Parcial 1 <u>Solución</u> 19-10-20

Demostrar por inducción matemática la validez de las siguientes proposiciones:

Prob 1) $1^2+2^2+3^2+\dots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}\quad\forall\ n\in\mathbb{N}$

Paso 1: $n=1\quad 1=\dfrac{1(2)(3)}{6}=1$ se cumple

Paso 2: $n=k$ (Hipótesis)

$$1^2+2^2+3^2+\dots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}\qquad(1)$$

Paso 2: $n=k+1$ (Tesis)

$$1^2+2^2+3^2+\dots+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6}$$

$$1^2+2^2+3^2+\dots+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}\qquad(2)$$

Paso 3 Sumando $(k+1)^2$ en ambos miembros de (1):

$$1^2+2^2+3^2+\dots+k^2+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2\qquad(1A)$$

Desarrollando miembro derecho de $(1A)$:

$$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}$$

$$=\frac{(k+1)\left[k(2k+1)+6(k+1)\right]}{6}$$

$$=\frac{(k+1)\left(2k^2+k+6k+6\right)}{6}=\frac{(k+1)\left[2k^2+3k+4k+6\right]}{6}$$

$$=\frac{(k+1)\left[k(2k+3+4)+6\right]}{6}=\frac{(k+1)\left[k(2k+3)+4k+6\right]}{6}$$

$$=\frac{(k+1)\left[k(2k+3)+2(2k+3)\right]}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

Por tanto, como $(1A)=(2)$, la proposición $1^2+2^2+3^2+\dots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ es válida $\forall\ n\in\mathbb{N}$

Prob 2) $n < \dfrac{n^2 - n}{12} + 2,$ si $n > 10,$ $n \in \mathbb{N}$

1. Para $n = 11$:

$$11 < \frac{121 - 11}{12} + 2$$

$$11 < \frac{110}{12} + 2$$

$$132 < 110 + 24$$

$132 < 134 \Rightarrow$ se cumple.

2. Hipótesis de inducción, para $n = k$:

$$k < \frac{k^2 - k}{12} + 2 \quad \Rightarrow \quad (1)$$

3. Tesis: por demostrar para $n = k + 1$:

$$k + 1 < \frac{(k+1)^2 - (k+1)}{12} + 2 \quad \Rightarrow \quad (2)$$

4. Paso inductivo: sumando 1 en ambos miembros de (1):

$$k + 1 < \frac{k^2 - k}{12} + 3 \Rightarrow \quad (1\text{A})$$

4. Por transitividad:

Si $k + 1 < \dfrac{k^2 - k}{12} + 3$ (1A)

y $\dfrac{k^2 - k}{12} + 3 < \dfrac{(k+1)^2 - (k+1)}{12} + 2$ Por demostrar (3)

$\therefore$ $k + 1 < \dfrac{(k+1)^2 - (k+1)}{12} + 2$ (2) Tesis

Demostrando:

$$\frac{k^2 - k + 36}{12} < \frac{(k+1)^2 - (k+1) + 24}{12}$$

$$\frac{k^2 - k + 36}{12} + < \frac{k^2 + 2k + 1 - k - 1 + 24}{12}$$

Simplificando:

$$k^2 - k + 36 < k^2 + 2k - k + 24$$

$$12 < 2k \quad \Rightarrow \quad 6 < k$$

Si $k = 6,$ en (3): $66 < 66,$ no se cumple.

Si $k = 7,$ $78 < 80$ $\Rightarrow$ $k > 6$ para $n = k + 1$

Por tanto la proposición $n < \dfrac{n^2 - n}{12} + 2$ es válida si $n > 10$.

Prob 3) $\frac{2}{3}\left(2n^3+3n^2+n\right)\in\mathbb{N}$

para $n=1$: $\frac{2}{3}\left(2+3+1\right)=4\in\mathbb{N}$

para $n=k$ Hipótesis:

$$\frac{2}{3}\left(2k^3+3k^2+k\right)\in\mathbb{N} \quad (1)$$

para $n=k+1$ Tesis:

$$\frac{2}{3}\left(2\left(k+1\right)^3+3\left(k+1\right)^2+\left(k+1\right)\right) \quad (2)$$

Desarrollando la tesis:

$$\frac{2}{3}\left(2k^3+6k^2+6k+2+3k^2+6k+3+k+1\right)$$

Simplificando e identificando la hipótesis:

$$\frac{2}{3}\left(2k^3+3k^2+k\right)+\frac{2}{3}\left(6k^2+12k+6\right)$$

$$\in\mathbb{N}$$

Donde:

$$\frac{2}{3}\left(6k^2+12k+6\right)=\frac{2\cdot 6}{3}\left(k^2+2k+1\right)$$

$$=4\left(k^2+2k+1\right)$$

$4\in\mathbb{N},\ 1\in\mathbb{N},\ 2\in\mathbb{N}$

$k^2=k\cdot k\in\mathbb{N}$ por la cerradura del producto

$2k\in\mathbb{N}$ por la cerradura del producto

$k^2+2k+1\in\mathbb{N}$ por la cerradura de la suma

$4\left(k^2+2k+1\right)\in\mathbb{N}$ por la cerradura del producto

y $\frac{2}{3}\left(2k^3+3k^2+k\right)+\frac{2}{3}\left(6k^2+12k+6\right)\in\mathbb{N}$ por la cerradura de la suma

Por lo tanto, la proposición $\frac{2}{3}\left(2n^3+3n^2+n\right)\in\mathbb{N}$ se cumple $\forall\ n\in\mathbb{N}$

Prob 4) n^3+5n es divisible entre 3, $\forall\ n\in\mathbb{N}$.

$$n^3+5n=3p,\ p\in\mathbb{N}\ \forall\ n\in\mathbb{N}$$

para $n=1$: $1^3+5=3p$

$$6=3p$$

$$6=6 \text{ para } p=2$$

para $n=k$ Hipótesis:

$$k^3+5k=3p,\ \ p\in\mathbb{N} \text{ para algún } k\in\mathbb{N} \qquad (1)$$

para $n=k+1$ Tesis:

$$(k+1)^3+5(k+1)=3m,\ \ m\in\mathbb{N} \qquad (2)$$

$$=k^3+3k^2+3k+1+5k+5=3m$$

$$=3p+3k^2+3k+6=3m$$

$$=3\left(p+k^2+k+2\right)=3m$$

$$p+k^2+k+2=m,\ \ \text{¿}m\in\mathbb{N}?$$

$2\in\mathbb{N},\ p\in\mathbb{N},\ k\in\mathbb{N}$

$k^2=k\cdot k\in\mathbb{N}$ por la cerradura del producto

$p+k^2+k+2\in\mathbb{N}$ por la cerradura de la suma.

Por lo tanto, $m\in\mathbb{N}$, $3m\in\mathbb{N}$ y $3m$ es múltiplo de 3, por lo que la proposición n^3+5n es divisible entre 3, es válida $\forall\ n\in\mathbb{N}$.