Clase 26-02-21

miércoles, 24 de febrero de 2021 01:15 p. m.

<u>Ejemplo</u> Determine si el conjunto de los números racionales, con las operaciones habituales de suma y multiplicación por escalar, es un espacio vectorial. Si no lo es, enuncie los axiomas que no se cumplen.

<u>Solución</u>

Sea $Q = \{x \mid x = \frac{a}{b},\ a, b \in \mathbb{Z} \text{ y } b \neq 0\}$.

Sean $x, y, z \in Q$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

s1) $x + y \in Q$, se cumple

s2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ se cumple

s3) $\exists\, 0 \in Q \mid x + 0 = x$ se cumple

s4) $\exists -x \in Q \mid x + (-x) = 0$, se cumple

s5) $x + y = y + x$ se cumple

Probando los axiomas del producto:

M1) $\alpha x \in Q$

a) si $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha x \notin Q$, ya que α podría ser un irracional.

b) si $\alpha \in Q$, entonces $\alpha x \in Q$ →

M1 ✓

M2) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

M3) $(\alpha + \beta)\bar{x} = \alpha \bar{x} + \beta \bar{x}$

M4) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$

M5) $1x = x$

Se cumplen

Por tanto, depende del campo en que esté el escalar α para poder determinar si Q es o no es un espacio vectorial.

<u>Ejemplo</u> Determine si $\mathbb{R}^2$, con la operación habitual de suma, pero con la multiplicación escalar definida por:

$$c(x, y) = (cx, y)$$

es un espacio vectorial. Si no lo es, enuncie los axiomas que no se cumplen.

<u>Solución</u>

Al ser $\mathbb{R}^2$ un espacio vectorial con la operación habitual de suma, se cumplen todos los axiomas de la suma. Veamos qué pasa con la operación producto $c(x, y) = (cx, y)$

Veamos qué pasa con la operación producto $c(x,y)=(cx,y)$

$H=\{\bar{x}=(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x,y\in\mathbb{R};\ c\bar{x}=(cx,y)\}$

Sean $\bar{x},\bar{y},\bar{z}\in H$ y $c,b\in\mathbb{R}$

M1) $c\bar{x}\in H$

Si $c\bar{x}\in H$: $c\bar{x}=(cx,y)$

Verificando:

$c\bar{x}=c(x_1,y_1)$ Sustitución

$=(cx_1,y_1)\in H$ ✓ Aplicando la condición

M2) $c(\bar{x}+\bar{y})=c\bar{x}+c\bar{y}$

M. izq $c(\bar{x}+\bar{y})=c[(x_1,y_1)+(x_2,y_2)]$ Sustitución

$=c(x_1+x_2,y_1+y_2)$ Suma de vectores

$=[c(x_1,x_2,y_1,y_2)$ Prod. de vector por escalar

$=(c(x_1+x_2),y_1+y_2)$ Producto de escalar por vector (condición)

$=(cx_1+cx_2,y_1+y_2)$ Prop. distributiva en $\mathbb{R}$.

$=(cx_1,y_1)+(cx_2,y_2)$ Suma de vectores

$=c(x_1,y_1)+c(x_2,y_2)$ Condición para el producto por escalar.

$=c\bar{x}+c\bar{y}$ ✓ Sustitución

M3) $(c+b)\bar{x}=c\bar{x}+b\bar{x}$

Trabajando con el miembro izquierdo:

$(c+b)\bar{x}=(c+b)(x_1,y_1)$ Sustitución

$=[(c+b)x_1,y_1)$ Producto de vector por escalar (condición)

$=(cx_1+bx_1,y_1)$ Prop. distributiva en $\mathbb{R}$.

$=(cx_1,y_1)+b(x_1,0)$ Suma de vectores

$=c\bar{x}+b(x,0)$

$c\bar{x}+b(x,0)\neq c\bar{x}+b\bar{x}$

$\therefore$ M3 no cumple $\rightarrow$ H no es Espacio Vectorial

M4) $c(\alpha\bar{x})=(c\alpha)\bar{x}$

$c(\alpha\bar{x})=c[\alpha(x_1,y_1)]$ Sustitución

$$\left.\begin{aligned}&=c(\alpha x_1,y_1) &&\text{Producto de vector por escalar}\\ &=(c\alpha x_1,y_1) &&\text{Producto de vector por escalar}\\ &=(c\alpha)(x_1,y_1) &&\text{producto de vector por escalar}\end{aligned}\right\}\text{condición}$$

$=(c\alpha)\bar{x}$

$\therefore\ c(\alpha\bar{x}) = (c\alpha)\bar{x}$ se cumple ✓

M5) $1\bar{x} = x$ ✓ se cumple

$\therefore$ H no es espacio vectorial

Tarea: probs 1, 8 Grossman pag 303