## Clase 17-05-21

sábado, 15 de mayo de 2021 11:02 a. m.

Ejemplo 4: (pág 519 prob 25)

25) Sea $T: M_{23} \to \mathbb{R}^3$, T lineal definida como:

$$T\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = (a+e, b+f, c+d)$$

Encontrar $nu\, A_T$, $\gamma(A_T)$, $B_{nu A_T}$, $Rec\, A_T$, $B_{Rec A_T}$, $\rho(A_T)$

Solución

Habiamos encontrado ya $A_T$ con respecto a las bases canónicas de $M_{23}$ y $R^3$:

$$A_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 6}$$

Resolvemos simultáneamente para $nu\, A_T$ y $Rec\, A_T$:

$$\begin{array}{cccccccc} & & & & & & nu & Rec \\ \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cccccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & z \end{array}\right]$$

a) $nu\, A_T$

$a+e=0$ , $a=-e$

$b+f=0$ , $b=-f$

$c+d=0$ , $c=-d$

$e, f, d \in \mathbb{R}$ 3 variables libres

$$nu\, A_T = \left\{ \begin{bmatrix} -e & -f & -d \\ d & e & f \end{bmatrix} ; d, e, f \in \mathbb{R} \right\}$$

b) $$B_{nu A_T} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

c) $\gamma(A_T) = 3$

d) Para el Recorrido: $x, y, z \in \mathbb{R}$

del Teorema 20:

$n = \gamma(A_T) + \rho(A_T)$

$6 = 3 + \rho(A_T)$

e) $\rho(A_T) = 3 = \dim Rec\, A_T$

f) $\therefore Rec\, A_T = \mathbb{R}^3$

g) $B_{Rec A_T} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

De los problemas 1-12 y del 17-25 pp. 518, 519 del Grossman encuentre $A_T$, $nu(A_T)$, $\gamma(A_T)$, $B_{nu A_T}$, $Rec\, A_T$, $B_{Rec A_T}$, $\rho(A_T)$

Suponga que $B_1$ y $B_2$ son bases canónicas.

De los problemas 1-12 y del 17-25 pp. 518, 519 del Grossman encuentre $A_T$, nu$(A_T)$, $\nu(A_T)$, $B_{nu\,A_T}$, Rec$(A_T)$, $B_{Rec\,A_T}$, ...

Suponga que $B_1$ y $B_2$ son bases canónicas.

10) $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$; $T(x,y,z,w) = (x+z, 5w-4y)$

a) $A_T$

$$T(1,0,0,0) = (1,0)$$
$$T(0,1,0,0) = (0,-4)$$
$$T(0,0,1,0) = (1,0)$$
$$T(0,0,0,1) = (0,5)$$

$$\Rightarrow A_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 5 \end{bmatrix}_{2\times 4}$$

Trabajando $A_T$ para encontrar simultáneamente el nu $A_T$ y Rec $A_T$:

$$\begin{array}{cccc|c|c} & & & & \text{nu} & \text{Rec} \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & -4 & 0 & 5 & 0 & b \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & -5/4 & 0 & -b/4 \end{array}\right]$$

a) nu $A_T$

$x + z = 0, \Rightarrow x = -z$

$y - \frac{5}{4}w = 0, \Rightarrow y = \frac{5}{4}w$

$z, w \in \mathbb{R}$ 2 variables libres

$\therefore$ nu $A_T = \{(-z, \frac{5}{4}w, z, w); z, w \in \mathbb{R}\}$

$B_{nu\,A_T} = \{(-1,0,1,0), (0,\frac{5}{4},0,1)\}$

$\nu(A_T) = 2$

b) Rec $A_T = \mathbb{R}^2$ porque hay 2 pivotes y ninguna condición para a y b (no hay renglón de ceros)

$\therefore B_{Rec\,A_T} = \{(1,0),(0,1)\}$

$\rho(A_T) = 2$

**Tarea** Grossman pp. 518 y 519, ejercicios 1-12

17) $T: P_2 \to P_3$; $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_1 - a_1x + a_0x^3$

a) $A_T$

$$\begin{array}{l|cccc} & 1 & x & x^2 & x^3 \\ T(1) = & 0 & 0 & 0 & 1 \\ T(x) = & 1 & -1 & 0 & 0 \\ T(x^2) = & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$A_T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4\times 3}$$

