# Clase 17-03-21

martes, 16 de marzo de 2021 11:13 a. m.

Teorema 4

Sean $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n, \bar{v}_{n+1}$. Si $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$ generan $V$, entonces $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n, \bar{v}_{n+1}$ también generan $V$.

Ejemplo prob. 5

En $\mathbb{R}^2$: $\{(-12,5), (-3,0), (4,-8)\}$

$$(x,y) = a_1(-12,5) + a_2(-3,0) + a_3(4,-8)$$
$$= (-12a_1 - 3a_2 + 4a_3, 5a_1 - 8a_3)$$

$$\left.\begin{array}{l} x = -12a_1 - 3a_2 + 4a_3 \\ y = 5a_1 - 8a_3 \end{array}\right\} \text{SL no Homogéneo}$$

Matricialmente:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -12 & -3 & 4 \\ 5 & 0 & -8 \end{bmatrix}}_{2\times3} \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}}_{3\times1} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{2\times1}$$

Resolviendo por Gauss:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -12 & -3 & 4 & x \\ 5 & 0 & -8 & y \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & -8 & y \\ -12 & -3 & 4 & x \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -8/5 & y/5 \\ -12 & -3 & 4 & x \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -8/5 & y/5 \\ 0 & -3 & -76/5 & x + \frac{12}{5}y \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -8/5 & y/5 \\ 0 & 1 & 76/15 & -\frac{x}{3} - \frac{4}{5}y \end{array}\right] \quad 2 \text{ pivotes en } \mathbb{R}^2$$

$$a_1 = \frac{y}{5} + \frac{8}{5}a_3$$
$$a_2 = -\frac{x}{3} - \frac{4}{5}y - \frac{76}{15}a_3$$
$$a_3 \in \mathbb{R}$$

$\therefore$ Los vectores $\underbrace{(-12,5), (-3,0)}_{\text{ya generaban } \mathbb{R}^2}, (4,-8)$ generan $\mathbb{R}^2$

3) En $\mathbb{R}^2$: $(1,1), (2,1), (2,2)$

$$(x,y) = a_1(1,1) + a_2(2,1) + a_3(2,2)$$
$$= (a_1 + 2a_2 + 2a_3, a_1 + a_2 + 2a_3)$$

$$x = a_1 + 2a_2 + 2a_3$$
$$y = a_1 + a_2 + 2a_3$$

Matricialmente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Por Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & x \\ 1 & 1 & 2 & y \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & x \\ 0 & -1 & 0 & y-x \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & x \\ 0 & 1 & 0 & x-y \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -2x+y \\ 0 & 1 & 0 & x-y \end{array}\right] \quad 2 \text{ pivotes en } \mathbb{R}^2$$

$\therefore$ los vectores $(1,1), (2,1)$ y $(2,2)$ sí generan $\mathbb{R}^2$

7) En $\mathbb{R}^2$: $(1,1), (2,2), (5,5)$

$$(x,y) = a_1(1,1) + a_2(2,2) + a_3(5,5)$$
$$= (a_1 + 2a_2 + 5a_3, a_1 + 2a_2 + 5a_3)$$

$$x = a_1 + 2a_2 + 5a_3$$
$$y = a_1 + 2a_2 + 5a_3$$
} SL no Homogéneo

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & x \\ 1 & 2 & 5 & y \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & x \\ 0 & 0 & 0 & -x+y \end{array}\right]$$ renglón de ceros

Los vectores $(1,1), (2,2), (5,5)$ no generan $\mathbb{R}^2$

Ejemplo de Espacio Generado

Sea $\bar{v}_1 = (2,-1,4)$ y $\bar{v}_2 = (4,1,6)$. Describa el espacio generado por $\bar{v}_1$ y $\bar{v}_2$.

Solución:

De la definición 7:

$$\text{gen}\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k\} = \{\bar{v} : \bar{v} = a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \ldots + a_k\bar{v}_k\}$$

Entonces:

$$\text{gen}\{(2,-1,4),(4,1,6)\} = \{(x,y,z) : (x,y,z) = a_1(2,-1,4) + a_2(4,1,6)\}$$

Resolviendo:

$$(x,y,z) = a_1(2,-1,4) + a_2(4,1\ 6)$$
$$= (2a_1 + 4a_2, -a_1 + a_2, 4a_1 + 6a_2)$$

$$x = 2a_1 + 4a_2$$
$$y = -a_1 + a_2$$
$$z = 4a_1 + 6a_2$$
} Sistema Lineal no Homogéneo

