Clase 26-05-21 Parte 1

martes, 25 de mayo de 2021 07:55 p. m.

El caso complejo es análogo al caso real, pero tiene sus diferencias.
Una matriz simétrica compleja A se llama hermitiana, y se denota por A^*, donde:

$A^* = \bar{A}^t = A$, es decir, si la transpuesta conjugada de A es igual a A, entonces se dice que A es hermitiana y se puede diagonalizar. (Tanto las matrices simétricas (caso real) como las matrices hermitianas (caso complejo) son cuadradas).

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{A}^t = \begin{bmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & 0 \end{bmatrix} = A \Rightarrow A \text{ es hermitiana}$$

Valores propios:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1-i \\ 1+i & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= -\lambda(1-\lambda) - (1-i)(1+i) \\ &= -\lambda + \lambda^2 - (1+i-i-i^2) \\ &= \lambda^2 - \lambda - 2 \end{aligned}$$

$$p(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda-2)$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= -1 \\ \lambda_2 &= 2 \end{aligned}\right\} \text{ valores propios reales y diferentes} \Rightarrow A \text{ se puede diagonalizar}$$

Vectores propios:

Para $\lambda_1 = -1$, $(A - \lambda I)\bar{v} = \bar{0}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$(1+i)x_1 + x_2 = 0$

$(1+i)x_1 = -x_2$, $\bar{v}_1 = (-1, 1+i)$ para $x_1 = -1$

Para $\lambda_2 = 2$; $(A - \lambda I)\bar{v} = \bar{0}$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1-i \\ 1+i & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$-x_1 + (1-i)x_2 = 0$

$x_1 = (1-i)x_2$, $V_2 = (1-i, 1)$ para $x_2 = 1$
$x_2 \in \mathbb{R}$

Los vectores $\bar{V}_1$ y $\bar{V}_2$ son linealmente independientes (verificar), por lo tanto A es diagonalizable, y:

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 1-i \\ 1+i & 1 \end{bmatrix}$$

Verificación:

$$|C| = (-1)(1) - (1-i)(1+i) = -1 - (1+i-i-i^2) = -1-(1+1) = -1-2 = -3$$

$$\therefore\ C^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1+i \\ -1-i & -1 \end{bmatrix}$$

$$C^{-1}AC = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1+i \\ -1-i & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1-i \\ 1+i & 1 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1+(-1+i)(1+i) & 1-i \\ -1-i-1-i & (-1-i)(1-i) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1-i \\ 1+i & 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 1-i \\ -2-2i & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1-i \\ 1+i & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Teorema 25 Teorema de Cayley-Hamilton

Toda matriz cuadrada satisface su propia ecuación característica. Es decir, si $p(\lambda)=0$ es la ecuación característica de A, entonces $p(A) = [0]$

Ejemplo Grossman pág. 637

Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ (Ejemplo 4)

$p(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6$

$p(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$

Entonces se calcula A^3, A^2 y:

$$A^3 - 2A^2 - 5A + 6I = \begin{bmatrix} 11 & -3 & 22 \\ 29 & 4 & 17 \\ 16 & 3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -12 & -2 & -2 \\ -14 & 0 & -22 \\ -6 & 2 & -16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & 5 & -20 \\ -15 & -10 & 5 \\ -10 & -5 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El Teorema de Cayley-Hamilton a veces se usa para calcular la inversa de una matriz. Si existe A^{-1} y $p(A)=[0]$, entonces $A^{-1}p(A) = [0]$. Es decir:

Si $p(\lambda)=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\dots+a_1\lambda+a_0$ entonces:

$$p(A)=A^n+a_{n-1}A^{n-1}+\dots+a_1A+a_0I=[0]$$

Premultiplicando ambos miembros por A^{-1}:

$$A^{-1}p(A)=A^{n-1}+a_{n-1}A^{n-2}+\dots+a_2A+a_1I+a_0A^{-1}=[0]$$

Despejando A^{-1} del último término:

$$\boxed{A^{-1}=\frac{1}{a_0}\left(-A^{n-1}-a_{n-1}A^{n-2}-\dots-a_2A-a_1I\right)}$$

Nótese que $a_0\neq 0$ y además $a_0=\det A$ (investigar por qué)

Ejemplo Calcular A^{-1} aplicando el Teorema de Cayley-Hamilton

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&4\\3&2&-1\\2&1&-1\end{bmatrix}$$ (Ejemplo anterior)

$p(\lambda)=\lambda^3-2\lambda^2-5\lambda+6$; donde: $n=3$, $a_0=6$, $a_1=-5$, $a_2=-2$, $a_3=1$

$$\therefore A^{-1}=\frac{1}{6}\left(-A^2+2A+5I\right)$$

$$=\frac{1}{6}\left(\begin{bmatrix}-6&-1&-1\\-7&0&-11\\-3&1&-8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&-2&8\\6&4&-2\\4&2&-2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{bmatrix}\right)=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}1&-3&7\\-1&9&-13\\1&3&-5\end{bmatrix}$$

Tarea pp 641, 642 probs 1-10

Supóngase que $A=\begin{bmatrix}3&-4\\2&-3\end{bmatrix}$ y se quiere calcular A^{20}.

Tenemos que $D=C^{-1}AC$, de modo que $A=CDC^{-1}$. Si se quiere calcular $A^n=CD^nC^{-1}$ para $n\in\mathbb{N}$.

Entonces: $p(\lambda)=(3-\lambda)(-3-\lambda)+8$

$$p(\lambda)=\lambda^2-1$$
$$\lambda_1=1 \qquad \Rightarrow \quad D=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$$
$$\lambda_2=-1$$

Para $\lambda_1=1$, $(A-\lambda I)\bar{v}=\bar{0}$

$$\begin{bmatrix}2&-4\\2&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \qquad 2x_1-4x_2=0,\ x_1=2x_2,\ x_2\in\mathbb{R} \quad \therefore \bar{v}_1=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$$

Para $\lambda_2=-1$, $(A-\lambda I)\bar{v}=\bar{0}$

$$\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{array}{l} x_1 = x_2 \\ x_2 \in \mathbb{R} \end{array} \qquad \therefore \ \bar{V}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad C^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \ A^{20} = C D^{20} C^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^{20}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$