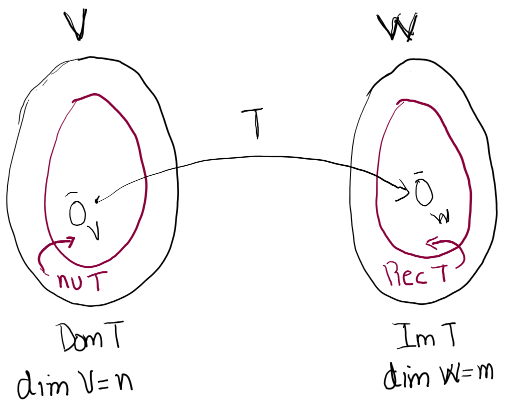
Clase 07-05-21

miércoles, 5 de mayo de 2021 05:59 a. m.

Núcleo y Recorrido de una Tranoformación Lineal

Sea T una tranoformación lineal de V hacia W, o sea:



$T: V \to W$, T lineal

$T(\bar{0}_V) = \bar{0}_W$ Teorma 13

Además aparecen dos subespacios nuevos:

nu T = núcleo de T, subespacio de V

Rec T = recorrido de T, subespacio de W

Con sus dimensiones:

$\nu(T)$ = nulidad de T = dim nu T

$\rho(T)$ = rango de T = dim Rec T

Sabemos que:

Dom T = dominio de T = V

Im T = espacio imagen de T = W

Nunca hay un núcleo vacío ni un recorrido vacío, ya que $\bar{0} \in \text{nu}\,T$ y $\bar{0} \in \text{Rec}\,T$ para cualquier T lineal.

Explicación

Def 15 Núcleo y Recorrido de T

Sean V y W dos espacios vectoriales y sea $T: V \to W$ una transformación lineal. Entonces:

1) $\text{nu}\,T = \{ \bar{v} \in V : T(\bar{v}) = \bar{0}_W \}$ S.L.H.

2) $\text{Rec}\,T = \{ \bar{w} \in W : \bar{w} = T(\bar{v}) \text{ para algún } \bar{v} \in V \}$ S.L no H.

2) $\text{Rec}\, T = \{ \bar{w} \in W : \bar{w} = T(\bar{v}) \text{ para algún } \bar{v} \in V \}$ S.L no H.

Teorema 15

Si $T: V \to W$ es una transformación lineal, entonces:

i) $\text{nu}\, T$ es un subespacio de V

ii) $\text{Rec}\, T$ es un subespacio de W.

Demostración

i) $\text{nu}\, T$ es un subespacio de V

Sean $\bar{u}, \bar{v} \in \text{nu}\, T$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

S1) $\bar{u} + \bar{v} \in \text{nu}\, T$ Cerradura de la suma

Si $\bar{u} + \bar{v} \in \text{nu}\, T$, entonces $T(\bar{u}+\bar{v}) = \bar{0}_W$

Verificación:

$T(\bar{u}) = \bar{0}_W$ por def 15

$T(\bar{v}) = \bar{0}_W$ ✓ ✓

Como T es lineal: $\underbrace{T(\bar{u})}_{\bar{0}_W} + \underbrace{T(\bar{v})}_{\bar{0}_W} = T(\bar{u}+\bar{v})$

$\therefore \bar{u} + \bar{v} \in \text{nu}\, T$

M1) $\alpha \bar{u} \in \text{nu}\, T$ Cerradura del producto

Si $\alpha \bar{u} \in \text{nu}\, T$, entonces $T(\alpha \bar{u}) = \bar{0}_W$

Verificación:

$T(\bar{u}) = \bar{0}_W$ def 15

$\alpha T(\bar{u}) = \alpha(\bar{0}_W) = \bar{0}_W$

Como T es lineal: $\alpha T(\bar{u}) = T(\alpha \bar{u})$

$\therefore \alpha \bar{u} \in \text{nu}\, T$

y $\text{nu}\, T$ es un subespacio de V. ✓

ii) $\text{Rec}\, T$ es un subespacio de W.

Sean $\bar{w}_1, \bar{w}_2 \in \text{Rec}\, T$ y $\alpha \in \mathbb{R}$

S1) $\bar{w}_1 + \bar{w}_2 \in \text{Rec}\, T$ Cerradura de la suma

Si $\bar{w}_1 + \bar{w}_2 \in \text{Rec}\, T$: $(\bar{w}_1 + \bar{w}_2) = T(\bar{v}_1 + \bar{v}_2)$, $\bar{v}_1$ y $\bar{v}_2 \in V$ def 15

Verificación:

$\bar{w}_1 = T(\bar{v}_1)$, $\bar{v}_1 \in V$ def 15 y Teorema 15

$\bar{w}_2 = T(\bar{v}_2)$, $\bar{v}_2 \in V$ def 15 ✓ ✓

$\bar{w}_1 + \bar{w}_2 = T(\bar{v}_1) + T(\bar{v}_2)$ Suma de vectores

$$\underbrace{}_{\in V} \quad \underbrace{}_{\in V}$$

$= T(\underbrace{\bar{v}_1 + \bar{v}_2}_{}) $ por ser T lineal

$\in V$ por ser V un espacio vectorial.

