Clase 07-12-20

sábado, 5 de diciembre de 2020 11:14 a. m.

Prob 60, pag 60 Grossman

Si $A=[a_{ij}]$, $B=[b_{ij}]$ y $C=[c_{ij}]$ son tres matrices de $m\times n$, calcule $(A+B)+C$ y $A+(B+C)$ y muestre que son iguales. (Prop. 4)

Solución

Miembro izquierdo:

$$(A+B)+C = ([a_{ij}]+[b_{ij}])+[c_{ij}] \quad \text{Sustitución}$$
$$= [a_{ij}+b_{ij}]+[c_{ij}] \quad \text{por suma de matrices (def. 48)}$$
$$= [a_{ij}+b_{ij}+c_{ij}]_{m\times n} \quad \text{por suma de matrices.}$$

Miembro derecho:

$$A+(B+C) = [a_{ij}]+([b_{ij}]+[c_{ij}]) \quad \text{Sustitución}$$
$$= [a_{ij}]+[b_{ij}+c_{ij}] \quad \text{por def 48}$$
$$= [a_{ij}+b_{ij}+c_{ij}]_{m\times n} \quad \text{por def. 48}$$

Por lo tanto: $(A+B)+C = A+(B+C)$ L.Q.Q.D.

61) Si α y β son escalares y A y B son matrices de $m\times n$, calcule $\alpha(A+B)$ y $\alpha A+\alpha B$ y muestre que son iguales. (Prop. 5)

Solución

$$\alpha(A+B) = \alpha([a_{ij}]+[b_{ij}]) \quad \text{Sustitución}$$
$$= \alpha[a_{ij}+b_{ij}] \quad \text{Suma de matrices}$$
$$= [\alpha(a_{ij}+b_{ij})] \quad \text{Multiplicación de una matriz por un escalar}$$
$$= [\alpha a_{ij}+\alpha b_{ij}] \quad \text{Prop. distributiva en } \mathbb{R}$$
$$= [\alpha a_{ij}]+[\alpha b_{ij}] \quad \text{por Suma de matrices}$$
$$= \alpha[a_{ij}]+\alpha[b_{ij}] \quad \text{por multiplicación de matriz por un escalar (def 49)}$$
$$= \alpha A+\alpha B \quad \text{Sustitución}$$

$= \alpha A + \alpha B$ Sustitución

Por otro lado:

$\alpha A + \alpha B = \alpha[a_{ij}] + \alpha[b_{ij}]$ sustitución

$= [\alpha a_{ij}] + [\alpha b_{ij}]$ Multiplicación de matriz por escalar

$= [\alpha a_{ij} + \alpha b_{ij}]$ Suma de matrices

$= [\alpha(a_{ij} + b_{ij})]$ Prop. distributiva en $\mathbb{R}$.

$= \alpha [a_{ij} + b_{ij}]$ Multiplicación de matriz por escalar. (def. 49)

$= \alpha([a_{ij}] + [b_{ij}])$ Suma de matrices

$= \alpha(A+B)$ Sustitución

Queda demostrado que $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$

Tarea Calcule además $(\alpha+\beta)A$ y $\alpha A + \beta A$ y muestre que son iguales. (Prob 61, pp. 60) (Prop. 7)

Prob 59, pág 60. (Prop. 2 y Prop. 6)

Def. 50 Producto escalar entre dos vectores

Sean $\bar{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ y $\bar{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ dos vectores. Entonces, el producto escalar

de $\bar{a}$ y $\bar{b}$, denotado por $\bar{a} \cdot \bar{b}$ está dado por:

$$\boxed{\bar{a} \cdot \bar{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \longrightarrow \text{es un escalar.}}$$

Se acostumbra llamar al producto escalar como producto punto o producto interno. (Los dos vectores tienen que ser del mismo tamaño).

Ejemplo Sean $\bar{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $\bar{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$. Calcular $\bar{a} \cdot \bar{b}$

$\bar{a} \cdot \bar{b} = (1)(4) + (2)(5) + (3)(6) = 4 + 10 + 18 = 32$ es un número

Ejemplo Sean $\bar{a} = (4,0,-5,6)$ y $\bar{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$. Calcular $\bar{a}\cdot\bar{b}$

$\bar{a}\cdot\bar{b} = (4)(-1) + (0)(3) + (-5)(2) + (6)(4) = -4 - 10 + 24 = 10$ es un escalar

Ejemplo Sean $\bar{a} = (7,-2,1,8)$ y $\bar{b} = (-1,5,-4,2)$. Calcular $\bar{a}\cdot\bar{b}$.

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = (7,-2,1,8)\cdot(-1,5,-4,2) = (7)(-1) + (-2)(5) + (1)(-4) + (8)(2)$$
$$= -7 - 10 - 4 + 16 = -5$$

Tarea Grossman pp. 80-81 problemas 1-19

No existe la división entre vectores

Teorema 27 Sean $\bar{a}$, $\bar{b}$ y $\bar{c}$ tres vectores de tamaño o dimensión n y sea α un escalar. Entonces:

vector cero

1) $\bar{a}\cdot\bar{0} = 0$ → escalar cero

2) $\bar{a}\cdot\bar{b} = \bar{b}\cdot\bar{a}$ Ley conmutativa del producto escalar

3) $\bar{a}\cdot(\bar{b}+\bar{c}) = \bar{a}\cdot\bar{b} + \bar{a}\cdot\bar{c}$ Ley distributiva del producto escalar

4) $(\alpha\bar{a})\cdot\bar{b} = \alpha(\bar{a}\cdot\bar{b})$

Demostración de 1

$\bar{a}\cdot\bar{0} = (a_1, a_2, \dots, a_n)\cdot(0, 0, \dots, 0_n)$ Sustitución

$= a_1(0) + a_2(0) + \dots + a_n(0)$ Def. 50

$= 0 + 0 + \dots + 0 = 0$ (escalar cero).

