Clase 07-06-21

domingo, 6 de junio de 2021 12:16 p. m.

TRANSFORMACIONES ORTOGONALES

Una transformación ortogonal es aquella que deja intacto o preserva el producto interno entre vectores, la norma de vectores y el ángulo entre vectores, después de operar o mapear un vector de un espacio vectorial V a otro espacio W.

Sea T un operador ortogonal y $\bar{u}$ y $\bar{v}$ vectores en V. Entonces se debe cumplir lo siguiente:

1) $\langle T\bar{u}, T\bar{v}\rangle = \langle \bar{u}, \bar{v}\rangle \rightarrow$ T preserva el producto interno de $\bar{u}$ y $\bar{v}$.

2) $|T\bar{u}| = |\bar{u}| \longrightarrow$ T preserva la norma de $\bar{u} \longrightarrow$ ISOMETRÍA

3) $\cos\theta = \dfrac{\langle T\bar{u}, T\bar{v}\rangle}{|T\bar{u}||T\bar{v}|} = \dfrac{\langle \bar{u}, \bar{v}\rangle}{|\bar{u}||\bar{v}|} \longrightarrow$ T preserva el ángulo entre $\bar{u}$ y $\bar{v}$

Todo operador T tiene una representación matricial. En este caso la representación matricial de T ortogonal es una matriz ortogonal Q.

Ejemplo Demostrar que la siguiente matriz cumple con las condiciones 1), 2) y 3) anteriormente descritas.

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Solución

Sean $\bar{u} = (2,3)$ y $\bar{v} = (-1,2)$ vectores en $\mathbb{R}^2$:

1) $\langle Q\bar{u}, Q\bar{v}\rangle = \langle \bar{u}, \bar{v}\rangle$

$$Q\bar{u} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{5}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$Q\bar{v} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$\langle Q\bar{u}, Q\bar{v}\rangle = tr\left[Q\bar{u}, (Q\bar{v})^t\right] = tr\left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \right\} = tr\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -15 & 5 \end{bmatrix} = \frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 4$$

$$<Q\bar{u},Q\bar{v}> = tr[Q\bar{u},(Q\bar{v})^t] = tr\left\{\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{5}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\right\} = tr\begin{vmatrix}\frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{15}{2} & \frac{5}{2}\end{vmatrix} = \frac{3}{2}+\frac{5}{2} = 4$$

Comparando con $<\bar{u},\bar{v}> = \bar{u}\cdot\bar{v}$:

$<\bar{u},\bar{v}> = \bar{u}\cdot\bar{v} = (2,3)\cdot(-1,2) = -2+6 = 4$ ✓ se cumple

Por tanto se cumple que Q preserva el producto interno entre $\bar{u}$ y $\bar{v}$

2) $|Q\bar{u}| = |\bar{u}|$

$$Q\bar{u} = \begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{5}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

$$|Q\bar{u}| = \sqrt{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{25}{2}} = \sqrt{\frac{26}{2}} = \sqrt{13}$$

Comparando con $|\bar{u}|$:

$|\bar{u}| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$ ✓

Por tanto, Q preserva la norma de $\bar{u}$ (y de $\bar{v}$, comprobar)

3) $$\frac{<Q\bar{u},Q\bar{v}>}{|Q\bar{u}||Q\bar{v}|} = \frac{<\bar{u},\bar{v}>}{|\bar{u}||\bar{v}|}$$

$<Q\bar{u},Q\bar{v}> = 4$

$|Q\bar{u}| = \sqrt{13}$

$$|Q\bar{v}| = \sqrt{\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{2}+\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{10}{2}} = \sqrt{5}$$

$$\therefore \frac{<Q\bar{u},Q\bar{v}>}{|Q\bar{u}||Q\bar{v}|} = \frac{4}{(\sqrt{13})(\sqrt{5})} = \frac{4}{\sqrt{65}}$$

Comparando con $\frac{<\bar{u},\bar{v}>}{|\bar{u}||\bar{v}|}$:

$<\bar{u},\bar{v}> = 4$

$|\bar{u}| = \sqrt{13}$

$|\bar{v}| = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{5}$

$$\frac{\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle}{|\bar{u}||\bar{v}|} = \frac{4}{\sqrt{13}\,\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{65}} \checkmark$$

Por tanto Q preserva el ángulo entre $\bar{u}$ y $\bar{v}$. Entonces Q es una matriz ortogonal.

Nota No cualquier matriz es una matriz ortogonal.

