Clase 09-06-21

lunes, 7 de junio de 2021 12:24 p. m.

Def 34 Matriz Diagonalizable Ortogonalmente

Se dice que una matriz A de $n\times n$ es diagonalizable ortogonalmente si existe una matriz ortogonal Q tal que:

$$D = Q^t A Q, \text{ donde } D = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$$

Teorema 31

Sea A una matriz real (o compleja) de $n\times n$. Entonces A es diagonalizable ortogonalmente si y sólo si A es simétrica.

Teorema 32

Sea A una matriz simétrica real de $n\times n$. Entonces los valores propios de A son reales.

Teorema 33

Sea A una matriz simétrica real. Si λ_1 y λ_2 son valores propios diferentes con vectores propios reales correspondientes $\bar{v}_1$ y $\bar{v}_2$, entonces $\bar{v}_1$ y $\bar{v}_2$ son ortogonales.

Teorema 34

Sea A una matriz simetrica real de $n\times n$. Entonces A tiene n vectores propios reales ortonormales.

Procedimiento para encontrar una matriz diagonalizante Q

1) Encuentre una base para cada espacio propio de A.
2) Encuentre una base ortonormal para cada espacio propio o característico de A usando el proceso de Gram-Schmidt.
3) Escribir Q como la matriz cuyas columnas son los vectores propios ortonormales obtenidos en el paso 2.

Diagonalización de una matriz simétrica de 3×3 utilizando una matriz ortogonal.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Solución

De uno de los ejemplos que se hicieron en la Clase del 24-05-21 de la Unidad 4 se vió esta matriz, donde se obtuvo lo siguiente:

$$p(\lambda) = 0 \implies -(\lambda-1)^2(\lambda-10)$$

$\{ \lambda_1 = 1 \quad ma = 2$

$p(\lambda)=0 \implies -(\lambda-1)^2(\lambda-10)$

Valores propios $\begin{cases} \lambda_1=\lambda_2=1 & ma=2 \\ \lambda_3=10 & ma=1 \end{cases}$

Vectores propios:

Para $\lambda_1=\lambda_2=1$, $(A-\lambda I)\bar{v}=\bar{0}$

$\bar{v}_1=(-1,1,0)$, $\bar{v}_2=(-1,0,2)$ Comprobar

$E_{\lambda_1=\lambda_2}=\{(-1,1,0),(-1,0,2)\}$ $mg_{\lambda=1}=2$

Para $\lambda_3=10$, $(A-\lambda I)\bar{v}=\bar{0}$

$\bar{v}_3=(2,2,1)$; $E_{\lambda_3}=\{(2,2,1)\}$, $mg_{\lambda=10}=1$ Comprobar

Para encontrar Q se aplica el proceso de Gram-Schmidt a $\{\bar{v}_1,\bar{v}_2\}$.

$\bar{u}_1=\dfrac{\bar{v}_1}{|\bar{v}_1|}$; $|\bar{v}_1|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

$\therefore \bar{u}_1=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$ primer vector unitario para $\lambda_1=1$

Para encontrar el segundo vector unitario correspondiente a $\lambda_1=1$:

$$\bar{v}_2'=\bar{v}_2-(\bar{v}_2\cdot\bar{u}_1)\bar{u}_1$$

$$=(-1,0,2)-\left[(-1,0,2)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)\right]\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$$

$$=(-1,0,2)-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)=(-1,0,2)+\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right)$$

$$\bar{v}_2'=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},2\right) \;;\; |\bar{v}_2'|=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+4}=\sqrt{\frac{18}{4}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \bar{u}_2=\frac{\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},2\right)}{\frac{3\sqrt{2}}{2}}=\frac{(-1,-1,4)}{3\sqrt{2}}=\left(-\frac{1}{3\sqrt{2}},-\frac{1}{3\sqrt{2}},\frac{4}{3\sqrt{2}}\right)$$

Por último, $\bar{u}_3=\dfrac{\bar{v}_3}{|\bar{v}_3|}=\dfrac{(2,2,1)}{3}=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$

Por lo tanto:

$$Q=\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Los vectores $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$ y $\bar{u}_3$ son mutuamente ortogonales y unitarios

L

Ahora:

$$D = Q^t A Q = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ \frac{20}{3} & \frac{20}{3} & \frac{10}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

En el caso complejo: $A = \bar{A}^t$ es hermitiana, el análogo de una matriz simétrica en el caso real, y $U^* = U^{-1}$ es el análogo de Q^t, en el caso complejo. Por tanto podemos diagonalizar A:

