Clase 05-05-21

martes, 4 de mayo de 2021 10:34 a. m.

25) $T: P_2 \to P_1$; $T(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = a_0 + a_1 x$

Sean $p(x), q(x) \in P_2$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, donde $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ y $q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$.

1) $T[p(x) + q(x)] = T[p(x)] + T[q(x)]$

m. izq:

$T[p(x) + q(x)] = T[(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) + (b_0 + b_1 x + b_2 x^2)]$ Sustituyendo

$= T[(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2]$ agrupando términos según la potencia de la variable.

$= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x$ Aplicando la R.T.

m. derecho:

$T[p(x)] + T[q(x)] = (a_0 + a_1 x) + (b_0 + b_1 x)$ Aplicando RT.

$\therefore T[p(x) + q(x)] = T[p(x)] + T[q(x)]$

2) $T[\alpha p(x)] = \alpha T[p(x)]$

m. izq:

$T[\alpha p(x)] = T(\alpha a_0 + \alpha a_1 x + \alpha a_2 x^2)$ prod. de vector por escalar

$= \alpha a_0 + \alpha a_1 x$ Aplicando la R.T.

m. der:

$\alpha T[p(x)] = \alpha (a_0 + a_1 x)$ Aplicando RT

$= \alpha a_0 + \alpha a_1 x$ Producto de vector por escalar

$\therefore T[\alpha p(x)] = \alpha T[p(x)]$

y $\therefore$ T es lineal.

27) $T: P_3 \to M_{22}$: $T(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) = \begin{bmatrix} a_0 + a_1 & a_1 + a_2 \\ a_2 + a_3 & a_3 + a_0 \end{bmatrix}$

Sean $p(x), q(x) \in P_3$ y $\alpha \in \mathbb{R}$., donde $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ y $q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3$

1) $T[p(x) + q(x)] = T[p(x)] + T[q(x)]$

miembro izquierdo:

$T[p(x) + q(x)] = T[(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + (a_3 + b_3)x^3]$ Suma de polinomios y agrupando términos.

$= \begin{bmatrix} a_0 + b_0 + a_1 + b_1 & a_1 + b_1 + a_2 + b_2 \\ a_2 + b_2 + a_3 + b_3 & a_3 + b_3 + a_0 + b_0 \end{bmatrix}$ Aplicando RT.

m. derecho:

$T[p(x)] + T[q(x)] = \begin{bmatrix} a_0 + a_1 & a_1 + a_2 \\ a_2 + a_3 & a_3 + a_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 + b_1 & b_1 + b_2 \\ b_2 + b_3 & b_3 + b_0 \end{bmatrix}$ Aplicando R.T.

$= \begin{bmatrix} a_0 + a_1 + b_0 + b_1 & a_1 + a_2 + b_1 + b_2 \\ a_2 + a_3 + b_2 + b_3 & a_3 + a_0 + b_3 + b_1 \end{bmatrix}$ Suma de matrices

$\therefore T[p(x)+q(x)] = T[p(x)] + T[q(x)]$

2) $T[\alpha p(x)] = ?$ tarea

Tarea. Grossman pp. 487 probs 15-31, 39

Hay dos transformaciones lineales que es importante conocer: la transformación cero y la transformación identidad.

Definición 13 **Transformación Cero**

Sean V y W espacios vectoriales, y sea $T: V \to W$ definida como:

$$T(\bar{v}) = \bar{0} \quad \text{para todo } \bar{v} \in V,$$

T es lineal.

Demostración

Sean $\bar{u}, \bar{v} \in V$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces:

1) $T(\bar{u}+\bar{v}) = T(\bar{u}) + T(\bar{v})$

m. izq:

$T(\bar{u}+\bar{v}) = \bar{0}$

m. derecho:

$T(\bar{u}) + T(\bar{v}) = \bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$

$\therefore T(\bar{u}+\bar{v}) = T(\bar{u}) + T(\bar{v})$

2) $T(\alpha \bar{u}) = \alpha T(\bar{u})$

$\bar{0} = \alpha \bar{0}$

$\bar{0} = \bar{0}$

$\therefore T(\alpha \bar{u}) = \alpha T(\bar{u})$

$\therefore$ T es lineal

Definición 14 **Transformación identidad**

Sea V un espacio vectorial y sea $I: V \to V$ definida como:

$$I(\bar{v}) = \bar{v}, \quad \forall\, \bar{v} \in V.$$

I es lineal.

