Clase 09-11-20

martes, 24 de septiembre de 2019 05:52 p. m.

Teorema 15 Con relación al producto:

Si $f(x), g(x), h(x)$ son polinomios en x con coeficientes en $\mathbb{C}$, entonces:

$\phi(x) = 0 + 0x + 0x^2 + \dots$

ANILLO

1) $f(x)\,g(x)$ es un polinomio de grado $= n+m$ Cerradura
2) $f(x)\,[g(x)\,h(x)] = [f(x)\,g(x)]\,h(x)$ Asociatividad
3) $f(x)\,g(x) = g(x)\,f(x)$ Conmutatividad
4) Existe un polinomio $u(x)$ tal que:
   $f(x)\,u(x) = f(x)$ Elemento idéntico

5) $\nexists \frac{1}{f(x)}$, $\nexists$ elemento inverso multiplicativo

$\therefore$ El conjunto de polinomios de grado $\leq n+m$ tiene Estructura Algebraica de Anillo.

Teorema 16 Propiedad Distributiva

$$f(x)\,[g(x) + h(x)] = f(x)\,g(x) + f(x)\,h(x)$$

Tarea

1) Si $f(x) = 1 + \alpha^2 x^2 - 2x^3 + \beta x^4$
   y $g(x) = 1 - \gamma x + 3x^2 + 2\delta^2 x^3$

Determinar para qué valores de $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$:

a) $f(x) = g(x)$
b) $gr(f) = 3$
c) $gr(g) = 1$

2) Para los polinomios:
   $f(x) = -2 + 2x - x^2$
   $g(x) = 2x - x^2$
   $h(x) = 1 - 3x^2 - x^3$

   Hallar el polinomio $p(x)$ tal que:

a) $f(x)+p(x)=0$

b) $p(x)\,[3g(x)-h(x)]=-1+6x+x^3$

DIVISIÓN DE POLINOMIOS

En $\mathbb{Q}=\{x \mid x=\frac{a}{b},\ a,b\in\mathbb{Z},\ b\neq 0\}$

De definición 3: Un entero $b\neq 0$ se dice "FACTOR" de un entero a, si existe un $c\in\mathbb{Z}$ tal que $bc=a$ $\quad b\overline{)\,a\,}^{\,c}$

Por tanto, para el cociente $c=\frac{a}{b}$ se pueden distinguir 3 casos:

1) Si b es factor de a, entonces $\frac{a}{b}\in\mathbb{Z}$, $b\neq 0$.

2) Si b no es factor de a, entonces $\frac{a}{b}\notin\mathbb{Z}$ y decimos que $\frac{a}{b}$ es un número fraccionario, $b\neq 0$.

3) Si $b=0$, el cociente $\frac{a}{b}$ no está definido.

Cuando ocurre 1) se dice que "a es divisible entre b".

Teorema 17 Algoritmo de la división

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos polinomios en x con coeficientes en $\mathbb{C}$.
Si $g(x)\neq 0$, entonces existen dos polinomios únicos $q(x)$ y $r(x)$ con coeficientes en $\mathbb{C}$ tales que:

$$f(x)=g(x)\,q(x)+r(x),$$

donde $gr(r)<gr(g)$, o bien, $r(x)=0$

De manera similar que en $\mathbb{Z}$:

$$\begin{array}{lll} & & q(x)\ \text{cociente} \\ \text{divisor} & g(x) & \overline{\big)\, f(x)\ \text{dividendo}} \\ & & r(x)\ \text{residuo} \end{array}$$

divisor g(x) ...

