Clase 24-03-21

martes, 23 de marzo de 2021 11:45 a. m.

Tarea: probs 1-33 pp. 358, 359

18) Encuentre una base en $\mathbb{R}^3$ para el conjunto de vectores en la recta $x=3t$, $y=-2t$, $z=t$

Solución:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} t, \quad B_H = \{(3,-2,1)\} \text{ para } t=1, \quad \dim H = 1$$

20) En $\mathbb{R}^4$ sea $H = \{(x,y,z,w) : ax+by+cz+dw=0\}$, donde a, b, c y $d \neq 0$

a) Demuestre que H es un subespacio de $\mathbb{R}^4$

b) Encuentre una base para H

c) ¿Cuánto vale $\dim H$?

a) Tarea

b) $w = -\frac{a}{d}x - \frac{b}{d}y - \frac{c}{d}z$

$x, y, z \in \mathbb{R}$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{a}{d} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{b}{d} \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{c}{d} \end{bmatrix} z \Rightarrow B_H = \left\{\left(1,0,0,-\frac{a}{d}\right), \left(0,1,0,-\frac{b}{d}\right), \left(0,0,1,-\frac{c}{d}\right)\right\}$$

c) $\dim H = 3$

De los problemas 23 al 31 encuentre una base para el espacio de solución del sistema homogéneo dado:

23) $x - y = 0$

$-2x + 2y = 0$

por Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad x - y = 0 \Rightarrow x = y$$

$y \in \mathbb{R}$ (1 variable libre)

Expresando la solución en términos de un vector linealmente independiente:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} y \qquad B_H = \{(1,1)\} \text{ para } y=1, \quad \dim H = 1$$

26) $x - y - z = 0$

$2x - y + z = 0$

Resolviendo el sistema:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \to R_1 + R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left.\begin{array}{l} x + 2z = 0 \to x = -2z \\ y + 3z = 0 \to y = -3z \\ z \in \mathbb{R} \qquad\quad z \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \text{Recta en } \mathbb{R}^3 \text{ que pasa por el origen}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} z, \Rightarrow B_H = \{(-2,-3,1)\}, \text{ para } z=1, \ \dim H = 1$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} z, \Rightarrow B_H = \{(-2,-3,1)\}, \text{ para } z=1, \ \dim H = 1$$

27) $-x_1 + 3x_2 - 12x_3 - 5x_4 = 0$

$7x_1 - 3x_2 + x_3 - 9x_4 = 0$

Resolviendo el sistema:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & -12 & -5 & 0 \\ 7 & -3 & 1 & -9 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \to -R_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 12 & 5 & 0 \\ 7 & -3 & 1 & -9 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 7R_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 12 & 5 & 0 \\ 0 & 18 & -83 & -44 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \to \frac{R_2}{18}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 12 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{83}{18} & -\frac{44}{18} & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \to R_1 + 3R_2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 12 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{83}{18} & -\frac{44}{18} & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -11/6 & -7/3 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{83}{18} & -\frac{44}{18} & 0 \end{array}\right]$$

$x_1 = \frac{11}{6} x_3 + \frac{7}{3} x_4$

$x_2 = \frac{83}{18} x_3 + \frac{44}{18} x_4$

$x_3 \in \mathbb{R}$

$x_4 \in \mathbb{R}$

Entonces:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{6} \\ \frac{83}{18} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} \frac{7}{3} \\ \frac{44}{18} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_4 \Longrightarrow B_H = \left\{ \left(\tfrac{11}{6}, \tfrac{83}{18}, 1, 0\right), \left(\tfrac{7}{3}, \tfrac{44}{18}, 0, 1\right) \right\}, \ \dim H = 2$$

28) $2x + 3y - 4z = 0$

$x - y + z = 0$

$2x + 8y - 10z = 0$

Resolviendo el sistema:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & -10 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 0 \\ 2 & 8 & -10 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -6 & 0 \\ 0 & 10 & -12 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \to \frac{R_2}{5}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -6/5 & 0 \\ 0 & 10 & -12 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 10R_2]{R_1 \to R_1 + R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/5 & 0 \\ 0 & 1 & -6/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x = \frac{1}{5} z$

$y = \frac{6}{5} z$

$z \in \mathbb{R}$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/5 \\ 6/5 \\ 1 \end{bmatrix} z, \quad B_H = \left\{ \left(\tfrac{1}{5}, \tfrac{6}{5}, 1\right) \right\}, \text{ si } z = 1 \quad \dim H = 1$$

Teorema 11

Sea H un subespacio de un espacio vectorial V de dimensión finita. Entonces H tiene dimensión finita y $\dim H \leq \dim V$

Matriz de Transición o Matriz de Cambio de Base

Ejemplo

Sean las bases de P_1: $B_1 = \{1-3t, 3t\}$ y $B_2 = \{3-2t, 1+t\}$

Obtener la matriz de transición de la base B_1 a la base B_2.

