Clase 19-03-21

jueves, 18 de marzo de 2021 12:55 p. m.

Teorema 6

Un conjunto de m vectores en $\mathbb{R}^n$ es siempre linealmente dependiente si $m > n$.

Ejemplo: Los vectores $(2,-3,4)$, $(4,7,-6)$, $(18,-11,4)$ y $(2,-7,3)$ son linealmente dependientes.

$m = 4$ vectores
$n = 3$

Corolario

Un conjunto de vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$ debe contener, a lo más, n vectores.

En $\mathbb{R}^2$: a lo más 2 vectores (linealmente independientes)
En $\mathbb{R}^3$: ✓ ✓ ✓ 3 ✓ ✓ ✓
En M_{nn}: ✓ ✓ ✓ nxn matrices ✓ ✓
En P_n : ✓ ✓ ✓ n+1 polinomios ✓ ✓

Entonces tendremos que en el sistema $A\bar{x}=\bar{0}$, A será una matriz cuadrada (de nxn), y se podrán aplicar los siguientes teoremas:

→ nxn matrices en $M_{n\times n}$
n+1 polinomios en P_n

Teorema 7

Sean $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n$, n vectores en $\mathbb{R}^n$ y sea A una matriz de nxn cuyas columnas son $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n$. Entonces, $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n$ son linealmente independientes si y sólo si el sistema homogéneo $A\bar{x}=\bar{0}$ tiene solución única o solución trivial $\bar{x}=\bar{0}$ $(c_1=c_2=\ldots=c_n=0)$

Teorema Resumen

Sea A una matriz de nxn. Entonces las siguientes 8 afirmaciones son equivalentes:

1) A es invertible.
2) El sistema lineal homógeneo $A\bar{x}=\bar{0}$ tiene solución única o solución trivial $(\bar{x}=\bar{0})$
3) El sistema lineal no homogéneo $A\bar{x}=\bar{b}$ tiene solución única $(\bar{x}=A^{-1}\bar{b})$.
4) $[A|I] \to \ldots\ldots \to [I|A^{-1}]$
5) A es el producto de matrices elementales.
6) La forma escalonada por renglones de A tiene n pivotes.
7) $\det A \neq 0$.

8) Las columnas y renglones de A son linealmente independientes.

Tarea Grossman pag. 342 probs 1–16

Prob 1, pag 342

1) $\begin{bmatrix} 9 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -11 \\ -3 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -11 \\ 8 & -3 \end{bmatrix} \quad ; \quad |A| = -27 - (-88) = 61 \neq 0 \Rightarrow \text{los vectores son l. independientes}$$

Teorema 8

Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces $\det A \neq 0$ si y solo si las columnas de A (vectores $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n$) son linealmente independientes.

Ejemplos

1.- Los vectores $(2,-1,4)$, $(1,0,2)$ y $(3,-1,5)$ son linealmente independientes.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix} \quad ; \quad |A| = 2(2) - 1(-5+4) + 3(-2)$$

$$|A| = 4 + 1 - 6 = -1 \neq 0$$

Por lo tanto, son linealmente independientes.

Tarea pp. 342 probs 1-16

Determine si el conjunto dado es linealmente dependiente o independiente.

17.- $4-3x+3x^2,\ 4-2x-2x^2$

Con el determinante no se puede pues tenemos 2 polinomios en P_2.

Hacemos la combinación lineal:

$$C_1(4-3x+3x^2) + C_2(4-2x-2x^2) = 0+0x+0x^2$$

$$4C_1 - 3C_1x + 3C_1x^2 + 4C_2 - 2C_2x - 2C_2x^2 = 0+0x+0x^2$$

Agrupamos según la potencia de la variable:

$$(4C_1+4C_2) + (-3C_1-2C_2)x + (3C_1-2C_2)x^2 = 0+0x+0x^2$$

Igualamos términos según la potencia de la variable

$$\left.\begin{aligned} 4C_1 + 4C_2 &= 0 \\ -3C_1 - 2C_2 &= 0 \\ 3C_1 - 2C_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{SLH}$$

Representación matricial:

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad A\bar{x} = [0] \quad \text{SLH}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -3 & -2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad A\bar{x} = [0] \quad \text{SLH}$$

Resolviendo por Gauss:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 4 & 4 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \left.\begin{array}{l} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{array}\right\} \text{solución trivial}$$

$\therefore$ Los polinomios son linealmente independientes.

