Clase 07-10-20

miércoles, 7 de octubre de 2020 04:38 a. m.

Definición 10

Sea la potencia a^n, donde n es un entero positivo, definido de la siguiente manera:

$$a^1 = a$$
$$a^{k+1} = a^k \cdot a$$

Ejemplo Pruebe por inducción matemática que $(ab)^n = a^n b^n \ \forall n \in \mathbb{N}$

Paso 1 $n=1$:

$(ab)^1 = ab$ por definición 10

$= a^1 b^1$ ✓ se cumple

Paso 2 Hipótesis de inducción, para $n=k$:

$(ab)^k = a^k b^k$ ①

Paso 3 Tesis. Por demostrar para $n=k+1$:

$(ab)^{k+1} = a^{k+1} b^{k+1}$ ②

Paso 4 ¿Qué le falta al miembro izq. de ① para ser igual al miembro izq. de ②?

$(ab)^k (ab) = a^k b^k (ab)$

$(ab)^{k+1} = a^k b^k ab$ (1A)

Paso 5 desarrollando m. derecho de (1A):

$a^k b^k ab = a^k a b^k b$

$= a^{k+1} b^{k+1}$

Ya que (1A) = ②, la proposición $(ab)^n = a^n b^n$ es válida $\forall n \in \mathbb{N}$

Comprobación:

para $n=1$: $(ab)^1 = a^1 b^1 = ab$

para $n=2$: $(ab)^2 = (ab)(ab)$

$= a^1 b^1 a^1 b^1$

$= a^1 a^1 b^1 b^1$

$= a^2 b^2$

etc...

Ejemplo Probar por inducción matematica que $\forall n \in \mathbb{N}$, $1^n = 1$.

Paso 1 $n=1$:

$1^1 = 1$ ✓ por def. 10

Paso 2 $n=k$ (Hipótesis de inducción)

$1^k = 1$ ①

Paso 3 $n=k+1$ (tesis)

$1^{k+1} = 1$ ②

Paso 4 ¿?

$1^k \cdot 1 = 1 \cdot 1$

$1^{k+1} = 1$ (1A)

Como (1A) = ②, la proposición es válida $\forall n \in \mathbb{N}$

Ejemplo Demostrar por inducción finita que $a^m a^n = a^{m+n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Paso 1 $n=1$:

$a^m a^1 = a^{m+1}$ Aplicando la Def. 1D

$a^{m+1} = a^{m+1}$

$\therefore$ se cumple para $n=1$

Paso 2 para $n=k$ (Hipótesis)

$a^m a^k = a^{m+k}$ ①

Paso 3 para $n=k+1$ (Tesis)

$a^m a^{k+1} = a^{m+k+1}$ ②

Paso 4 ¿?

$a^m a^k \cdot a = a^{m+k} a$

$a^m a^{k+1} = a^{m+k} \cdot a$ (1A)

$= a^{m+k+1}$ (1A) por def (1D)

Ya que (1A) = ②, se demuestra que $a^m a^n = a^{m+n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Ejemplo Demostrar la validez de la siguiente proposición:

$(-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + \dots + (-1)^n = \frac{(-1)^n - 1}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Paso 1 $n=1$:

$(-1)^1 = \frac{(-1)^1 - 1}{2}$

$-1 = \frac{-1-1}{2}$

$-1 = -1$ ✓ se cumple

Paso 2 $n=k$ (Hipótesis)

$(-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + \dots + (-1)^k = \frac{(-1)^k - 1}{2}$ ①

Paso 3 Por demostrar, para $n=k+1$ (Tesis):

$(-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + \dots + (-1)^k + (-1)^{k+1} = \frac{(-1)^{k+1} - 1}{2}$ ②

Paso 4 ¿qué le falta?

$(-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + \dots + (-1)^k + (-1)^{k+1} = \frac{(-1)^k - 1}{2} + (-1)^{k+1}$ (1A)

Paso 5 Desarrollando el m. derecho de (1A):

$$\frac{(-1)^k - 1}{2} + (-1)^{k+1} = \frac{(-1)^k - 1 + 2(-1)^{k+1}}{2}$$

$$= \frac{(-1)^k - 1 + 2(-1)^k(-1)}{2} = \frac{(-1)^k[1 + 2(-1)] - 1}{2}$$

$$= \frac{(-1)^k(1-2) - 1}{2}$$

$$= \frac{(-1)^k(-1) - 1}{2}$$

$$= \frac{(-1)^{k+1} - 1}{2}$$

Ya que (1A) = ②, la tesis queda demostrada, por lo que la proposición es válida $\forall n \in \mathbb{N}$.

Tarea Ejemplo Demostrar que $(a^m)^n = a^{mn}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Tarea Demostrar por i.m. la validez de las siguientes proposiciones:

1) $1 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3^3 + \dots + (2n-1)3^n = (n-1)3^{n+1} + 3$, $\forall n \in \mathbb{N}$

2) $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n} \quad \forall n \geq 2$

DESIGUALDADES: se usa la Ley Transitiva

si $a>b$, $a<b$
y $b>c$ ó $b<c$
$\therefore$ $a>c$ $a<c$

Ejemplo Demuestre por inducción matemática la validez de la siguiente proposición:

$2+4+8+\ldots+2^n > 2^n-1, \ \forall n\in \mathbb{N}$

Paso 1 $n=1$:

$2^1 > 2^1-1$

$2>1$ ✓ Se cumple.