$\therefore \bar{w}_1 + \bar{w}_2 \in \text{Rec}\,T$ por def. 15

1) $\text{nu}\,T = \{\bar{v} \in V : T(\bar{v}) = \bar{0}_W\}$ S.L.H.

2) $\text{Rec}\,T = \{\bar{w} \in W : \bar{w} = T(\bar{v})$ para algún $\bar{v} \in V\}$ S.L no H.

M1) $\alpha\bar{w} \in \text{Rec}\,T$ Cerradura del producto

si $\alpha\bar{w} \in \text{Rec}\,T$ entonces $\alpha\bar{w} = T(\alpha V)$ para algún $\bar{v} \in V$

Verificación:

$\bar{w} = T(\bar{v})$ def 15

$\alpha\bar{w} = \alpha T(\bar{v})$ producto de vector por escalar.

$= T(\underbrace{\alpha\bar{v}}_{\in V})$ por ser T lineal

$\in V$ por ser V un espacio vectorial

$\therefore \alpha\bar{w} \in \text{Rec}\,T$ por def. 15

y Rec T es un subespacio de W. ✓

LQQD.

Def 16 Nulidad y Rango de una Tranformación Lineal

Si T es una TL de V en W, entonces se define:

nulidad de $T = \dim \text{nu}\,T = \nu(T)$

rango de $T = \dim \text{Rec}\,T = \rho(T)$

Teorema 16 Teorema Fundamental del AL

$\dim V = \dim \text{nu}\,T + \dim \text{Rec}\,T$

$n = \nu(T) + \rho(T)$

Nota: Si $\text{nu}\,T = \bar{0}$, $\dim \text{nu}\,T = 0$

Ejemplos

1) Sea $V = M_{mn}$ y defínase $T: M_{mn} \to M_{nxm}$ por (lineal)

$T(A) = A^T$. Encuentre nu T, Rec T, $\nu(T)$ y $\rho(T)$

Solución

En este caso, $V = M_{mn}$ y $W = M_{nm}$

1) $\text{nu}\,T = \{\bar{v} \in V : T(\bar{v}) = \bar{0}_W\}$ S.L.H.

a) $\text{nu}(T) = \{A \in M_{mn} : T(A) = [0]_{nm}\}$ def. 15

Entonces: $T(A) = A^T = [0]_{nm}$ Ver enunciado del problema

$y \ \text{nu}\, T = \{ [0] \}$

b) $\nu(T) = 0$ Teorema 16

2) $\text{Rec}\, T = \{ \bar{w} \in W : \bar{w} = T(\bar{v})$ para algún $\bar{v} \in V \}$

c) $\text{Rec}\, T = \{ B \in M_{nm} : B = T(A)$, para alguna $A \in V \}$ def. 15

$$n = \nu(T) + \rho(T)$$
$$mn = \nu(T) + \rho(T)$$
$$\rho(T) = mn - \nu(T) \quad \text{del Teorema 16}$$
$$\rho(T) = mn - 0 = mn$$

$\therefore \ \text{Rec}\, T = M_{nm}$ (todo W)

Ejemplo Sea $T: P_3 \to P_2$ lineal definida por:

$$T(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2.$$

1) $\text{nu}\, T = \{ \bar{v} \in V : T(\bar{v}) = \bar{0}_W \}$

Encuentre nu T, Rec T, $\nu(T)$, $\rho(T)$.