Tarea pp. 342 probs 18, 20, 21, 22, 23 y 24 Clase 17, 19, 25

19) En P_2: $-x,\ x^2-2x,\ 3x+5x^2$

$$\underbrace{[1, x, x^2]} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad |A| = 0 \Rightarrow \text{los polinomios son linealmente dependientes}$$

25) En M_{22}: $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Por el determinante:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 6 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}; \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 6 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 5$$

$|A| = 5$ $\therefore$ las matrices son linealmente independientes.

Tarea probs 26,27,28 , pag. 343 Grossman.

29) Determine una condición sobre los números a, b, c y d tal que los vectores (a, b) y (c, d) sean linealmente dependientes.

$$A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}; \quad |A| = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow ad - bc = 0$$

$$ad = bc$$

Tarea probs 31-34 pp. 343

33) ¿Para qué valores de α serán linealmente independientes los vectores $(3,2,1), (-2,-1,-1), (\alpha,5,2)$?

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & \alpha \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3(-2+5) + 2(4-5) + \alpha(-2+1) \neq 0$$

$$|A| = 9 - 2 - \alpha \neq 0 \Rightarrow 7 \neq \alpha$$

36) Demuestre que si los vectores $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n$ son linealmente dependientes en $\mathbb{R}^m$, con $m<n$, y si $\bar{v}_{n+1}$ es cualquier otro vector en $\mathbb{R}^m$, entonces el conjunto $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n, \bar{v}_{n+1}$ es linealmente dependiente.

Solución

Hipótesis: $c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 + \ldots + \underbrace{c_i}_{\neq 0}\bar{v}_i + \ldots + c_n\bar{v}_n = 0$

Al menos un $c_i \neq 0$

Por demostrar: $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n, \bar{v}_{n+1}$ son linealmente dependientes

$$c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 + \ldots + \underbrace{c_i}_{\neq 0}\bar{v}_i + \ldots + c_n\bar{v}_n + c_{n+1}\bar{v}_{n+1} = 0$$

Se sigue teniendo un $c_i \neq 0$ al menos (de la hipótesis)

37) Demuestre que si $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n$ $(n \geq 2)$ son linealmente independientes, entonces también lo son $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k$, donde $k<n$.

Solución:

$c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 + \ldots + c_n\bar{v}_n = 0$, $\quad c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$

Por demostrar: $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0$, $k<n$

$$c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 + \ldots + \underbrace{c_k}_{=0,\text{ ya que } k<n}\bar{v}_k + \ldots + c_n\bar{v}_n = 0$$

De los problemas 41 al 49 escriba las soluciones a los sistemas homogéneos dados en términos de uno o más vectores linealmente independientes.

41) $x_1 + x_2 + x_3 = 0$

Solución: $x_1 = -x_2 - x_3$

$x_2 \in \mathbb{R}$

$x_3 \in \mathbb{R}$

Entonces:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_3$$

Los vectores $(-1,1,0)$ y $(-1,0,1)$ son linealmente independientes

42) $x_1 - x_2 + 7x_3 - x_4 = 0$

$2x_1 + 3x_2 - 8x_3 + x_4 = 0$

Solución: se resuelve el Sistema Lineal Homogéneo:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 7 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -8 & 1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 7 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -22 & 3 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 7 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -22/5 & 3/5 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 13/5 & -2/5 & 0 \\ 0 & 1 & -22/5 & 3/5 & 0 \end{array}\right]$$

$x_1 = -\frac{13}{5}x_3 + \frac{2}{5}x_4$

$x_2 = \frac{22}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_4$

$x_3 \in \mathbb{R}$

$x_4 \in \mathbb{R}$

$x_3 \in \mathbb{R}$
$x_4 \in \mathbb{R}$

Matricialmente:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{13}{5} \\ \frac{22}{5} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_4$$

Los vectores $\left(-\frac{13}{5}, \frac{22}{5}, 1, 0\right)$ y $\left(\frac{2}{5}, -\frac{3}{5}, 0, 1\right)$ son linealmente independientes.

Tarea probs 43,48 pp 343,344 Grossman