Clase 21-10-20

miércoles, 21 de octubre de 2020 01:18 p. m.

Comprobación de la existencia del Inverso Multiplicativo en C
(Inciso 6.5)

Sea $z = a +$ bi un número complejo en forma binómica o rectangular. Entonces $\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi}$. Se podrá obtener en forma binómica de la siguiente manera (para evitar tener en el denominador la unidad imaginaria i):

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{1}{a+bi} \cdot \frac{a-bi}{a-bi}$$

$$= \frac{a-bi}{a^2-abi+abi-b^2i^2} = \frac{a-bi}{a^2-b^2i^2}$$

Ya que $i = \sqrt{-1}$, entonces $i^2 = -1.$ Al sustituir en la ecuación anterior se tiene:

$\frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$, en donde el denominador es un número real.

$\therefore \frac{1}{z} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$ es el inverso mulñtiplicativo. $\left(\frac{1}{a^2+b^2}\right)(a-bi) =$

Comprobación :

$$z \cdot \frac{1}{z} = (a+bi) \cdot \frac{1}{a+bi} = (a+bi) \cdot \frac{a-bi}{a^2+b^2}$$
$$= \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1 + 0i.$$

Por lo que, tanto el conjunto de los números reales como el conjunto de los números imaginarios, son subconjuntos de C.

Definición 14. Sea $z = a + bi$ un número complejo. El conjugado de z, que representaremos con $\bar{z}$, se define como:

$$\bar{z} = a - bi$$

Teorema 7 Propiedades del conjugado. Para todo z_1, $z_2 \in$ C:

1) $\overline{\overline{z_1}} = z_1$ $\qquad \overline{\overline{a+bi}} = a + bi$

2) Si $z_1 = \overline{z_1} \quad \leftrightarrow \quad z_1 \varepsilon R$ $\qquad a + bi = a - bi, \quad \rightarrow \quad b = 0$

3) $z_1 + \overline{z_1} \;\; \varepsilon \;\; R$ $\qquad a + bi + a - bi = 2a \;\; \varepsilon \;\; R$

4) $z_1 \cdot \overline{z_1} \;\; \varepsilon \;\; R$ $\qquad (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 \;\; \varepsilon \;\; R$

5) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

$$\begin{aligned}\overline{(a+bi)+(c+di)} &= \overline{(a+c)+(b+d)i} \\ &= (a+c)-(b+d)i \\ &= a - bi + c - di \\ &= \overline{z_1} + \overline{z_2}\end{aligned}$$

6) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

Definición 15.

Sean $z_1 = a + bi,\ z_2 = c + di$ dos números complejos.

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$$

Definición 16

Si $z_2 \neq 0+0i$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}}$$

Ejercicios en clase Sean $z_1 = -5 - 2i,\ \ z_2 = -1 + i$

1) $z_1 + z_2 = -6 - i$
2) $z_1 - z_2 = -4 - 3i$
3) $z_1 \cdot z_2 = 7 - 3i$
4) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{3}{2} + \frac{7}{2}i$
5) $\frac{z_2}{z_1} = \frac{3}{29} - \frac{7}{29}i$

Ejemplos Sean $z_1 = -i,\ \ z_2 = 3,\ \ z_3 = \sqrt{2} - i,\ \ z_4 = -2 + 3i$. Obtener:

1) $\frac{z_2}{z_1} - z_3 = \frac{3}{-i} - \left(\sqrt{2} - i\right) = \frac{3}{-i} \cdot \frac{i}{i} - \sqrt{2} + i = 3i - \sqrt{2} + i = -\sqrt{2} + 4i$

