Describa el espacio generado por los vectores $\{(2,-1,-1),(-4,2,2),(6,-3,-3)\}$. Escriba la combinación lineal, el sistema de ecuaciones, la representación matricial, la solución por Gauss-Jordan y finalmente la conclusión.

Solución:

$$(x,y,z)=a_1(2,-1,-1)+a_2(-4,2,2)+a_3(6,-3,-3)$$
$$=(2a_1-4a_2+6a_3,-a_1+2a_2-3a_3,-a_1+2a_2-3a_3)$$

Igualando:

$$x=2a_1-4a_2+6a_3$$
$$y=-a_1+2a_2-3a_3$$
$$z=-a_1+2a_2-3a_3$$

Matricialmente:

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 \\ -1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Resolviendo por Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 6 & x \\ -1 & 2 & -3 & y \\ -1 & 2 & -3 & z \end{array}\right] \xrightarrow[-R_2 \leftrightarrow R_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -y \\ 2 & -4 & 6 & x \\ -1 & 2 & -3 & z \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{R_2 \to R_2-2R_1 \\ R_3 \to R_3+R_1}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -y \\ 0 & 0 & 0 & x+2y \\ 0 & 0 & 0 & z-y \end{array}\right] \rightarrow$$

Para que el sistema tenga solución:

$$x+2y=0 \Rightarrow x=-2y$$
$$z-y=0 \Rightarrow y=z$$
$$z\in\mathbb{R}$$

Es decir:

$$\left.\begin{array}{l} x=-2z \\ y=z \\ z\in\mathbb{R} \end{array}\right\} \text{Ecuaciones paramétricas de una recta que pasa por el origen en } \mathbb{R}^3$$

Por lo tanto, el espacio generado por $(2,-1,-1),(-4,2,2),(6,-3,-3)$ es una recta que pasa por el origen en $\mathbb{R}^3$.