Clase 06-01-21

martes, 5 de enero de 2021 11:55 a. m.

UNIDAD 7 DETERMINANTES

El determinante es una característica de las matrices cuadradas. El determinante es un número.

Def. 62 Determinante de una matriz de 3×3 Grossman pag. 176

Sea $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$

$$\det A = |A| = +a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$$

Ejemplo Calcular $|A|$, donde:

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 3 & -5 & 1 \\ -8 & 6 & 9\end{bmatrix}$$

$$|A| = 4\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 6 & 9\end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -8 & 9\end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -8 & 6\end{vmatrix}$$

$$= 4(-45-6) - 7(27+8) - 2(18-40)$$
$$= 4(-51) - 7(35) - 2(-22)$$
$$= -204 - 245 + 44$$
$$= -405$$

Ejemplo Calcular $|A|$, donde

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & -3 & 9\end{bmatrix} \qquad |A| = 2\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -3 & 9\end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 9\end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -3\end{vmatrix}$$

$$|A| = 2(0+12) + 3(9-12) + 5(-3)$$
$$= 24 - 9 - 15 = 0$$

Def 63 Matriz menor M_{ij}

Sea A una matriz de $n\times n$ y sea M_{ij} la matriz de $(n-1)\times(n-1)$ que se obtiene de A al eliminar el renglón i y la columna j. M_{ij} se llama el menor ij de A

Ejemplo Sea $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & -4\end{bmatrix}$. Encontrar M_{12}, M_{32}, M_{23}

$$M_{12}=\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 6 & -4\end{bmatrix}, \quad M_{32}=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 5\end{bmatrix}, \quad M_{23}=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 3\end{bmatrix}$$

$M_{12}=\begin{bmatrix}0 & 5\\ 6 & -4\end{bmatrix}$, $M_{32}=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 0 & 5\end{bmatrix}$, $M_{23}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 6 & 3\end{bmatrix}$

<u>Ejemplo</u> Sea $A=\begin{bmatrix}1 & -3 & 5 & 6\\ 2 & 4 & 0 & 3\\ 1 & 5 & 9 & -2\\ 4 & 0 & 2 & 7\end{bmatrix}$. Encontrar M_{32} y M_{24}

$$M_{32}=\begin{bmatrix}1 & 5 & 6\\ 2 & 0 & 3\\ 4 & 2 & 7\end{bmatrix}, \quad M_{24}=\begin{bmatrix}1 & -3 & 5\\ 1 & 5 & 9\\ 4 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

<u>Def 64</u> <u>Cofactor</u>

Sea A una matriz de $n \times n$. El cofactor ij de A, denotado por A_{ij} está dado por:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\,|M_{ij}|$$

$$\text{donde } (-1)^{i+j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i+j \text{ es par} \\ -1 & \text{si } i+j \text{ es impar}\end{cases}$$

<u>Ejemplo</u> Calcular A_{32} y A_{24} de la matriz $A=\begin{bmatrix}1 & -3 & 5 & 6\\ 2 & 4 & 0 & 3\\ 1 & 5 & 9 & -2\\ 4 & 0 & 2 & 7\end{bmatrix}$.

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 5 & 6\\ 2 & 0 & 3\\ 4 & 2 & 7\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}1 & 5 & 6\\ 2 & 0 & 3\\ 4 & 2 & 7\end{vmatrix}$$

$$= -\left[1\begin{vmatrix}0 & 3\\ 2 & 7\end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix}2 & 3\\ 4 & 7\end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix}2 & 0\\ 4 & 2\end{vmatrix}\right]$$

$$= -[(0-6)-5(14-12)+6(4-0)]$$

$$= -(-6-10+24) = -8$$

$$A_{24}=(-1)^{2+4}\begin{vmatrix}1 & -3 & 5\\ 1 & 5 & 9\\ 4 & 0 & 2\end{vmatrix} = +\begin{vmatrix}1 & -3 & 5\\ 1 & 5 & 9\\ 4 & 0 & 2\end{vmatrix}$$

$$= 1\begin{vmatrix}5 & 9\\ 0 & 2\end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix}1 & 9\\ 4 & 2\end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix}1 & 5\\ 4 & 0\end{vmatrix}$$

$$= 10 + 3(2-36) + 5(0-20)$$

$$= 10 - 102 - 100 = -192$$

Regresando al determinante de una matriz de 3×3 (def. 62):

$$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ \ldots\end{bmatrix}$$

Regresando al determinante de una matriz de 3×3 (def. 60).

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$(-1)^{i+j}$

$$\det A = |A| = +a_{11}\underbrace{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}_{|M_{11}|} - a_{12}\underbrace{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}}_{|M_{12}|} + a_{13}\underbrace{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}_{|M_{13}|}$$

para el 1er. renglón.

A_{11} $\quad A_{12}$ $\quad A_{13}$

Calcular det A para la 2ª columna:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} + & - & + & - \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 9 & -2 \\ 4 & 0 & 2 & 7 \end{bmatrix} \end{array}.$$

$$\det A = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} + a_{42}A_{42}$$

$$= -3\,(-1)^{1+2}|M_{12}| + 4\,(-1)^{2+2}|M_{22}| + 5\,(-1)^{3+2}|M_{32}| + 0\,(-1)^{4+2}|M_{42}|$$

$$= -3(-1)\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 9 & -2 \\ 4 & 2 & 7 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 1 & 9 & -2 \\ 4 & 2 & 7 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 7 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 9 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 3\left[2(63+4) - 0(7+8) + 3(2-36)\right] + 4\left[1(63+4) - 5(7+8) + 6(2-36)\right] - 5\left[1(0-6) - 5(14-12) + 6(4-0)\right] + 0$$

$$= 3\left[2(67) + 3(-34)\right] + 4\left[67 - 5(15) + 6(-34)\right] - 5\left[-6 - 5(2) + 24\right]$$

$$= 3(134 - 102) + 4(67 - 75 - 204) - 5(-6 - 10 + 24)$$

$$= 3(32) + 4(-212) - 5(8) = 96 - 848 - 40 = -792$$

Definición 65 Determinante n×n

$$\det A = |A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + \dots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}A_{1k}$$

Expansión por cofactores para el 1er renglón.

Ejemplo Calcular $|A|$, donde

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} + & - & + & - \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 9 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix} \end{array}$$

Para el primer renglón:

$$A = a_{11}\,(-1)^{1+1}\,|M_{11}| + a_{12}\,(-1)^{1+2}\,|M_{12}| + a_{13}\,(-1)^{1+3}\,|M_{13}| + a_{14}\,(-1)^{1+4}\,|M_{14}|$$

$$A = +a_{11}|M_{11}| - a_{12}|M_{12}| + a_{13}|M_{13}| - a_{14}|M_{14}|$$

$$= 1\begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 1 & 9 & 6 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 2 & 9 & 6 \\ 3 & 4 & 8 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 9 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= [-1(72-24) - 3(8-12) + 4(4-18)] - 3[0 - 3(16-18) + 4(8-27)] + 5[0 + (16-18) + 4(4-3)] - 2[0 + (8-27) + 3(4-3)]$$

$$= -48 + 12 - 56 - 3(-70) + 5(2) - 2(-19+3)$$

$$= -92 + 210 + 10 + 32 = 160$$

Tarea Grossman pag. 187 probs 1-9