$r(x)$ residuo

Ejemplo Con el procedimiento de Álgebra elemental obtener el cociente y residuo de la división $f(x)$ entre $g(x)$.

$$f(x) = 2x^4 - 3x^3 + x^2 - 2x + 5$$
$$g(x) = x^2 + 2x + 1$$

$$\begin{array}{r l}
 & 2x^2 - 7x + 13 \\
\cline{2-2}
x^2+2x+1 & \big) \; \cancel{2x^4} - 3x^3 + x^2 - 2x + 5 \\
 & -\cancel{2x^4} - 4x^3 - 2x^2 \\
\cline{2-2}
 & \quad -\cancel{7x^3} - x^2 - 2x \\
 & \quad \cancel{7x^3} + 14x^2 + 7x \\
\cline{2-2}
 & \qquad 13x^2 + 5x + 5 \\
 & \qquad -13x^2 - 26x - 13 \\
 & \qquad\qquad -21x - 8
\end{array}$$

$$\therefore \; q(x) = 2x^2 - 7x + 13$$
$$r(x) = -21x - 8$$

$$gr(r) < gr(g(x))$$

Obsérvese que $gr(f) = gr(q) + gr(g)$

Definición 29

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos polinomios en x con coeficientes en $\mathbb{C}$ y $g(x) \neq 0$. Se dice que $g(x)$ es un FACTOR de $f(x)$ si existe un polinomio $q(x)$ con coeficientes en $\mathbb{C}$, tal que:

$$f(x) = g(x)\, q(x)$$

Por tanto, $f(x)$ es divisible entre $g(x)$.

Nota: el polinomio cero lo representaremos con el símbolo 0.

TEOREMAS DEL RESIDUO Y DEL FACTOR

Dado que un polinomio en x con coeficientes en $\mathbb{C}$ de la forma:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

puede ser considerado como una función de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$, al sustituir un número complejo c en lugar de la variable x y efectuar las operaciones indicadas, se obtiene un número al que se llama "valor del polinomio en c", o sea, p(c) de acuerdo con la notación de funciones. Entonces:

$$p(c) = a_0 + a_1 c + a_2 c^2 + \dots + a_n c^n$$

Cuando un polinomio cualquiera p(x) se divide entre un polinomio de primer grado, (x-c), del Teorema 17, el residuo que se obtiene es un número, pues $gr(r) < gr(q)$, donde $gr(q) = 1$; y ese número coincide con el valor del polinomio en c, o sea, $r = p(c)$, como lo establece el

Teorema 18 Teorema del residuo

Sean p(x) un polinomio en x con coeficientes en $\mathbb{C}$ y $c \in \mathbb{C}$. El residuo de dividir p(x) entre (x-c) es igual a p(c).

$$\begin{array}{r|l} & q(x) \\ \hline x-c & p(x) \end{array}$$

$$p(c) = r$$

Demostración

$$p(x) = (x-c)q(x) + r$$

Haciendo $x = c$:

$$p(c) = (c-c)q(x) + r$$

Por lo que $p(c) = r$.

Por ejemplo, si $p(x) = 2x^3 - 3x^2 - 5x + 1$, podemos calcular p(2) de dos maneras diferentes:

a) $p(2) = 2(2)^3 - 3(2)^2 - 5(2) + 1 = 16 - 12 - 10 + 1 = -5$

b) Obteniendo el residuo de la división p(x) entre x-2:

$$\begin{array}{r|l} & 2x^2 + x - 3 \\ \hline x-2 & 2x^3 - 3x^2 - 5x + 1 \\ & -2x^3 + 4x^2 \\ \hline & \quad x^2 - 5x \\ & \quad -x^2 + 2x \\ \hline & \quad\quad -3x + 1 \\ & \quad\quad 3x - 6 \end{array}$$

p(c) = r

$$\begin{array}{r} -3x+1 \\ \underline{3x-6} \\ -5 \end{array}$$

$p(c) = r$

Por lo que $p(2) = -5$, o sea, un número.

Teorema 19 TEOREMA DEL FACTOR

residuo

Sean $p(x)$ un polinomio en x con coeficientes en $\mathbb{C}$ y $c \in \mathbb{C}$; $p(x)$ es divisible entre $x-c$ si y solo si $p(c)=0$.

