Clase 26-10-20

domingo, 25 de octubre de 2020 06:28 p. m.

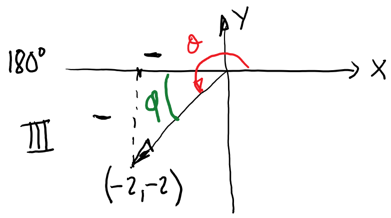
Ejemplo. Efectuar las siguientes operaciones y obtener el resultado en la forma polar:

$$z = \frac{(1-i)-(3+i)}{2\ cis120°}$$

Solución:

$$\frac{(1-i)-(3+i)}{2\ cis120°} = \frac{1-i-3-i}{2\ cis\ 120°} = \frac{-2-2i}{2\ cis\ 120°}$$

Convertimos $-2-2i$ a forma polar:



$$r = \sqrt{(-2)^2+(-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$
$$\theta = 180° + \varphi;$$
$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{2}{2}\right) = 45°, \qquad \rightarrow \quad \theta = 225°$$

Por tanto, $-2-2i = 2\sqrt{2}\ cis\ 225°$

Entonces:

$$z = \frac{-2-2i}{2\ cis\ 120°} = \frac{2\sqrt{2}\ cis\ 225°}{2\ cis\ 120°}$$

$$= \sqrt{2}\ cis(225° - 120°)$$

$$= \sqrt{2} cis\ 105°$$

Conversión de z a forma binómica (ejercicio en clase):

$$z = \sqrt{2}\ cis\ 105° = \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) i$$

Potencias y raíces de números complejos

Definición 18.

Sean $z\ \varepsilon\ \mathbb{C}$ y $n\ \varepsilon\ \mathbf{N}$. La potencia enésima de z, que representaremos con z^n se define como:

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot z \cdot z \ldots z}_{\text{n veces}}$$

Con la definición anterior: $z^2 = zz$

Si $z = rcis\theta$, entonces:

$zz = (rcis\theta)(rcis\theta) = rr\ cis(\theta+\theta) = r^2 cis 2\theta$

De manera semejante:

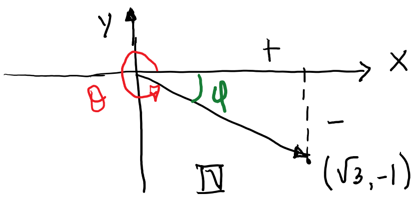
$z^3 = zzz = (rcis\theta)(rcis\theta)(rcis\theta) = rrr\ cis(\theta+\theta+\theta) = r^3 cis\ 3\theta$

Teorema 10 Fórmula de De Moivre Para todo número natural n:

$$(r\ cis\ \theta)^n = r^n\ cis\ n\theta$$

Ejemplos. Sean $z_1 = \sqrt{2}\,\text{cis}\ 70°$, $z_2 = 3\ cis\ 225°$. Realizar:

$a)\ {z_1}^2 = 2\ \text{cis}\ 140°$
$b)\ {z_2}^3 = 27\ \text{cis}\ 315°$
$c)\ {z_2}^4 = 81\ cis\ 180°$
d) Obtener $z = \left(\sqrt{3} - i\right)^3$ en forma polar.



$$\left(\sqrt{3} - i\right) \quad \rightarrow \quad r = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$$
$$\theta = 360° - \varphi$$
$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 30°; \quad \rightarrow \quad \theta = 330°$$
$$\therefore \left(\sqrt{3} - i\right)^3 = (2\ cis\ 330°)^3 = 8\ cis\ (990°) = 8\ cis\ (270°)$$

En forma binómica: $8\ cis\ (270°) = -8i$

Ejercicio. Obtener la cuarta potencia de $z_5 = \left[\frac{z_3 + z_2}{z_4}\right]\overline{z_1}$, donde:

$z_1 = \sqrt{2}\ cis\ 90°$; $z_2 = 3 + 3\sqrt{3}i$; $z_3 = 2\ cis\ 60°$; $z_4 = -2$

Solución:

z_3 a forma binómica: $\rightarrow$ $z_3 = 2\cos 60° + (2\ \sin 60°)\,i$

$$= 2\left(\frac{1}{2}\right) + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i = 1 + \sqrt{3}i$$

$$z_3 + z_2 = 1 + \sqrt{3}i + 3 + 3\sqrt{3}i = 4 + 4\sqrt{3}i$$

A forma polar: $\rightarrow$ $r = \sqrt{16 + 48} = \sqrt{64} = 8$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{4\sqrt{3}}{4}\right) = 60°$$

Por lo tanto, $z_3 + z_2 = 8\ cis\ 60°$

Entonces:
$$\frac{z_3 + z_2}{z_4} = \frac{8\ cis\ 60°}{2\ cis\ 180°} = 4\ cis(-120°)$$
$$= 4\ cis\ 240°$$

$$z_5 = \left[\frac{z_3 + z_2}{z_4}\right]\overline{z_1} = (4\ cis\ 240°)\left(\sqrt{2}\ cis\ 270°\right)$$

$$= 4\sqrt{2}\, cis\ 510° = 4\sqrt{2}\, cis\ 150°$$

Finalmente:

$$z_5{}^4 = \left[\left(\frac{z_3 + z_2}{z_4}\right)\overline{z_1}\right]^4 = \left(4\sqrt{2}\, cis\ 150°\right)^4$$
$$= 256(4) cis\ 600°$$
$$= 1024 \text{ cis } 240°$$

<u>Tarea</u> Efectuar las siguientes operaciones y obtener el resultado en forma polar y binómica.

