Clase 05-10-20

lunes, 5 de octubre de 2020 04:26 p. m.

INDUCCIÓN MATEMATICA

Axiomas de Peano (1858-1932. Matemático y filósofo italiano del siglo XIX).

Algunas de las aportaciones importantes de Giuseppe Peano son en la simbología de la Teoría de Conjuntos:

$x|x$ tal que
$\in$ pertenencia
$\subset$ inclusión
$\forall$ para todo o para cualquier
$\exists$ existe

Para Peano la Lógica Matemática era realmente la lógica de la matemática, esto es, un instrumento cuyo objetivo era dar el rigor y adecuado valor a las <u>argumentaciones</u> del quehacer de la matemática.

Los 5 axiomas de Peano o postulados de Peano definen de manera exacta al conjunto de los Números Naturales, y son:

1) $1 \in \mathbb{N}$
2) Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un único $n+1 \in \mathbb{N}$ llamado "el siguiente de n".
3) Para cada $n \in \mathbb{N}$: $n+1 \neq 1$.
4) Si $m, n \in \mathbb{N}$ y $m+1 = n+1$, entonces $m = n$.
5) Todo subconjunto S de $\mathbb{N}$ que tenga las propiedades:
   a) $1 \in S$
   b) $k \in S \Rightarrow k+1 \in S$

   es el mismo conjunto $\mathbb{N}$.

En Matemáticas la inducción es un razonamiento que permite demostrar proposiciones que dependen de una variable n que toma una infinidad de valores enteros positivos.

Ejemplo 1 Demostrar por inducción matemática la validez de la siguiente proposición:

$$1+2+3+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Paso 1 para $n=1$:

$$1=\frac{1(1+1)}{2}$$

$$1=\frac{1(2)}{2}$$

$1=1$ ✓ se cumple ✓

Paso 2 para $n=k$: (Hipótesis de inducción)

$$1+2+\dots+k=\frac{k(k+1)}{2} \quad ①$$

Paso 3 por demostrar para $n=k+1$ (Tesis)

$$1+2+\dots+k+(k+1)=\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}$$

$$1+2+\dots+k+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2} \quad ②$$

Paso 4 ¿qué le falta al miembro izquierdo de ① para ser igual al miembro izquierdo de ②?

$$1+2+\dots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1) \quad (1A)$$ Hipótesis ampliada

Paso 5 desarrollando el miembro derecho de (1A):

$$\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}$$

$$=\frac{k^2+k+2k+2}{2}$$

$$=\frac{k^2+3k+2}{2}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Como (1A) = (2) la proposición es válida $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

En las demostraciones por Inducción Matemática veremos 4 casos:

1) Series de sumas
2) Desigualdades
3) Pertenencia
4) Divisibilidad

Ejemplo 2 Demostrar por inducción matemática la validez de la siguiente proposición:

$$1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2$$

Paso 1 $n=1$

$$[2(1)-1] = 1^2$$

$1 = 1$ ✓ se cumple

Paso 2 $n=k$ (Hipótesis de inducción): Suponemos que se cumple para $n=k$

$$1+3+5+\dots+(2k-1) = k^2 \quad (1)$$

Paso 3 por demostrar para $n=k+1$ (Tesis):

$$1+3+5+\dots+(2k-1)+[2(k+1)-1] = (k+1)^2$$

$$1+3+5+\dots+(2k-1)+(2k+1) = (k+1)^2 \quad (2)$$

Paso 4 ¿qué le falta al m. izquierdo de (1) para ser igual al m. izquierdo de (2)?

$$1+3+5+\dots+(2k-1)+(2k+1) = k^2+(2k+1) \quad (1A)$$ Hipótesis Ampliada

Paso 5 Desarrollando miembro derecho de (1A)

$$k^2+(2k+1) = k^2+2k+1 = (k+1)(k+1)$$

$$k^2+(2k+1) = (k+1)^2 \qquad \text{miembro derecho de (1A)}$$

Como (1A) = (2), la proposición $1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2$ es válida $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Comprobación: $\qquad 1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2$

para $n=1$: $\quad 1=1$

para $n=2$: $\quad 1+[2(2)-1] = 2^2$

$\qquad 1+3 = 4$

$\qquad 4 = 4$

para $n=3$: $\quad 1+3+[2(3)-1] = 3^2$

$\qquad 1+3+5 = 9$

$\qquad 9 = 9$

etc...

