Clase 08-03-21

domingo, 7 de marzo de 2021 12:50 p. m.

TODO SUBESPACIO DE UN ESPACIO VECTORIAL *V* CONTIENE AL $\bar{0}$ ¿por qué???

Ejemplo El subespacio trivial $H = \{\bar{0}\}$

Sean $\bar{x}, \bar{y} \in H$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces aplicando las dos cerraduras:

S1) $\bar{x} + \bar{y} = \bar{0} + \bar{0}$
$= \bar{0} \in H$ ✓

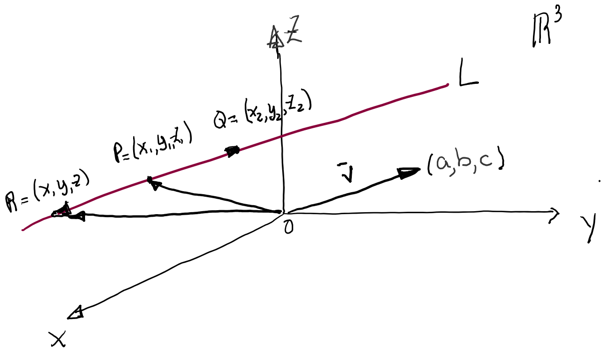
M1) $\alpha\bar{x} = \alpha(\bar{0})$
$= \bar{0} \in H$ ✓

Todo Espacio Vectorial V contiene 2 subespacios: $\begin{cases} V & \text{él mismo} \\ \{\bar{0}\} & \text{subespacio trivial} \end{cases}$

$\therefore$ Todo Espacio Vectorial es un subespacio de sí mismo

Los subespacios distintos a $\{\bar{0}\}$ y a V se llaman subespacios propios.

a) Ecuación de la recta en $\mathbb{R}^3$



$\vec{OP} + \vec{PR} - \vec{OR} = 0$

$\vec{OR} = \vec{OP} + \vec{PR}$; $\vec{PR} = t\bar{v}$

$\vec{OR} = \vec{OP} + t\bar{v}$

$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + t(a, b, c) \longrightarrow$ ecuación vectorial de la recta L en $\mathbb{R}^3$

$\left.\begin{array}{l} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt \\ z = z_1 + ct \end{array}\right\}$ ecuaciones paramétricas de la recta L

Despejando t:

$t = \dfrac{x - x_1}{a} = \dfrac{y - y_1}{b} = \dfrac{z - z_1}{c}$ } ecuaciones simétricas de la recta

Si la recta pasa por el origen: $P = (x_1, y_1, z_1) = (0, 0, 0)$ y se tendrían:

$(x, y, z) = (at, bt, ct) \longrightarrow$ ec. vectorial de la recta que pasa por el origen

$\left.\begin{array}{l} x = at \\ y = bt \\ c = ct \end{array}\right\}$ ecs. paramétricas de la recta que pasa por el origen

$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \Big\}$ ecs. simétricas de la recta que pasa por el origen

Ejemplos en clase

1.- $H = \{(x,y,z) : x = at,\ y = bt,\ z = ct \ ;\ a,b,c,t \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio propio de $\mathbb{R}^3$.

H es el conjunto de puntos en $\mathbb{R}^3$ que están sobre una recta que pasa por el origen.

donde:

$$\left.\begin{aligned} x &= at \\ y &= bt \\ z &= ct \end{aligned}\right\}$$ ecuaciones paramétricas de una recta que pasa por el origen en $\mathbb{R}^3$

Sean $\bar{x}, \bar{y} \in H$ y $\alpha \in \mathbb{R}$:

S1) $\bar{x} + \bar{y} \in H$

si $\bar{x}+\bar{y} \in H$: $x = at,\ y = bt,\ z = ct$

Verificación:

$\bar{x} = (x_1, y_1, z_1)$: $x_1 = at_1,\ y_1 = bt_1,\ z_1 = ct_1$

$\bar{y} = (x_2, y_2, z_2)$: $x_2 = at_2,\ y_2 = bt_2,\ z_2 = ct_2$

$$\bar{x}+\bar{y} = (\underbrace{x_1+x_2}_{x},\ \underbrace{y_1+y_2}_{y},\ \underbrace{z_1+z_2}_{z}) = (at_1+at_2,\ bt_1+bt_2,\ ct_1+ct_2)$$
$$= [a\underbrace{(t_1+t_2)}_{t\in\mathbb{R}},\ b\underbrace{(t_1+t_2)}_{t\in\mathbb{R}},\ c\underbrace{(t_1+t_2)}_{t\in\mathbb{R}}]$$
$$= (at, bt, ct)$$

$\therefore$ $\bar{x}+\bar{y} = (x,y,z)$: $x = at,\ y = bt,\ z = ct$

$\bar{x}+\bar{y} \in H$ ✓

M1) $\alpha\bar{x} \in H$

si $\alpha\bar{x} \in H$: $x = at,\ y = bt,\ z = ct$

Por demostrar $\alpha\bar{x} \in H$:

$\alpha\bar{x} = \alpha(x_1, y_1, z_1)$ Sustitución

$= \alpha(at_1, bt_1, ct_1)$ Aplicando la condición

$= (\alpha a t_1, \alpha b t_1, \alpha c t_1)$ Producto de vector por escalar (Def. 2)

$= (a\underbrace{(\alpha t_1)}_{t\in\mathbb{R}},\ b\underbrace{(\alpha t_1)}_{t\in\mathbb{R}},\ c\underbrace{(\alpha t_1)}_{t\in\mathbb{R}})$ Asociativa y conmutativa en $\mathbb{R}$

$\alpha\bar{x} = (at, bt, ct)$

$\therefore \alpha\bar{x} \in H$

$\therefore$ H es un subespacio propio de $\mathbb{R}^3$.