1) $z = (1-i)^4 \cdot \dfrac{2\, cis\ 60°}{-\sqrt{3}+i}$

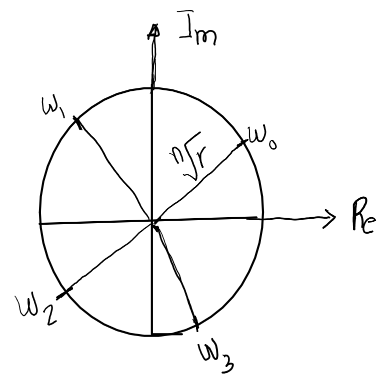
2)Demostrar por inducción matemática que para todo n ε N:

$$(r\ cis\ \theta)^n = r^n\ cis\ n\theta$$

<u>Definición 19</u>

Sean $z\ \varepsilon\ \mathbb{C}$ y $n\ \varepsilon\ N$. Si $w^n = z$; decimos que w es raíz enésima de z y lo representaremos mediante la expresión:

$$w = \sqrt[n]{z}$$



<u>Teorema 11</u>
Para todo número natural n:

$$\sqrt[n]{r\ cis\ \theta} = \sqrt[n]{r}\ cis\ \frac{\theta + k(360°)}{n}, \quad k = 0,1,2, \dots\ (n-1)$$

Estas n raíces quedan representadas en el Diagrama de Argand por n puntos sobre una circunferencia con centro en el origen y radio igual a $\sqrt[n]{r}$.

<u>Ejemplos.</u>

1. Obtener las raíces cúbicas de $z_1 = -4\sqrt{3} - 4i$ y representarlas en el Diagrama de Argand.

<u>Solución</u>:

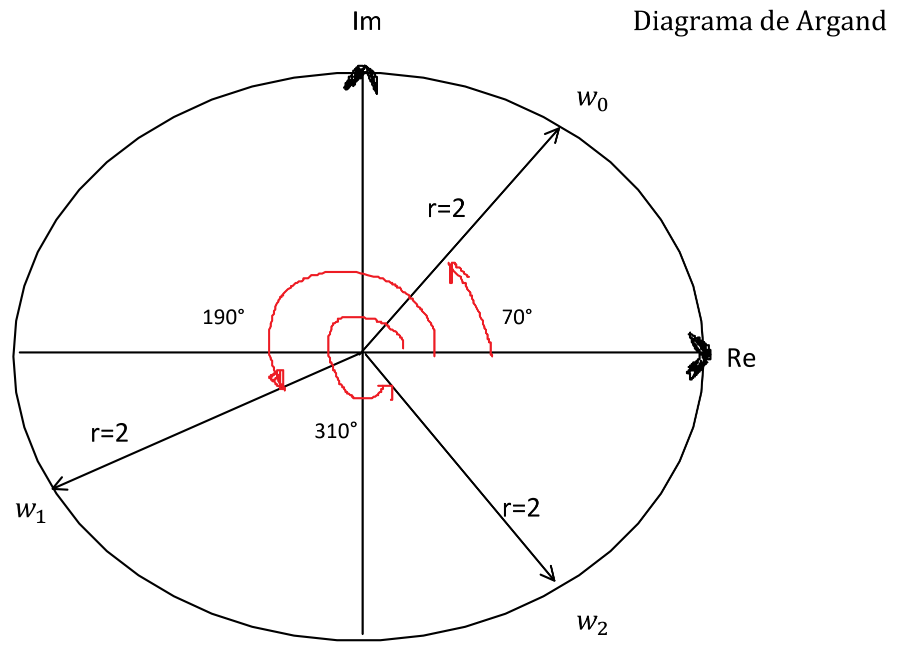
A forma polar:
$$r = \sqrt{\left(-4\sqrt{3}\right)^2 + (-4)^2} = \sqrt{48+16} = \sqrt{64} = 8$$
$$\theta = 180° + \varphi; \qquad \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{4}{4\sqrt{3}}\right) = 30°$$
$$\therefore \theta = 210°$$
Y $z_1 = 8\ cis\ 210°$

$$\sqrt[3]{z_1} = \sqrt[3]{8\ cis\ 210°} = \sqrt[3]{8}\ cis\ \frac{210° + k(360°)}{3}, \qquad k = 0,1,2$$

para k=0: $w_0 = \sqrt[3]{8}\ cis\ \frac{210°}{3} = 2\ cis\ 70°$

para k=1: $w_1 = \sqrt[3]{8}\, cis\, \frac{210°+360°}{3} = 2\, cis\, \frac{570°}{3} = 2\, cis\, 190°$