Ejemplo 3 Demostrar por i.m. la validez de la sig. proposición:

$$1^3+2^3+\dots+n^3 = (1+2+\dots+n)^2,\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Paso 1 $n=1$:

$1^3 = 1^2$

$1=1$ ✓ Se cumple

Paso 2 $n=k$ Hipótesis

$$1^3+2^3+\dots+k^3 = (1+2+\dots+k)^2 \quad (1)$$

Paso 3 $n=k+1$ Tesis

$$1^3+2^3+\dots+k^3+(k+1)^3 = [1+2+\dots+k+(k+1)]^2 \quad (2)$$

Paso 4 ¿qué le falta al m. izq de (1) para ser igual al m. izq de (2)?

$$1^3+2^3+\dots+k^3+(k+1)^3 = (1+2+\dots+k)^2+(k+1)^3 \quad (1A)$$

Entonces reformulamos la hipótesis: (ver Ejercicio 1)

Entonces reformulamos la hipótesis: (ver Ejercicio 1)

$$1^3+2^3+\dots+k^3=\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2 \quad (1) \text{ nueva}$$

$\therefore$ Reformulamos la tesis, para $n=k+1$:

$$1^3+2^3+\dots+k^3+(k+1)^3=\left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2 \quad (2) \text{ nueva}$$

Paso 4 Sumamos $(k+1)^3$ en ambos miembros de (1) nueva

$$1^3+2^3+\dots+k^3+(k+1)^3=\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2+(k+1)^3 \quad (1A) \text{ nueva}$$

Paso 5 Desarrollando m. derecho de (1A) nueva:

$$\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2+(k+1)^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3$$

$$=\frac{k^2(k+1)^2+4(k+1)^3}{4}$$

$$=\frac{(k+1)^2\left[k^2+4(k+1)\right]}{4}$$

$$=\frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4}$$

$$=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

$$=\left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2$$

Por tanto, como (1A) nueva = (2) nueva, queda demostrado que la proposición $1^3+2^3+\dots+n^3=(1+2+\dots+n)^2$ es válida $\forall\, n\in\mathbb{N}$

Ejemplo 4 Demostrar por i.m. la validez de la siguiente proposición:

$$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\dots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

Paso 1 $n=1$:

$$1(1+1)=\frac{1}{3}(1)(2)(3)$$

$$2=\frac{6}{3}$$

$$2=2\ \checkmark \text{ se cumple}$$

Paso 2 $n=k$ (Hipótesis)

$$1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \ldots + k(k+1) = \frac{1}{3}k(k+1)(k+2) \quad ①$$

Paso 3 $n = k+1$ (Tesis)

$$1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \ldots + k(k+1) + (k+1)(k+2) = \frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3) \quad ②$$

Paso 4 Sumamos $(k+1)(k+2)$ en ambos miembros de ①:

$$1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \ldots + k(k+1) + (k+1)(k+2) = \frac{1}{3}k(k+1)(k+2) + (k+1)(k+2) \quad (1A)$$

Paso 5 Desarrollamos m. derecho de (1A)

$$\frac{1}{3}k(k+1)(k+2) + (k+1)(k+2) = \frac{k(k+1)(k+2) + 3(k+1)(k+2)}{3}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3} \quad ③$$

Como (1A) = ②, la proposición es válida $\forall n \in \mathbb{N}$.

Tarea 3

1) $3\cdot 1\cdot 2 + 3\cdot 2\cdot 3 + 3\cdot 3\cdot 4 + \cdots + 3n(n+1) = n(n+1)(n+2) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2) $1 + 4 + 7 + \ldots + (3n-2) = \dfrac{n(3n-1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

3) $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$