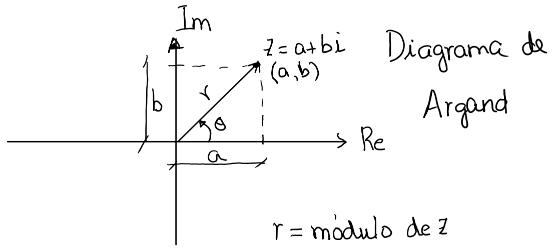
Clase 23-10-20

viernes, 23 de octubre de 2020 01:25 p. m.

FORMA POLAR O TRIGONOMÉTRICA DE Z

A cada pareja de números reales *(a,b*) le corresponde uno y solo un número complejo $a + bi$ y viceversa, por lo que es posible representar a dicho número complejo, en el plano cartesiano, como un punto de coordenadas (a, b), en donde la parte real *a* queda representada en el eje X , y la parte imaginaria *b* en el eje Y.



r = módulo de z
θ = argumento de z

El punto de coordenadas (a, b) también queda determinado por los parámetros (r, θ), conocidos como coordenadas polares del punto.
Del diagrama se puede observar que:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \text{y} \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right),$$

Que es la transformación de coordenadas cartesianas a coordenadas polares.

Las coordenadas cartesianas (a, b) se obtienen a partir de las coordenadas polares (r, θ), mediante las siguientes fórmulas de transformación y utilizando el mismo diagrama:

$$\cos\theta = \frac{a}{r} \quad \rightarrow \quad a = r\cos\theta$$

$$\sin\theta = \frac{b}{r} \quad \rightarrow \quad b = r\sin\theta$$

En consecuencia, el número complejo $z = a + bi$ puede expresarse también como:

$$z = r\cos\theta + r\sin\theta i$$

$$z = r\,(\cos\theta + i\sin\theta)$$ Forma Polar o Trigonométrica.

Se puede emplear una abreviatura para simplificar esta última expresión, ya que en ambas funciones trigonométricas se trata del mismo ángulo. Usaremos entonces la expresión $cis\theta$ para representar al factor $\cos\theta + i\sin\theta$, con lo que podemos escribir :

$$z = rcis\theta$$

Definición 17.

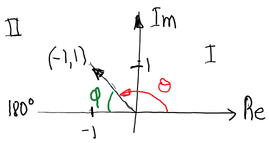
$$rcis\theta = r\cos\theta + r\sin\theta i$$

$a+bi \Leftrightarrow (a,b)$

Ejemplo

Si $z = -1 + i$, expresar z en su forma polar. $z = (-1,1)$

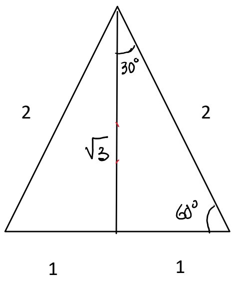
Solución: $\rightarrow (r, \theta)$

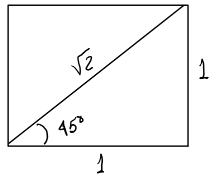


$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

El número complejo se localiza en el II cuadrante, por lo que: $\theta = 180° - \varphi$, y $\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = 45°$, por lo que $\theta = 135°$, y por lo tanto: $z = \sqrt{2}\ \text{cis}\,135°$.

ALGUNAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ALGUNOS ÁNGULOS TÍPICOS





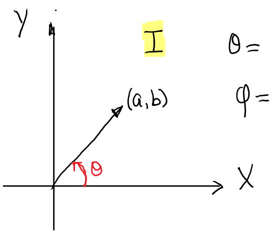
$\operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2}$; $\operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\operatorname{sen} 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos 60° = \frac{1}{2}$ $\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$

→ $\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $\tan 60° = \sqrt{3}$ $\tan 45° = 1$

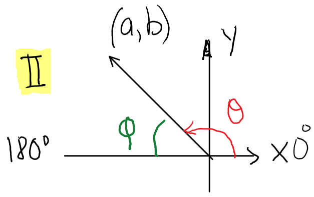
$$\tan\theta = \frac{b}{a}$$

VALOR DE θ EN LOS 4 CUADRANTES



$\theta = \varphi$

$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$

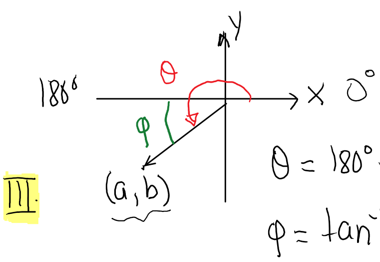


$\theta = 180° - \varphi$

$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$

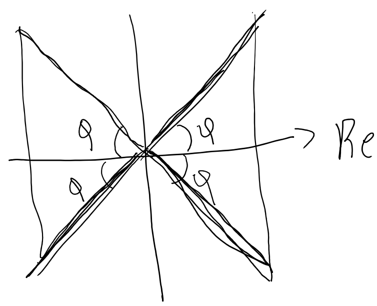
El ángulo θ se mide desde la parte positiva del eje X hasta tocar el módulo del número complejo en el sentido contrario a las manecillas del reloj.

