Clase 20-11-20 Parte 2

jueves, 19 de noviembre de 2020 12:41 p. m.

UNIDAD 5 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Def 31 Una ecuación lineal es aquélla de la forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b_1 \quad (1)$$

donde:

$a_1, a_2, \dots, a_n$ son los coeficientes de $x_1, x_2, \dots, x_n$

$x_1, x_2, \dots, x_n$ son las incógnitas a resolver

b_1 es el término independiente.

Sea una ecuación lineal con 2 incógnitas:

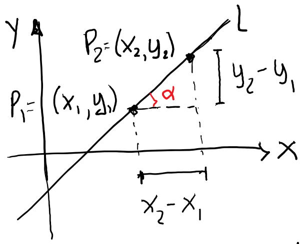
$$Ax + By = C \longrightarrow \text{Ec. general de una recta}$$

Despejando y:

$$y = \underbrace{-\frac{A}{B}}_{m}x + \underbrace{\frac{C}{B}}_{b}$$

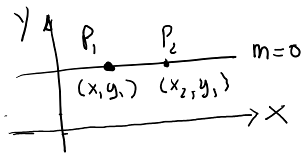
$$\therefore \quad y = mx + b \longrightarrow$$ Recta con pendiente dada y ordenada al origen.

donde: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

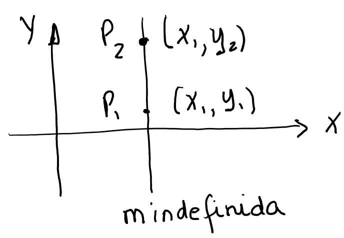


$m = \operatorname{tg}\alpha =$ pendiente de L (tangente del ángulo de inclinación)

$$m = \frac{\text{c.op}}{\text{c.ady}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



Si $y_2 = y_1$: recta con $m = 0$ (paralela al eje X)



Si $x_2 = x_1$: recta con m indefinida (paralela al eje Y)

Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{array}\right\} ② \qquad \begin{array}{l} 2a) \\ 2b) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{array}$$

donde: $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{R}$

x_1, x_2 son las incógnitas

b_1, b_2 son los términos independientes

Cualquier pareja de números (x_1, x_2) que satisfacen el sistema ② se denomina SOLUCIÓN DEL SISTEMA

Para la solución de (2) se utilizan las siguientes propiedades importantes del Algebra Elemental:

Propiedad A: si $a=b$ y $c=d$, entonces $a+c=b+d$ → Prop. Cancelación de la Suma

Propiedad B: Si $a=b$ y $c\in\mathbb{R}$, entonces $ca=cb$ → Prop. Cancelación del Producto

Multiplicando 2a) por a_{22} y 2b por a_{12} se obtiene:

$$\begin{array}{l} a_{11}a_{22}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = b_1 a_{22} \\ a_{12}a_{21}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = b_2 a_{12} \end{array} \quad (3) \quad \begin{array}{l} 3a) \\ 3b) \end{array}$$

Los sistemas (2) y (3) son equivalentes, es decir, cualquier solución de (2) es una solución de (3) (PROP. B).

Si se resta 3b de 3a:

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 + 0x_2 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2$$

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

De manera semejante se obtiene x_2:

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

Definición 32 Determinante de un sistema de 2x2

$\det S = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ → es un número

$\longrightarrow \left\{\begin{array}{l} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{array}\right.$ $\qquad \det S = ad - cb$

Teorema 25 Teorema Resumen

Teorema 25 Teorema Resumen

El sistema: $\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{matrix}$ (5)

a) Tiene solución ÚNICA si y sólo si $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$. $(\det S \neq 0)$

b) No tiene solución o tiene un número infinito de soluciones si y sólo si $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$ $(\det S = 0)$

Ejemplos

1) Considere el sistema

$$\begin{matrix} x - y = 7 & L_1 \\ x + y = 5 & L_2 \end{matrix}$$

$m_{L_1} = 1$

$m_{L_2} = -1$

Graficando los cortes de las rectas con los ejes coordenados:

Recta L_1:

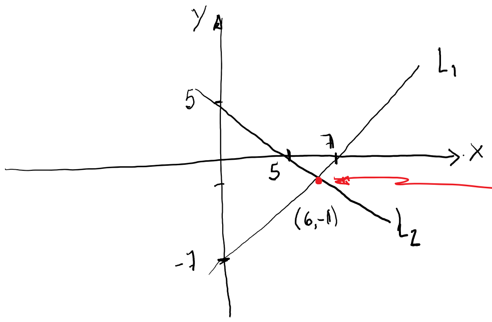
para $x=0,\ y=-7$

$y=0,\ x=7$

Recta L_2:

para $x=0,\ y=5$

$y=0,\ x=5$



Rectas no paralelas

punto de intersección SOLUCIÓN ÚNICA

Sistema Consistente Determinado

Resolviendo el sistema:

$$\begin{array}{rl} x - y = 7 & (1) \\ x + y = 5 & (2) \\ \hline 2x = 12 & \Rightarrow x = 6 \end{array}$$

