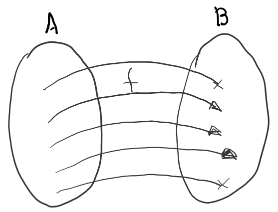
Clase 28-04-21

martes, 27 de abril de 2021 07:29 p. m.

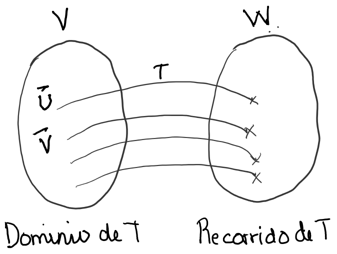
UNIDAD 3 TRANSFORMACIONES LINEALES

Def 11: Función: es una regla de correspondencia que asigna a cada uno de los elementos de un conjunto uno y sólo un elemento de otro conjunto.



Ej: $f(x) = \text{sen } x$

Cuando A y B son espacios vectoriales, entonces se dice que f es una transformación. Una transformación es una función entre espacios vectoriales; es decir, una transformación es una regla que asigna a cada vector de un espacio vectorial otro vector de otro (o del mismo) espacio vectorial.



Nomenclatura:

$T: V \to W$

Ejemplos
$$\begin{cases} T(\bar{v}) = 2\bar{v} \\ T(\bar{v}) = |\bar{v}| \\ T(\bar{v}) = \bar{0} \\ T(\bar{v}) = -\bar{v} \end{cases}$$

Definición 12 Transformación lineal.

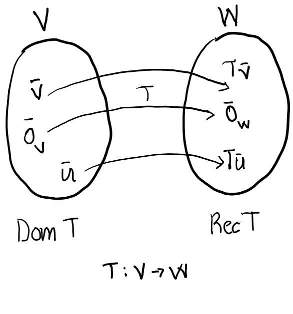
Sean V y W espacios vectoriales reales. Una transformación lineal T de V en W es una función que asigna a cada vector $\bar{v} \in V$ un vector único $T(\bar{v}) \in W$, y que satisface para cada $\bar{u}, \bar{v} \in V$ y cada escalar α :

$$\boxed{\begin{array}{l} T(\bar{u}+\bar{v}) = T(\bar{u}) + T(\bar{v}) \; ; \; \bar{u},\bar{v} \in V \\ T(\alpha\bar{v}) = \alpha T(\bar{v}) \end{array}}$$

Notaciones:

1) Se escribe $T: V \to W$ para indicar que T toma el espacio vectorial real V y lo lleva al espacio vectorial real W; esto es, T es una función con V como su *DOMINIO* (Dom T) y W o un subconjunto de W como su imagen o *RECORRIDO* (Rec T).

2) $T\bar{v} = T(\bar{v})$, y se lee T de V. Estudiaremos sobre todo, transformaciones lineales sobre espacios vectoriales reales.



dim V = n

dim W = m

Propiedades de las Transformaciones Lineales

1) $T(\bar{u}+\bar{v}) = T(\bar{u}) + T(\bar{v})$; $\bar{u}, \bar{v} \in V$ (Dom T)

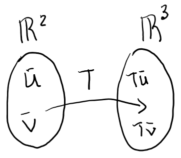
2) $T(\alpha \bar{u}) = \alpha T(\bar{u})$; $\alpha \in \mathbb{R}$

Ejemplos:

1) Sea $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y) = (x+y, x-y, 3y)$ *

Dom T, Rec T

Ejemplos
$$\begin{cases} T(2,-3) = (-1,5,-9) \\ T(0,0) = (0,0,0) \\ T(1,-1) = (0,2,-3) \end{cases}$$



¿es T lineal?

Sean $\bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{R}^2$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

1) $T(\bar{u}+\bar{v}) = T(\bar{u}) + T(\bar{v})$ (Propiedad 1)

Solución

Sean $\bar{u} = (x_1, y_1)$ y $\bar{v} = (x_2, y_2)$. Al trabajar con el miembro izquierdo se tiene:

$T(\bar{u}+\bar{v}) = T[(x_1,y_1) + (x_2,y_2)]$ sustituyendo

$= T(x_1+x_2, y_1+y_2)$ suma de vectores

Aplicando la Regla de Transformación: *

$T(\bar{u}+\bar{v}) = [(x_1+x_2+y_1+y_2), (x_1+x_2)-(y_1+y_2), 3(y_1+y_2)]$

Trabajando con miembro derecho:

$T(\bar{u}) + T(\bar{v}) = T(x_1,y_1) + T(x_2,y_2)$ Sustitución

Aplicando la Regla de la Transformación: *

$T(\bar{u}) + T(\bar{v}) = [(x_1+y_1, x_1-y_1, 3y_1) + (x_2+y_2, x_2-y_2, 3y_2)]$

