Clase 07-04-21

miércoles, 24 de marzo de 2021 02:04 p. m.

Teorema 12

Sean B_1 y B_2 bases para un espacio vectorial V. Sea A_T la matriz de transición de la base B_1 a la base B_2. Entonces, para todo $\bar{x} \in V$:

$$[\bar{x}]_{B_2} = A_T [\bar{x}]_{B_1}$$

b) Obtener las coordenadas del polinomio $p_1(x) = 2x$ en la base B_2.

b) $[P_1(x)]_{B_2} = ?$

$$[P_1(x)]_{B_2} = M_{B_1 \to B_2} [p_1(x)]_{B_1}$$

teníamos: $M_{B_1 \to B_2} = \frac{1}{22}\begin{bmatrix} 5 & 9 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$

$$\therefore [2x]_{B_2} = \frac{1}{22}\begin{bmatrix} 5 & 9 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{22}\begin{bmatrix} 18 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$[2x]_{B_2} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 9 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio a) Obtener la matriz de transición de la base $B_2 = \{(0,3), (5,-1)\}$ a la base $B_1 = \{(1,0), (1,-1)\}$. b) Obtener las coordenadas de $\bar{x} = (2,-1)$ en la base B_1.

Solución

a)

Combinación lineal: $(0,3) = C_1(1,0) + C_2(1,-1)$
$(5,-1) = C_1(1,0) + C_2(1,-1)$

Realizando operaciones: $(0,3) = (C_1 + C_2, -C_2)$
$(5,-1) =$ " "

Igualando:

$\left.\begin{aligned} 0 &= C_1 + C_2 \\ 3 &= -C_2 \end{aligned}\right\}$ Sist. 1 $\quad C_1 = 3$, $C_2 = -3$

$\left.\begin{aligned} 5 &= C_1 + C_2 \\ -1 &= -C_2 \end{aligned}\right\}$ Sist 2 $\quad C_1 = 4$, $C_2 = 1$

$$\therefore A_T = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}_{B_2 \to B_1}$$

b)

$$[\bar{x}]_{B_1} = A_T [\bar{x}]_{B_2}$$

$$[\bar{x}]_{B_1} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \end{bmatrix}$$

Tarea

Obtener la matriz de transición de la base B_2 a la base B_1:

Tarea

a) Obtener la matriz de transición de la base B_2 a la base B_1:

b) Obtener las coordenadas de $\bar{X}=(-2,3,5)$ en la base B_1

$$B_1=\{(-2,1,-2),(1,0,2),(0,-1,-1)\}$$

$$B_2=\{(2,-1,0),(0,0,-1),(0,-2,2)\}$$

Ejemplo En el espacio vectorial D_{22} se dan las bases B_1 y B_2:

$$B_1=\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2&0\\0&1\end{bmatrix}\right\} \quad ; \quad B_2=\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\0&-4\end{bmatrix}\right\}$$

a) Obtener la matriz de transición de B_1 a B_2. b) Obtener las coordenadas de $A_{B_1}=\begin{bmatrix}2&0\\0&-1\end{bmatrix}$ en la base B_2.

Solución:

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}=C_1\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}+C_2\begin{bmatrix}1&0\\0&-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_1+C_2&0\\0&-C_1-4C_2\end{bmatrix} \quad ①$$

$$\begin{bmatrix}2&0\\0&1\end{bmatrix}= \quad '' \quad\quad '' \quad =\begin{bmatrix}C_1+C_2&0\\0&-C_1-4C_2\end{bmatrix} \quad ②$$

$$\left.\begin{aligned}1&=C_1+C_2\\2&=-C_1-4C_2\end{aligned}\right\}\text{ Sistema ①}$$

$$\left.\begin{aligned}2&=C_1+C_2\\1&=-C_1-4C_2\end{aligned}\right\}\text{ Sistema ②}$$

Representación matricial:

$$\begin{bmatrix}1&1\\-1&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_1\\C_2\end{bmatrix}=\overset{S1}{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}},\overset{S2}{\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}}$$

Resolviendo por Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{cc|c|c}1&1&1&2\\-1&-4&2&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cc|c|c}1&1&1&2\\0&-3&3&3\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cc|c|c}1&1&1&2\\0&1&-1&-1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cc|c|c}1&0&2&3\\0&1&-1&-1\end{array}\right]$$

$$A_{T_{B_1\to B_2}}=\begin{bmatrix}2&3\\-1&-1\end{bmatrix}$$

b) Coordenadas de A_{B_1} en la base B_2:

$$(A)_{B_2}=M_{B_1\to B_2}(A)_{B_1}$$

$$(A)_{B_2}=\begin{bmatrix}2&3\\-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0\\0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&-3\\-2&1\end{bmatrix}$$

Tarea Grossman pp 374 probs 25-29 y 30-39

Obtener la matriz de transición y $[\bar{X}]_{B_2}$

Ejemplo

Sea $B_1=\{(1,0),(0,1)\}$ y $B_2=\{(1,3),(-1,2)\}$. Expresar el vector $(3,-4)_{B_1}$ en términos de la base B_2.

Solución

Matriz de transición de la base B_1 a la base B_2:

$(1,0) = C_1(1,3) + C_2(-1,2)$

$(1,0) = (C_1 - C_2, 3C_1 + 2C_2)$ sistema ①

$(0,1) = C_1(1,3) + C_2(-1,2)$

$(0,1) = (C_1 - C_2, 3C_1 + 2C_2)$ Sistema ②

donde:

$$\left.\begin{array}{l} 1 = C_1 - C_2 \\ 0 = 3C_1 + 2C_2 \end{array}\right\} \text{ sistema ①}$$

$$\left.\begin{array}{l} 0 = C_1 - C_2 \\ 1 = 3C_1 + 2C_2 \end{array}\right\} \text{ sistema ②}$$

Matricialmente:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ Sistema ①}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ Sistema ②}$$

Resolviendo ambos sistemas simultáneamente:

$$\begin{array}{c} \qquad\qquad S1 \quad S2 \\ \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array} \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3/5 & 1/5 \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & -3/5 & 1/5 \end{array}\right]$$

$\to (0,1)_{B_2} = \begin{bmatrix} 1/5 \\ 1/5 \end{bmatrix}$ Coordenadas de $(0,1)$ en la base B_2

$(1,0)_{B_2} = \begin{bmatrix} 2/5 \\ -3/5 \end{bmatrix}$

$\to$ Coordenadas de $(1,0)$ en la base B_2

Matriz de transición de la base B_1 a la base B_2:

$$A = \begin{bmatrix} 2/5 & 1/5 \\ -3/5 & 1/5 \end{bmatrix}$$

Expresando el vector $(3,-4)$ en términos de B_2:

$$[\bar{X}]_{B_2} = A\,[\bar{X}]_{B_1}$$

$$[\bar{X}]_{B_2} = \begin{bmatrix} 2/5 & 1/5 \\ -3/5 & 1/5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/5 \\ -13/5 \end{bmatrix}$$

Verificación

$$C_1\bar{v}_1 + C_2\bar{v}_2 = \frac{2}{5}(1,3) - \frac{13}{5}(-1,2) = (3,-4)$$