Matricialmente:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & x \\ -1 & 1 & y \\ 4 & 6 & z \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -y \\ 2 & 4 & x \\ 4 & 6 & z \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -y \\ 0 & 6 & x+2y \\ 0 & 10 & z+4y \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -y \\ 0 & 1 & (x+2y)/6 \\ 0 & 10 & z+4y \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & (x-4y)/6 \\ 0 & 1 & (x+2y)/6 \\ 0 & 0 & (-5x+2y+3z)/3 \end{array}\right]$$

Para que el sistema tenga solución: $0 = \dfrac{-5x+2y+3z}{3}$

$$0 = -5x + 2y + 3z$$

$5x - 2y - 3z = 0$ plano que pasa por el origen (subespacio de $\mathbb{R}^3$)

Tarea pag 321 del Grossman probs. 26-33

Describa el espacio generado por los vectores

26) $(-6,3), (-11,5)$

$$(x,y) = a_1(-6,3) + a_2(-11,5)$$
$$= (-6a_1 - 11a_2, 3a_1 + 5a_2)$$
$$x = -6a_1 - 11a_2$$
$$y = 3a_1 + 5a_2$$

$$\begin{bmatrix} -6 & -11 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -6 & -11 & x \\ 3 & 5 & y \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 5/3 & y/3 \\ -6 & -11 & x \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 5/3 & y/3 \\ 0 & -1 & x+2y \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 5/3 & y/3 \\ 0 & 1 & -x-2y \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & (5x+11y)/3 \\ 0 & 1 & -x-2y \end{array}\right]$$ solución única, 2 pivotes en $\mathbb{R}^2$

$\therefore$ Los vectores $(-6,3)$ y $(-11,5)$ generan $\mathbb{R}^2$.

34) Demuestre que dos polinomios de grado menor o igual a 2 no pueden generar $P_2$. (En clase)

Solución:

Supongamos dos polinomios en $P_2$: $1-x, x^2$

Entonces:

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 = a_1(1-x) + a_2 x^2$$
$$= a_1 - a_1 x + a_2 x^2$$

Igualando:

$$c_0 = a_1$$
$$c_1 = -a_1$$
$$c_2 = a_2$$

Matricialmente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Resolviendo por Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & c_0 \\ -1 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & c_2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & c_0 \\ 0 & 0 & c_0+c_1 \\ 0 & 1 & c_2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & c_0 \\ 0 & 1 & c_2 \\ 0 & 0 & c_0+c_1 \end{array}\right] \leftarrow \text{2 pivotes en } P_2$$

Para que el sistema tenga solución:

$$0 = c_0 + c_1 \Rightarrow c_1 = -c_0$$

Nuestros polinomios tendrían que ser de la forma:

$$p(x) = c_0 - c_0 x + c_2 x^2$$

$\therefore$ Dos polinomios de grado $\leq 2$ no pueden generar $P_2$.

Definición 12 Independencia lineal

Sean $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n$ n vectores en un espacio vectorial V. Se dice que los vectores son linealmente independientes si existen n escalares $c_1, c_2, \ldots, c_n$ todos iguales a cero, tales que:

$c_1, c_2, \dots, c_n$ todos iguales a cero, tales que:

$$\boxed{c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 + \dots + c_n\bar{v}_n = \bar{0}} \qquad A\bar{x} = \bar{0} \text{ SLH}$$

Si al menos un $c_i \neq 0$, se dice que los vectores son linealmente dependientes.

**Teorema 5**

Dos vectores en un espacio vectorial son linealmente dependientes si uno es múltiplo del otro.

Ejemplo Los vectores $\bar{v}_1 = (2,-1,0,3)$ y $\bar{v}_2 = (-6,3,0,-9)$ son linealmente dependientes, ya que $\bar{v}_2 = -3\bar{v}_1$

Comprobación:

$$c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 = \bar{0}$$

$$c_1(2,-1,0,3) + c_2(-6,3,0,-9) = (0,0,0,0)$$

$$(2c_1 - 6c_2, -c_1 + 3c_2, 3c_1 - 9c_2) = (0,0,0,0)$$

$$\begin{aligned} 2c_1 - 6c_2 &= 0 \\ -c_1 + 3c_2 &= 0 \\ 3c_1 - 9c_2 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{Sistema Lineal Homogéneo } A\bar{x} = \bar{0}$$

Matricialmente:

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{bmatrix}} \underset{\bar{x}}{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}} = \underset{\bar{0}}{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -6 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & -9 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & -9 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} c_1 = 3c_2 \\ c_2 \in \mathbb{R} \to c_2 \text{ puede tomar cualquier valor} \end{array}$$

$\therefore$ los vectores son linealmente dependientes.

