Clase 13-11-20

miércoles, 11 de noviembre de 2020 02:02 p. m.

Ejemplo Investigar las raíces del polinomio

$$p(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 + 3x^2 - 10x$$

Solución:

$$p(x) = x\, q_1(x) \rightarrow \boxed{\alpha_1 = 0}$$

donde:

$$q_1(x) = x^4 - 5x^3 + 7x^2 + 3x - 10$$

Aplicando la Regla de los Signos de Descartes:

$$q_1(x) = x^4 - 5x^3 + 7x^2 + 3x - 10 \quad 3 \text{ ó } 1 \text{ rrp}$$

$$q_1(-x) = x^4 + 5x^3 + 7x^2 - 3x - 10 \quad 1 \text{ rrn}$$

En consecuencia tendríamos las siguientes alternativas:

	1ª	2ª
rn	1	1
rrp	3	1
rrn	1	1
rc	0	2
TOTAL	5	5

$$q_1(x) = x^4 - 5x^3 + 7x^2 + 3x - 10$$

Factores de $a_0 = -10$ (p) : $\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10$

Factores de $a_n = 1$ (q) : ± 1

prr $\left(\frac{p}{q}\right)$: $\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10$

Probando con $\alpha_2 = 1$ en $q_1(x) = x^4 - 5x^3 + 7x^2 + 3x - 10$:

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & -5 & 7 & 3 & -10 \\ & & 1 & -4 & 3 & 6 \\ \hline & 1 & -4 & 3 & 6 & \lfloor -4 \end{array}$$ no es raíz

Con $\alpha_2 = -1$:

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & -5 & 7 & 3 & -10 \\ & & -1 & 6 & -13 & 10 \\ \hline & 1 & -6 & 13 & -10 & \lfloor 0 \end{array}$$ $\boxed{\alpha_2 = -1}$ es raíz (negativa)

$\therefore\ q_1(x) = (x+1)\, q_2(x)$

donde $q_2(x) = x^3 - 6x^2 + 13x - 10$

Con $\alpha_3 = 2$:

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -6 & 13 & -10 \\ & & 2 & -8 & 10 \\ \hline & 1 & -4 & 5 & \lfloor 0 \end{array}$$ $\boxed{\alpha_3 = 2}$ es raíz

Entonces $q_2(x) = (x-2)\, q_3(x)$

donde $q_3(x) = x^2 - 4x + 5$

Al usar la fórmula cuadrática:

$$\alpha_{4,5} = \frac{4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = \frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \alpha_4 = 2+i \\ \alpha_5 = 2-i \end{array}}$$

y $p(x) = x\,(x+1)\,(x-2)\,(x-(2+i))\,(x-(2-i))$

Ejercicio.- Encontrar todas las raíces del polinomio

$$f(x) = 4x^6 - 20x^5 + 49x^4 - 100x^3 + 136x^2 - Kx + 16$$

si $(x-2)$ es un factor, $K \in \mathbb{R}$.

Solución: $\boxed{\alpha_1 = 2}$

Efectuando la división sintética con $\alpha_1 = 2$:

$$\begin{array}{c|ccccccc} & 4 & -20 & 49 & -100 & 136 & -K & 16 \\ 2 & & 8 & -24 & 50 & -100 & 72 & 144-2K \\ \hline & 4 & -12 & 25 & -50 & 36 & 72-K & 160-2K \end{array}$$

$$160 - 2K = 0 \rightarrow K = \frac{160}{2} = 80$$

Sustituyendo $K = 80$ en $f(x)$:

$$f(x) = 4x^6 - 20x^5 + 49x^4 - 100x^3 + 136x^2 - 80x + 16$$

$$f(x) = (x-2)\, q_1(x)$$

donde $q_1(x) = 4x^5 - 12x^4 + 25x^3 - 50x^2 + 36x - 8$

Aplicando la Regla de los signos de Descartes:

$q_1(x) = 4x^5 - 12x^4 + 25x^3 - 50x^2 + 36x - 8$ 5 ó 3 ó 1 rrp

$q_1(-x) = -4x^5 - 12x^4 - 25x^3 - 50x^2 - 36x - 8$ no hay rrn

Alternativas:

rn	—	—	—	—
rrp	6	4	2	0
rrn	—	—	—	—

rrn	—	—	—	—
rc	0	2	4	6
TOTAL	6	6	6	6

Factores de $a_0 = -8$ (p): $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$