Con $x = 6$, se sustituye en (1):

$6 - y = 7$

$-y = 1, \quad y = -1$

El par $(6,-1)$ es la solución del sistema o punto de intersección de las 2 rectas.

donde: $\det S = (1)(1) - (-1)(1) = 1+1 = 2 \neq 0 \longrightarrow$ solución ÚNICA

2) Considere el sistema:

$x - y = 7 \quad L_1$

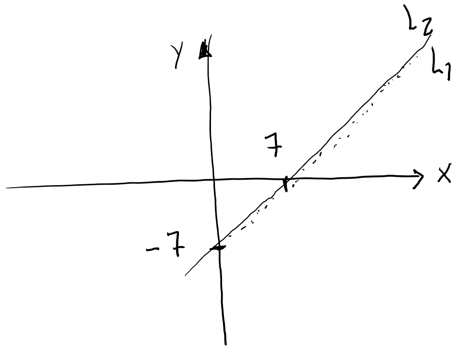
2) Considere el sistema:

$$x - y = 7 \quad L_1$$
$$2x - 2y = 14 \quad L_2$$

$$\left.\begin{matrix} m_{L_1} = 1 \\ m_{L_2} = 1 \end{matrix}\right\} \text{pendientes iguales}$$

Graficando los cortes de intersección de las dos rectas con los ejes:

Recta L_1: $x - y = 7$
si $x = 0$, $y = -7$
si $y = 0$, $x = 7$



Rectas paralelas y Coincidentes

Número infinito de soluciones

Sistema Consistente Indeterminado

Recta L_2: $2x - 2y = 14$
si $x = 0$, $y = -7$
si $y = 0$, $x = 7$

$\det S = (1)(-2) - (-1)(2) = -2 + 2 = 0$

Resolviendo el sistema.

$$\begin{matrix} x - y = 7 \\ 2x - 2y = 14 \end{matrix} \qquad \text{por } (-2) \rightarrow \qquad \begin{array}{r} -2x + 2y = -14 \\ 2x - 2y = 14 \\ \hline 0 = 0 \end{array} \rightarrow \text{Sistema Consistente}$$

Solución del sistema: $(x, x-7),\ x \in \mathbb{R}$
O bien: $(y+7, y),\ y \in \mathbb{R}$
} Sistema Consistente Indeterminado porque hay una infinidad de soluciones.

3) Considere el siguiente sistema:

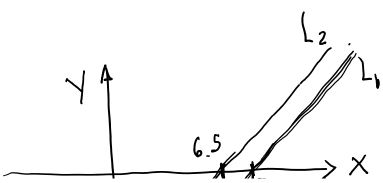
$$x - y = 7 \quad L_1$$
$$2x - 2y = 13 \quad L_2$$

$$\left.\begin{matrix} m_{L_1} = 1 \\ m_{L_2} = 1 \end{matrix}\right\} \text{pendientes iguales}$$

Graficando los puntos de intersección de las dos rectas con los ejes:

Recta L_1: $x - y = 7$
si $x = 0$, $y = -7$
si $y = 0$, $x = 7$

Recta L_2: $2x - 2y = 13$
si $x = 0$, $y = \frac{13}{2}$

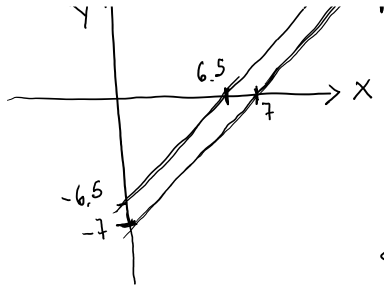


Rectas paralelas

Recta L_2: $2x-2y=13$

si $x=0$, $y=-\frac{13}{2}$

si $y=0$, $x=\frac{13}{2}$



Rectas paralelas

Ningún punto de intersección $\Rightarrow$ NO hay solución

Sistema Inconsistente

Resolviendo el sistema:

$$\begin{aligned} x-y&=7 \quad \text{por } (-2) \longrightarrow & -2x+2y&=-14 \\ 2x-2y&=13 & 2x-2y&=13 \\ \hline & & 0&=-1 \end{aligned}$$

$0=-1$ ¡¡¡¡ inconsistencia $\Rightarrow$ NO HAY solución

$\det S = (1)(-2)-(-1)(2) = -2+2 = 0$ Sistema Inconsistente

Tarea Grossman pp. 6 7^{a} edición

probs. 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15