Además, tenemos otro aspecto de una matriz ortogonal:

Teorema 30 Matriz ortogonal

Una matriz Q de $n \times n$ es ortogonal si y sólo si las columnas de Q forman una base ortonormal para $\mathbb{R}^n$.

Definición 32

Una base $B = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n\}$ es ortonormal si:

$\langle \bar{u}_i, \bar{u}_i \rangle = 1 \longrightarrow$ los vectores tienen norma 1

$\langle \bar{u}_i, \bar{u}_j \rangle = 0$ si $i \neq j \longrightarrow$ los vectores son ortogonales entre sí.

Comprobemos el Teorema con la matriz Q del ejemplo anterior:

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$ es una matriz cuadrada

$$\begin{array}{cc} \bar{u}_1 & \bar{u}_2 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \langle \bar{u}_1, \bar{u}_1 \rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \checkmark \\ \\ \langle \bar{u}_2, \bar{u}_2 \rangle = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \checkmark \end{array}\right\} \bar{u}_1 \text{ y } \bar{u}_2 \text{ son unitarios}$$

$$<\bar{u}_2,\bar{u}_2> = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1 \checkmark$$

$$\left.<\bar{u}_1,\bar{u}_2> = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 0\right\} \bar{u}_1 \text{ y } \bar{u}_2 \text{ son ortogonales}$$

$\therefore$ Las columnas de Q forman una base ortonormal para $\mathbb{R}^2$

Tenemos además otra definición de Matriz ortogonal:

Def 33 Matriz ortogonal

Una matriz Q de $n \times n$ se llama ortogonal si:

$$Q^{-1} = Q^t$$

Entonces $QQ^t = Q^tQ = I$

En la clase del 28-05-21 en la Unidad 5 se hizo el ejemplo de la construcción de una base ortonormal en $\mathbb{R}^3$ a partir de la base $B = \{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\}$, usando el proceso de Gram-Schmidt y se llegó al siguiente resultado:

La base ortonormal B'' será: $B'' = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}$

Entonces, de acuerdo con el Teorema 30, la matriz ortogonal Q correspondiente a esta base será:

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

Verificando:

$$Q^tQ = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \cdots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q^tQ=\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt6} & \frac{2}{\sqrt6} \\ \frac{1}{\sqrt3} & -\frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt6} & -\frac{1}{\sqrt3} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

En $\mathbb{R}^2$ una matriz ortogonal típica es:

$$Q=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

Otra característica de una matriz ortogonal es que su determinante es:

$$\det Q=\begin{cases} +1 & \text{matriz de rotación} \\ -1 & \text{matriz de traslación}\end{cases}$$

En la matriz $Q=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$, $\det Q=\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta=1 \Longrightarrow$ es una matriz de rotación

En la matriz $Q=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt3} \\ \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt6} & -\frac{1}{\sqrt3} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt3}\end{bmatrix}$, $\det Q=1$ matriz de rotación (Comprobar el det)

Nuestro interés estará enfocado en las rotaciones ($\det Q=+1$)

Tarea Grossman pag 434 probs 22, 24

23) Demuestre que si P y Q son matrices ortogonales de $n\times n$, entonces PQ es ortogonal.

Hipótesis $P^t=P^{-1}$
$Q^t=Q^{-1}$

Por demostrar $(PQ)^t=(PQ)^{-1}$

Solución:

$(PQ)^t=Q^tP^t$ Teorema 2.5.1 ii), Grossman pag. 128
$=Q^{-1}P^{-1}$ por hipótesis
$=(PQ)^{-1}$ Teorema 2.4.3 Grossman pag. 104

LQQD.

25) Demuestre que si Q es una matriz ortogonal simétrica, entonces $Q^2=I$

Solución

Hipótesis: $Q^t = Q^{-1}$ Q es ortogonal

$Q = Q^t$ Q es simétrica

$Q^2 = QQ = QQ^t = QQ^{-1} = I$ LQQD

26) Demuestre que si Q es ortogonal, $\det Q = \pm 1$

Solución:

Hipótesis: $Q^t = Q^{-1}$

$QQ^{-1} = I$ por definición de inversa

$QQ^t = I$ por hipótesis

$\det(QQ^t) = \det I$ aplicando determinante en ambos miembros

$(\det Q)(\det Q^t) = 1$ propiedad de los determinantes

pero $\det Q = \det Q^t$ propiedad de los determinantes

$\therefore (\det Q)^2 = 1$

$\det Q = \pm 1$ LQQD

DIAGONALIZACIÓN ORTOGONAL

Def 34 Matriz Diagonalizable Ortogonalmente

Se dice que una matriz A de $n \times n$ es diagonalizable ortogonalmente si existe una matriz ortogonal Q tal que:

$$D = Q^t A Q, \text{ donde } D = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$$

Teorema 31

Sea A una matriz real (o compleja) de $n \times n$. Entonces A es diagonalizable ortogonalmente si y solo si A es simétrica.

