Clase 04-01-21

domingo, 3 de enero de 2021 01:01 p. m.

Definición 54 Matriz diagonal

Es una matriz de $n \times n$ cuyos elementos fuera de la diagonal principal son cero. Es decir, si $A = [a_{ij}]$, $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Definición 55 Matriz Triangular

Una matriz cuadrada se llama triangular superior (inferior) si todos sus elementos abajo (arriba) de la diagonal principal son cero. Ejemplos

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$ Matriz Δ superior

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ -5 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$ Matriz Δ inferior

Una matriz diagonal es invertible si y sólo si todos los elementos de la diagonal son diferentes de cero.

Definición 56 Transpuesta de una matriz Grossman pag. 127

Sea A una matriz de $m \times n$. Entonces la transpuesta de A, que se escribe A^t es la matriz de $n \times m$ que se obtiene al intercambiar los renglones por las columnas de A. Es decir, si $A=[a_{ij}]$,

$A^t=[a_{ji}]$.

Ejemplos

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -4 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}_{3\times 2}, \quad C=\begin{bmatrix} 1 & 4 & -6 \\ 0 & -1 & 6 \\ -3 & 5 & 7 \\ 2 & 3 & 8 \end{bmatrix}_{4\times 3}$$

$$A^t=\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}, \quad B^t=\begin{bmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 6 & 3 & -1 \end{bmatrix}_{2\times 3}, \quad C^t=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 & 3 \\ -6 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}_{3\times 4}$$

Teorema 33

Suponga que $A=[a_{ij}]$ es una matriz de $n\times m$, y B es una matriz de $m\times p$. Entonces:

1) $(A^t)^t = A$

2) $(AB)^t = B^t A^t$ Grossman pág. 128

3) Si A y B son de $n\times m$, entonces $(A+B)^t = A^t + B^t$.

4) Si A es invertible, entonces A^t es invertible y

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t.$$

Demostración

1) $A=[a_{ij}]$

$A^t=[a_{ji}]$ def 56

$(A^t)^t=[a_{ij}]=A$ def 56

3) $(A+B)^t = A^t + B^t$

m. izquierdo:

$A+B=[a_{ij}]+[b_{ij}]$ Sustitución

$=[a_{ij}+b_{ij}]$ def. 48 Suma de matrices

$(A+B)^t=[a_{ji}+b_{ji}]$ def 56

$= [a_{ji}] + [b_{ji}]$ def 48

$= A^t + B^t$ sustitución

4) $AA^{-1} = I$

$(AA^{-1})^t = I^t = I$

$= \underbrace{(A^{-1})^t}_{(A^t)^{-1}} A^t = I$ Teorema 33:2)

$(A^t)^{-1}$ def. 53

$\therefore (A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$

Definición 57 Matriz Simétrica

Se define una matriz simetrica A como una matriz de $n \times n$ tal que:

$$A = A^t$$

Ejemplos

I, $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & -4 & 5 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 7 & -8 \\ 2 & 7 & -3 & 5 \\ -3 & -8 & 5 & 9 \end{bmatrix}$

Def 58 Otra forma de escribir el producto escalar

Sean $\bar{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}_{n\times 1}$ y $\bar{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}_{n\times 1}$ dos vectores columna de n componentes.

Entonces $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{a}^t \bar{b}$

Prob 19 pag 131 Grossman

20) Si A y B son matrices simétricas, demuestre que A+B es simétrica

Hipótesis: $A = A^t$ $B = B^t$

$[a_{ij}] = [a_{ji}]$, $[b_{ij}] = [b_{ji}]$

Por demostrar: $A + B = (A+B)^t$

$A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}]$ def 48

Demo de Carlos

$A + B = A^t + B^t$ por hipótesis

$= (A+B)^t$ por Teorema 33 inciso 3 LQQD

$A+B = [a_{ij}] + [b_{ij}]$ def 48
$= [a_{ji}] + [b_{ji}]$ por hipótesis
$= A^t + B^t$ def 56
$= (A+B)^t$ Teorema 33.3) LQQD

$A+B = A^t + B^t$ por hipótesis
$= (A+B)^t$ por Teorema 33 inciso 3 LQQD

Problemas 1-16 pag 131 Grossman.

Tarea probs 22, 23, 29 y 33-38 pag. 132

Transposición conjugada y matrices hermitianas.

En el caso complejo, al trasponer una matriz también tenemos que conjugarla. Entonces la transpuesta conjugada de A, denotada por A^* está definida por:

def 59 $\overline{A^t} = A^* = [\overline{a}_{ji}]$.

Ejemplo Calcule A^* si $A = \begin{bmatrix} 1+i & -4+2i \\ 3 & 6-3i \end{bmatrix}$

Solución:

$$A^* = \begin{bmatrix} 1-i & 3 \\ -4-2i & 6+3i \end{bmatrix}$$

Def 61 Matriz hermitiana (Caso real: $A = A^t$)

Es una matriz compleja de nxn tal que $A^* = A$.

Ejemplo Demuestre que la matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 3-2i \\ 3+2i & 6 \end{bmatrix}$

es hermitiana.

Solución

$$A^t = \begin{bmatrix} 4 & 3+2i \\ 3-2i & 6 \end{bmatrix}$$

$$A^* = \overline{A}^t = \begin{bmatrix} 4 & 3-2i \\ 3+2i & 6 \end{bmatrix} \text{ LQQD}$$