Clase 30-11-20 Parte 2

domingo, 29 de noviembre de 2020 01:03 p. m.

UNIDAD 6 MATRICES

Definición 42 a) Vector renglón de n componentes

$\bar{v} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow$ conjunto ordenado de n números escritos en forma de renglón

Definición 42 b) Vector columna de n componentes: conjunto ordenado de n números escritos en forma de columna.

$$\bar{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow 1^a \text{ componente} \\ \leftarrow 2^a \text{ componente} \\ \vdots \\ \leftarrow n\text{-ésima componente} \end{matrix}$$

Usaremos las letras $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ para referirnos a los vectores (con una testa arriba)

Ejemplos:

$\bar{v} = (4,5)$ vector renglón de 2 componentes

$\bar{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ vector columna de 3 componentes

$\bar{u} = (4,0,-1,2)$ vector renglón de 4 componentes

$\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ vector columna y vector cero de 5 componentes

Definición 43 Igualdad de vectores

Sean $\bar{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$\bar{Y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$

Decimos que $\bar{X} = \bar{Y} \iff$ tienen el mismo tamaño y sus componentes correspondientes son iguales, es decir:

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 \\ x_2 &= y_2 \\ &\vdots \\ x_i &= y_i \\ &\vdots \\ x_n &= y_n \end{aligned}$$

Definición 44 Suma de dos vectores

Si $\bar{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $\bar{Y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, la suma $\bar{X} + \bar{Y}$ se puede realizar si y sólo si $\bar{X}$ y $\bar{Y}$ tienen el mismo tamaño. Si es así, la suma $X+Y$ se define como:

$\bar{X}+\bar{Y} = (x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n) \longrightarrow$ vector de n componentes también (la suma es cerrada).

Definición 45 Multiplicación de un vector por un escalar

Sea $\bar{X}=(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. El producto $\alpha\bar{X}$ se define como:

$$\begin{aligned}\alpha\bar{X} &= \alpha(X_1,X_2,\ldots,X_n)\\ &= (\alpha X_1, \alpha X_2, \ldots, \alpha X_n)\end{aligned}$$ vector de n componentes también.

Ejemplos

Sean $\bar{u}=(-8,7,3)$, $\bar{v}=(1,-1,2)$, $\bar{w}=(-5,2,-6)$

1) $\bar{u}+\bar{v} = (-8,7,3)+(1,-1,2) = (-7,6,5)$

2) $3\bar{u} = 3(-8,7,3) = (-24,21,9)$

3) $$\begin{aligned}\bar{v}+2\bar{w} &= (1,-1,2)+2(-5,2,-6)\\ &= (1,-1,2)+(-10,4,-12)\\ &= (-9,3,-10)\end{aligned}$$

4) $$\begin{aligned}2\bar{u}-3\bar{v}+4\bar{w} &= 2(-8,7,3)-3(1,-1,2)+4(-5,2,-6)\\ &= (-16,14,6)+(-3,3,-6)+(-20,8,-24)\\ &= (-39,25,-24)\end{aligned}$$

Tarea pp. 58, 59 probs. 1-38 (Grossman).

Definición 46 Matriz

Una matriz A de tamaño $m \times n$ es un arreglo rectangular de mn números dispuestos en m renglones y n columnas.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n} \longleftarrow \text{i-ésimo renglón}$$

$\uparrow$ j-ésima columna

A también se puede escribir como $A=[a_{ij}]_{m\times n}$

Las matrices se denotan con letras mayúsculas: A, B, C, D, etc.

a_{ij} es la componente ij de A; es el número que aparece en el renglón i y la columna j de A.

Ejemplos:

1) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ matriz cuadrada de 2x2

b) $\begin{bmatrix} -2 & -7 \\ 4 & -9 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$ matriz de 3x2

c) $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ matriz de 2x4

d) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 5 & -6 & 7 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ matriz cuadrada de 3x3

e) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ matriz cero de 2x5

Localización de componentes.

Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & -7 & 8 \\ 5 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & -6 \end{bmatrix}$

$a_{13} = 8$ $\quad a_{31} = 4$

$a_{21} = 5$ $\quad a_{13} = 8$

$a_{33} = -6$ $\quad a_{22} = -2$

Definición 47 Igualdad de matrices

Dos matrices $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ son iguales si y sólo si:

1) Tienen el mismo tamaño
2) Sus componentes correspondientes son iguales: $a_{ij} = b_{ij}$

$a_{ij} = b_{ij}$ para $i = 1, \ldots, m$ y $j = 1, \ldots, n$

Ejemplos

1) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 \\ -8 & 3 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 2+1 & 5-1 & 3+4 \\ 2-10 & 1+2 & -4+5 \end{bmatrix}_{2\times 3}$

2) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 2} \neq \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 2}$

3) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 3}$

3) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 3}$

Definición 48 Suma de matrices

Dos matrices $A=[a_{ij}]$ y $B=[b_{ij}]$ se pueden sumar si y sólo si tienen el mismo tamaño. En este caso, $A+B$ se define como:

$$A+B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

De otra manera:

$$A+B = [a_{ij}]_{m\times n} + [b_{ij}]_{m\times n} = [a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}$$

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 & 7 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & -5 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 & -2 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ -2 & 1 & 4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 & 5 \\ 3 & 6 & 6 & 4 \\ -6 & 4 & -1 & 9 \end{bmatrix}$$

Definición 49 Multiplicación de una matriz por un escalar

Sea $A=[a_{ij}]$ una matriz de $m\times n$ y sea α un escalar.

El producto αA se define como:

$$\alpha A = \alpha \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

$$\alpha A = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

En forma compacta: $\alpha A = \alpha[a_{ij}] = [\alpha a_{ij}]_{m\times n}$

Ejemplo

Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 6 \\ -2 & 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

entonces $2A = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 8 & 4 \\ 6 & 2 & 8 & 12 \\ -4 & 6 & 10 & 14 \end{bmatrix}$

Ejemplo

Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -2 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -4 & 7 \\ 0 & 1 \\ 8 & -3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 5 & -9 \\ 3 & 0 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$

Realizar:

28) $A+B$

$$A+B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -2 \\ 0 & -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 7 \\ 0 & 1 \\ 8 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 11 \\ -2 & -1 \\ 8 & -11 \end{bmatrix}$$

30) $A-C$

$$A-C = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -2 \\ 0 & -8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & -9 \\ 3 & 0 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 13 \\ -5 & -2 \\ -6 & -9 \end{bmatrix}$$

34) $6B-7A+0C$

$$6B-7A+0C = 6\begin{bmatrix} -4 & 7 \\ 0 & 1 \\ 8 & -3 \end{bmatrix} - 7\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -2 \\ 0 & -8 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 5 & -9 \\ 3 & 0 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -24 & 42 \\ 0 & 6 \\ 48 & -18 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 & -28 \\ 14 & 14 \\ 0 & 56 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -31 & 14 \\ 14 & 20 \\ 48 & 38 \end{bmatrix}$$