2) $\text{Rec}\, T = \{ \bar{w} \in W : \bar{w} = T(\bar{v})$ para algún $\bar{v} \in V \}$

Solución:

En este caso, $V = P_3$ y $W = P_2$

a) $\text{nu}\, T = \{ p(x) \in P_3 : T[p(x)] = 0 + 0x + 0x^2 \}$ def. 15

$$T(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) = 0 + 0x + 0x^2 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

$$\therefore \ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = 0 + 0x + 0x^2$$

por tanto:

$a_0 = 0$
$a_1 = 0$
$a_2 = 0$
$a_3 \in \mathbb{R}$

Entonces:

$$\text{nu}\, T = \{ a_3 x^3 \},\ a_3 \in \mathbb{R} \longrightarrow B_{\text{nu}\, T} = \{ x^3 \}$$

b) $\nu(T) = 1$

c) Rec T:

$$n = \nu(T) + \rho(T) \quad \text{del Teorema 16}$$
$$4 = 1 + \rho(T)$$

$$\rho(T) = \dim \text{Rec}\, T = 4 - 1 = 3$$
$$\rho(T) = 3$$

2) $\text{Rec}\, T = \{ \bar{w} \in W : \bar{w} = T(\bar{v})$ para algún $\bar{v} \in V \}$

$\therefore \ \text{Rec}\, T = P_2$; $(\dim P_2 = 3)$

$\therefore \ \text{Rec}\, T = \{ b_0 + b_1 x + b_2 x^2 \}$.

$B_{Rec\,T} = \{1, x, x^2\}$ una base del recorrido

d) $\rho(T) = 3$

Grossman pag. 500 Obtener núcleo, nulidad, recorrido y rango de la tranoformación lineal dada.

2) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; $T(x,y) = (x,0)$

En este caso, $V = \mathbb{R}^2$ y $W = \mathbb{R}^2$

1) $nu\,T = \{\bar{v} \in V : T(\bar{v}) = \bar{0}_W\}$ S.L.H.

a) $nu\,T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : T(x,y) = (0,0)\}$ def 15

2) $Rec\,T = \{\bar{w} \in W : \bar{w} = T(\bar{v})$ para algún $\bar{v} \in V\}$ S.L no H.

$T(x,y) = (0,0)$

pero: $T(x,y) = (x,0)$

Igualando: $(x,0) = (0,0)$

$0 = x$

$y \in \mathbb{R}$

$\therefore nu\,T = \{(0,y) ; y \in \mathbb{R}\}$

b) $B_{nu\,T} = \{(0,1)\}$, para $y = 1$

$\nu(T) = 1$

c) Rec T:

$n = \nu(T) + \rho(T)$ Teorema 16

$2 = 1 + \rho(T)$

$\rho(T) = 1$

2) $Rec\,T = \{\bar{w} \in W : \bar{w} = T(\bar{v})$ para algún $\bar{v} \in V\}$

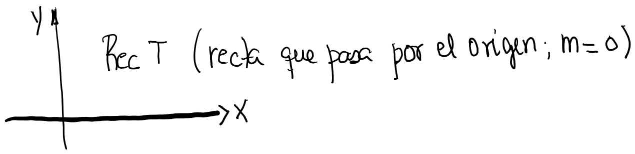
$Rec\ T = \{\bar{b} \in \mathbb{R}^2 : \bar{b} = T(\bar{x}), \bar{x} \in \mathbb{R}^2\}$

$= \{(a,b) : (a,b) = T(x,y)\}$

$(a,b) = (x,0)$

Pero $T(x,y) = (x,0)$

$\therefore Rec\,T = \{(a,0)\} ; a \in \mathbb{R}$



$B_{Rec\,T} = \{(1,0)\}$ para $a = 1$

Recta que pasa por el origen con $m = 0$

Ejemplo $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, T lineal; donde: $T(x,y,z) = (x,y)$

a) $nu\,T = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^3 : T(x,y,z) = (0,0)\}$

1) $nu\,T = \{\bar{v} \in V : T(\bar{v}) = \bar{0}_W\}$

$T(x,y,z) = (0,0) = (x,y)$

$\Rightarrow x = 0$

$y = 0$

$z \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \\ z \in \mathbb{R} \end{array}$

$\therefore \; nu\, T = \{(0,0,z)\},\ z \in \mathbb{R}$

b) $\nu(T)=1$; $B_{nuT} = \{(0,0,1)\}$, para $z=1$. (base del núcleo de T)

c) $Rec\, T = \{\bar{b} \in \mathbb{R}^2 : \bar{b} = T(\bar{x})\ ;\ \bar{x} \in \mathbb{R}^3\}$

2) $Rec\, T = \{\bar{w} \in W : \bar{w} = T(\bar{v})$ para algún $\bar{v} \in V\}$

$n = \nu(T) + \rho(T)$ Teorema 16

$3 = 1 + \rho(T)$

$\rho(T) = 2$

$Rec\, T = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : (a,b) = T(x,y,z)\}$

$(a,b) = T(x,y,z) = (x,y)$

$(a,b) = T(x,y,z) = (x,y)$

$Rec\, T = \mathbb{R}^2 = \{(a,b)\}$

$B_{Rec\,T} = \{(1,0),(0,1)\}$ base del Recorrido de T.