Clase 03-05-21

domingo, 2 de mayo de 2021 11:42 a. m.

Problemas 15, 19 y 20 del Grossman, pág. 487.

15) Sea $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2$ definida como: $T(x_1, x_2, \dots, x_n) = (|x_4|, x_1)$ ← Regla de la Transformación

Solución

Sean $\bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$; $\bar{u} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\bar{v} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$

1) $T(\bar{u}+\bar{v}) = T(\bar{u}) + T(\bar{v})$

Miembro izquierdo:

$T(\bar{u}+\bar{v}) = T[(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n)]$ Sustitución

$= T(x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_n+y_n)$ Suma de vectores

$= (|x_4+y_4|, x_1+y_1)$ Aplicando la Regla de la Transformación

Miembro derecho:

$T(\bar{u}) + T(\bar{v}) = T(x_1, x_2, \dots, x_n) + T(y_1, y_2, \dots, y_n)$ Sustituyendo

$= (|x_4|, x_1) + (|y_4|, y_1)$ Aplicando la transformación

$= (|x_4| + |y_4|, x_1+y_1)$ Suma de vectores

$|x_4+y_4| = |x_4| + |y_4|$??

$\therefore T(\bar{u}+\bar{v}) \neq T(\bar{u}) + T(\bar{v})$

Probaremos la Propiedad 2:

2) $T(\alpha\bar{u}) = \alpha T(\bar{u})$

miembro izq:

$T(\alpha\bar{u}) = T[\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n)]$ Sust.

$= T(\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$ Producto de vector por escalar (Def. 2)

$= (|\alpha x_4|, \alpha x_1)$ Aplicando la R.T.

m. derecho:

$\alpha T(\bar{u}) = \alpha T(x_1, x_2, \dots, x_n)$ Sust.

$= \alpha(|x_4|, x_1)$ Aplicando R.T.

$= (\alpha|x_4|, \alpha x_1)$ Def. 2

Comparando:

$|\alpha x_4| = \alpha|x_4|$??

$\therefore$ T no es lineal

19) $T: M_{nn} \to M_{nn}$; $T(A) = AB$, donde B es una matriz fija de $n \times n$. ← Regla de la Transformación

Sean $A, D \in M_{nn}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

1) $T(A+D) = T(A) + T(D)$

m. izq:

$T(A+D) = (A+D)B$ Aplicando R.T.

$= AB + DB$ propiedad distributiva del producto de matrices.

m. derecho:

$T(A) + T(D) = AB + DB$

$\therefore$ $T(A+D) = T(A) + T(D)$

2) $T(\alpha A) = \alpha T(A)$

m. izq:

$T(\alpha A) = (\alpha A) B$ aplicando RT.

$= \alpha (AB)$ Ley asociativa del producto de matrices.

m. derecho:

$\alpha T(A) = \alpha (AB)$ aplicando RT.

$\therefore$ $T(\alpha A) = \alpha T(A)$

$\therefore$ T es lineal.

20) $T: M_{nn} \to M_{nn}$: $T(A) = A^T A$ ← Regla de la Transformación

Sean $A, B \in M_{nn}$

1) $T(A+B) = T(A) + T(B)$

m. izq:

$T(A+B) = (A+B)^T (A+B)$ Aplicando R.T.

$= (A^T + B^T)(A+B)$ Teorema 2.5.1 iii) pp. 128 Grossman

$= \underline{A^T A} + \underbrace{A^T B + B^T A}_{\text{no necesariamente es cero}} + \underline{B^T B}$ Ley distributiva del producto de matrices

m. derecho:

$T(A) + T(B) = A^T A + B^T B$ Aplicando la R.T.

Comparando tenemos que $T(A+B) \neq T(A)+T(B)$

y T no es lineal.

Probaremos la Prop. 2:

2) $T(\alpha A) = \alpha T(A)$

m. izq:

$T(\alpha A) = (\alpha A)^T (\alpha A)$ Aplicando la Regla de la Transformación

$= \alpha^T A^T \alpha A$

$= \alpha^2 A^T A$, ya que $\alpha^T = \alpha$

m. derecho:

$\alpha T(A) = \alpha A^T A$

$T(\alpha A) \neq \alpha T(A) \implies T$ no es lineal.

Tarea $T: M_{inv} \to M_{inv} : T(A) = A^{-1}$

Tarea. Grossman pp. 487 probs 15-31, 39