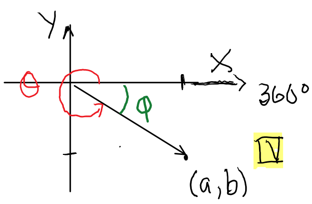
$0° \leq \theta \leq 360°$



$\theta = 180° + \varphi$

$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$



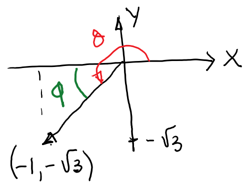


$\theta = 360° - \varphi$

$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$

Ejemplo Expresa en forma polar $z = -1 - \sqrt{3}\,i$

Solución z se encuentra en el III Cuadrante, ya que tiene por coordenadas $(-1, -\sqrt{3})$.

III 

$\theta = 180° + \varphi$

$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = 60°$

$\therefore\ \theta = 240°$

$\operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 60° = \frac{1}{2}$

$\tan 60° = \sqrt{3}$

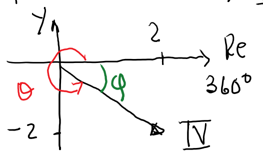
$r = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$

$\therefore\ z = 2 \operatorname{cis} 240°$

Ejemplos Expresar en forma polar los siguientes números complejos: a) $z_1 = 2 - 2i$, b) $z_2 = -3$, c) $z_3 = 5i$, d) $z_4 = -2i$, e) $z_5 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Solución

a) $z_1 = 2 - 2i \longrightarrow$ IV Cuadrante, coordenadas $(2, -2)$



$\theta = 360° - \varphi$

$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{2}{2}\right) = \tan^{-1}(1) = 45$

$\therefore\ \theta = 365° - 45° = 315°$

$\operatorname{sen} 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$

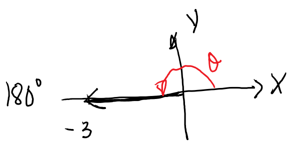
$\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\tan 45° = 1$

$= \sqrt{(2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\therefore\ z_1 = 2\sqrt{2} \operatorname{cis} 315°$

b) $z_2 = -3 \longrightarrow$ está sobre el semieje negativo X



$\theta = 180°$

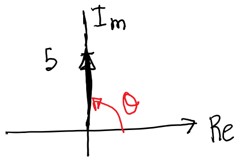
Ya que $z_2 = -3 + 0i$: $r = \sqrt{(-3)^2 + (0)^2} = \sqrt{9} = 3$

$\therefore z = 3 \operatorname{cis} 180°$

c) $z_3 = 5i \longrightarrow z_3 = 0 + 5i$

Coordenadas de z_3: $(0, 5)$

Por lo tanto, z_3 está sobre el semieje positivo Y:

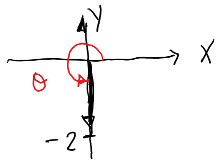


$\theta = 90°$

$r = \sqrt{0^2 + (5)^2} = 5$

$\therefore z_3 = 5 \text{ cis } 90°$

d) $z_4 = -2i$; Coordenadas de z_4: $(0,-2)$; por tanto z_4 está sobre el semieje negativo Y.



$\theta = 270°$

$r = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = \sqrt{4} = 2$

$\therefore z_4 = 2 \text{ cis } 270$ El módulo de un número complejo siempre es positivo.

e) $z_5 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$

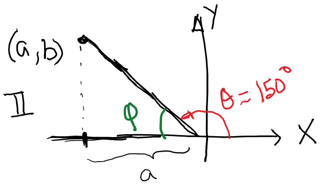
$r = 1$ $z = \text{cis } 240°$

$\theta = 240°$

Ejercicios.- Obtener la forma binómica de los siguientes números complejos: a) $z_1 = \text{cis } 150°$, b) $z_2 = 4 \text{ cis } 210°$, c) $z_3 = 2\sqrt{2} \text{ cis } 315°$, d) $z_4 = \sqrt{2} \text{ cis } 135°$, e) $z_5 = 2 \text{ cis } 480°$.

