Clase 25-11-20

martes, 24 de noviembre de 2020 02:03 p. m.

Ejemplo Resolver el siguiente sistema por medio de la eliminación de Gauss-Jordan y clasificarlo.

$$\begin{aligned} 2x_2+3x_3&=4\\ 2x_1-6x_2+7x_3&=15\\ x_1-2x_2+5x_3&=10 \end{aligned}$$

Solución

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & 4\\ 2 & -6 & 7 & 15\\ 1 & -2 & 5 & 10 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 10\\ 2 & -6 & 7 & 15\\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2\to R_2-2R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 10\\ 0 & -2 & -3 & -5\\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2\to \frac{R_2}{-2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 10\\ 0 & 1 & 3/2 & 5/2\\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right]$$

$R_1\to R_1+2R_2$
$R_3\to R_3-2R_2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 8 & 15\\ 0 & 1 & 3/2 & 5/2\\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \longleftarrow \text{Inconsistencia, NO HAY SOLUCIÓN}$$

$0 \neq -1$ Sistema inconsistente

Tarea: probs 7,17,19,21,25,27 pp. 26 y 27 Grossman, Prob 13 también

Tarea Investigar Gauss

Clase Gossman, pp 26,27; probs 3,5,9,21, pp. 26 y 27.

3)
$$\begin{aligned} 9x_2-7x_3&=2\\ -x_3&=-2\\ -3x_1+6x_2+8x_3&=1 \end{aligned}$$

Por Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 9 & -7 & 2\\ 0 & 0 & -1 & -2\\ -3 & 6 & 8 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & 8 & 1\\ 0 & 0 & -1 & -2\\ 0 & 9 & -7 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1\to \frac{R_1}{-3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -8/3 & -1/3\\ 0 & 0 & -1 & -2\\ 0 & 9 & -7 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -8/3 & -1/3\\ 0 & 9 & -7 & 2\\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2\to \frac{R_2}{9}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -8/3 & -1/3\\ 0 & 1 & -7/9 & 2/9\\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1\to R_1+2R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -38/9 & 1/9\\ 0 & 1 & -7/9 & 2/9\\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3\to -R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -38/9 & 1/9\\ 0 & 1 & -7/9 & 2/9\\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 77/9\\ 0 & 1 & 0 & 16/9\\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$R_1\to R_1+\frac{38}{9}R_3$
$R_2\to R_2+\frac{7}{9}R_3$

$$\left.\begin{aligned} x_1&=\frac{77}{9}\\ x_2&=\frac{16}{9}\\ x_3&=2 \end{aligned}\right\} \text{SOLUCIÓN ÚNICA, Sistema Consistente Determinado}$$

O bien: $\left(\frac{77}{9}, \frac{16}{9}, 2\right)$

5)
$$\begin{aligned} 3x_1+6x_2-6x_3&=9\\ 2x_1-5x_2+4x_3&=6\\ 5x_1+28x_2-26x_3&=-8 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -6 & 9\\ 2 & -5 & 4 & 6 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 3\\ 2 & -5 & 4 & 6 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 3\\ 0 & -9 & 8 & 0\\ 0 & 12 & -16 & -23 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 3\\ 0 & 1 & -8/9 & 0\\ 0 & 12 & -16 & -23 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2/9 & 3\\ 0 & 1 & -8/9 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -23 \end{array}\right] \longrightarrow \text{No hay solución}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -6 & 9 \\ 2 & -5 & 4 & 6 \\ 5 & 28 & -26 & -8 \end{array}\right] \xrightarrow[R_1 \to \frac{R_1}{3}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & -5 & 4 & 6 \\ 5 & 28 & -26 & -8 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - 5R_1}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & -9 & 8 & 0 \\ 0 & 18 & -16 & -23 \end{array}\right] \xrightarrow[R_2 \to \frac{R_2}{-9}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -8/9 & 0 \\ 0 & 18 & -16 & -23 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{R_1 \to R_1 - 2R_2 \\ R_3 \to R_3 - 18R_2}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4/9 & 3 \\ 0 & 1 & -8/9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -23 \end{array}\right] \to$$