Demostración de 2)

$\bar{a}\cdot\bar{b} = (a_1, a_2, \dots, a_n)\cdot(b_1, b_2, \dots, b_n)$ Sustitución

$= a_1b_1 + a_2b_2 + \dots a_nb_n$ Def. 50

$= b_1a_1 + b_2a_2 + \dots + b_na_n$ Conmutatividad en $\mathbb{R}$

$= (b_1, b_2, \dots, b_n)\cdot(a_1, a_2, \dots, a_n)$ Def. 50

$= \bar{b}\cdot\bar{a}$ L.Q.Q.D.

NO existe la Ley Asociativa para el producto escalar, es decir:

$(\bar{a}\cdot\bar{b})\cdot\bar{c}$ no está definida porque

(escalar)$\cdot$vector = vector

Definición 5) Producto de dos matrices (Grossman pp. 65)

Sea $A=[a_{ij}]$ una matriz de $m\times n$ y sea $B=[b_{ij}]$ una matriz de $n\times p$.

El producto AB es una matriz $C=[c_{ij}]$ de $m\times p$, en donde:

$$c_{ij}=(i\text{-ésimo renglón de } A)\cdot(j\text{-ésima columna de } B)$$

ADVERTENCIA: El número de columnas de A debe ser igual al número de renglones de B.

Ejemplo

Si $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -2 & 4\end{bmatrix}_{2\times 2}$ y $B=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 5 & 6\end{bmatrix}_{2\times 2}$, calcule AB y BA.

sí se puede hacer el producto

tamaño de la matriz producto

$$AB=C=\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$c_{11}=[1,3]\cdot\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}=(1)(3)+(3)(5)=18$$

$$c_{12}=[1,3]\cdot\begin{bmatrix}-2\\6\end{bmatrix}=(1)(-2)+(3)(6)=16$$

$$c_{21}=[-2,4]\cdot\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}=(-2)(3)+(4)(5)=14$$

$$c_{22}=[-2,4]\cdot\begin{bmatrix}-2\\6\end{bmatrix}=(-2)(-2)+(4)(6)=28$$

$$\therefore AB=C=\begin{bmatrix}18 & 16\\ 14 & 28\end{bmatrix}$$

Ahora veamos el producto BA:

$$BA=D=\begin{bmatrix}d_{11} & d_{12}\\ d_{21} & d_{22}\end{bmatrix}_{2\times 2}\qquad B=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 5 & 6\end{bmatrix}_{2\times 2}\qquad A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -2 & 4\end{bmatrix}_{2\times 2}$$

sí se puede hacer el producto

tamaño de la matriz producto

$$d_{11} = [3, -2] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = (3)(1) + (-2)(-2) = 7$$

$$d_{12} = [3, -2] \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = (3)(3) + (-2)(4) = 1$$

$$d_{21} = [5, 6] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = (5)(1) + (6)(-2) = -7$$

$$d_{22} = [5, 6] \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = (5)(3) + (6)(4) = 39$$

$$\therefore BA = D = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -7 & 39 \end{bmatrix} \implies BA \neq AB$$

Ejemplo

Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 0 & -4 \\ -3 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. Calcular AB y BA

$$AB = \begin{bmatrix} & & \end{bmatrix}_{2\times 3} \begin{bmatrix} & & \end{bmatrix}_{3\times 4} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \end{bmatrix}$$

$$C_{11} = [2, 0, -3] \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = 14 + 0 + 9 = 23$$

$$C_{12} = [2, 0, -3] \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = -2 + 0 - 3 = -5$$

$$C_{13} = [2, 0, -3] \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 8 + 0 - 6 = 2$$

$$C_{14} = [2, 0, -3] \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix} = 14 + 0 - 9 = 5$$

$$C_{21} = [4, 1, 5] \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = 28 + 2 - 15 = 15$$

$$C_{22} = [4, 1, 5] \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = -4 + 5 + 5 = 6$$

$$C_{23} = [4, 1, 5] \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 16 + 0 + 10 = 26$$

$$C_{24} = [4, 1, 5] \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix} = 28 - 4 + 15 = 39$$

$$\therefore C = BA = \begin{bmatrix} 23 & -5 & 2 & 5 \\ 15 & 6 & 26 & 39 \end{bmatrix}_{2\times 4}$$

Pero:

$$BA = \underset{3\times 4}{\begin{bmatrix} | & | & | & | \end{bmatrix}} \underset{2\times 3}{\begin{bmatrix} = \end{bmatrix}}$$

NO ESTÁ DEFINIDO EL PRODUCTO

Ejercicios en clase pp. 81 Grossman.

Tarea: 21-35 impares