Clase 11-06-21

miércoles, 9 de junio de 2021 04:33 p. m.

Teorema 36 Sea A una matriz de mxn con elementos reales o complejos. Entonces, para cualesquiera dos vectores $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\bar{y} \in \mathbb{R}^m$:

$$\langle A\bar{x}, \bar{y} \rangle = \langle \bar{x}^t, A^t \bar{y} \rangle$$

Demostrando dimensionalmente y considerando que $\bar{x}$ y $\bar{y}$ son vectores columna:

$$\underbrace{\underset{m\times n}{A}\,\underset{n\times 1}{\bar{x}}}_{m\times 1} \cdot \underset{m\times 1}{\bar{y}} = \underbrace{\underset{1\times m}{(A\bar{x})^t}\,\underset{m\times 1}{\bar{y}}}_{} = \underbrace{(\underset{1\times n}{\bar{x}^t}\,\underset{n\times m}{A^t})}_{1\times m}\,\underset{m\times 1}{\bar{y}} = \underset{1\times n}{\bar{x}^t}\,(\underset{n\times m}{A^t}\,\underset{m\times 1}{\bar{y}}) = \bar{x}^t \cdot A^t \bar{y}$$

FORMAS CUADRÁTICAS Y SECCIONES CÓNICAS

Sea la siguiente función:

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = ax_1y_1 + \frac{b}{2}x_1y_2 + \frac{b}{2}x_2y_1 + cx_2y_2, \quad \text{con } \bar{x} = (x_1, x_2),\ \bar{y} = (y_1, y_2)$$

Supongamos que $\bar{x} = \bar{y} = (x, y)$

Entonces $f(\bar{x}, \bar{y}) = ax^2 + \frac{b}{2}xy + \frac{b}{2}yx + cy^2$

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = ax^2 + bxy + cy^2 \longrightarrow \text{FORMA CUADRÁTICA EN DOS VARIABLES}$$

No son formas lineales, son función de dos vectores: no hay linealidad en las formas cuadráticas

Una ecuación cuadrática en dos variables sin términos lineales es una ecuación de la forma:

$$ax^2 + bxy + cy^2 = d$$

donde $|a| + |b| + |c| \neq 0$ (al menos uno debe ser diferente de cero)

Se estudiarán las gráficas de ecuaciones cuadráticas: secciones cónicas en $\mathbb{R}^2$ (círculos, parábolas, elipses e hipérbolas

Sea $f(\bar{x}, \bar{y}) = x^2 - 4xy + 3y^2$ una forma cuadrática y sean $\bar{x} = \bar{y} = (x, y)$

Si $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$, $f(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x}^t A \bar{x} = [x, y] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [x-3y, -x+3y] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = x^2 - 3xy - xy + 3y^2 = x^2 - 4xy + 3y^2$$

Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$ $f(\bar{x}, \bar{y}) = [x, y] \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -7 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x^2 - 4xy + 3y^2$

Si $A = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ $f(\bar{x}, \bar{y}) = [x, y] \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x^2 - 4xy + 3y^2$

Si $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ $f(x, y) = [x, y] \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x^2 - 4xy + 3y^2$; $A = A^t$

Se requiere que:

$$A = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix}, \quad A = A^t$$

Regresando a la ecuación cuadrática: $\bar{x}^t A \bar{x} = d$

$$[x, y] \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = d$$

Si A es simétrica, existe una matriz ortogonal Q tal que $D = Q^t A Q$, donde D es diagonal, por lo tanto desaparecen los términos cruzados: éste es el efecto de la rotación (matriz de rotación).

Entonces tenemos una nueva forma cuadrática en las nuevas variables x' y y' en la que falta el término cruzado $x'y'$

$$f'(\bar{x}',\bar{y}')=\bar{x}'^{t}D\bar{x}'$$

Si $D=\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & c\end{bmatrix}$, $f'(\bar{x}',\bar{y}')=[x',y']\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & c\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y'\end{bmatrix}$

$$f'(\bar{x}',\bar{y}')=[ax',cy']\begin{bmatrix} x' \\ y'\end{bmatrix}=ax'^2+cy'^2$$

y la ecuación cuadrática en las nuevas variables x', y' sin el término cruzado $x'y'$ será:

$ax'^2+cy'^2=d$, donde a y c son los valores propios de A.

Ejemplo Expresión de una forma cuadrática en las nuevas variables x' y y' sin el término $x'y'$

Considérese la ecuación $x^2-4xy+3y^2=6$, es decir $\bar{x}^t A\bar{x}=6$

donde $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3\end{bmatrix}$

Q típica $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$

Habíamos obtenido la matriz $Q=\frac{1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\begin{bmatrix} 2 & 1-\sqrt{5} \\ -1+\sqrt{5} & 2\end{bmatrix}$; $|Q|=1$

$$y\quad D=Q^tAQ=\begin{bmatrix} 2-\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 2+\sqrt{5}\end{bmatrix}$$

Entonces $f'(\bar{x}',\bar{y}')=\bar{x}'^{t}D\bar{x}'=[x',y']\begin{bmatrix} 2-\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 2+\sqrt{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y'\end{bmatrix}$

$f'(\bar{x}',\bar{y}')=(2-\sqrt{5})x'^2+(2+\sqrt{5})y'^2$ Nueva Forma Cuadrática en las nuevas variables x', y' sin el término $x'y'$

y $(2-\sqrt{5})x'^2+(2+\sqrt{5})y'^2=6$ Nueva ecuación cuadrática en las nuevas variables x', y'

Análisis de Q:

Q es real y ortogonal; $\det Q=1$. Si $\det Q=-1$, se intercambian dos columnas de la matriz Q.