Núcleo y Recorrido simultáneamente:

$$\left[\begin{array}{ccc|c|c} 0 & 1 & 0 & 0 & b_0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & b_3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 & b_3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b_0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 & b_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b_0 \end{array}\right] \to \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{nu} & \text{Rec} \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 & b_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_0 + b_1 \end{array}\right] \end{array}$$

b) nu $A$:

$a_0 = 0$

$a_1 = 0 \Rightarrow \text{nu}\, A_T = \{a_2 x^2\}$
$a_2 \in \mathbb{R}$

$B_{\text{nu}\, A_T} = \{x^2\}$

$\nu(A_T) = 1$

c) Rec $A_T$:

para que el sistema tenga solución: $b_2 = 0$

$b_0 + b_1 = 0 \Rightarrow b_0 = -b_1$

$b_1, b_3 \in \mathbb{R}$ 2 variables libres

$\therefore \text{Rec}\, A_T = \{-b_1 + b_1 x + b_3 x^3\}$

$= \{(-1+x)b_1 + b_3 x^3\}$

$B_{\text{Rec}\, A_T} = \{-1+x, x^3\}$

$\rho(A_T) = 2$

20) $T: P_3 \to P_1$ ; $T(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) = (a_1 + a_3)x - a_2$

a) $A_T$

$$\begin{array}{c|cc} & 1 & x \\ \hline T(1) = & 0 & 0 \\ T(x) = & 0 & 1 \\ T(x^2) = & -1 & 0 \\ T(x^3) = & 0 & 1 \end{array}$$

base de $P_1$

base de $P_3$

$$A_T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times4}$$

núcleo y recorrido simultáneamente:

$$\left[\begin{array}{cccc|c|c} & & & & \text{nu} & \text{Rec} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & b_0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & b_1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c|c} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & b_0 \end{array}\right]$$

b) nu $A_T$

$a_1 + a_3 = 0$, $a_1 = -a_3$

$a_2 = 0$

$a_0, a_3 \in \mathbb{R}$ 2 variables libres

$\therefore \text{nu}\, A_T = \{a_0 - a_3 x + a_3 x^3\}$

$= \{a_0 + (-x + x^3)a_3\}$

$B_{\text{nu}\, A_T} = \{1, -x + x^3\}$

$\nu(A_T) = 2$

c) Rec $A_T$:

No hay renglón de ceros, por lo tanto no existe ninguna condición para $b_0$ y $b_1$ (solución única)

$\therefore \text{Rec}\, A_T = \{b_0 + b_1 x\}$

$B_{\text{Rec}\, A_T} = \{1, x\}$

$\rho(A_T) = 2$

28) $D: P_4 \to P_3$ ; $Dp(x) = p'(x)$ (D es la transformación derivada)

a) $A_T$

$$\begin{array}{l|cccc} & 1 & x & x^2 & x^3 \\ D(1) = & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D(x) = & 1 & 0 & 0 & 0 \\ D(x^2) = & 0 & 2 & 0 & 0 \\ D(x^3) = & 0 & 0 & 3 & 0 \\ D(x^4) = & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}$$

$$A_T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{4\times 5}$$

núcleo y Recorrido simultáneamente:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & b_3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc|c|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & b_1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & b_2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & b_3/4 \end{array}\right]$$

b) $\text{nu}\, A_T$:

$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$

$a_0 \in \mathbb{R}$

$\therefore\ \text{nu}\, A_T = \{a_0\}$

$B_{\text{nu}\, A_T} = \{1\}$

$\nu(A_T) = 1$

c) $\text{Rec}\, A_T$

Solución única en $P_3$ : 4 pivotes

$\therefore\ \text{Rec}\, A_T = P_3$

$\rho(A_T) = 4$

$B_{\text{Rec}\, A_T} = \{1, x, x^2, x^3\}$

29) $T: P_4 \to P_4$ ; $Tp(x) = x\,p'(x) - p(x)$

$$\begin{array}{l|ccccc} & 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 \\ T(1) = & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ T(x) = & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ T(x^2) = & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ T(x^3) = & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ T(x^4) = & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}$$

$$A_T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}_{5\times 5}$$

nucleo y recorrido simultaneamente:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c|c} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & b_4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & b_4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 \end{array}\right]$$

b) $\text{nu}\, A_T$

$a_0 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$

$a_1 \in \mathbb{R}$

$\therefore$ nu $A_T = \{a_1 x\}$

$B_{nu A_T} = \{x\}$

$\nu(A_T) = 1$

c) Rec $A_T$

Para que el sistema tenga solución: $b_1 = 0$

$\therefore$ Rec $A_T = \{b_0 + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4\}$

$B_{Rec A_T} = \{1, x^2, x^3, x^4\}$

$\rho(A_T) = 4$

Tarea: probs 18, 19, 21, 22, 23, 24, 31, 32, 33, 38, 39 pags 519 y 520

Definición 18 Isomorfismos

Sea $T: V \to W$ una transformación lineal. Entonces $T$ es un isomorfismo si $T$ es uno-a-uno y sobre.