Demostración

Sean $\bar{u}, \bar{v} \in V$ y $\alpha \in \mathbb{R}$

1) $I(\bar{u}+\bar{v}) = \bar{u}+\bar{v}$

$I(\bar{u}) + I(\bar{v}) = \bar{u}+\bar{v}$

$\therefore I(\bar{u}+\bar{v}) = I(\bar{u}) + I(\bar{v})$

2) $I(\alpha\bar{u}) = \alpha\bar{u}$

$\alpha I(\bar{u}) = \alpha\bar{u}$

$\therefore I(\alpha\bar{u}) = \alpha I(\bar{u})$

$\therefore$ I es lineal.

Teorema 13

Sea $T: V \to W$ una tranoformación lineal.
Entonces, para todos los vectores $\bar{u}, \bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$ y todos los escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$:

1) $T(\bar{0}_V) = \bar{0}_W$ SIEMPRE
2) $T(\bar{u}-\bar{v}) = T(\bar{u}) - T(\bar{v})$
3) $T(\alpha_1\bar{v}_1 + \alpha_2\bar{v}_2 + \dots + \alpha_n\bar{v}_n) = \alpha_1 T(\bar{v}_1) + \alpha_2 T(\bar{v}_2) + \dots + \alpha_n T(\bar{v}_n)$

$$\begin{cases} T(\bar{u}+\bar{v}) = T(\bar{u}) + T(\bar{v}) \\ T(\alpha\bar{u}) = \alpha T(\bar{u}) \end{cases}$$

Este teorema nos sirve para encontrar la Regla de la Tranoformación, especialmente el inciso 3.

Obtención de la Regla de Tranoformación

Ejemplo

Sea T una tranoformación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ y suponga que:

$$\left.\begin{array}{l} T(1,0,0) = (2,3) \\ T(0,1,0) = (-1,4) \\ T(0,0,1) = (5,-3) \end{array}\right\} \text{imágenes de los vectores de la base canónica en } \mathbb{R}^3$$

Calcule $T(3,-4,5)$ y obtenga la Regla de la Tranoformación.

Solución

Expresemos $(3,-4,5)$ en términos de la base canónica de $\mathbb{R}^3$:

$$(3,-4,5) = 3(1,0,0) - 4(0,1,0) + 5(0,0,1)$$

Apliquemos T en ambos miembros:

$$T(3,-4,5) = T[3(1,0,0) - 4(0,1,0) + 5(0,0,1)]$$

Con prop. 3 Teorema 13, ya que T es lineal:

$$T(3,-4,5) = 3T(1,0,0) - 4T(0,1,0) + 5T(0,0,1)$$

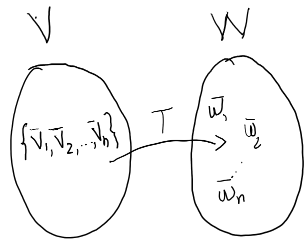
Sustituyendo las imágenes de los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ (dato):

$$T(3,-4,5) = 3(2,3) - 4(-1,4) + 5(5,-3)$$
$$= (6,9) + (4,-16) + (25,-15)$$
$$T(3,-4,5) = (35,-22)$$

La Regla de la transformación será:

$$T(x,y,z) = x(2,3) + y(-1,4) + z(5,-3)$$
$$T(x,y,z) = (2x-y+5z,\ 3x+4y-3z)$$

Teorema 14



Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con base $B = \{\bar v_1, \bar v_2, \dots, \bar v_n\}$. Sea W un espacio vectorial que contiene a los vectores $\bar w_1, \bar w_2, \dots, \bar w_n$. Entonces existe una transformación lineal ÚNICA $T: V \to W$ tal, que $T\bar v_i = \bar w_i$, para $i = 1, 2, \dots, n$

Ejemplo

Sea $T: M_{22} \to \mathbb{R}^3$, con T lineal, y sean:

$$T\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix} = (1,1,1)$$

$$T\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix} = (1,0,0)$$

$$T\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix} = (1,1,1)$$

$$T\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix} = (0,0,1)$$

$B_c = \left\{ \begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix} \right\}$ base canónica de M_{22}

a) ¿Cuál será la Regla de la Transformación?

b) $T\begin{bmatrix}3&-2\\1&5\end{bmatrix} = \ ???$

Solución

a) Expresamos una matriz cualquiera de M_{22} como combinación lineal de las matrices de la base canónica de M_{22}:

$$\begin{bmatrix}x&y\\z&w\end{bmatrix} = x\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix} + z\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix} + w\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$$

Aplicamos T en ambos miembros de la igualdad:

$$T\left\{\begin{bmatrix}x&y\\z&w\end{bmatrix}\right\} = T\left\{x\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix} + z\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix} + w\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}$$