Ejemplo

$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, A es simétrica

$p(\lambda) = (1-\lambda)(3-\lambda) - 4$

$p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda - 1$; $\left.\begin{matrix} \lambda_1 = 2-\sqrt{5} \\ \lambda_2 = 2+\sqrt{5} \end{matrix}\right\}$ Valores propios diferentes

Para $\lambda_1 = 2-\sqrt{5}$: $(A-\lambda I)\bar{v} = \bar{0}$

$$\begin{bmatrix} 1-2+\sqrt{5} & -2 \\ -2 & 3-2+\sqrt{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\left[\begin{matrix} -1+\sqrt{5} & -2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 0 \end{matrix}\right]$ $(-1+\sqrt{5})x_1 - 2x_2 = 0$; $x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} x_1$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1+\sqrt{5} & -2 & 0 \\ -2 & 1+\sqrt{5} & 0 \end{array}\right] \quad (-1+\sqrt{5})x_1 - 2x_2 = 0 \; ; \quad x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}x_1$$

$x_1 \in \mathbb{R}$

$$\bar{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1+\sqrt{5} \end{bmatrix} \text{ para } x_1 = 2$$

Para $\lambda_2 = 2+\sqrt{5}$, $(A-\lambda I)\bar{v} = 0$

$$\begin{bmatrix} 1-2-\sqrt{5} & -2 \\ -2 & 3-2-\sqrt{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1-\sqrt{5} & -2 & 0 \\ -2 & 1-\sqrt{5} & 0 \end{array}\right] \quad -2x_1 + (1-\sqrt{5})x_2 = 0$$

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}x_2$$

$x_2 \in \mathbb{R}$

$$\bar{v}_2 = \begin{bmatrix} 1-\sqrt{5} \\ 2 \end{bmatrix} \text{ para } x_2 = 2$$

Comprobación de que $\bar{v}_1$ y $\bar{v}_2$ son ortogonales:

$\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2 = (2, -1+\sqrt{5}) \cdot (1-\sqrt{5}, 2) = 2(1-\sqrt{5}) + 2(-1+\sqrt{5}) = 0 \Rightarrow$ son ortogonales

Aplicaremos Gram-Schmidt para obtener una base de vectores propios ortonormal:

$$|\bar{v}_1| = \sqrt{(2,-1+\sqrt{5})\cdot(2,-1+\sqrt{5})} = \sqrt{4+1-\sqrt{5}-\sqrt{5}+5} = \sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

$$\therefore \; \bar{u}_1 = \frac{\bar{v}_1}{|\bar{v}_1|} = \frac{1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\begin{bmatrix} 2 \\ -1+\sqrt{5} \end{bmatrix} \text{ primer vector unitario}$$

$$|\bar{v}_2| = \sqrt{(1-\sqrt{5},2)\cdot(1-\sqrt{5},2)} = \sqrt{1-\sqrt{5}-\sqrt{5}+5+4} = \sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

$$\bar{u}_2 = \frac{\bar{v}_2}{|\bar{v}_2|} = \frac{1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\begin{bmatrix} 1-\sqrt{5} \\ 2 \end{bmatrix} \text{ segundo vector unitario}$$

Ya podemos escribir a la matriz ortogonal de este ejemplo:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\begin{bmatrix} 2 & 1-\sqrt{5} \\ -1+\sqrt{5} & 2 \end{bmatrix}, \quad |Q| = \frac{4-(1-\sqrt{5})(-1+\sqrt{5})}{10-2\sqrt{5}} = \frac{10-2\sqrt{5}}{10-2\sqrt{5}} = 1 \checkmark$$

$$Q^tAQ = \frac{1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\begin{bmatrix} 2 & -1+\sqrt{5} \\ 1-\sqrt{5} & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\begin{bmatrix} 2 & 1-\sqrt{5} \\ -1+\sqrt{5} & 2 \end{bmatrix} = D = \begin{bmatrix} 2+\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 2-\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

Tarea Grossman pág 598 probs 1, 3, 6