Clase 14-05-21

jueves, 13 de mayo de 2021 10:19 a. m.

Ejemplo: Sea $T: V \to W$ definida como $O(\bar{v}) = \bar{O}_W \ \forall \bar{v} \in V$. Transformación Cero

$\text{nu } T = \{\bar{v} \in V : T\bar{v} = \bar{O}_W\}$; $\text{nu } O(\bar{v}) = V$

$\text{Rec } T = \{\bar{w} \in W : \bar{w} = T\bar{v}, \bar{v} \in V\}$; $\text{Rec } O(\bar{v}) = \bar{O}_W$

Ejemplo Sea $T: V \to W$ definida como $I(\bar{v}) = \bar{v} \ \forall \bar{v} \in V$. Transformación Identidad

$\text{nu } T = \{\bar{v} \in V : T\bar{v} = \bar{O}_W\}$; $\text{nu } I(\bar{v}) = \bar{O}_W$

$\text{Rec } T = \{\bar{w} \in W : \bar{w} = T\bar{v}, \bar{v} \in V\}$; $\text{Rec } I(\bar{v}) = V$

Teorema 18 Representación matricial de una Transformación Lineal.

Sea A una matriz de $m \times n$ y defínase $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ por $T\bar{x} = Ax$ (1)

$T(\bar{x}) = A\bar{x}$

$T\bar{x} = A\bar{x}$ $\quad A(\bar{x}) = A\bar{x}$

Entonces toda matriz A de $m \times n$ se puede utilizar para definir una transformación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$.

Demostración

Sean $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$ y sea $\alpha \in \mathbb{R}$.

1) $T(\bar{x}+\bar{y}) = T(\bar{x}) + T(\bar{y}) \longrightarrow T(x+y) = T\bar{x} + T\bar{y}$

miembro izquierdo:

$T(\bar{x}+\bar{y}) = A(\bar{x}+\bar{y})$ Aplicando la R.T.

$= A\bar{x} + A\bar{y}$ Ley distributiva del producto de matrices

$= T(\bar{x}) + T(\bar{y})$ Sustituyendo (1)

$\therefore T(\bar{x}+\bar{y}) = T(\bar{x}) + T(\bar{y})$

2) $T(\alpha\bar{x}) = \alpha T(\bar{x})$

m. izq:

$T(\alpha\bar{x}) = A(\alpha\bar{x})$ aplicando la R.T.

$= A\alpha\bar{x}$ prop. asociativa del producto de matrices

$= \alpha(A\bar{x})$

$= \alpha T(\bar{x})$ Sustituyendo (1)

$T(\bar{x}) = T\bar{x}$

$\therefore T(\alpha\bar{x}) = \alpha T(\bar{x})$

Por tanto T es lineal y toda matriz A de $m \times n$ se puede utilizar para definir una transformación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$.

Teorema 19

Sea $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal. Existe entonces una matriz única de $m \times n$ A_T tal que:

$T\bar{x} = A_T\bar{x} \quad \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n$ $\quad$ T es única

Nota: A_T se denomina matriz de transformación correspondiente a T o representación matricial de T.

Definición 17

Las columnas de A_T son las imágenes de cada uno de los vectores de la base de V, es decir, son $\bar{w}_i = T\bar{v}_i$.

Ejemplo 1

Sea $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida como $T(x,y,z) = (x,y,0)$; T lineal.

Encuentre A_T con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

$$T(1,0,0) = (1,0,0)$$
$$T(0,1,0) = (0,1,0)$$
$$T(0,0,1) = (0,0,0)$$

$$A_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$A_T\bar{x} = T\bar{x}$ ... Recordar

Ejemplo 2:

Sea $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ lineal, definida como: $T(x,y,z) = (x-y,\ y+z,\ 2x-y-z,\ -x+y+2z)$.

Encuentre A_T con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$

$$T(1,0,0) = (1,0,2,-1)$$
$$T(0,1,0) = (-1,1,-1,1)$$
$$T(0,0,1) = (0,1,-1,2)$$

; $A_T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{4\times 3}$

Ejemplo 3:

Sea $T: P_3 \to P_2$, T lineal definida como:

$$T(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = a_1 + a_2x^2$$

Base de P_2

base de P_3

$$\begin{array}{r|ccc} & 1 & x & x^2 \\ \hline T(1) = & 0 & 0 & 0 \\ T(x) = & 1 & 0 & 0 \\ T(x^2) = & 0 & 0 & 1 \\ T(x^3) = & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$A_T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 4}$$ con respecto a la base canónica de P_3

Ejemplo 4:

Sea $T: M_{23} \to \mathbb{R}^3$, T lineal definida como:

$$T\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = (a+e,\ b+f,\ c+d)$$

Encontrar A_T con respecto a la base canónica de M_{23}.

$T\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} = (1,0,0)$

$T\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix} = (0,1,0)$

$A_T = \begin{bmatrix}1&0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0&1\\0&0&1&1&0&0\end{bmatrix}_{3\times6}$

$T\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix} = (0,0,1)$

$T\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix} = (0,0,1)$

$T\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{bmatrix} = (1,0,0)$

$T\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix} = (0,1,0)$

Teorema 20

Sean V y W EV (espacios vectoriales) de dimensión finita con $\dim V = n$. Sea $T: V \to W$ una TL y sea A_T una representación matricial de T respecto de las bases B_1 en V y B_2 en W.

