Clase 27-11-20

jueves, 24 de octubre de 2019 01:01 p. m.

Tarea Grossman pp. 26 probs. 3,5,7,9 por eliminación gaussiana.

Ejemplo

Considere el sistema: (pp. 28)

$$\begin{aligned} 5x_1 + 10x_2 - 20x_3 &= a \\ -6x_1 - 11x_2 - 21x_3 &= b \\ 2x_1 + 4x_2 - 8x_3 &= c \end{aligned}$$

Encuentre las condiciones sobre a, b y c para que el sistema sea inconsistente.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 10 & -20 & a \\ -6 & -11 & -21 & b \\ 2 & 4 & -8 & c \end{array}\right] \xrightarrow[R_1 \to \frac{R_1}{5}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & a/5 \\ -6 & -11 & -21 & b \\ 2 & 4 & -8 & c \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{R_2 \to R_2 + 6R_1 \\ R_3 \to R_3 - 2R_1}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & a/5 \\ 0 & 1 & -45 & b + 6a/5 \\ 0 & 0 & 0 & c - 2a/5 \end{array}\right]$$

Para que el sistema sea inconsistente:

$$0 \neq c - \frac{2a}{5}$$

luego: $c \neq \frac{2}{5}a$

$a, b \in \mathbb{R}$

Tarea: prob 56 pp. 29 Grossman

Los sistemas vistos hasta este momento se llaman **Sistemas de Ecuaciones Lineales no Homogéneos**, ya que **todas** las ecuaciones **no** están igualadas con cero.

<u>Definición 40 Sistemas de Ecuaciones Lineales Homogéneos (SLH)</u>
Un sistema general de m ecuaciones lineales con n incógnitas se llama **homogéneo** si todas las constantes $b_1, b_2, \dots, b_m$ son cero, como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

A diferencia de los Sistemas Lineales no homogéneos, donde pueden ocurrir 3 posibilidades de solución:

1) solución única
2) infinidad de soluciones
3) no solución

en los Sistemas Lineales Homogéneos sólo pueden ocurrir 2 posibilidades:

1) Solución única o solución trivial o solución cero
2) una infinidad de soluciones.

Ejemplo Resolver el siguiente sistema lineal homogéneo de ecuaciones y clasificarlo.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Solución

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \to \frac{R_1}{2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - 4R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & -5 & -11 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \to \frac{R_2}{-3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -11 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 + 5R_2]{R_1 \to R_1 - 2R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \to \frac{R_3}{-1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_1 \to R_1 + R_3]{R_2 \to R_2 - 2R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Sistema Consistente determinado con solución única o solución trivial o solución cero.

$(0,0,0)$

Ejemplo Resolver el siguiente sistema y clasificarlo. (Grossman pp. 39)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -x_1 - 11x_2 + 6x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 2 & 0 \\ -1 & -11 & 6 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_1]{R_2 \to R_2 - 3R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -9 & 5 & 0 \\ 0 & -9 & 5 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \to \frac{R_2}{-9}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -5/9 & 0 \\ 0 & -9 & 5 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to R_3 + 9R_2]{R_1 \to R_1 - 2R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/9 & 0 \\ 0 & 1 & -5/9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Sistema Consistente Indeterminado

$0 = 0$

donde: $\left.\begin{aligned} x_1 &= -\tfrac{1}{9}x_3 \\ x_2 &= \tfrac{5}{9}x_3 \\ x_3 &\in \mathbb{R} \end{aligned}\right\}$ Infinidad de soluciones $\left(-\tfrac{1}{9}x_3, \tfrac{5}{9}x_3, x_3\right)$

Tarea Grossman pp. 41-42, probs 9-21 impares

Nota Las soluciones para un SLH diferentes de la trivial se llaman soluciones no triviales.

Ejercicios en clase Grossman pág 41

1) $x_1 - 5x_2 = 0$
$-x_1 + 5x_2 = 0$

Solución:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -5 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \to R_2 + R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} x_1 = 5x_2 \\ x_2 \in \mathbb{R} \end{array}$$

$\Rightarrow$ Sistema Consistente Indeterminado
infinidad de soluciones

3) $3x_1 - 5x_2 = 0$
$5x_1 + 4x_2 = 0$
$2x_1 + 5x_2 = 0$

Solución:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & -5 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow \frac{1}{2}R_3} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 5/2 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 3 & -5 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - 5R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 5/2 & 0 \\ 0 & -17/2 & 0 \\ 0 & -25/2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \to -\frac{2}{17}R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 5/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -25/2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to R_3 + \frac{25}{2}R_2]{R_1 \to R_1 - \frac{5}{2}R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$\left.\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{array}\right\}$ sol única, sol trivial

solución $(0,0)$

5) $x_1 + x_2 - x_3 = 0$
$2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0$
$3x_1 + 7x_2 - x_3 = 0$