$D = U^* A U$ en el caso complejo, donde U es llamada matriz unitaria

Ejemplo Encuentre una matriz unitaria U tal que U^*AU es diagonal y $A = \begin{bmatrix} 0 & 3-2i \\ 3+2i & 0 \end{bmatrix}$

Solución:

A es hermitiana $(A = \bar{A}^t)$, por tanto se puede diagonalizar unitariamente

$$p(\lambda) = +\lambda^2 - (3-2i)(3+2i) = \lambda^2 - (9+6i-6i+4) = \lambda^2 - 13$$

$$\therefore \ \lambda_1 = \sqrt{13}, \quad \lambda_2 = -\sqrt{13}$$

Con $\lambda_1 = \sqrt{13}$, $(A - \lambda I)\bar{v} = \bar{0}$

$$\begin{bmatrix} -\sqrt{13} & 3-2i \\ 3+2i & -\sqrt{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-\sqrt{13}\, x_1 + (3-2i)x_2 = 0$$

$$-\sqrt{13}\, x_1 = -(3-2i)x_2$$

$$x_1 = \frac{3-2i}{\sqrt{13}} x_2 \ ; \quad \bar{V}_1 = \begin{bmatrix} 3-2i \\ \sqrt{13} \end{bmatrix} \text{ para } x_2 = \sqrt{13}$$

$$|\bar{V}_1| = \sqrt{(3-2i, \sqrt{13}) \cdot [3+2i, \sqrt{13}]} = \sqrt{9+6i-6i+4+13} = \sqrt{26}$$

$$\therefore \quad \bar{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{bmatrix} 3-2i \\ \sqrt{13} \end{bmatrix}$$

Para $\lambda_2 = -\sqrt{13}$, $(A-\lambda I)\bar{v} = \bar{0}$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{13} & 3-2i \\ 3+2i & \sqrt{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(3+2i)X_1 + \sqrt{13}\, X_2 = 0$$

$$(3+2i)X_1 = -\sqrt{13}\, X_2 \quad ; \quad \bar{V}_2 = \begin{bmatrix} -\sqrt{13} \\ 3+2i \end{bmatrix} \text{ para } X_1 = \sqrt{13}$$

$$|\bar{V}_2| = \sqrt{(-\sqrt{13}, 3+2i) \cdot [-\sqrt{13}, 3-2i]} = \sqrt{13+9-6i+6i+4} = \sqrt{26}$$

$$\therefore \bar{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{bmatrix} -\sqrt{13} \\ 3+2i \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la matriz Unitaria U es:

$$U = \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{bmatrix} 3-2i & -\sqrt{13} \\ \sqrt{13} & 3+2i \end{bmatrix} \quad ; \quad \det U = \frac{(3-2i)(3+2i)}{26} + \frac{13}{26} = +1$$

Se cumplen por tanto:

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_1 \cdot \bar{u}_1 &= 1 \\ \bar{u}_1 \cdot \bar{u}_2 &= 0 \\ \det U &= +1 \end{aligned} \right\} \; U \text{ es unitaria y } U^* = \bar{U}^t = \bar{U}^{-1}$$

Por lo que A es diagonalizable y $D = U^* A U$

$$U^* A U = \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{bmatrix} 3+2i & \sqrt{13} \\ -\sqrt{13} & 3-2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3-2i \\ 3+2i & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{bmatrix} 3-2i & -\sqrt{13} \\ \sqrt{13} & 3+2i \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{26}\begin{bmatrix} 3+2i & \sqrt{13} \\ -\sqrt{13} & 3-2i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3\sqrt{13}-2\sqrt{13}\,i & 9+6i-6i+4 \\ 9-6i+6i+4 & -3\sqrt{13}-2\sqrt{13}\,i \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{26}\begin{bmatrix} 3+2i & \sqrt{13} \\ -\sqrt{13} & 3-2i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3\sqrt{13}-2\sqrt{13}\,i & 13 \\ 13 & -3\sqrt{13}-2\sqrt{13}\,i \end{bmatrix}$$

$$D = \frac{1}{26}\begin{bmatrix} 26\sqrt{13} & 0 \\ 0 & -26\sqrt{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{13} & 0 \\ 0 & -\sqrt{13} \end{bmatrix}$$

Una transformación ortogonal es una ISOMETRÍA porque preserva la norma de los vectores de un Espacio Vectorial donde se ha definido un producto interno, es decir:

$$\|T\tilde{x}\| = \|\tilde{x}\|$$

Teorema 35

Una tranoformación lineal T de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una isometría si y sólo si la repreoentación matricial de T es una matriz ortogonal.

Nos intereoa, por tanto, que una tranoformación lineal preserve la norma de vectores.