$= (x_1+y_1+x_2+y_2, x_1-y_1+x_2-y_2, 3y_1+3y_2)$ por suma de vectores

$T(\bar{u}) + T(\bar{v}) = [(x_1+x_2)+(y_1+y_2), (x_1+x_2)-(y_1+y_2), 3(y_1+y_2)]$ Agrupando

$\therefore T(\bar{u}+\bar{v}) = T(\bar{u}) + T(\bar{v})$

2) $T(\alpha\bar{u}) = \alpha T(\bar{u})$ (Propiedad 2)

Miembro izquierdo:

$T(\alpha\bar{u}) = T[\alpha(x_1,y_1)]$ Sustitución

$= T(\alpha x_1, \alpha y_1)$ producto de vector por escalar

Aplicando la Regla de la Transformación: *

$T(\alpha\bar{u}) = (\alpha x_1 + \alpha y_1, \alpha x_1 - \alpha y_1, 3\alpha y_1)$

Miembro derecho:

$\alpha T(\bar{u}) = \alpha T(x_1, y_1)$ sustitución

Aplicando la Regla de la Transformación: *

$= \alpha (x_1 + y_1, x_1 - y_1, 3y_1)$
$= (\alpha x_1 + \alpha y_1, \alpha x_1 - \alpha y_1, 3\alpha y_1)$ producto de vector por escalar

$\therefore T(\alpha \bar{u}) = \alpha T(\bar{u})$

$\therefore$ La Transformación es Lineal ✓

Problemas págs. 486, 487 Grossman.

Determine si la transformación T de V en W es lineal o no.

1) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$ definida como: $T(x,y) = x$ ← ésta es la Regla de la Transformación

Solución

Sean $\bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{R}^2$, donde $\bar{u} = (x_1, y_1), \bar{v} = (x_2, y_2)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces, verificando la Propiedad 1:

$T(u + \bar{v}) = T(\bar{u}) + T(\bar{v})$

Trabajando con el miembro izquierdo:

$T(\bar{u} + \bar{v}) = T[(x_1, y_1) + T(x_2, y_2)]$ Sustituyendo
$= T(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ Suma de vectores

Aplicando la Regla de la Transformación:

$T(\bar{u} + \bar{v}) = x_1 + x_2$

Trabajando con el miembro derecho:

$T(\bar{u}) + T(\bar{v}) = T(x_1, y_1) + T(x_2, y_2)$ Sustitución

Aplicando la Regla de la Transformación:

$T(\bar{u}) + T(\bar{v}) = x_1 + x_2$

Entonces: $T(\bar{u} + \bar{v}) = T(\bar{u}) + T(\bar{v})$ ✓

Verificando la Propiedad 2: $T(\alpha \bar{u}) = \alpha T(\bar{u})$

Miembro izquierdo:

$T(\alpha \bar{u}) = T(\alpha x_1, \alpha x_2)$ Sustitución

Aplicando la Regla de la Transformación:

$T(\alpha \bar{u}) = \alpha x_1$

Miembro derecho:

$\alpha T(\bar{u}) = \alpha T(x_1, y_1)$ Sustitucion

Aplicando la Regla de la Transformación:

$\alpha T(\bar{u}) = \alpha x_1$

Entonces $T(\alpha\bar{u}) = \alpha T(\bar{u})$ ✓

Por tanto, T es lineal ya que se cumplen la Propiedad 1 y la Propiedad 2.

3) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida como $T(x,y) = (1,y)$ ← Regla de la Transformación

Sean $\bar{u} = (x_1, y_1)$ y $\bar{v} = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

Propiedad ① $T(\bar{u}+\bar{v}) = T(\bar{u}) + T(\bar{v})$

Miembro izquierdo:

$T(\bar{u}+\bar{v}) = T[(x_1,y_1) + (x_2,y_2)]$ Sustitución

$= T(x_1+x_2, y_1+y_2)$ Suma de vectores

Aplicando la Regla de la Transformación:

$T(\bar{u}+\bar{v}) = (1, y_1+y_2)$

Miembro derecho:

$T(\bar{u}) + T(\bar{v}) = T(x_1,y_1) + T(x_2,y_2)$

Aplicando la Regla de la Transformación:

$T(\bar{u}) + T(\bar{v}) = (1, y_1) + (1, y_2)$

$= (2, y_1+y_2)$

$\therefore T(\bar{u}+\bar{v}) \neq T(\bar{u}) + T(\bar{v})$ y T no es lineal.

7) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida como $T(x,y,z) = (x, y+z)$ ← Regla de la Transformación

Sean $\bar{u} = (x_1, y_1, z_1)$ y $\bar{v} = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

Propiedad ①: $T(\bar{u}+\bar{v}) = T(\bar{u}) + T(\bar{v})$

Miembro izquierdo:

$T(\bar{u}+\bar{v}) = T[(x_1,y_1,z_1) + (x_2,y_2,z_2)]$ Sustitución

$= T(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)$ Suma de vectores

Aplicando la Regla de la Transformación:

$T(\bar{u}+\bar{v}) = (x_1+x_2, \; y_1+y_2+z_1+z_2)$

Miembro derecho:

$T(\bar{u}) + T(\bar{v}) = T(x_1,y_1,z_1) + T(x_2,y_2,z_2)$ Sustitución

Aplicando la Regla de la Transformación:

$T(\bar{u}) + T(\bar{v}) = (x_1, y_1 + z_1) + (x_2, y_2 + z_2)$

$= (x_1 + x_2, y_1 + z_1 + y_2 + z_2)$ Suma de vectores

$= (x_1 + x_2, y_1 + y_2 + z_1 + z_2)$ Prop. Conmutativa de la suma en $\mathbb{R}$.

Entonces $T(\bar{u}+\bar{v}) = T(\bar{u}) + T(\bar{v})$ ✓

Propiedad ②: $T(\alpha\bar{u}) = \alpha T(\bar{u})$

Miembro izquierdo:

$T(\alpha\bar{u}) = T[\alpha(x_1, y_1, z_1)]$ Sustitución

$= T(\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)$ Producto de vector por escalar.

Aplicando la Regla de la Transformación:

$T(\alpha\bar{u}) = (\alpha x_1, \alpha y_1 + \alpha z_1)$ Ⓑ

Miembro derecho:

$\alpha T(\bar{u}) = \alpha(x_1, y_1 + z_1)$ Sustitución

$= (\alpha x_1, \alpha y_1 + \alpha z_1)$ producto de vector por escalar

Por tanto, se cumple que $T(\alpha\bar{u}) = \alpha T(\bar{u})$ ✓

y <u>T es lineal</u>.

Tarea Grossman pp 486-487 probs 1-17

18) $T: \mathbb{R}^4 \to M_{22}$; $T(x,y,z,w) = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ ¿Es T lineal?

Sean $\bar{u} = (x_1, y_1, z_1, w_1)$ y $\bar{v} = (x_2, y_2, z_2, w_2)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$

Propiedad 1: $T(\bar{u}+\bar{v}) = T(\bar{u}) + T(\bar{v})$

Trabajando con el miembro izquierdo:

$T(\bar{u}+\bar{v}) = T[(x_1, y_1, z_1, w_1) + (x_2, y_2, z_2, w_2)]$ Sustitución

$= T(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2, w_1+w_2)$ por suma de vectores

$= \begin{bmatrix} x_1+x_2 & y_1+y_2 \\ z_1+z_2 & w_1+w_2 \end{bmatrix}$

Trabajando con el miembro derecho:

$T(\bar{u}) + T(\bar{v}) = T(x_1, y_1, z_1, w_1) + T(x_2, y_2, z_2, w_2)$ Sustitución

$= \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & w_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ z_2 & w_2 \end{bmatrix}$ Aplicando la transformación

$= \begin{bmatrix} x_1+x_2 & y_1+y_2 \\ z_1+z_2 & w_1+w_2 \end{bmatrix}$

$\therefore\ T(\bar{u}+\bar{v}) = T(u)+T(\bar{v})$ se cumple la propiedad 1

Propiedad 2: $T(\alpha\bar{u}) = \alpha T(\bar{u})$

Trabajando con el miembro izquierdo:

$T(\alpha\bar{u}) = T(\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1, \alpha w_1)$ producto de vector por escalar

$= \begin{bmatrix} \alpha x_1 & \alpha y_1 \\ \alpha z_1 & \alpha w_1 \end{bmatrix}$ Aplicando la Regla de la Tranoformación

Trabajando con el miembro derecho:

$\alpha T(\bar{u}) = \alpha T(x_1, y_1, z_1, w_1)$ Sustitución

$= \alpha \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & w_1 \end{bmatrix}$ Aplicando la Regla de la Tranoformación

$= \begin{bmatrix} \alpha x_1 & \alpha y_1 \\ \alpha z_1 & \alpha w_1 \end{bmatrix}$ producto de escalar por matriz

$\therefore\ T(\alpha\bar{u}) = \alpha T(\bar{u})$ se cumple la Propiedad 2

$\therefore$ T es lineal