Factores de $a_1 = 4$ (q): $\pm 1, \pm 2, \pm 4$

prr $\left(\frac{p}{q}\right)$: $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8$

Con $\alpha_2 = \frac{1}{2}$:

$$\begin{array}{c|cccccc} \frac{1}{2} & 4 & -12 & 25 & -50 & 36 & -8 \\ & & 2 & -5 & 10 & -20 & 8 \\ \hline & 4 & -10 & 20 & -40 & 16 & \lfloor 0 \end{array} \qquad \boxed{\alpha_2 = \frac{1}{2}}$$

Entonces $q_1(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right) q_2(x)$

donde $q_2(x) = 4x^4 - 10x^3 + 20x^2 - 40x + 16$

Con $\alpha_3 = \frac{1}{2}$:

$$\begin{array}{c|ccccc} \frac{1}{2} & 4 & -10 & 20 & -40 & 16 \\ & & 2 & -4 & 8 & -16 \\ \hline & 4 & -8 & 16 & -32 & \lfloor 0 \end{array} \qquad \boxed{\alpha_3 = \frac{1}{2}}$$

Entonces $q_2(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right) q_3(x)$

$q_3(x) = 4x^3 - 8x^2 + 16x - 32$

Con $\alpha_4 = \frac{1}{2}$:

$$\begin{array}{c|cccc} \frac{1}{2} & 4 & -8 & 16 & -32 \\ & & 2 & -3 & 13/2 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc} \frac{1}{2} & 4 & -8 & 16 & -32 \\ & & 2 & -3 & 13/2 \\ \hline & 4 & -6 & 13 & - \end{array} \quad \text{no es raíz}$$

Con $\alpha_4 = \frac{1}{4}$:

$$\begin{array}{c|cccc} \frac{1}{4} & 4 & -8 & 16 & -32 \\ & & 1 & -7/4 & 57/16 \\ \hline & 4 & -7 & 57/4 & \underline{\left| -\frac{455}{16} \right.} \end{array} \quad \text{no es raíz}$$

Con $\alpha_4 = 2$:

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 4 & -8 & 16 & -32 \\ & & 8 & 0 & 32 \\ \hline & 4 & 0 & 16 & \underline{|0} \end{array} \quad \boxed{\alpha_4 = 2} \quad \text{sí es raíz}$$

$\therefore \; q_3(x) = (x-2)\,q_4(x)$

$q_4(x) = 4x^2 + 16$

$q_4(x) = 4(x^2+4)$

$$\boxed{\begin{array}{l} \alpha_5 = 2i \\ \alpha_6 = -2i \end{array}}$$

$\therefore \; f(x) = 4(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)(x-2i)(x+2i)$

$f(x) = 4(x-2)^2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2(x-2i)(x+2i)$

Ejercicio. Determinar los números reales a y b, de manera que $z = 1+i$ sea raíz del polinomio $p(x) = x^5 + ax^3 + b$

$$\begin{array}{c|cccccc} 1+i & 1 & 0 & a & 0 & 0 & b \\ & & 1+i & 2i & a-2+(a+2)i & -4+2ai & -(4+2a)+(2a-4)i \\ \hline & 1 & 1+i & a+2i & a-2+(a+2)i & -4+2ai & -4-2a+b+(2a-4)i \end{array}$$

Como $1+i$ es raíz, el residuo $-4-2a+b+(2a-4)i$ es igual a cero.

$-4-2a+b=0$ ①

$(2a-4)\,i = 0i \implies 2a=4 \implies a=2$ ②

Sustituyendo $a=2$ en ①:

$-4-4+b=0 \implies b=8$

Tarea

1) Verificar que $p(x)=x^3-(a+b+c)x^2+(bc+ac+ab)x-abc$ es divisible entre $(x-a)(x-b)$. ¿Cuál es el cociente?

2) Determinar a y b de tal manera que x^4+4 sea divisible entre x^2+ax+b, con $a\neq 0$

Teorema 24

Sea $p(x)$ un polinomio en x con coeficientes en $\mathbb{R}$. Si $\alpha=a+bi$, con $b\neq 0$ es una raíz de $p(x)$, entonces $\bar{\alpha}=a-bi$ es otra raíz de $p(x)$.