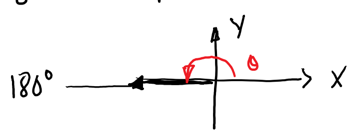
para k=2: $w_2 = \sqrt[3]{8}\, cis\, \frac{210°+720°}{3} = 2\, cis\, \frac{930°}{3} = 2\, cis\, 310°$



Ejemplo Obtener los valores de x tales que $x^3+8=0$

Solución

$x^3 = -8 \Rightarrow x^3 = -8+0i$



A forma polar: $x^3 = 8\, cis\, 180°$

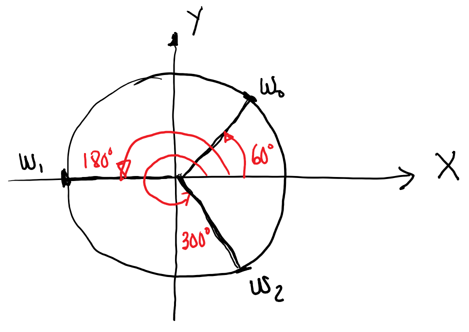
Por tanto: $x = \sqrt[3]{8\, cis\, 180°} = \sqrt[3]{8}\ cis\ \frac{180° + k(360°)}{3}$, $k=0,1,2$

$= 2\ cis\ \frac{180° + k(360°)}{3}$, $k=0,1,2$

Para $k=0$, $w_0 = 2\ cis\ \frac{180°}{3} = 2\ cis\ 60°$

Para $k=1$, $w_1 = 2\ cis\ \frac{180+360°}{3} = 2\ cis\ 180°$

Para $k=2$, $w_2 = 2\ cis\ \frac{180°+720}{3} = 2\ cis\ 300°$



<u>Tarea</u> Obtener las raíces en forma binómica e identificar el tipo de raíces.

Definición 20

Sean $z \in \mathbb{C}$ y $m, n \in \mathbb{N}$:

$$z^0 = 1$$

$$z^{-n} = \frac{1}{z^n}$$

$$z^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{z^m}$$

Realizar las siguientes operaciones:

a) $(2 \text{ cis } 35°)^{-4} = \dfrac{1}{(2 \text{ cis } 35)^4} = \dfrac{1 \text{ cis } 0°}{2^4 \text{ cis } 140°} = \dfrac{1}{16} \text{ cis } (0 - 140°) = \dfrac{1}{16} \text{ cis } 220°$

b) Obtener las soluciones (raíces) de la ecuación $w^5 - (4 \text{ cis } 20°)^3 = 0$ y trazar el Diagrama de Argand correspondiente.

$$w^5 = (4 \text{ cis } 20°)^3 = 64 \text{ cis } 60°$$

$$w = \sqrt[5]{64 \text{ cis } 60°} = \sqrt[5]{64} \text{ cis } \frac{60° + k(360°)}{5}, \quad k = 0,1,2,3,4$$

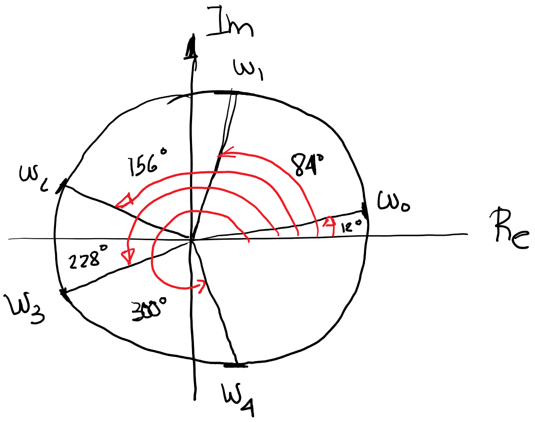
Para $k=0$, $w_0 = 2\sqrt[5]{2} \text{ cis } 12°$

Para $k=1$, $w_1 = 2\sqrt[5]{2} \text{ cis } 84°$

Para $k=2$, $w_2 = 2\sqrt[5]{2} \text{ cis } 156°$

Para $k=3$, $w_3 = 2\sqrt[5]{2} \text{ cis } 228°$

Para $k=4$, $w_4 = 2\sqrt[5]{2} \text{ cis } 300°$



<u>Tarea</u> a) Obtener $z \in \mathbb{C}$, tal que:

$$4z = 2\bar{z} + (\sqrt{3} - i)^6 \left(\frac{1}{8} \text{ cis } 30°\right)$$

b) Obtener las raíces cuadradas de $z = -1 - \sqrt{3}\,i$

c) 〃 〃 〃 sextas de $-27\,i$