiene:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -6 \\ 3 & 1 & -12 \\ 0 & -2 & -15 \end{bmatrix}$$

$$\det B = 1\begin{vmatrix} 1 & -12 \\ -2 & -15 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -1 & -6 \\ -2 & -15 \end{vmatrix} \quad \text{para la 1ª columna}$$

$$= -15 - 24 - 3(15-12) = -39 - 9 = -48 = -3(16) = -3 \det A$$

5.- El intercambio de cualesquiera dos renglones o columnas

5.- El intercambio de cualesquiera dos renglones o columnas distintos de A tiene el efecto de multiplicar det A por −1 (3ª operación)

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \; ; \; |A| = 16$$

Intercambiando los renglones 1 y 3 se obtiene:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det B = 0 + 2(6-4) + 5(-3-1) = -16$$

6.- Si se suma un múltiplo escalar de un renglón o columna de A a otro renglón o columna de A, entonces el determinante no cambia (2ª operación)

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \; ; \; |A| = 16$$

Si $R_2 \to R_2 + 4R_3$:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -7 & 24 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \; ; \; \det B = 0 + 2(24-6) + 5(-7+3)$$

$$\det B = 36 - 20 = 16$$

Ejemplo Calcule |A| utilizando las propiedades de los determinantes. (Grossman pag. 201).

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 9 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{vmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 9 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_1]{} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & -11 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 5R_2]{} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -16 & -18 \\ 0 & 0 & -32 & -26 \end{vmatrix} \xrightarrow[R_4 \to R_4 - 2R_3]{} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -16 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}$$

$R_4 \to R_4 - 3R_1$ $\quad R_4 \to R_4 - 7R_2$

$\therefore |A| = (1)(-1)(-16)(10) = 160$

Tarea Grossman pág 205 y 206 probs 1, 3, 5, 7, 13, 17, 23