Como T es lineal:

$$T\left\{\begin{bmatrix}x&y\\z&w\end{bmatrix}\right\} = T\left\{x\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\right\} + T\left\{y\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\right\} + T\left\{z\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\right\} + T\left\{w\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}$$ Teorema 13

Como T es lineal:

$$T\left\{\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\right\} = T\left\{x\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\} + T\left\{y\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\} + T\left\{z\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\} + T\left\{w\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\} \quad \text{Teorema 13}$$

Como T es lineal:

$$T\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = xT\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + yT\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + zT\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + wT\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Teorema 13}$$

Sustituyendo valores:

$$T\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = x(1,1,1) + y(1,0,0) + z(1,1,1) + w(0,0,1)$$

Realizando operaciones con vectores:

$$\boxed{T\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = (x+y+z,\, x+z,\, x+z+w)} \rightarrow \text{Regla de la Transformación}$$

b) $T\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = (3-2+1,\, 3+1,\, 3+1+5)$

$$T\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = (2,4,9)$$

Ejemplo Sea $T: P_3 \rightarrow P_2$, T lineal, y sean:

$T(1) = 1+x$

$T(x) = 2+x^2$

$T(x^2) = -3+2x$

$T(x^3) = 1-x$

¿Cuál es la Regla de la Transformación?

Solución

Traemos un polinomio de P_3 y lo expresamos como combinación lineal de los polinomios de la base canónica de P_3: $\{1, x, x^2, x^3\}$

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = a_0(1) + a_1(x) + a_2(x^2) + a_3(x^3)$$

Tomando la transformación en ambos miembros:

$$T(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a\,x^3) = T(a_0(1) + a_1(x) + a_2(x^2) + a_3x^3)$$

Por Teorema 13 (T lineal)

$$T(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a\,x^3) = T[a_0(1)] + T[a_1(x)] + T[a_2(x^2)] + T[a_3(x^3)]$$
$$= a_0T(1) + a_1T(x) + a_2T(x^2) + a_3T(x^3)$$

Sustituyendo valores:

$$T(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a\,x^3) = a_0(1+x) + a_1(2+x^2) + a_2(-3+2x) + a_3(1-x)$$
$$= a_0 + a_0x + 2a_1 + a_1x^2 - 3a_2 + 2a_2x + a_3 - a_3x$$

$$\therefore\ T(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a\,x^3) = (a_0 + 2a_1 - 3a_2 + a_3) + (a_0 + 2a_2 - a_3)x + a_1x^2 \rightarrow \text{Regla de la Tranformación.}$$

Tarea: prob 41 pág 488 Grossman

Ejemplo Sea $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, donde T es lineal y $T(2,1) = (0,1)$, $T(1,2) = (6,4)$.
¿Cuál es la imagen del vector $(-5,7)$? Es decir $T(-5,7) = ?$
→ en la nueva base?

Solución

$B = \{(2,1), (1,2)\}$ ← no es la base canónica de $\mathbb{R}^2$

Ya que las imágenes que se dan en el ejercicio no son las imágenes de los vectores de la base canónica en $\mathbb{R}^2$, se tiene que expresar el vector $(-5,7)$ en términos de los vectores de la nueva base $B = \{(2,1), (1,2)\}$, es decir:

$$(-5,7) = C_1(2,1) + C_2(1,2)$$
$$= (2C_1 + C_2, C_1 + 2C_2)$$
$$-5 = 2C_1 + C_2$$
$$7 = C_1 + 2C_2$$

Representación matricial:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Resolviendo por Gauss:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 7 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & -5 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ 0 & -3 & -19 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 19/3 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -17/3 \\ 0 & 1 & 19/3 \end{array}\right] \qquad C_1 = -\frac{17}{3} \quad C_2 = \frac{19}{3}$$

$$\therefore \ (-5,7) = -\frac{17}{3}(2,1) + \frac{19}{3}(1,2)$$

Aplicando T en ambos miembros:

$$T(-5,7) = T\left[-\frac{17}{3}(2,1) + \frac{19}{3}(1,2)\right]$$

Por Teorema 14:

$$T(-5,7) = -\frac{17}{3}T(2,1) + \frac{19}{3}T(1,2)$$

Sustituyendo valores:

dato del problema

$$T(-5,7) = -\frac{17}{3}(0,1) + \frac{19}{3}(6,4)$$
$$= \left(0, -\frac{17}{3}\right) + \left(38, \frac{76}{3}\right)$$

$$T(-5,7) = \left(38, \frac{59}{3}\right)$$