No hay solución

Sistema Inconsistente

9) $-1x_1 \quad + x_3 = 0$

$x_2 + 3x_3 = 1$

$x_1 - x_2 \quad = -3$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow[R_1 \to -R_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to \frac{R_3}{4}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{R_1 \to R_1 + R_3 \\ R_2 \to R_2 - 3R_3}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \end{array}\right]$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = -1/2 \\ x_2 = 5/2 \\ x_3 = -1/2 \end{array}\right\} \text{SOL. ÚNICA}$$

Sistema Consistente Determinado

21) $2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -2$

$-3x_1 \quad + x_4 = 1$

$5x_2 + 8x_3 \quad = 3$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 8 & 0 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[R_1 \to \frac{R_1}{2}]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1 \\ -3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 8 & 0 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[R_2 \to R_2 + 3R_1]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1 \\ 0 & 3/2 & -3/2 & 5/2 & -2 \\ 0 & 5 & 8 & 0 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[R_2 \to \frac{R_2}{3/2}]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 5/3 & -4/3 \\ 0 & 5 & 8 & 0 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{R_1 \to R_1 - \frac{R_2}{2} \\ R_3 \to R_3 - 5R_2}]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1/3 & -2/6 \\ 0 & 1 & -1 & 5/3 & -4/3 \\ 0 & 0 & 13 & -25/3 & 29/3 \end{array}\right] \quad R_3 \to \frac{R_3}{13}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & -1 & 5/3 & -4/3 \\ 0 & 0 & 1 & -25/39 & 29/39 \end{array}\right] \xrightarrow[R_2 \to R_2 + R_3]{} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 40/39 & -23/39 \\ 0 & 0 & 1 & -25/39 & 29/39 \end{array}\right] \end{array} \quad R_1 \to R_1 -$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}x_4 \\ x_2 = -\frac{23}{39} - \frac{40}{39}x_4 \\ x_3 = \frac{29}{39} + \frac{25}{39}x_4 \\ x_4 \in \mathbb{R} \end{array}\right\}$$

Infinidad de soluciones

Sistema Consistente Indeterminado

Definición 38 Forma escalonada por renglones (FER)

Es igual que la FERR excepto que sólo se hacen ceros abajo de los 1's (arriba no)

Ejemplos de la FER:

a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Definición 39 Eliminación Gaussiana (Grossman pp. 16)

Se reduce por renglones la matriz de coeficientes a la

Se reduce por renglones la matriz de coeficientes a la Forma Escalonada por Renglones (FER), se despeja el valor de la última incógnita y después se usa la sustitución hacia atrás para las demás incógnitas.

Ejemplo

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[R_1 \to \frac{R_1}{2}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{R_2 \to R_2 - 4R_1 \\ R_3 \to R_3 - 3R_1}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{array}\right] \xrightarrow[R_2 \to \frac{R_2}{-3}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to R_3 + 5R_2]{}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to -R_3]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \quad X_3 = 3$$

Entonces, hacia atrás tenemos:

$$X_2 + 2X_3 = 4$$

Sustituimos $X_3 = 3$:

$$X_2 + 2(3) = 4$$
$$X_2 + 6 = 4$$
$$X_2 = -2$$

Sustituimos hacia atrás con X_3 y X_2:

$$X_1 + 2X_2 + 3X_3 = 9$$
$$X_1 + 2(-2) + 3(3) = 9$$
$$X_1 - 4 + 9 = 9$$
$$X_1 = 4$$

La solución es $(4, -2, 3)$, como habíamos obtenido con la eliminación de Gauss-Jordan.

Ejercicios 28-39 del Grossman pp. 27

Problema Obtener la solución del siguiente sistema utilizando la eliminación gaussiana.

7) $-2X_1 - 6X_2 - 3X_3 = 9$
$-X_1 + X_2 - X_3 = 1$
$X_1 - X_2 + 2X_3 = 2$