Ejemplo Determine si los vectores $(1,-2,3), (2,-2,0), (0,1,7)$ son linealmente dependientes o independientes.

De la def. 12:

$$c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 + c_3\bar{v}_3 = \bar{0}$$

$$c_1(1,-2,3) + c_2(2,-2,0) + c_3(0,1,7) = (0,0,0)$$

$$(c_1 + 2c_2, -2c_1 - 2c_2 + c_3, 3c_1 + 7c_3) = (0,0,0)$$

$$\left.\begin{aligned} c_1 + 2c_2 \quad &= 0 \\ -2c_1 - 2c_2 + c_3 &= 0 \\ 3c_1 \quad + 7c_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{Sistema Lineal Homogéneo } A\bar{x} = \bar{0}$$

Matricialmente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$A \quad \bar{x} \quad \bar{0}$

Resolviendo por Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 7 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 7 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & -6 & 7 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$ 3 pivotes $\Rightarrow$ solución única $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ (solución cero o solución trivial)

$\therefore$ los vectores son linealmente independientes.

Ejemplo: Tres vectores linealmente dependientes:

Sean $\bar{v}_1 = (1,-3,0)$, $\bar{v}_2 = (3,0,4)$, $\bar{v}_3 = (11,-6,12)$.

Combinación lineal: $c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 + c_3\bar{v}_3 = \bar{0}$

$$c_1(1,-3,0) + c_2(3,0,4) + c_3(11,-6,12) = (0,0,0)$$

$$(c_1 + 3c_2 + 11c_3, -3c_1 - 6c_3, 4c_2 + 12c_3) = (0,0,0)$$

$$\begin{aligned} c_1 + 3c_2 + 11c_3 &= 0 \\ -3c_1 - 6c_3 &= 0 \\ 4c_2 + 12c_3 &= 0 \end{aligned}$$

Matricialmente: $A\bar{x} = \bar{0}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 11 \\ -3 & 0 & -6 \\ 0 & 4 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolviendo por Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 11 & 0 \\ -3 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 4 & 12 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 11 & 0 \\ 0 & 9 & 27 & 0 \\ 0 & 4 & 12 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 11 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 12 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \left.\begin{array}{l} c_1 = -2c_3 \\ c_2 = -3c_3 \\ c_3 \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \text{infinidad de soluciones}$$

renglón de ceros: NO HAY SOLUCIÓN ÚNICA

$\therefore$ Los vectores $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ y $\bar{v}_3$ son linealmente dependientes.

Ejemplo Tres matrices linealmente independientes en $M_{23}$:

Sean $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, $A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Combinación lineal: $c_1A_1 + c_2A_2 + c_3A_3 = [0]$

$$c_1\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Realizando operaciones con matrices:

$$\begin{bmatrix} c_1 - c_2 - c_3 & c_2 & 2c_1 + 4c_2 + c_3 \\ 3c_1 + 2c_2 + c_3 & c_1 + 3c_2 + 2c_3 & -c_1 + c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Igualando:

$$\begin{aligned} c_1 - c_2 - c_3 &= 0 \\ c_2 &= 0 \\ 2c_1 + 4c_2 + c_3 &= 0 \\ 3c_1 + 2c_2 + c_3 &= 0 \\ c_1 + 3c_2 + 2c_3 &= 0 \\ -c_1 + c_3 &= 0 \end{aligned}$$

Matricialmente:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolviendo por Gauss:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \begin{array}{l} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \\ c_3 = 0 \end{array}$$

$\therefore$ las matrices $A_1, A_2$ y $A_3$ son linealmente independientes.

## Teorema 6

Un conjunto de $m$ vectores en $\mathbb{R}^n$ es siempre linealmente dependiente si $m > n$.

Ejemplo: Los vectores $(2,-3,4)$, $(4,7,-6)$, $(18,-11,4)$ y $(2,-7,3)$ son linealmente dependientes.

$m = 4$ vectores
$n = 3$

## Corolario

Un conjunto de vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$ debe contener, a lo más, $n$ vectores.

En $\mathbb{R}^2$: a lo más 2 vectores (linealmente independientes)
En $\mathbb{R}^3$: ✓ ✓ ✓ 3 ✓ ✓ ✓
En $M_{nn}$: ✓ ✓ ✓ $n \times n$ matrices ✓ ✓
En $P_n$: ✓ ✓ ✓ $n+1$ polinomios ✓ ✓

Entonces tendremos que en el sistema $A\bar{x} = \bar{0}$, $A$ será una matriz cuadrada (de $n \times n$), y se podrán aplicar los siguientes teoremas: