Clase 06-11-20

jueves, 5 de noviembre de 2020 04:02 p. m.

RAÍCES DE POLINOMIOS

Objetivo: ver Temario

Definición 22

Llamaremos polinomio en x con coeficientes en $\mathbb{C}$ a una expresión de la forma:

$$p(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad (1)$$

donde:

$a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, y se llaman coeficientes de $x^0, x^1, \dots, x^n$ respectivamente.

$a_0x^0,\ a_1x^1, \dots, a_nx^n$ se llaman términos del polinomio.

$x^0, x^1, x^2, \dots, x^n$ representan potencias de la variable x.

Se acostumbra:

1) Escribir a_0 en lugar de a_0x^0.
2) ✓ x en lugar de x^1.
3) ✓ x^k en lugar de $1x^k$.
4) ✓ $-a_kx^k$ en lugar de $+(-a_k)x^k$.
5) Omitir los términos cuyo coeficiente sea cero.

Ejemplo en lugar de $-3x^0 + 4x^1 + 0x^2 + 1x^3 + 5x^4 + (-2)x^5$

se escribe: $-3 + 4x + x^3 + 5x^4 - 2x^5$

Se manejarán principalmente polinomios con coeficientes en $\mathbb{Q}$.

Definición 23 Grado de un polinomio

Es el mayor índice superior que se encuentra en la expresión:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

siempre y cuando el coeficiente correspondiente sea $\neq 0$.

Si $a_n \neq 0$, $gr(p) = n$; n es un entero no negativo.

Ejemplo.

$$p(x) = 3 - \frac{1}{2}x + 2x^2 + x^4 + 0x^5, \quad gr(p) = 4$$

Dadas las siguientes expresiones, indicar si son o no polinomios; en caso negativo decir por qué; en caso afirmativo determinar su grado.

1) $p(x) = 7x^7 - 5x^6 - 2x^5 + 8x^4 + 3x^3 - 10x^2 + x - 4$

2) $f(\cos\theta) = 1.71\cos^3\theta - 3.14\cos^2\theta + 8.25\,\text{sen}^2\theta - 4.84\cos\theta$

3) $h(x) = x^3 - 2x^{-2} + 4x - 7$

4) $f(y) = 5y^6 - 7y^5 - 3y^4 + 2y^3$

5) $3x^3 - 2x^2 + x + 1 = 0$

6) $m^2 = 4x^5 - 8x^3 - 7x^2 + 6x + 5$

7) $g(x) = \dfrac{2x^3 - 2x^2 + 2x - 1}{x + 4}$

8) $g(x) = 3x^0 + 8x - 7x^2$

9) $\alpha(x) = -4 + 6x^5 + 2x^3 - 5x + 8x^2 + 6x^4$

La expresión ① en forma compacta se escribe así:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \qquad p(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad ①$$

Definición 24 Igualdad de polinomios

Dos polinomios $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$

y $f(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n$

Son iguales si y solo si:

$$\begin{aligned} a_0 &= b_0 \\ a_1 &= b_1 \\ &\vdots \\ a_k &= b_k \\ &\vdots \\ a_n &= b_n \end{aligned}$$

Ejemplo Determinar los valores de A, B y C para que los polinomios $p(x)$ y $g(x)$ sean iguales.

$$p(x) = 4x^2 + 14x + 8$$
$$g(x) = A(3x^2 + 2x + 1) + B(x^2 + 1) + C(-x^2 + 4x + 1)$$

Solución

$$g(x) = 3Ax^2 + 2Ax + A + Bx^2 + B - Cx^2 + 4Cx + C$$

Agrupando términos con la misma potencia de x en $g(x)$:

$$g(x) = (3A + B - C)x^2 + (2A + 4C)x + (A + B + C)$$

Igualando $p(x)$ y $g(x)$:

$$4x^2 + 14x + 8 = (3A + B - C)x^2 + (2A + 4C)x + (A + B + C)$$

Igualando términos semejantes de $p(x)$ y $q(x)$ (de acuerdo a la potencia de la variable):

$$4x^2 = (3A+B-C)x^2$$
$$14x = (2A+4C)x$$
$$8 = A+B+C$$

Igualando coeficientes:

$$4 = 3A+B-C \quad (1)$$
$$14 = 2A+4C \quad (2)$$
$$8 = A+B+C \quad (3)$$

Restando (3) a (1):

$$\begin{array}{r} 4 = 3A+B-C \\ -\ 8 = -A-B-C \\ \hline -4 = 2A-2C \quad (4) \end{array}$$

Despejando $2A$ de (4) y sustituyendo en (2):

$$14 = 2C-4+4C$$
$$18 = 6C \implies C = 3$$

Sustituyendo en (4):

$$2A = -4+2(3)$$
$$A = 1$$

Sustituyendo los valores de A y C en (3):

$$8 = 1+B+3 \implies B = 4$$

Por tanto,

$$A = 1$$
$$B = 4$$
$$C = 3$$

Definición 25 Suma de polinomios

Sean los polinomios en x con coeficientes en $\mathbb{C}$:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

y $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$

El polinomio $f(x)+g(x)$ se define como:

$$p(x) = f(x)+g(x) = (a_0+b_0) + (a_1+b_1)x + (a_2+b_2)x^2 + \dots + (a_n+b_n)x^n$$

