Clase 09-10-20

viernes, 9 de octubre de 2020 01:27 p. m.

Tarea Demostrar por i.m. la validez de la sig. proposición:

$$2^n > 2n \quad \forall n \geq 3, n \in \mathbb{N}.$$

Ejemplo Demostrar que $2n \leq 2^n, \forall n \in \mathbb{N}$

Paso 1 $n=1$

$2(1) \leq 2^1$

$2 \leq 2$ ✓ se cumple

Paso 2 $n=k$ (Hipótesis):

$2k \leq 2^k$ ①

Paso 3 $n=k+1$ (Tesis)

$2(k+1) \leq 2^{k+1}$ ②

Paso 4 ¿qué le falta al m. izq (o derecho)?

a) miembro izq:

$2k+2 \leq 2^k+2$ (1A)

Por transitividad:

Si $2(k+1) \leq 2^k+2$ (1A)

y $2^k+2 \leq 2^{k+1} \rightarrow$ P.D.

$\therefore 2(k+1) \leq 2^{k+1}$ ②

Demostrando:

$2^k+2 \leq 2^{k+1}$

$2^k+2 \leq 2^k \cdot 2$

$2^k+2 \leq 2^k+2^k$

$2 \leq 2^k, \ \forall k \in \mathbb{N}$

b) m. derecho:

$2(2k) \leq 2 2^k$ (1A)

Por transitividad:

$2(k+1) \leq 2(2k) \leftarrow$ P.D

$2(2k) \leq 2^{k+1}$ (1A)

$\therefore 2(k+1) \leq 2^{k+1}$ ②

Demostrando:

$2(k+1) \leq 2(2k)$

$2k+2 \leq 2k+2k$

$2 \leq 2k$

$1 \leq k$

$\therefore$ La proposición $2n \leq 2^n$ es válida $\forall n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo

Demostrar por i.m. que $\frac{m^3}{3} < 1^2+2^2+3^2+\ldots+m^2 \quad \forall m \in \mathbb{N}$

Paso 1 para $m=1$:

$\frac{1}{3} < 1^2$ ✓

Paso 2 para $m=k$: (Hipótesis)

$\frac{k^3}{3} < 1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2$ ①

Paso 3 para $m=k+1$ (Tesis)

$$\frac{(k+1)^3}{3} < 1^2+2^2+3^2+\dots+k^2+(k+1)^2 \quad (2)$$

Paso 4 Sumando $(k+1)^2$ en ambos miembros de (1):

$$\frac{k^3}{3}+(k+1)^2 < 1^2+2^2+3^2+\dots+k^2+(k+1)^2 \quad (1A)$$

si $a<b$
y $b<c$
$\therefore\ a<c$ tesis

Por transitividad:

si $\dfrac{(k+1)^3}{3} < \dfrac{k^3}{3}+(k+1)^2 \longrightarrow$ P.D.

y $\dfrac{k^3}{3}+(k+1)^2 < 1^2+2^2+3^2+\dots+k^2+(k+1)^2 \quad (1A)$

$\therefore\ \dfrac{(k+1)^3}{3} < 1^2+2^2+3^2+\dots+k^2+(k+1)^2 \quad (2)$

Demostrando:

$$\frac{(k+1)^3}{3} < \frac{k^3+3(k+1)^2}{3}$$

$$\frac{k^3+3k^2+3k+1}{3} < \frac{k^3+3k^2+6k+3}{3}$$

$$3k+1 < 6k+3$$

$$3k < 6k+2 \ \checkmark$$

$$-2 < 3k \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$\therefore$ La proposición $\dfrac{m^3}{3} < 1^2+2^2+3^2+\dots+m^2$ es válida $\forall m \in \mathbb{N}$

Tarea: demostrar para miembro izquierdo.

Tarea Demostrar por i.m. la validez de la proposición $n+7<n^2;\ n\geq 4,\ n\in\mathbb{N}$

Tarea.- Demostrar por i.m. la validez de la proposición
$1+2n<3^n \ \forall n\geq 2,\ n\in\mathbb{N}$.