1) Expresamos los polinomios de B_1 en términos de los polinomios de B_2:

$$1-3t = C_1(3-2t) + C_2(1+t) \quad ①$$
$$3t = C_1(3-2t) + C_2(1+t) \quad ②$$

2) Realizando operaciones:

$$1-3t = (3C_1 + C_2 + (-2C_1 + C_2)t) \quad ①'$$
$$3t = (3C_1 + C_2 + (-2C_1 + C_2)t) \quad ②'$$

3) Igualando los coeficientes de ①' y ②' según la potencia de la variable:

$$\left.\begin{array}{l} 1 = 3C_1 + C_2 \\ -3 = -2C_1 + C_2 \end{array}\right\} \text{Sistema } Ⓐ$$

$$\left.\begin{array}{l} 0 = 3C_1 + C_2 \\ 3 = -2C_1 + C_2 \end{array}\right\} \text{Sistema } Ⓑ$$

4) Resolviendo sistema Ⓐ: $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1/3 & 1/3 \\ -2 & 1 & -3 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 5/3 & -7/3 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & -7/5 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & -7/5 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4/5 \\ 0 & 1 & -7/5 \end{array}\right]$$

1ª Columna de la Matriz de Transición

Resolviendo sistema Ⓑ: $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1/3 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1/3 & 0 \\ 0 & 5/3 & 3 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 9/5 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -3/5 \\ 0 & 1 & 9/5 \end{array}\right]$$

2ª Columna de la Matriz de Transición

5) $$\therefore \quad M_{B_1-B_2} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{7}{5} & \frac{9}{5} \end{bmatrix}$$

Coordenadas de $1-3t$ en la base B_2 — coordenadas de $3t$ en la base B_2

Podemos hacer estos dos últimos pasos en uno solo, pues la matriz de coeficientes es la misma para los dos sistemas, y las operaciones elementales o de renglón también, así pues:

$$\begin{array}{cccc} & & \text{1er.} & \text{2do} \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -3 & 3 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ -2 & 1 & -3 & 3 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 5/3 & -7/3 & 3 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & -7/5 & 9/5 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{5} & \frac{9}{5} \end{array}\right]$$

$$M_{B_1 \rightarrow B_2} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{7}{5} & \frac{9}{5} \end{bmatrix}$$

Ejercicio en clase

a) Encuentre la matriz de transición de la base $B_1 = \{1, 1+x\}$ a la base $B_2 = \{2+3x, -4+5x\}$

b) Obtener las coordenadas del polinomio $p_1(x) = 2x$ en la base B_2.

Solución:

a)

Combinación Lineal:

$1 = C_1(2+3x) + C_2(-4+5x)$ ①

$1+x = C_1(2+3x) + C_2(-4+5x)$ ②

Realizando operaciones:

$1 = 2C_1 + 3C_1x - 4C_2 + 5C_2x$ (1')

$1+x = 2C_1 + 3C_1x - 4C_2 + 5C_2x$ (2')

Agrupando según la potencia de la variable:

$1 = (2C_1 - 4C_2) + (3C_1 + 5C_2)x$ (1'')

$1+x = (2C_1 - 4C_2) + (3C_1 + 5C_2)x$ (2'')

Igualando coeficientes según la potencia de la variable:

$$\left.\begin{aligned} 1 &= 2C_1 - 4C_2 \\ 0 &= 3C_1 + 5C_2 \end{aligned}\right\} \text{Sistema ①}$$

$$\left.\begin{aligned} 1 &= 2C_1 - 4C_2 \\ 1 &= 3C_1 + 5C_2 \end{aligned}\right\} \text{Sistema ②}$$

Representación matricial:

Sistema ①

Sistema ②

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Resolviendo por Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1/2 & 1/2 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 11 & -3/2 & -1/2 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -3/22 & -1/22 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 5/22 & 9/22 \\ 0 & 1 & -3/22 & -1/22 \end{array}\right]$$

$$\underbrace{\begin{array}{cc} 5/22 & 9/22 \\ -3/22 & -1/22 \end{array}}_{M_{T_{B_1 \to B_2}}}$$

$$\therefore M_{B_1 \to B_2} = \frac{1}{22} \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$