Clase 02-06-21

martes, 1 de junio de 2021 07:30 p. m.

Propiedades del Producto Interno

Un espacio vectorial complejo V se denomina espacio con producto interno si para cada par ordenado de vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$ en V existe un número complejo único $<\bar{u},\bar{v}>$, denominado producto interno de $\bar{u}$ y $\bar{v}$, tal que si $\bar{u},\bar{v}$ y $\bar{w}$ están en V y $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces:

1) $<\bar{v},\bar{v}> \geq 0$
2) $<\bar{v},\bar{v}> = 0$ si y sólo si $\bar{v}=\bar{0}$
3) $<\bar{u},\bar{v}+\bar{w}> = <\bar{u},\bar{v}> + <\bar{u},\bar{w}>$
4) $<\bar{u}+\bar{v},\bar{w}> = <\bar{u},\bar{w}> + <\bar{v},\bar{w}>$
5) $<\bar{u},\bar{v}> = \overline{<\bar{v},\bar{u}>}$ la barra denota el complejo conjugado
6) $<\alpha\bar{u},\bar{v}> = \alpha<\bar{u},\bar{v}>$
7) $<\bar{u},\alpha\bar{v}> = \bar{\alpha}<\bar{u},\bar{v}>$

Nota: para el caso de matrices $tr(A,B^t) = tr(B,A^t)$ comprobar

Definición 29 Conjunto ortonormal

El conjunto de vectores $\{\bar{v}_1,\bar{v}_2,..,\bar{v}_n\}$ es un conjunto ortonormal en V si:

$$<\bar{v}_i,\bar{v}_j> = 0, \text{ para } i\neq j \quad 29a)$$

$$|\bar{v}_i| = \sqrt{\bar{v}\cdot\bar{v}} = 1 \quad 29b)$$

Si sólo se cumple 29a) se dice que el conjunto es ortogonal

Definición 30 Proyección ortogonal

Sea H un subespacio de $\mathbb{R}^n$ con base ortonormal $\{\bar{u}_1,\bar{u}_2,..,\bar{u}_k\}$. Si $\bar{v}\in\mathbb{R}^n$ entonces la proyección ortogonal de $\bar{v}$ sobre H, denotada por $\text{proy}_H\bar{v}$ está dada por:

$$\text{proy}_H\bar{v} = (\bar{v}\cdot\bar{u}_1)\bar{u}_1 + (\bar{v}\cdot\bar{u}_2)\bar{u}_2 + \cdots + (\bar{v}\cdot\bar{u}_K)\bar{u}_K$$

donde $\text{proy}_H\bar{v} \in H$.

Nota: Revisar Teorema de Gram-Schmidt en la parte de $\text{proy}_{\bar{v}_1}\bar{v}_2$ en $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo Proyección ortogonal de un vector sobre un plano

Del ejemplo 7 de la clase del 28-05-21 teníamos el subespacio $\Pi = \{(x,y,z) : 2x-y-z=0\}$

y encontramos que: una base para Π puede ser: $B=\{(1,0,2),(0,1,-1)\}$ para x=1 y y=1

y que una base ortonormal de Π es $B''=\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{5}},0,\frac{2}{\sqrt{5}}\right),\left(\frac{2}{\sqrt{30}},\frac{5}{\sqrt{30}},-\frac{1}{\sqrt{30}}\right)\right\}$

Si se quisiera encontrar $\text{proy}_\Pi\bar{v}$, donde $\bar{v}=(3,-2,4)$, aplicamos la definición 30, es decir:

$$\text{proy}_\Pi\bar{v} = \left[(3,-2,4)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{5}},0,\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right]\left(\frac{1}{\sqrt{5}},0,\frac{2}{\sqrt{5}}\right) + \left[(3,-2,4)\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{30}},\frac{5}{\sqrt{30}},-\frac{1}{\sqrt{30}}\right)\right]\left(\frac{2}{\sqrt{30}},\frac{5}{\sqrt{30}},-\frac{1}{\sqrt{30}}\right)$$

$$= \frac{11}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) - \frac{8}{\sqrt{30}}\left(\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{5}{\sqrt{30}}, -\frac{1}{\sqrt{30}}\right)$$

$$= \left(\frac{11}{5}, 0, \frac{22}{5}\right) + \left(\frac{-16}{30}, \frac{-40}{30}, \frac{8}{30}\right) = \left(\frac{50}{30}, \frac{-40}{30}, \frac{140}{30}\right)$$

$$\text{proy}_{\pi}\bar{v} = \left(\frac{5}{3}, \frac{-4}{3}, \frac{14}{3}\right) \in \pi$$

Comprobación: en $\pi = \{(x,y,z) : 2x - y - z = 0\}$

Sustituyendo: $2\left(\frac{5}{3}\right) - \left(-\frac{4}{3}\right) - \frac{14}{3} = \frac{10}{3} + \frac{4}{3} - \frac{14}{3} = 0$

Teorema 27

Sea $B = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n\}$ una base ortonormal para $\mathbb{R}^n$ y sea $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$. Entonces:

$$\bar{v} = (\bar{v}\cdot\bar{u}_1)\bar{u}_1 + (\bar{v}\cdot\bar{u}_2)\bar{u}_2 + \ldots + (\bar{v}\cdot\bar{u}_n)\bar{u}_n$$

esto es: $\bar{v} = \text{proy}_{\mathbb{R}^n}\bar{v}$