$\therefore$ Todas las rectas en $\mathbb{R}^3$ que pasan por el origen son subespacios de $\mathbb{R}^3$

2) Ejemplo de un subconjunto de $\mathbb{R}^3$ que no es subespacio de $\mathbb{R}^3$

$$H = \left\{(x,y,z) : \frac{x-1}{3} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z+5}{-1}\right\} \subset \mathbb{R}^3$$

H es el conjunto de puntos en $\mathbb{R}^3$ que están sobre una recta que no pasa por el origen.

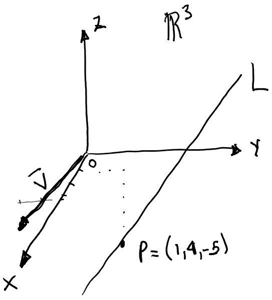
Las ecuaciones que nos dan son las ecuaciones simétricas de la recta. Las ecuaciones paramétricas son:

$x = 1+3t$

$y = 4-2t$

$z = -5-t$

donde $P = (1,4,-5)$, punto por donde pasa la recta



De manera que H se puede reescribir como:

$H = \{(x,y,z) : x = 1+3t,\ y = 4-2t,\ z = -5-t \ ;\ t \in \mathbb{R}\}$

Sean $\bar{x}$ y $\bar{y} \in H$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, de manera que:

S1) $\bar{x}+\bar{y} \in H$

si $\bar{x}+\bar{y} \in H$: $x = 1+3t,\ y = 4-2t,\ z = -5-t$

Verificación

$\bar{x} = (x_1, y_1, z_1) = (1+3t_1, 4-2t_1, -5-t_1)$

$\bar{y} = (x_2, y_2, z_2) = (1+3t_2, 4-2t_2, -5-t_2)$

$$\bar{x}+\bar{y} = (\underbrace{x_1+x_2}_{x}, \underbrace{y_1+y_2}_{y}, \underbrace{z_1+z_2}_{z}) = (1+3t_1+1+3t_2, 4-2t_1+4-2t_2, -5-t_1-5-t_2)$$

$$= [2+3\underbrace{(t_1+t_2)}_{t\in\mathbb{R}}, 8-2\underbrace{(t_1+t_2)}_{t\in\mathbb{R}}, -10-\underbrace{(t_1+t_2)}_{t\in\mathbb{R}}]$$

$$\bar{x}+\bar{y} = (x,y,z) = (2+3t, 8-2t, -10-t) \notin H$$

$\therefore$ H no es subespacio de $\mathbb{R}^3$.

3) Determine si el conjunto $H = \{(a,b,c) ; abc = 0,\ a,b,c \in \mathbb{R}\}$ es o no un subespacio de $\mathbb{R}^3$. Fundamente su respuesta.

4) Determine si el subconjunto H de la forma $(x,y,1)$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

5) Determine si $H = \{(x,y,z) \mid x \in \mathbb{Z};\ y,z \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ } tarea

6) Determine si $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax+by+cz = 0;\ a,b,c \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$

7) Sea $\bar{u} = (-2,3,1)$ y sea $H = \{\bar{v} \in \mathbb{R}^3 \mid \bar{u}\cdot\bar{v} = 0\}$. Demuestre que H es un subespacio de $\mathbb{R}^3$

3) $H = \{(a,b,c) : abc = 0;\ a,b,c \in \mathbb{R}\}$

Sean $\bar{x} = (a_1, b_1, c_1)$ y $\bar{y} = (a_2, b_2, c_2) \in H$

S1) $\bar{x}+\bar{y} \in H$

Si $\bar{x}+\bar{y} \in H$: $abc = 0$

Verificación:

$\bar{x} = (a_1, b_1, c_1)$: $a_1b_1c_1 = 0$ ✓

$\bar{y} = (a_2, b_2, c_2)$: $a_2b_2c_2 = 0$ ✓

$$\bar{x}+\bar{y} = (\underbrace{a_1+a_2}_{a}, \underbrace{b_1+b_2}_{b}, \underbrace{c_1+c_2}_{c}) : (a_1+a_2)(b_1+b_2)(c_1+c_2) = 0\ ?$$

$$(a_1+a_2)(b_1+b_2)(c_1+c_2) = (a_1b_1+a_2b_2+a_2b_1+a_1b_2)(c_1+c_2)$$

$$= \underbrace{a_1b_1c_1}_{0} + \underbrace{a_1b_1c_2+a_1b_2c_1+a_1b_2c_2+a_2b_1c_1+a_2b_1c_2+a_2b_2c_1}_{¿=0?\ \text{no necesariamente}} + \underbrace{a_2b_2c_2}_{0}$$

