Clase 10-03-21

martes, 9 de marzo de 2021 11:58 a. m.

Ejemplo Determine si $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax+by+cz=2 \, ; \, a,b,c \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$?

Solución

Sean $\bar{x}, \bar{y} \in H$ y $\alpha \in \mathbb{R}$

S1) $\bar{x}+\bar{y} \in H$

si $\bar{x}+\bar{y} \in H$: $ax+by+cz=2$

Verificación:

$\bar{x} = (x_1, y_1, z_1)$: $ax_1+by_1+cz_1 = 2$

$\bar{y} = (x_2, y_2, z_2)$: $ax_2+by_2+cz_2 = 2$

$\bar{x}+\bar{y} = (\underbrace{x_1+x_2}_{x}, \underbrace{y_1+y_2}_{y}, \underbrace{z_1+z_2}_{z})$: $a(x_1+x_2)+b(y_1+y_2)+c(z_1+z_2) = 2$? Aplicando la condición

$= ax_1+ax_2+by_1+by_2+cz_1+cz_2 = 2$ Efectuando operaciones

$= \underbrace{(ax_1+by_1+cz_1)}_{2} + \underbrace{(ax_2+by_2+cz_2)}_{2} = 2$ Reacomodando términos

$2+2 \neq 2$

$\therefore \bar{x}+\bar{y} \notin H$

Veamos la cerradura del producto:

M1) $\alpha\bar{x} \in H$

si $\alpha\bar{x} \in H$: $ax+by+cz=2$

Verificación:

$\alpha\bar{x} = \alpha(x_1, y_1, z_1)$ Sustituyendo

$= (\underbrace{\alpha x_1}_{x}, \underbrace{\alpha y_1}_{y}, \underbrace{\alpha z_1}_{z})$ producto de vector por escalar

: $a(\alpha x_1)+b(\alpha y_1)+c(\alpha z_1) = 2$? Aplicando la condición

$= \alpha a x_1 + \alpha b y_1 + \alpha c z_1 = 2$? Asociando m. izq.

$= \alpha\underbrace{(ax_1+by_1+cz_1)}_{2} = 2$?

$2\alpha = 2$?

No necesariamente, ya que $\alpha \in \mathbb{R}$

$\therefore \alpha\bar{x} \notin H$.

H es el conjunto de puntos en $\mathbb{R}^3$ que están sobre un plano que no pasa por el origen.

H no es subespacio vectorial.

Teorema 3 Sean H_1 y H_2 dos subespacios de un espacio vectorial V.

Entonces $H_1 \cap H_2$ es un subespacio de V.

Entonces $H_1 \cap H_2$ es un subespacio de V.

Ejemplo Sea $H_1 = \{(x,y,z) : 2x - y - z = 0\}$ y $H_2 = \{(x,y,z) : x + 2y + 3z = 0\}$

Comprobar que $H_1 \cap H_2$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ y determinar qué tipo de subespacio es.

Solución

$H_1 \cap H_2$ es la intersección de dos planos que pasan por el origen.

Entonces tenemos un sistema de dos ecuaciones con 3 incógnitas.

Resolviendo el sistema:

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 0 \\ 2x - y - z &= 0 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -7 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 7/5 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 1 & 7/5 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{aligned} x &= -\tfrac{1}{5}z \\ y &= -\tfrac{7}{5}z \\ z &= z \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Si $z = t$, $t \in \mathbb{R}$:

$$\left.\begin{aligned} x &= -\frac{1}{5}t \\ y &= -\frac{7}{5}t \\ z &= t \end{aligned}\right\} \text{Ecuaciones paramétricas de una recta en } \mathbb{R}^3 \text{ que pasa por el origen}$$

$\therefore H_1 \cap H$ es un subespacio vectorial.

Ejercicios de tarea

Determine si H es un subespacio de V:

1) $V = \mathbb{R}^3$; $H = \{(a, 0, -a) ; a \in \mathbb{R}\}$
2) $V = \mathbb{R}^3$; $H = \{(a, -a, 3a), a \in \mathbb{R}\}$
3) $V = \mathbb{R}^3$; $H = \{(a, b, |a|) ; a, b \in \mathbb{R}\}$
4) $V = M_{22}$; $H = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & 2a \end{bmatrix} ; a, b \in \mathbb{R} \right\}$

Ejemplo El conjunto de los polinomios de grado n no es un subespacio vectorial.

$$H = \{ p(x) \mid p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 ; a_n \neq 0 ; gr(p) = n \}$$

Solución

Sean $p(x), q(x) \in H$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

Sean $p(x), g(x) \in H$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 ; \; gr(p) = n$$
$$g(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0 ; \; gr(g) = n$$

$$p(x) + g(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \ldots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0) ; \; gr(p+g) = n \, ?$$

Ejemplo

$$p(x) = 2x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 8x + 1 , \quad gr(p) = 4$$
$$g(x) = -2x^4 - 10x^3 - 7x^2 + x - 2 , \quad gr(g) = 4$$

$$p(x) + g(x) = -5x^3 - 10x^2 - 7x - 1 ; \; gr(p+g) \neq 4$$

$\therefore \; p(x) + g(x) \notin H$

y H no es un subespacio vectorial.