Se empalma Q típica $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$ con Q de trabajo para algún θ, con $0°\le\theta\le 2\pi$, para encontrar

el ángulo de rotación de ejes (y el cuadrante sobre el que cae θ).

Teorema 37. Teorema de los ejes principales

Sea $ax^2+bxy+cy^2=d$ (1)

una ecuación cuadrática en las variables x y y. Existe un único número θ en $[0,2\pi]$ tal que la ecuación (1) se pueda escribir en la forma:

$$\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2=d$$

Donde X' y Y' son los ejes obtenidos al rotar los ejes X y Y un ángulo θ en sentido contrario a las manecillas del reloj. Más aún, los números λ_1 y λ_2 son los valores propios de la matriz:

$$A=\begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c\end{bmatrix}$$

Los ejes X' y Y' son los ejes principales de la gráfica de la ecuación cuadrática.

Vamos a identificar 3 secciones cónicas importantes. Las ecuaciones estandar de las mismas son:

(11)

Círculo $x^2+y^2=r^2$

Elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

hipérbola $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \\ \text{ó} \\ \frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1 \end{cases}$

Continuación: del ejemplo anterior: $x^2-4xy+3y^2=6$:

Se puede escribir como (por Teorema 43):

$$(2-\sqrt{5})x'^2+(2+\sqrt{5})y'^2=6$$

$$\frac{x'^2}{-\frac{6}{2-\sqrt{5}}}+\frac{y'^2}{\frac{6}{2+\sqrt{5}}}=1$$

entonces:

$$\frac{y'^2}{\frac{6}{2+\sqrt{5}}}-\frac{x^2}{\frac{6}{\sqrt{5}-2}}=1 \longrightarrow \text{hipérbola}$$

donde:

$$a=\sqrt{\frac{6}{2+\sqrt{5}}}=1.19, \quad b=\sqrt{\frac{6}{\sqrt{5}-2}}=5.04$$

y empalmando Q típica con Q del ejemplo:

$$\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \quad +$$

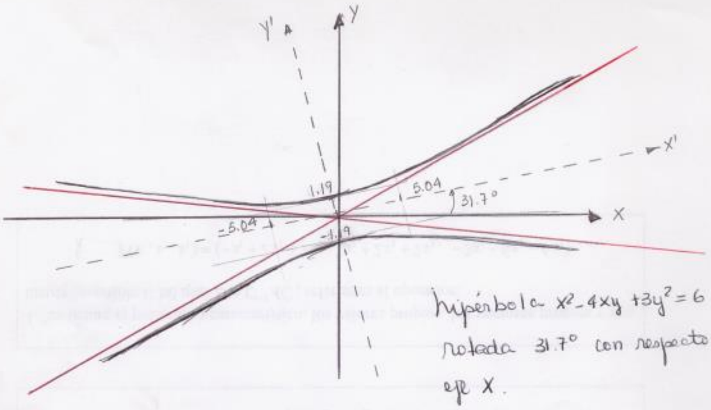
I cuadrante

$$\operatorname{sen}\theta=\frac{-1+\sqrt{5}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \quad +$$

$\theta=31.7°$

$x^2-4xy+3y^2=6$ es la ecuación de una hipérbola rotada 31.7°.

(12)



hipérbola $x^2-4xy+3y^2=6$ rotada $31.7°$ con respecto al eje X.

Ejemplo Identifique la sección cónica cuya ecuación es: $5x^2-2xy+5y^2=4$

Solución $A=\begin{bmatrix}5 & -1\\ -1 & 5\end{bmatrix}$

$p(\lambda)=\lambda^2-10\lambda+24$

$p(\lambda)=(\lambda-4)(\lambda-6)$

para $\lambda_1=4$: $(A-\lambda I)\bar{v}=\bar{0} \Rightarrow \begin{bmatrix}+1 & -1\\ -1 & +1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \Rightarrow x=y \Rightarrow \bar{v}_1=(1,1)$

$\bar{u}_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

para $\lambda_2=6$: $(A-\lambda I)\bar{v}=\bar{0} \Rightarrow \begin{bmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \Rightarrow x=-y$

$\bar{v}_2=(1,-1)$

$\bar{u}_2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$Q=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\end{bmatrix} \quad |Q|=-1$

$\therefore$ Se intercambian columnas:

$Q=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{bmatrix} \quad |Q|=1$

donde: $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ +

$\text{sen}\,\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ -

IV Cuadrante

y $\theta = 2\pi - 45 = 315°$

y $D = Q^t A Q$ ⑬

$= \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

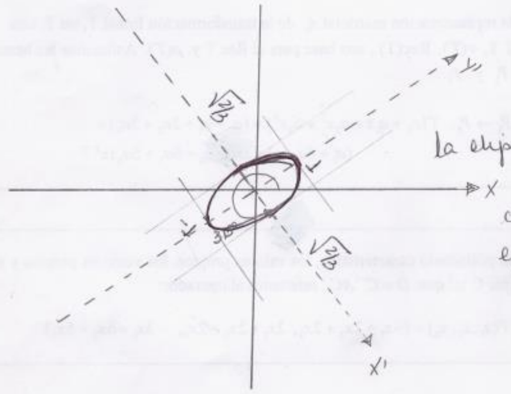
Por lo tanto, según el Teorema de los ejes principales, la ecuación $5x^2 - 2xy + 5y^2 = 4$ se puede escribir en la forma:

$$6x'^2 + 4y'^2 = 4$$

Reescribiendo:

$$\frac{x'^2}{\frac{4}{6}} + y'^2 = 1 \longrightarrow \text{elipse}$$

$a = \sqrt{\frac{2}{3}}$; $b = 1$



La elipse $5x^2 - 2xy + 5y^2 = 4$ rotada 315° con respecto al eje X

Tarea. Grossman pág 610 probs 1, 2, 3, 5