Paso 2 $n=k$ (Hipótesis)

$2+4+8+\cdots+2^k > 2^k-1$ ①

Paso 3 $n=k+1$ (Tesis)

$2+4+8+\ldots+2^k+2^{k+1} > 2^{k+1}-1$ ②

Paso 4 ¿qué le falta al m. izq. de ① para ser igual al m. izq. de ②?

$2+4+8+\ldots+2^k+2^{k+1} > 2^k-1+2^{k+1}$ (1A)

Por transitividad

si $2+4+8+\ldots+2^k+2^{k+1} > 2^k-1+2^{k+1}$ (1A)

y $2^k-1+2^{k+1} > 2^{k+1}-1$ → por demostrar

$\therefore$ $2+4+8+\ldots+2^k+2^{k+1} > 2^{k+1}-1$ Tesis

si $a>b$
y $b>c$
$\therefore$ $a>c$ → tesis

Demostrando: $2^k-1+2^{k+1} > 2^{k+1}-1$

$2^k>0$ ✓

$\therefore$ la proposición $2+4+8+\ldots+2^n > 2^n-1$ es válida $\forall n\in\mathbb{N}$.

Ejemplo Demostrar la validez de la sig. proposición por i.m.

$2^n > n \ \forall n\in\mathbb{N}$

Paso 1 $n=1$:

$2^1>1$ ✓ se cumple

Paso 2 $n=k$ (Hipótesis)

$2^k > k$ ①

Paso 3 por demostrar para $n=k+1$ (TESIS)

$2^{k+1} > k+1$ ②

Paso 4 ¿que le falta al m. izq de ① .... ?

$2(2^k) > 2k$ (1A)

Por transitividad:

si $2^{k+1} > 2k$ → (1A)

y $2k > k+1$ → por demostrar

Entonces $2^{k+1} > k+1$ ②

Demostrando:

$2k > k+1$

$k+k > k+1$

$k > 1 \implies 2k > k+1$, si $k > 1$

Pero fijándonos en ②

$2^{k+1} > k+1$

si $k=1$: $2^2 > 1+1$

$4 > 2$ de todos modos se cumple para $k=1$

$\therefore$ $2^{k+1} > k+1$ se cumple $\forall k \in \mathbb{N}$

y la proposición $2^n > n$ es válida $\forall n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo Demostrar por i.m. la validez de $2^m \geq 1+m$, $\forall m \in \mathbb{N}$.

Paso 1 $m=1$:

$2^1 \geq 1+1$

$2 \geq 2$ ✓ Se cumple

Paso 2 $m=k$ (Hipótesis)

$2^k \geq 1+k$ ①

Paso 3 P.D. para $m=k+1$ (Tesis)

$2^{k+1} \geq 1+k+1$ ②

Paso 4 Multiplicando por 2 la hipótesis:

$2(2^k) \geq 2(1+k)$ (1A)

Por transitividad:

si $2^{k+1} \geq 2(1+k)$ (1A)

y $2(1+k) \geq 1+(k+1)$ ⟶ por demostrar

$\therefore$ $2^{k+1} \geq 1+(k+1)$ ②

Demostrando:

$2(1+k) \geq 1+k+1$

$2+2k \geq 2+k$

$2k \geq k$

$k+k \geq k$

$k \geq 0$, pero como $k \in \mathbb{N}$, $k \neq 0$

Por lo tanto, la proposición $2^m \geq 1+m$ es válida $\forall m \in \mathbb{N}$

Ejemplo Demostrar por i.m. la validez de la sig. proposición:

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}, \text{ para } n > 2,\ n \in \mathbb{N}.$$

Paso 1 para $n=3$:

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} > \sqrt{3}$$

$1 + 0.7071 + 0.5773 > 1.732$

$2.28 > 1.732$ ✓ se cumple

Paso 2 para $n=k$ (Hipótesis)

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{k} \quad ①$$

Paso 3 para $n=k+1$ (Tesis)

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1} \quad ②$$

Paso 4 Sumando $\frac{1}{\sqrt{k+1}}$ en ambos miembros de ①:

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \quad (1A)$$

$\therefore$

Por transitividad:

Si $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}$ (1A)

y $\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1} \longrightarrow$ P.D.

$\therefore \frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1}$ (2)

Demostrando:

$$\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1}$$

$$\frac{\sqrt{k}\cdot\sqrt{k+1}+1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1}$$

$$\sqrt{k^2+k}+1 > \left(\sqrt{k+1}\right)^2$$

$$\sqrt{k^2+k}+1 > k+1$$

$$\sqrt{k^2+k} > k$$

$$\left(\sqrt{k^2+k}\right)^2 > k^2$$

$$k^2+k > k^2$$

$$k > 0 \checkmark$$

$\therefore$ La proposición es válida $\forall n > 2$.