El conjunto $H = \{ p(x) \mid gr[p(x)] \leq n \}$ es un Espacio vectorial.

Problemas Grossman pp. 313, 314

21) $V = P_4$; $H = \{ p \in P_4 ; \; p(0) = 0 \}$

Sean $p(x), q(x) \in H$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

S1) $p(x) + q(x) \in H$

si $p(x) + q(x) \in H$: $p(0) = 0$

Verificación

$$p(x) = a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 ; \; p(0) = 0$$
$$q(x) = b_4 x^4 + b_3 x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0 ; \; q(0) = 0$$

$$p(x) + q(x) = (a_4 + b_4)x^4 + (a_3 + b_3)x^3 + (a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

$$\underbrace{[p(x) + q(x)]_{x=0}}_{p(0)} = (a_4 + b_4)(0) + (a_3 + b_3)(0) + (a_2 + b_2)(0) + (a_1 + b_1)(0) + (a_0 + b_0) = 0 \, ?$$
$$= 0 + 0 + 0 + 0 + \underbrace{a_0 + b_0}_{0+0} = 0 \, ?$$

$0 + 0 = 0 \; \checkmark$

$\therefore \; p(x) + q(x) \in H$

M1) $\alpha p(x) \in H$

si $\alpha p(x) \in H$, $p(0)=0$

Verificación:

$$\alpha p(x) = \alpha(a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0)$$
$$= \alpha a_4x^4 + \alpha a_3x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha a_1 x + \alpha a_0$$
$$\underbrace{\alpha p(x)\Big|_{x=0}}_{p(0)} = 0+0+0+0+\underbrace{\alpha a_0}_{\alpha(0)=0\,\checkmark} = 0\ ?$$

$\therefore \alpha p(x) \in H$ y H es un subespacio vectorial.

23) $V=P_n$; $H=\{p \in P_n : p(0)=1\}$

Sean $p(x), q(x) \in H$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

S1) $p(x)+q(x) \in H$

si $p(x)+q(x) \in H$: $p(0)=1$

Verificación:

$$p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 \ ;\ p(0)=1$$
$$q(x) = b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_1x + b_0 \ ;\ q(0)=1$$
$$p(x)+q(x) = (a_n+b_n)x^n + (a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1} + \dots + (a_1+b_1)x + a_0+b_0$$
$$\underbrace{p(x)+q(x)\Big|_{x=0}}_{p(0)} = 0+0+\dots+0+a_0+b_0 \ ;\ p(0)=1\ ?$$
$$= 0+0+\dots+0+1+1 \neq 1$$

$\therefore p(x)+q(x) \notin H$ y H no es un subespacio vectorial.

<u>Tarea</u> Determinar si $\alpha x \in H$

El conjunto de funciones continuas de valores reales definidas en el intervalo $[0,1]$, es decir, $H = C[0,1]$ es un espacio vectorial.

<u>Demostración</u>

Se define

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$\text{y} \quad (\alpha f)(x) = \alpha[f(x)]$$

S1) La suma de funciones continuas es continua

S2) $f(x) + [g(x)+h(x)] = [f(x)+g(x)] + h(x)$

S3) $f(0)=0$, $f(0) \in C[0,1]$

S4) $(-f)(x) = -f(x)$

S5) $f(x)+g(x) = g(x)+f(x)$

M1) El producto de un escalar por $f(x)$ es una función continua

M2) $\alpha[f(x)+g(x)] = \alpha f(x) + \alpha g(x)$

M3) $(\alpha+\beta) f(x) = \alpha f(x) + \beta f(x)$

M4) $\alpha[\beta f(x)] = (\alpha\beta) f(x)$

M5) $1 f(x) = f(x$

De la misma manera, el conjunto de funciones continuas de valores reales definidas en el intervalo $[a,b]$ es un espacio vectorial. $C[a,b]$

Tarea. Grossman pp. 314 probs. 19 20, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30 pags 313, 314 Grossman

34.- Sea $H = \{(x,y,z,w) : ax+by+cz+dw=0\}$, donde $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, no todos cero.

Demuestre que H es un subespacio propio de $\mathbb{R}^4$. H se llama un <u>hiperplano de $\mathbb{R}^4$</u> que pasa por el origen.