Clase 11-12-20

jueves, 10 de diciembre de 2020 12:13 p. m.

De la clase anterior:

Sea el siguiente sistema lineal no homogéneo de m ecuaciones con n incógnitas:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad & \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \quad (1)$$

Sea la matriz de coeficientes:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

$\bar{x}$ el vector $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1}$ y $\bar{b}$ el vector $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}_{m\times 1}$

El sistema (1) se puede escribir matricialmente como:

$\boxed{A\bar{x} = \bar{b}}$ → Representación matricial del sistema (1)

La solución $\bar{x}$ del sistema, además de la eliminación por Gauss-Jordan y la eliminación gaussiana, se puede obtener por medio de la inversa:

$A\bar{x} = \bar{b} \xrightarrow{\text{NO}} \bar{x} = \dfrac{\bar{b}}{A}$ ✗ No hay división entre matrices

Por medio de la inversa:

$\underbrace{A^{-1}A}\bar{x} = A^{-1}\bar{b}$ premultiplicando ambos miembros por A^{-1}

$I\bar{x} = A^{-1}\bar{b}$

$\therefore \boxed{\bar{x} = A^{-1}\bar{b}}$ ✓ sí

Como A^{-1}, si existe, es ÚNICA, la solución $\bar{x}$ es ÚNICA también.

NOTA: NO TODAS LAS MATRICES CUADRADAS TIENEN INVERSA

Procedimiento para encontrar A^{-1}

1) Se escribe $[A \mid I]$

2) Se utiliza la reducción por renglones hasta llegar a la FERR de A.

3a) Si la FERR de A es I, entonces se obtiene A^{-1} a la derecha de I, es decir:

$$[A|I] \underbrace{\rightarrow \cdots\cdots \rightarrow}_{\text{reducción por renglones}} [I|A^{-1}]$$

3b) Si la reducción por renglones conduce a un renglón de ceros, entonces A no es invertible.

<u>Ejemplo</u> Calcular la inversa de

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \to \frac{R_1}{2}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - 4R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -11 & -3/2 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad R_2 \to \frac{R_2}{-3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & -5 & -11 & -3/2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to R_3 + 5R_2]{R_1 \to R_1 - 2R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -5/6 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 11/6 & -5/3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \to -R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -5/6 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -11/6 & 5/3 & -1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} R_1 \to R_1 + R_3 \\ R_2 \to R_2 - 2R_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -8/3 & 7/3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 13/3 & -11/3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -11/6 & 5/3 & -1 \end{array}\right] \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} -8/3 & 7/3 & -1 \\ 13/3 & -11/3 & 2 \\ -11/6 & 5/3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\quad}_{I} \qquad \underbrace{\quad}_{A^{-1}}$$

$$\therefore \; A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -16 & 14 & -6 \\ 26 & -22 & 12 \\ -11 & 10 & -6 \end{bmatrix}$$

Verificación:

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -16 & 14 & -6 \\ 26 & -22 & 2 \\ -11 & 10 & -6 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -16 & 14 & -6 \\ 26 & -22 & 2 \\ -11 & 10 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>Ejemplo</u> Obtener A^{-1}, si es que existe, donde:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & -5 & 7 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad [A|I] \rightarrow \cdots\cdots \rightarrow [\,?\,|\,?\,]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_2]{R_1 \to R_1 + 3R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$\therefore$ A no tiene inversa

__Ejemplo__ Resolver el siguiente sistema por medio de la inversa

$$2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 6$$
$$x_2 - x_3 = -4$$
$$3x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 7$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 5/2 & -3/2 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$R_1 \to \frac{R_1}{2}$ $\qquad$ $R_3 \to R_3 - 3R_1$ $\qquad$ $R_1 \to R_1 - 2R_2$, $R_3 \to R_3 + R_2$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 7/2 & 1/2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 & -3/2 & 1 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 7/2 & 1/2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2/3 & 2/3 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & -13/3 & -7/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 5/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2/3 & 2/3 \end{array}\right]$$

$R_3 \to \frac{R_3}{\frac{3}{2}}$ $\qquad$ $R_1 \to R_1 - \frac{7}{2}R_3$, $R_2 \to R_2 + R_3$ $\qquad$ $\underbrace{\quad}_{I}$ $\underbrace{\quad}_{A^{-1}}$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -13/3 & -7/3 \\ -1 & 5/3 & 2/3 \\ -1 & 2/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

Solución del Sistema: $\bar{X} = A^{-1}\bar{b}$

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} 4 & -13/3 & -7/3 \\ -1 & 5/3 & 2/3 \\ -1 & 2/3 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ -8 \\ -4 \end{bmatrix} \qquad \left.\begin{array}{l} x_1 = 25 \\ x_2 = -8 \\ x_3 = -4 \end{array}\right\} \text{solución } \underline{\text{única}}$$

Problemas 7-16 pp. 118 Grossman

Tarea: prob. 29.c) Grossman pag. 119

30) Demuestre que para todo número real θ, la matriz

$$A = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

es invertible y encuentre su inversa.

Solución

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} & 0 & \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} & 0 & 0 \\ \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} & 0 & \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{\operatorname{sen}\theta} & 0 & -\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$R_1 \to \frac{R_1}{\operatorname{sen}\theta}$ $\qquad$ $R_2 \to R_2 - \cos\theta R_1$ $\qquad$ $R_2 \to -\operatorname{sen}\theta R_2$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} & 0 & \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$R_1 \to R_1 - \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} R_2 \qquad \underbrace{\qquad\qquad}_{A^{-1}}$$

Si A es invertible:

tamaño de A (orden de A) = $n \times n$
$\rho(A)$ (número de pivotes en la FERR) = n

} Condiciones que deben de cumplir el orden y el rango para que una matriz tenga inversa.

Teorema 31

Sean A y B dos matrices invertibles. Entonces AB es invertible y

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Verificación:

$(AB)(AB)^{-1} = I$ por definición de inversa

$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I$

$A \underbrace{BB^{-1}}_{I} A^{-1} = I$

$AIA^{-1} = I$

$AA^{-1} = I$

$I = I$

Teorema Resumen (32) Grossman pag. 114

Sea A una matriz de $n \times n$. Las seis afirmaciones siguientes son equivalentes.

1) A es invertible
2) El sistema lineal homogéneo $A\bar{x} = \bar{0}$ tiene solución única o trivial $(\bar{x} = \bar{0})$.
3) El sistema lineal no homogéneo $A\bar{x} = \bar{b}$ tiene solución única $(\bar{x} = A^{-1}\bar{b})$.
4) A es equivalente por renglones a la matriz identidad. $[A|I] \cdots [I|A^{-1}]$
5) La forma escalonada por renglones de A tiene n pivotes.
6) $\det A \neq 0$.

Prob 25 pag 118 tarea

Prob. 30 pag. 119 Clase ✓