Solución

a) $z_1 = \text{cis } 150°$



El número complejo z_1 está en el II Cuadrante. Sus coordenadas serán:

$a = r\cos\varphi$
$b = r \text{ sen } \varphi$; $\varphi = 180° - 150° = 30°$

$\therefore a = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$b = \text{sen } 30° = \frac{1}{2}$

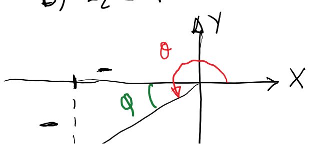
$\therefore z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i$

$\text{sen } 30° = \frac{1}{2}$; $\text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos 60° = \frac{1}{2}$

$\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $\tan 60° = \sqrt{3}$

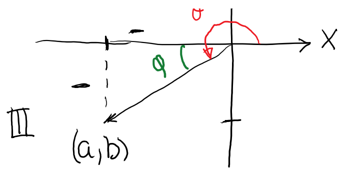
b) $z_2 = 4 \text{ cis } 210°$



z_2 está en el III Cuadrante,

$\varphi = \theta - 180° = 210° - 180° = 30°$

$a = \ldots \cos 30° \quad 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2\sqrt{3}$



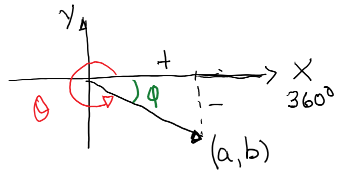
$\varphi = \theta - 180^\circ = 210^\circ - 180^\circ = 30^\circ$

$a = r\cos 30^\circ = -4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2\sqrt{3}$

$b = r \operatorname{sen} 30^\circ = -4\left(\frac{1}{2}\right) = -2$

$\therefore Z_2 = -2\sqrt{3} - 2i$

c) $Z_3 = 2\sqrt{2} \operatorname{cis} 315^\circ \longrightarrow$ IV Cuadrante



$\theta = 315^\circ$

$\varphi = 360^\circ - 315^\circ = 45^\circ$

$a = r\cos 45^\circ = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2$

$b = r \operatorname{sen} 45^\circ = -2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -2$

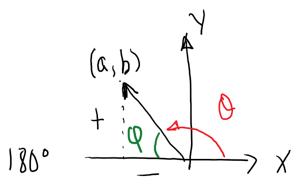
$\operatorname{sen} 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\tan 45^\circ = 1$

$\therefore Z_3 = 2 - 2i$

d) $Z_4 = \sqrt{2} \operatorname{cis} 135^\circ \longrightarrow$ está en el II Cuadrante



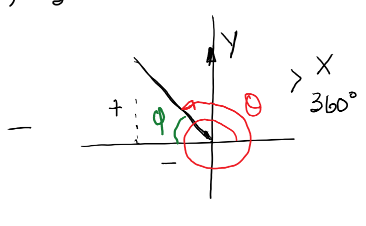
$\varphi = 180^\circ - \theta = 45^\circ$

$a = r\cos 45^\circ = -\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -1$

$b = r \operatorname{sen} 45^\circ = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1$

$\therefore Z = -1 + i$

e) $Z_5 = 2 \operatorname{cis} 480^\circ \longrightarrow$ II Cuadrante



$\theta = 480 - 360^\circ = 120^\circ$

$\varphi = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

$a = 2\cos 60^\circ = -1$

$b = 2 \operatorname{sen} 60^\circ = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}$

$\therefore Z_5 = -1 + \sqrt{3}\, i$

Teorema 8 Igualdad de Números Complejos en Forma Polar

Sean $Z_1 = r_1 \operatorname{cis}\theta_1$ y $Z_2 = r_2 \operatorname{cis}\theta_2$.

$Z_1 = Z_2 \iff r_1 = r_2$ y $\theta_1 = \theta_2 + k(360^\circ)$; $k = 0, 1, 2, \ldots$

$\boxed{0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ}$

Teorema 9 Multiplicación y División

Sean $z_1 = r_1 \text{ cis } \theta_1$ y $z_2 = r_2 \text{ cis } \theta_2$. Entonces:

a) $z_1 z_2 = r_1 r_2 \text{ cis } (\theta_1 + \theta_2)$

b) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2} \text{ cis } (\theta_1 - \theta_2)$

Ejemplo Sean $z_1 = 6 \text{ cis } 120°$ y $z_2 = 2 \text{ cis } 40°$

a) $z_1 z_2 = (6)(2) \text{ cis } (120° + 40°) = 12 \text{ cis } 160°$

b) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{6}{2} \text{ cis } (120° - 40°) = 3 \text{ cis } 80°$

c) $\dfrac{z_2}{z_1} = \dfrac{2}{6} \text{ cis } (40° - 120°) = \dfrac{1}{3} \text{ cis} (-80°)$ *

* Nota Cuando el argumento es negativo debe interpretarse como ángulos medidos en sentido de las manecillas del reloj. Entonces sumamos 360° al ángulo negativo y:

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{1}{3} \text{ cis } (360° - 80°) = \frac{1}{3} \text{ cis } 280°$$