O bien: "$x-c$ es factor de $p(x)$ si y solo si $p(c)=0$"

DIVISIÓN SINTÉTICA

Caso particular: cuando el divisor es un polinomio de la forma $x-c$.

De la división anterior:

$$\begin{array}{r|l} & 2x^2+x-3 \\ \hline x-2 & 2x^3-3x^2-5x+1 \\ & \underline{-2x^3+4x^2} \\ & \quad x^2-5x \\ & \quad \underline{-x^2+2x} \\ & \qquad -3x+1 \\ & \qquad \underline{3x-6} \\ & \qquad\quad -5 \end{array}$$

dejamos sólo los coeficientes de $p(x)$ eliminando además el coeficiente de x en el divisor, ya que siempre debe ser 1.

$x=2$:

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -3 & -5 & 1 \\ 2 & \downarrow & 4 & 2 & -6 \\ \hline & 2 & 1 & -3 & \boxed{-5} \end{array}$$

$q(x) = 2x^2+x-3$

$r(x) = -5$

Ejemplo Dividir $p(x) = 17 - x + 21x^3 + 5x^4$ entre $x+4$ empleando la división sintética.

Ordenando de mayor potencia a menor:

$p(x) = 5x^4 + 21x^3 - x + 17$

$x+4$

$x = -4$

$$\begin{array}{r|rrrrr} -4 & 5 & 21 & 0 & -1 & 17 \\ & \downarrow & -20 & -4 & 16 & -60 \\ \hline & 5 & 1 & -4 & 15 & \underline{|-43} \end{array}$$

$x = -4$

$q(x) = 5x^3 + x^2 - 4x + 15$

$r(x) = -43$

Ejemplo Demostrar que $z-3$ es un factor del polinomio $f(z) = 2z^3 - 7z^2 + 8z - 15$, empleando división sintética.

$z = 3$

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 2 & -7 & 8 & -15 \\ & & 6 & -3 & 15 \\ \hline & 2 & -1 & 5 & \underline{|0} \end{array}$$

$\therefore$ $z-3$ es factor de $f(z)$ porque $r=0$

Ejemplo Hallar los valores de A y B tales que el polinomio $p(x) = 2x^4 - x^3 + Ax^2 + 2x + B$ sea divisible entre $x+1$ y $2x-3$ a la vez.

Se puede hacer de 2 maneras:

$x = -1$

$2x - 3 = 0$

$x = \frac{3}{2}$

$p(-1) = 2(-1)^4 - (-1)^3 + A(-1)^2 + 2(-1) + B = 0$

$= 2 + 1 + A - 2 + B = 0$

$= A + B + 1 = 0$

$p\left(\frac{3}{2}\right) = 2\left(\frac{3}{2}\right)^4 - \left(\frac{3}{2}\right)^3 + A\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{3}{2}\right) + B = 0$

$= 2\left(\frac{81}{16}\right) - \frac{27}{8} + \frac{9}{4}A + 3 + B = 0$

$= \frac{81}{8} - \frac{27}{8} + \frac{9}{4}A + 3 + B = 0$

$= \frac{27}{4} + \frac{12}{4} + \frac{9}{4}A + B = 0$

$= \frac{9}{4}A + \frac{4B}{4} + \frac{39}{4} = \frac{9A + 4B + 39}{4} = 0$

Se tienen dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\left.\begin{array}{r} A + B + 1 = 0 \\ 9A + 4B + 39 = 0 \end{array}\right\} \text{Se resuelven}$$

$A=-7,\ B=6$

Tarea Si $p(x) = -2+3x+4x^2+x^3$

a) Empleando el Teorema del Residuo calcule $p(3)$.

b) Empleando el Teorema del Factor determine si $p(x)$ es divisible entre $x+2$.

Tarea Utilizando la división sintética divida el polinomio $9x^4+8x^2-1$ entre a) $x+1$, b) $x-\frac{1}{3}$, c) $x+i$

Obtenga $q(x)$ y $r(x)$.