$\therefore \bar{x}+\bar{y} \notin H$

H no es subespacio vectorial

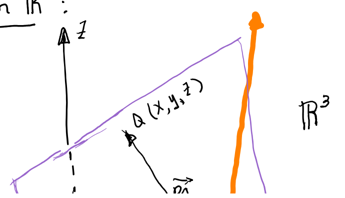
Tarea: M1

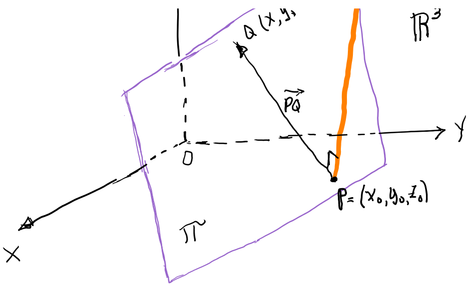
6) Determine si $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax+by+cz = 0;\ a,b,c \in$ es un es un subespacio de $\mathbb{R}^3$

$\bar{n} = (a,b,c)$; $\bar{n}$ generalmente es dato del problema

NO confundir con (a,b,c) de la recta!

Ecuación del plano en $\mathbb{R}^3$:





Definición: Sea P un punto en el espacio y sea $\bar{n}$ un vector dado diferente de cero. Entonces el conjunto de todos los puntos Q para los que $\overrightarrow{PQ}\cdot\bar{n}=0$ constituye un **PLANO** en $\mathbb{R}^3$.

Sea $P=(x_0,y_0,z_0)$ un punto fijo sobre un plano con vector normal $\bar{n}=ai+bj+ck$. Si $Q=(x,y,z)$ es otro punto en el plano, entonces $\overline{PQ}\cdot\bar{n}=0$, es decir:

$$(x-x_0,y-y_0,z-z_0)\cdot(a,b,c)=0$$
$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$
$$ax+by+cz=\underbrace{ax_0+by_0+cz_0}_{d}$$

$\boxed{ax+by+cz=d}$ Ecuación de un plano que pasa por el punto $P=(x_0,y_0,z_0)$.

Si P es el origen, es decir, $P=(0,0,0)$, la ecuación del plano será:

$\boxed{ax+by+cz=0}$ Ec. de un plano que pasa por el origen

$$8x-2y+z=1 \qquad 8x-2y+z=0$$
$$3x+y-2z=20 \qquad 3x+y-2z=0$$
$$x+3y+4z=10 \qquad x+y+4z=0$$

Solución de 6:

$H=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid ax+by+cz=0;\ a,b,c\in\mathbb{R}\}$ ¿es subespacio de $\mathbb{R}^3$?

Sean $\bar{x},\bar{y}\in H$ y $\alpha\in\mathbb{R}$.

s1) $\bar{x}+\bar{y}\in H$

si $\bar{x}+\bar{y}\in H$: $ax+by+cz=0$

Verificación:

$\bar{x}=(x_1,y_1,z_1)$: $ax_1+by_1+cz_1=0$

$\bar{y}=(x_2,y_2,z_2)$: $ax_2+by_2+cz_2=0$

$$\bar{x}+\bar{y}=(\underbrace{x_1+x_2}_{x},\underbrace{y_1+y_2}_{y},\underbrace{z_1+z_2}_{z}) : a(x_1+x_2)+b(y_1+y_2)+c(z_1+z_2)=0?$$
$$=ax_1+ax_2+by_1+by_2+cz_1+cz_2=0?$$
$$=\underbrace{(ax_1+by_1+cz_1)}_{0}+\underbrace{(ax_2+by_2+cz_2)}_{0}=0$$

$\therefore\ \bar{x}+\bar{y}\in H$

M1) $\alpha\bar{x}\in H$

Si $\alpha\bar{x}\in H$: $ax+by+cz=0$

Verificación: $\alpha\bar{x}=\alpha(x_1,y_1,z_1)$: $ax_1+by_1+cz_1=0$

$$=(\underbrace{\alpha x_1}_{x},\underbrace{\alpha y_1}_{y},\underbrace{\alpha z_1}_{z}) : a(\alpha x_1)+b(\alpha y_1)+c(\alpha z_1)=0?$$
$$=\alpha a x_1+\alpha b y_1+\alpha c z_1=0?$$
$$=\alpha\underbrace{(ax_1+by_1+cz_1)}_{=0}=0$$
$$=ax+by+cz=0\ ✓$$

$\therefore\ \alpha\bar{x}\in H$

y H es un subespacio vectorial.

$\therefore$ Los planos en $\mathbb{R}^3$ que pasan por el origen son subespacios vectoriales.

Ejemplo Determine si $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax+by+cz=2 ; a,b,c \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$?

Solución

Sean $\bar{x}, \bar{y} \in H$ y $\alpha \in \mathbb{R}$

S1) $\bar{x}+\bar{y} \in H$

si $\bar{x}+\bar{y} \in H$: $ax+by+cz=2$

Verificación: