Clase 22-03-21

sábado, 20 de marzo de 2021 11:43 a. m.

Ejercicios 52, 53, 69

52) Demuestre que cualesquiera cuatro polinomios en P_2 son linealmente dependientes.

$1, x, x^2, 1-x$

53) Demuestre que dos polinomios no pueden generar a P_2 (ya lo hicimos)

69) Encuentre un conjunto de tres vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$ que contenga a los vectores $\{(2,-3,5), (-1,4,-2)\}$ Respuesta: $\{(2,-3,5), (-1,4,-2), (0,1,0)\}$

Tarea: probs. 55, 56, 66 pp. 344 y 345

Teorema 9

Cualquier conjunto de n vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$ genera a $\mathbb{R}^n$.

¿por qué?

Solución

$$c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 + \dots + c_n\bar{v}_n = 0$$

Por hipótesis los vectores $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$ son linealmente independientes. Por teorema 7, los mismos vectores son las columnas de una matriz A de $n \times n$; y el sistema homogéneo $A\bar{x} = \bar{0}$ tiene solución única y por el Teorema resumen el sistema no homogéneo $A\bar{x} = \bar{b}$ también tiene solución única, por lo tanto, n vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$ genera a $\mathbb{R}^n$. Al tener solución única ambos sistemas, $\det A \neq 0$.

Ejemplo: Tres vectores en $\mathbb{R}^3$ generan $\mathbb{R}^3$ si su determinante es diferente de cero.

Los vectores $(2,-1,4)$, $(1,0,2)$ y $(3,-1,5)$ generan $\mathbb{R}^3$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 2(0+2) - (-5+4) + 3(-2) = -1$$

$$|A| \neq 0 \implies \text{los tres vectores generan } \mathbb{R}^3$$

Ejemplo Determine si los polinomios $x-2x^2$, x^2-4x y $-7x+8x^2$, generan P_2.

Solución

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & -7 \\ -2 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{No generan } P_2.$$

*Nota Acomodamos los polinomios con respecto a la base $\{1, x, x^2\}$

Definición 9 Base de un Espacio Vectorial

Un conjunto de vectores $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$ es una base para un espacio vectorial V si:

i) $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n\}$ es linealmente independiente

ii) $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n\}$ genera a V.

Entonces: Todo conjunto de n vectores linealmente independiente en $\mathbb{R}^n$ es una base en $\mathbb{R}^n$

Base Canónica en $\mathbb{R}^n$:

$B = \{(1,0,0,\dots,0), (0,1,0,\dots,0), (0,0,1,\dots,0) \dots, (0,0,0,\dots,1)\}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Base canónica en P_n: $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$

Base canónica para M_{22}: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

Ejemplo Grossman pag. 350

Una base para un subespacio de $\mathbb{R}^3$:

$$\Pi = \{(x, y, z) : 2x - y + 3z = 0\}$$

Π es un plano en $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen; es un subespacio propio de $\mathbb{R}^3$ (no es $\mathbb{R}^3$).

La ec. $2x - y + 3z = 0$ la resolvemos.

Despejando, por ejemplo y, tenemos:

$$y = 2x + 3z \;*$$

Entonces el vector (x, y, z) lo podemos escribir de la sig. manera:

$$\rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} z$$

Por tanto, $B_\Pi = \{\overset{\bar{v}_1}{(1,2,0)}, \overset{\bar{v}_2}{(0,3,1)}\}$ es una base para Π porque los vectores $\bar{v}_1$ y $\bar{v}_2$

son linealmente independientes y generan a Π ya que:

$$x = x$$
$$y = 2x + 3z \rightarrow 2x - y + 3z = 0$$
$$z = z$$

Teorema 10

Cualesquiera dos bases en un espacio vectorial V tienen el mismo número de vectores.

Definición 10 Dimensión

Sea V un espacio vectorial que tiene una base con un número finito de elementos. Entonces la dimensión de V es el número de vectores en todas las bases y V se denomina Espacio Vectorial de dimensión finita.

Si $V = \{\bar{0}\}$, entonces se dice que V tiene dimensión cero.

La dimensión de V se denota por dim V.

Dimensión de $\mathbb{R}^n$: n

Dimensión de P_n : n+1

Dimensión de M_{mn} = mn

Ejercicios pag. 358 : 1, 4, 6, 10, 12, 16, 18, 20, 23, 24, 45 en clase. Tarea: probs 1-33 pp. 358, 359

Determine si el conjunto dado es una base para el espacio vectorial a que se refiere:

1) En P_2 : $-2-11x+7x^2$, $-5-x-5x^2$

2) En P_2 : $1-x^2$, x

3) En P_2 : $-3x$, $1+x^2$, x^2-5

$$[1, x, x^2] \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -5 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \; ; \quad |A| = 18 \neq 0 \Rightarrow$$ los polinomios forman una base para P_2.

4) En P_2 : $1+3x+7x^2$, $5+12x+35x^2$, $8+5x-12x^2$ $\quad |A| = 204$

6) En P_3 : 1, $1+x$, $1+x^2$, $1+x^3$ $\quad |A| = 1$

10) En M_{22} : $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$, $abcd \neq 0$

12) $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = 0\}$; $(1,1)$, $(4,4)$

16) Encuentre una base en $\mathbb{R}^3$ para $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 3x - 2y + z = 0\}$

$$B_H = \{(1,0,-3), (0,1,2)\} \; ; \quad \dim H = 2$$