Clase 26-05-21 Parte 2

martes, 25 de mayo de 2021 08:09 p. m.

UNIDAD 5 ESPACIOS CON PRODUCTO INTERNO

Producto interno o producto punto (o producto escalar) entre dos vectores en $\mathbb{R}^n$: $(X,Y) = \langle X,Y \rangle = \bar{X}\cdot\bar{Y}$

Si $\bar{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, entonces:

$\bar{x}\cdot\bar{y} = \langle \bar{x},\bar{y} \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n \Rightarrow$ es un escalar

Necesitamos del producto interno para la diagonalización ortogonal de matrices. Con el producto interno en un Espacio Vectorial podemos obtener la norma de vectores y el ángulo entre vectores:

Norma de $\bar{v}$: $|\bar{v}| = \sqrt{\bar{v}\cdot\bar{v}}$

Ángulo entre $\bar{u}$ y $\bar{v}$: $\cos\varphi = \dfrac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{|\bar{u}||\bar{v}|}$

se ve en Geometría del Espacio

Un vector unitario es el que tiene norma 1. Si un vector no tiene norma 1, lo podemos hacer unitario dividiéndolo entre su norma, es decir:

$\dfrac{\bar{v}}{|\bar{v}|} = \bar{u} \Rightarrow$ vector unitario

Para verificar esto, calculamos la norma de $\bar{u}$:

$$|\bar{u}| = \left| \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|} \right| = 1$$

Teorema 26 Proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt

(Es para obtener bases ortonormales en un subespacio vectorial)

Sea H un subespacio de dimensión m de $\mathbb{R}^n$. Entonces H tiene una base ortonormal.

Demostración:

Sea $S = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_m\}$ una base de H. Se construirá una base ortonormal a partir de los vectores de S.

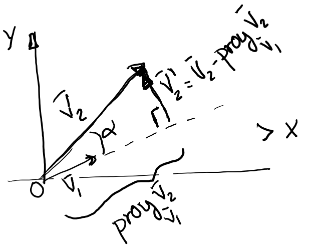
Paso 1 Obtención del primer vector unitario

$\bar{u}_1 = \bar{v}_1$

Paso 1 Obtención del primer vector unitario

$$\bar{u}_1 = \frac{\bar{v}_1}{|\bar{v}_1|}$$

Paso 2 Obtención de un segundo vector ortogonal a $\bar{v}_1$



$\bar{v}_2'$ es ortogonal a $\bar{v}_1$

$$proy_{\bar{v}_1}\bar{v}_2 = comp_{\bar{v}_1}\bar{v}_2 \ \frac{\bar{v}_1}{|\bar{v}_1|}$$

$$comp_{\bar{v}_1}\bar{v}_2 = |\bar{v}_2| \cos\alpha \quad ; \quad \cos\alpha = \frac{\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2}{|\bar{v}_1|\,|\bar{v}_2|}$$

$$\therefore \ proy_{\bar{v}_1}\bar{v}_2 = |\bar{v}_2| \ \frac{\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2}{|\bar{v}_1|\,|\bar{v}_2|} \ \frac{\bar{v}_1}{|\bar{v}_1|}$$

$$proy_{\bar{v}_1}\bar{v}_2 = \frac{\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2}{|\bar{v}_1|} \ \frac{\bar{v}_1}{|\bar{v}_1|} = (\bar{v}_2 \cdot \bar{u}_1)\,\bar{u}_1$$

Por suma de vectores: $proy_{\bar{v}_1}\bar{v}_2 + \bar{v}_2' - \bar{v}_2 = 0$

Despejando: $\bar{v}_2' = \bar{v}_2 - proy_{\bar{v}_1}\bar{v}_2$

$\bar{v}_2' = \bar{v}_2 - (\bar{v}_2 \cdot \bar{u}_1)\,\bar{u}_1$

Paso 3 Obtención de un segundo vector unitario:

$$\bar{u}_2 = \frac{\bar{v}_2'}{|\bar{v}_2'|}$$

Paso 4 Continuación del proceso:

$$\bar{v}_{k+1}' = \bar{v}_{k+1} - (\bar{v}_{k+1} \cdot \bar{u}_1)\,\bar{u}_1 - (\bar{v}_{k+1} \cdot \bar{u}_2)\,\bar{u}_2 - \dots - (\bar{v}_{k+1} \cdot \bar{u}_k)\,\bar{u}_k$$

Paso 5

$$\bar{u}_{k+1} = \frac{\bar{v}_{k+1}'}{|\bar{v}_{k+1}'|}$$

Ejemplo Construcción de una base ortonormal en $\mathbb{R}^3$

Sea la base $B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\} = \{\underset{\bar{v}_1}{(1,1,0)}, \underset{\bar{v}_2}{(0,1,1)}, \underset{\bar{v}_3}{(1,0,1)}\}$.

Paso 1 $\quad \bar{u}_1 = \dfrac{\bar{v}_1}{|\bar{v}_1|}$

$$\bar{u}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

Paso 2 $\quad \bar{v}_2' = \bar{v}_2 - (\bar{v}_2 \cdot \bar{u}_1)\bar{u}_1$

$$\bar{v}_2' = (0,1,1) - \left[(0,1,1) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)\right]\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$$= (0,1,1) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$$= (0,1,1) - \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$$

$$\bar{v}_2' = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$$

Paso 3

$$\bar{u}_2 = \frac{\bar{v}_2'}{|\bar{v}_2'|}$$

$$\bar{u}_2 = \frac{\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)}{\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{4}{4}}} = \frac{\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)}{\sqrt{\frac{6}{4}}} = \frac{\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)}{\frac{\sqrt{6}}{2}}$$

$$\bar{u}_2 = \frac{2}{\sqrt{6}}\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

Paso 4 $\quad \bar{v}_3' = \bar{v}_3 - (\bar{v}_3 \cdot \bar{u}_2)\bar{u}_2 - (\bar{v}_3 \cdot \bar{u}_1)\bar{u}_1$

$$\bar{v}_3' = (1,0,1) - \left[(1,0,1)\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)\right]\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right) - \left[(1,0,1)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)\right]\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$$= (1,0,1) - \frac{1}{\sqrt{6}}\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$$= (1,0,1) + \left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{2}{6}\right) + \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$$

$$\bar{v}_3' = \left(\frac{4}{6}, -\frac{4}{6}, \frac{4}{6}\right) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

Paso 5

$$\bar{u}_3 = \frac{\bar{v}_3'}{|\bar{v}_3'|}$$

$$\bar{u}_3 = \frac{\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)}{\sqrt{\frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9}}} = \frac{\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)}{\sqrt{\frac{12}{9}}}$$

$$= \frac{\sqrt{9}}{}\left(\frac{2}{}, -\frac{2}{}, \frac{2}{}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{12}}\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$= \frac{3}{2\sqrt{3}}\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$\bar{u}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$\therefore$ La base ortonormal, B'' será:

$$B'' = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right\}$$