2) $\frac{\overline{z_1} \cdot z_2}{z_1 \overline{z_3}} = \frac{(i)(3)}{(-i)(\sqrt{2}+i)} = \frac{3i}{-\sqrt{2}i - i^2} = \frac{3i}{-\sqrt{2}i + 1} = \frac{3i}{1-\sqrt{2}i} \cdot \frac{1+\sqrt{2}i}{1+\sqrt{2}i}$

$$= \frac{3i - 3\sqrt{2}}{1+2} = \frac{3i - 3\sqrt{2}}{3} = -\sqrt{2} + i$$

3) $\frac{z_3 - z_4}{z_3} + \bar{z}_3 z_4 \ = \frac{\sqrt{2} - i + 2 - 3i}{\sqrt{2} - i} + \left(\sqrt{2} + i\right)(-2 + 3i)$

$$= \frac{2+\sqrt{2}-4i}{\sqrt{2}-i} + (-2\sqrt{2} - 2i + 3\sqrt{2}\, i - 3)$$

$$= \frac{2+\sqrt{2}-4i}{\sqrt{2}-i} - 3 - 2\sqrt{2} + \left(3\sqrt{2} - 2\right) i$$

$$= \frac{2+\sqrt{2}-4i}{\sqrt{2}-i} \cdot \frac{\sqrt{2}+i}{\sqrt{2}+i} - 3 - 2\sqrt{2} + \left(3\sqrt{2} - 2\right) i$$

$$= \frac{2\sqrt{2}+2i+2+\sqrt{2}i-4\sqrt{2}i+4}{2+1} - 3 - 2\sqrt{2} + \left(3\sqrt{2}-2\right)i$$

$$= \frac{2\sqrt{2}+6+\left(2-3\sqrt{2}\right)i}{3} - 3 - 2\sqrt{2} + \left(3\sqrt{2}-2\right)i$$

$$= \frac{2\sqrt{2}+6+\left(2-3\sqrt{2}\right)i-9-6\sqrt{2}+9\sqrt{2}i-6i}{3}$$

$$= \frac{-4\sqrt{2}-3-4i+6\sqrt{2}i}{3}$$

$$= \frac{-\left(3+4\sqrt{2}\right)-\left(4-6\sqrt{2}\right)i}{3}$$

Ejemplos. Expresa el resultado de las siguientes operaciones en la forma $a + bi$.

a) $\dfrac{i^2+i^4+i^6}{i^3+i^5+i^7} = \dfrac{-1+1-1}{-i+i-i} = \dfrac{-1}{-i} = \dfrac{1}{i}\cdot\dfrac{-i}{-i} = \dfrac{-i}{1} = -i = 0 - i$

$b)$ $\dfrac{\overline{(2-i)}+(2+i)(1+i)}{(2-4i)(2+i)} = \dfrac{2+i+(2+i)(1+i)}{4+2i-8i+4} = \dfrac{(2+i)(1+(1+i))}{8-6i}$

$$= \frac{(2+i)(2+i)}{8-6i}\cdot\frac{8+6i}{8+6i} = \frac{(4+2i+2i-1)(8+6i)}{64+36}$$

$$= \frac{(3+4i)(8+6i)}{100} = \frac{24+18i+32i-24}{100} = \frac{50i}{100} = 0 + \frac{1}{2}i$$

<u>Ejercicios</u> Si $z_1 = 1-i,\ z_2 = -1+i,\ z_3 = -i,\ z_4 = 1,\ z_5 = 2-i,$ realizar:

a) $\dfrac{{z_3}^2 - z_4}{z_1 z_2 - z_5} = \dfrac{-1-1}{(1-i)(-1+i)-2+i} = \dfrac{-2}{-1+2i+1-2+i}$

$$= \frac{-2}{-2+3i}\left(\frac{-2-3i}{-2-3i}\right) = \frac{4+6i}{4+9} = \frac{4}{13} + \frac{6}{13}$$

<u>Tarea</u> Con los datos anteriores, realizar las siguientes operaciones:

b) $\dfrac{z_3 z_4 - z_2}{(z_1 z_5 - z_3)^2}$

a) $\dfrac{z_1}{z_2} - \left(z_3 - z_4 + z_5\right)$