Solución:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 3 & 0 \\ 3 & 7 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow \frac{1}{4}R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & -6 & 5 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to R_3 + 6R_2]{R_1 \to R_1 - R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \to \frac{R_3}{8}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_2 \to R_2 - \frac{1}{2}R_3]{R_1 \to R_1 - \frac{3}{2}R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$x_1 = 0$ sol. única
$x_2 = 0$ sol. trivial
$x_3 = 0$

sol. $(0,0,0)$

7) $3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0$
$5x_1 + 4x_3 = 0$
$2x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 0$

Solución

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow \frac{R_3}{2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5/2 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & -5 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - 5R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5/2 & -1 & 0 \\ 0 & -25/2 & 9 & 0 \\ 0 & -25/2 & 7 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \to -\frac{2}{25}R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5/2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -18/25 & 0 \\ 0 & -25/2 & 7 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to R_3 + \frac{25}{2}R_2]{R_1 \to R_1 - \frac{5}{2}R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 14/5 & 0 \\ 0 & 1 & -18/25 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \to \frac{R_3}{-2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 14/5 & 0 \\ 0 & 1 & -18/25 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_2 \to R_2 + \frac{18}{25}R_3]{R_1 \to R_1 - \frac{14}{5}R_3}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{array}$$

sol. trivial
sol. única

9) $x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0$
$3x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & -3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 3R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 15 & -9 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \to \frac{R_2}{15}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -9/15 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \to R_1 + 3R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 1 & -3/5 & 0 \end{array}\right]$$

$x_1 = -\frac{1}{5}x_3$

$x_2 = \frac{3}{5}x_3$

$x_3 \in \mathbb{R}$

ó $\left(-\frac{1}{5}x_3, \frac{3}{5}x_3, x_3\right)$

Infinidad de soluciones

Sistema Consistente Indeterminado

Teorema 26

Un sistema lineal homogéneo tiene un número infinito de soluciones si $n > m$; n = incógnitas, m = ecuaciones

Prob 8, pp. 41 Encontrar todas las soluciones del sig. SLH:

$2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0$
$6x_1 - 5x_2 + 7x_3 = 0$

$n = 3$ $\quad n > m \implies$ el sistema tiene un número infinito de soluciones
$m = 2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 6 & -5 & 7 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \to \frac{R_1}{2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & -1/2 & 0 \\ 6 & -5 & 7 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 6R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & -14 & 10 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \to \frac{R_2}{-14}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -5/7 & 0 \end{array}\right]$$

$R_1 \to R_1 - \frac{3}{2}R_2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4/7 & 0 \\ 0 & 1 & -5/7 & 0 \end{array}\right]$$

$x_1 = -\frac{4}{7}x_3$

$x_2 = \frac{5}{7}x_3$

$x_3 \in \mathbb{R}$

Sistema con un número infinito de Soluciones
✓ Consistente Indeterminado

Ejercicio: Encuentre todas las soluciones del sig. sistema:

$x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = 0$
$2x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0$

$n = 4$ $\quad n > m \to$ infinidad de soluciones
$m = 2$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -5 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 8 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \to -R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \to R_1 - 3R_2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 19 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

$x_1 = -19x_3 - 7x_4$
$x_2 = 8x_3 + 2x_4$
$x_3 \in \mathbb{R}$
$x_4 \in \mathbb{R}$

22) Considere el sistema:

$2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0$
$-x_1 + 7x_2 - x_3 = 0$
$4x_1 - 11x_2 + kx_3 = 0$

¿Para qué valor de k tendrá soluciones no triviales?

Solución

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 5 & 0 \\ -1 & 7 & -1 & 0 \\ 4 & -11 & K & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 5 & 0 \\ 4 & -11 & K & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & 3 & 0 \\ 0 & 17 & K-4 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3/11 & 0 \\ 0 & 17 & K-4 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3/11 & 0 \\ 0 & 0 & K-95/11 & 0 \end{array}\right]$$

$R_1 \leftrightarrow -R_2$

$R_2 \to R_2 - 2R_1$
$R_3 \to R_3 - 4R_1$

$R_2 \to \frac{R_2}{11}$

$R_3 \to R_3 - 17R_2$

Para que el sistema tenga soluciones no triviales $K - \frac{95}{11} = 0$

$\therefore K = \frac{95}{11}$

Tarea: probs 24 y 25 pag. 42 Grossman