Es decir, $f(x)+g(x) = \sum_{k=0}^{n} (a_k+b_k)x^k$

Ejemplo

Ejemplo

Sumar $f(x) = -1 + x + 3x^3 + 2x^4 + 3x^5$

y $g(x) = 7 - 5x + x^2 + 4x^3$

Y determinar $gr(f+g)$

$$
\begin{array}{rl}
 & f(x) = -1 + x + + 3x^3 + 2x^4 + 3x^5 \\
+ & g(x) = 7 - 5x + x^2 + 4x^3 \\
\hline
 & f(x) + g(x) = 6 - 4x + x^2 + 7x^3 + 2x^4 + 3x^5
\end{array}
$$

$gr(f+g) = 5$

Teorema 14 Con relación a la suma:

Si $f(x), g(x), h(x)$ son polinomios en x con coeficientes en $\mathbb{C}$, entonces:

GRUPO ABELIANO

1) $f(x) + g(x)$ es un polinomio $\in P$ (conjunto de polinomios de grado $\leq n$) Cerradura
2) $f(x) + [g(x) + h(x)] = [f(x) + g(x)] + h(x)$ Asociatividad
3) $f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$ Conmutatividad
4) Existe un polinomio $\varphi(x)$ tal que:

   $f(x) + \varphi(x) = f(x)$ Elemento idéntico

   donde: $\varphi(x) = 0 + 0x + 0x^2 + \dots + 0x^n$; $gr(\varphi) = \infty$
5) Existe un polinomio $-f(x)$ tal que:

   $f(x) + [-f(x)] = \varphi(x)$ Elemento inverso aditivo

Definición 26 Resta de polinomios

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos polinomios en x con coeficientes en $\mathbb{C}$; el polinomio $f(x) - g(x)$ se define como:

$$f(x) - g(x) = f(x) + [-g(x)]$$

Definición 27 Multiplicación de Polinomios

Sean los polinomios $f(x)$ y $g(x)$ con coeficientes en $\mathbb{C}$, tales que:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

$$g(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$$

$$f(x) \cdot g(x) = \left(\sum^{n} a_k x^k\right)\left(\sum^{m} b_k x^k\right)$$

$g(x) = \sum_{k=0} b_k \cdots$

El polinomio $f(x)g(x) = (fg)(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{m} b_k x^k\right)$

$$= \sum_{k=0}^{n+m} c_k x^k$$

donde:

$$c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$$

Def 28

$$gr(fg) = gr(f) + gr(g)$$

Ejemplo Obtener el producto de los siguientes polinomios y $gr(fg)$

$f(x) = 3x^2 - x + 1$

$g(x) = x - 3x^3 + 2$

Solución

Ordenando: $f(x) = 1 - x + 3x^2 \qquad gr(f) = n = 2$

$g(x) = 2 + x - 3x^3 \qquad gr(g) = m = 3$

$$f(x)g(x) = (1-x+3x^2)(2+x-3x^3) = 1(2+x-3x^3) - 1(2+x-3x^3)x + 3(2+x-3x^3)x^2$$

$$= 2+x-3x^3-2x-x^2+3x^4+6x^2+3x^3-9x^5$$

$$= \underline{2 - x + 5x^2 + 3x^4 - 9x^5}$$

$$\begin{array}{ccccc} & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ f(x) = & 1 & -x & +3x^2 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ g(x) = & 2 & +x & +0x^2 & -3x^3 \end{array}$$

$$f(x)g(x) = \sum_{k=0}^{n+m} c_k x^k = c_0x^0 + c_1x^1 + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5$$

$$c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} \; ;$$

$$\left.\begin{aligned}
c_0 &= a_0b_0 = (1)(2) = 2 \checkmark \\
c_1 &= a_0b_1 + a_1b_0 = (1)(1) + (-1)(2) = -1 \\
c_2 &= a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 = (1)(0) + (-1)(1) + (3)(2) = -3-1+6 = 5 \\
c_3 &= a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0 = (1)(-3) + (-1)(0) + (3)(1) + (0) = -3+3 = 0 \\
c_4 &= a_0b_4 + a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1 + a_4b_0 = (1)(0) + (-1)(-3) + (3)(0) + 0 = 3 \\
c_5 &= a_0b_5 + a_1b_4 + a_2b_3 + a_3b_2 + a_4b_1 + a_5b_0 = (1)(0) + a_1(0) + (3)(-3) + 0 + 0 + 0 = -9
\end{aligned}\right\}$$

$\therefore f(x)g(x) = 2 - x + 5x^2 + 3x^4 - 9x^5$

$gr(fg) = 2+3 = 5$