Entonces:

1) $\nu(T) = \nu(A_T)$

2) $\rho(T) = \rho(A_T)$

3) $n = \nu(A_T) + \rho(A_T)$

Redefiniendo, para $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$:

$nu\, A_T = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : A\bar{x} = \bar{0}\}$ SLH $\qquad nu\, T = \{\bar{v} \in V : T\bar{v} = \bar{0}_W, \bar{v} \in V\}$

$Rec\, A_T = \{\bar{b} \in \mathbb{R}^m : \bar{b} = A\bar{x} ; \bar{x} \in \mathbb{R}^n\}$ SL no H $\qquad Rec\, T = \{\bar{w} \in W : \bar{w} = T\bar{v}\}$

$b = Ax$

De los ejemplos anteriores:

Ejemplo ①: $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y,z) = (x,y,0)$

$A_T = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

Encontrar $nu\, A_T$, $B_{nu A_T}$, $\nu(A_T)$, $Rec\, A_T$, $B_{Rec A_T}$, $\rho(A_T)$.

a) $nu\, A_T = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^3 : A\bar{x} = \bar{0}\}$ SLH

$A\bar{x} = \bar{0} \implies \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ SLH

Resolviendo por Gauss-Jordan:

$\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\\0&1&0&0\end{array}\right]$ $\quad x = 0$, $y = 0$

Resolviendo por Gauss-Jordan

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \\ z \in \mathbb{R} \end{array}$$

$\therefore \; nu\, A_T = \{(0,0,z)\},\; z \in \mathbb{R}.$

b) $B_{nu A_T} = \{(0,0,1)\}$;

c) $\nu(A_T) = 1$

d) $n = \nu(A_T) + \rho(A_T)$

$3 = 1 + \rho(A_T) \implies \rho(A_T) = 2$

$Rec\, A_T = \{ b \in \mathbb{R}^3 : \bar{b} = A\bar{x},\; \bar{x} \in \mathbb{R}^3 \}$

$A\bar{x} = \bar{b} \implies \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ SL no Homogéneo

Resolviendo por Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & c \end{array}\right]$$ renglón de ceros

Para que el sistema tenga solución: $0 = c$

$\therefore \; Rec\,T = \{(a,b,0)\},\; a,b \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} a + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} b$$

$B_{Rec A_T} = \{(1,0,0), (0,1,0)\}$

$\rho(A_T) = 2$

Ejemplo 2:

Sea $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ lineal, definida como:

$T(x,y,z) = (x-y,\; y+z,\; 2x-y-z,\; -x+y+2z)$

y $A_T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

a) $nu\, A_T = \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^3 : A\bar{x} = \bar{0} \}$

$A\bar{x} = \bar{0} \implies \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Resolviendo por Gauss-Jordan:

Resolviendo por Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \begin{matrix} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{matrix}$$

$\therefore \text{nu}\, A_T = \{(0,0,0)\} = \{\bar{0}\}$

b) $\nu(A_T) = 0$

c) $n = \nu + \rho$

$3 = 0 + \rho \Rightarrow \rho(A_T) = 3$

$\text{Rec}\, A_T = \{\bar{b} \in \mathbb{R}^4 : \bar{b} = A\bar{x},\ \bar{x} \in \mathbb{R}^3\}$

$$A\bar{x} = \bar{b} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

Resolviendo por Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 2 & -1 & -1 & c \\ -1 & 1 & 2 & d \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & -1 & c-2a \\ 0 & 0 & 2 & a+d \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a+b \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & -2 & c-2a-b \\ 0 & 0 & 2 & a+d \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a+b \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 & (2a+b-c)/2 \\ 0 & 0 & 2 & a+d \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & (b+c)/2 \\ 0 & 1 & 0 & (-2a+b+c)/2 \\ 0 & 0 & 1 & (2a+b-c)/2 \\ 0 & 0 & 0 & -a-b+c+d \end{array}\right]$$

Para que el sistema tenga solución: $-a-b+c+d=0$

$a = -b+c+d$

$b,c,d \in \mathbb{R} \to$ 3 variables libres (3 pivotes)

$\therefore \text{Rec}\, A_T = \{(-b+c+d, b, c, d) \in \mathbb{R}^4,\ b,c,d \in \mathbb{R}\}$; $\rho(A_T) = 3$

Una base para el recorrido de A_T:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} b + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} c + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} d$$

$B_{\text{Rec}\,A_T} = \{(-1,1,0,0), (1,0,1,0), (1,0,0,1)\}$

Ejemplo 3:

Sea $T: P_3 \to P_2$, T lineal definida como:

$T(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = a_1 + a_2x^2$

$$A_T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 4}$$ con respecto a la base canónica de P_3

Como A_T es la misma tanto para el núcleo de A_T $(A_T\bar{x} = \bar{0})$ como para el recorrido $(A_T\bar{x} = b)$ los cálculos los realizaremos simultáneamente:

$$\begin{array}{cccc|c|c} & & & & nu & Rec \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & b_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & b_2 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{array}{cccccc} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 = & nu & Rec \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & b_0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 \end{array}\right] \longrightarrow$$

a) $nu\ A_T$:

$a_1 = 0$

$a_2 = 0$

$a_0, a_3 \in \mathbb{R}$ 2 variables libres

$\therefore nu\ A_T = \{ a_0 + a_3x^3;\ a_0, a_3 \in \mathbb{R} \}$

$B_{nu\,A_T} = \{1, x^3\}$ b) $\nu(A_T) = 2$

c) $Rec\ A_T$: $(\in P_2)$

para que el sistema tenga solución: $b_1 = 0$, b_0 y $b_2 \in \mathbb{R}$ (2 variables libres)

$\therefore Rec\ A_T = \{ b_0 + b_2x^2;\ b_0, b_2 \in \mathbb{R} \}$

$B_{Rec\,A_T} = \{1, x^2\}$, $\rho(A_T) = 2$