Se dice que los espacios vectoriales $V$ y $W$ son isomorfos si existe un isomorfismo $T$ de $V$ sobre $W$. En este caso se escribe $V \cong W$.

Def 19 Transformación 1-1 (uno-a-uno)

$T$ es 1-1 si y sólo si todo vector $\bar{w}$ en $\mathrm{Im}\,T$ es la imagen de exactamente un vector de $V$.

$\therefore$ $T$ es 1-1 si y solo si nu $T = \{\bar{0}\}$

Ejemplo $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ; $T(x,y) = (x-y, 2x-y)$

nu $T$: $T\bar{x} = \bar{0}_W \implies (x-y, 2x-y) = (0,0)$

$$x - y = 0$$
$$2x - y = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolviendo:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array}$$

$\therefore$ nu $T = \{\bar{0}\}$ y $T$ es 1-1. (solución única)

Ejemplo 7.4.2 Grossman

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ; $T(x,y) = (x-y, 2x-2y)$

$(x-y, 2x-2y) = (0,0)$

$$x - y = 0$$
$$2x - 2y = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & -2 & | & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} x = y \\ y \in \mathbb{R} \end{matrix} \qquad nu\,T = \{(y,y)\},\ \nu(T) = 1$$

$\therefore$ T no es 1-1

<u>Definición 20</u> <u>Transformación sobre</u>

Sea $T: V \to W$ una TL. Entonces se dice que T es sobre W o simplemente sobre si para todo $\bar{w} \in W$ existe cuando menos una $\bar{v} \in V$ tal que $T\bar{v} = \bar{w}$. Es decir, T es sobre si y solo si: $Rec\,T = Im\,T$.

<u>Definición 21</u>

Sea $T: V \to W$ una TL, y suponga que $\dim V = \dim W = n$.

i) Si T es 1-1, entonces T es sobre.

ii) Si T es sobre, entonces T es 1-1.

Observación:

Si T es 1-1 entonces $nu\,T = \{\bar{0}\}$ y $\nu(T) = 0$ y se tiene solución única (n pivotes). Si $A_T$ es la representación matricial de T, entonces para $A\bar{x} = \bar{0}$ con $nu\,A_T = \{\bar{0}\}$, $\det A \neq 0$.

<u>Teorema Resumen</u> Sea A una matriz de nxn.

1) A es invertible.
2) El sistema $A\bar{x} = \bar{0}$ tiene solución única o solución trivial $(\bar{x} = \bar{0})$
3) El sistema $A\bar{x} = \bar{b}$ ✓ ✓ ✓ $(\bar{x} = A^{-1}\bar{b})$
4) $[A \mid I] \rightarrow \cdots \rightarrow [I \mid A^{-1}]$
5) A se puede expresar como el producto de matrices elementales.
6) n pivotes.
7) $\det A \neq 0$
8) Las columnas (y renglones) de A son linealmente independientes.
9) $\nu(A) = 0$
10) $\rho(A) = n$
11) La TL $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por $T\bar{x} = A\bar{x}$ es un isomorfismo.

<u>Ejemplo</u> Sea $T: \mathbb{R}^3 \to P_2$ ; $T(a,b,c) = a + bx + cx^2$

$\dim \mathbb{R}^3 = \dim P_2 = 3$

1) Verificar que T es lineal.

2) $nu\,T$

$$T\bar{x} = \bar{0} \implies a + bx + cx^2 = 0 + 0x + 0x^2$$

$\therefore a = b = c = 0$

$\text{nu}\, T = \{(0,0,0)\} = \{\bar{0}\}$, $\nu(T) = 0$ y T es 1-1

3) Rec T :

$\rho(T) = 3 - 0 = 3 \implies \text{Rec}\, T = P_2 = \{b_0 + b_1 x + b_2 x^2\}$

$\therefore$ T es sobre

Por tanto, $\mathbb{R}^3 \cong P_2$ (T es un isomorfismo).

Tarea pag 532, probs 1 y 2 del Grossman.