Clase 03-03-21

martes, 2 de marzo de 2021 12:14 p. m.

Determine si el conjunto dado, junto con las operaciones de adición y multiplicación por escalar, es un espacio vectorial.

1) $H = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid z_2 = \bar{z}_1\}$

Sean $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in H$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

S1) $\bar{x} + \bar{y} \in H$

si $\bar{x} + \bar{y} \in H$: $z_2 = \bar{z}_1$

Verificación:

$\bar{x} = (x_1, x_2) = (x_1, \bar{x}_1)$ Sustituyendo la condición

$\bar{y} = (y_1, y_2) = (y_1, \bar{y}_1)$

$\bar{x} + \bar{y} = (x_1 + y_1, \underbrace{\bar{x}_1 + \bar{y}_1})$

$\bar{x}_1 + \bar{y}_1 = \overline{x_1 + y_1}$ por propiedad del conjugado

$\bar{x} + \bar{y} = (x_1 + y_1, \underbrace{\overline{x_1 + y_1}}_{\bar{z}_1})$

$\therefore \bar{x} + \bar{y} \in H$

Tarea Comprobar axiomas S2 → S5

M1) $\alpha\bar{x} \in H$

si $\alpha\bar{x} \in H$: $z_2 = \bar{z}_1$

Verificación:

$\alpha\bar{x} = \alpha(x_1, \bar{x}_1)$ Sustituyendo la condición

$= (\underbrace{\alpha x_1}_{z_1}, \underbrace{\alpha\bar{x}_1}_{z_2})$ Producto de vector por escalar

a) si $\alpha \in \mathbb{R}$: $\alpha\bar{x}_1 = \overline{\alpha x_1}$ y $\alpha\bar{x} \in H$

b) si $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha\bar{x}_1 \neq \overline{\alpha x_1}$,

por tanto $\alpha\bar{x} \notin H$ y H no es Espacio Vectorial

$\alpha\bar{x}_1 \neq \bar{\alpha}\bar{x}_1$

Si $\alpha = 1 + i$

$x_1 = 2 - 3i$

$\bar{x}_1 = 2 + 3i$

$\alpha\bar{x}_1 = (1+i)(2+3i)$

$= 2 + 3i + 2i - 3 = -1 + 5i$ *

$\alpha x_1 = (1+i)(2-3i)$

$= 2 - 3i + 2i + 3 = 5 - i$

$\overline{\alpha x_1} = 5 + i$

Tarea: Comprobar $M_2 \to M_5$

$= 2 - 3i + 2i + 3 = 5 - i$

$\overline{\alpha x_1} = 5 + i$

2) El conjunto de matrices invertibles con las operaciones de suma y producto habituales.

Solución

$M_{inv} = \{ A = [a_{ij}]_{n \times n},\ a_{ij} \in \mathbb{R} \mid A^{-1} \text{ existe} \}$

Sean $A, B, C \in M_{inv}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

S1) $A + B \in M_{inv}$

si $A + B \in M_{inv}$ entonces $(A+B)^{-1}$ existe.

Verificación

No necesariamente. Pondremos un ejemplo sencillo.

Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$

A y B son invertibles, pues $\det A = 10$ y $\det B = -3$

Sumemos A y B: $A + B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\det A+B = 2 - 2 = 0 \Rightarrow A + B$ no es invertible

$\therefore A + B \notin M_{inv} \Rightarrow M_{inv}$ no es Espacio Vectorial

Examinaremos S3:

$\exists\ [0] \in M_{inv} \mid A + [0] = A$

$[0] \notin M_{inv}$ pues $\det [0] = 0$

$\therefore M_{inv}$ no es Espacio Vectorial

Examinemos M1:

$\alpha A \in M_{inv}$

si $\alpha = 0$, $\alpha A = [0] \notin M_{inv}$

$\therefore M_{inv}$ no es un Espacio Vectorial.

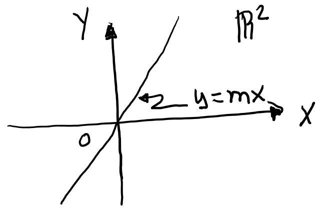
3) El conjunto de todas las rectas en $\mathbb{R}^2$ que pasan por el origen.

Solución

El conjunto mencionado es:

$H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = mx \text{ ; } m \text{ es un real fijo, } x \in \mathbb{R}\}$

$y = mx$ es la ecuación de una recta en $\mathbb{R}^2$ que pasa por el origen



Sean $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in H$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

S1) $\bar{x} + \bar{y} \in H$

si $\bar{x} + \bar{y} \in H$, $y = mx$

Verificación:

$\bar{x} = (x_1, y_1) = (x_1, mx_1)$ Sustitución de la condición

$\bar{y} = (x_2, y_2) = (x_2, mx_2)$ Sustitución de la condición

$\bar{x} + \bar{y} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (\underbrace{x_1 + x_2}_{x}, \underbrace{mx_1 + mx_2}_{y})$ Suma de vectores

$= (\underbrace{x_1 + x_2}_{x}, \underbrace{m(x_1 + x_2)}_{y = mx})$ distributiva en $\mathbb{R}$

$\therefore \bar{x} + \bar{y} \in H$

Tarea S2, S4, S5

S3) $\underbrace{\exists\, \bar{0}}_{} \in H \mid \bar{x} + \bar{0} = \bar{x}$

es el origen en $\mathbb{R}^2$: $\bar{0} = (0,0)$, la recta pasa por el origen

$\therefore \bar{x} + \bar{0} = (x_1, mx_1) + (0,0)$ Sust. la condición

$= (x_1 + 0, mx_1 + 0)$ Suma de vectores

$= (x_1, mx_1)$ Existencia del neutro aditivo en $\mathbb{R}$.

$= \bar{x}$

M1) $\alpha \bar{x} \in H$

Si $\alpha \bar{x} \in H$: $y = mx$

Verificación:

$\alpha \bar{x} = \alpha (x_1, y_1)$ Sustitución

$= \alpha (x_1, mx_1)$ por la condición

$= (\alpha x_1, \alpha m x_1)$ producto de vector por escalar

$= (\alpha x_1, m\alpha x_1)$ conmutatividad en $\mathbb{R}$

$= (\underbrace{\alpha x_1}_{x}, \underbrace{m(\alpha x_1)}_{mx})$ Asociatividad en $\mathbb{R}$

$\therefore \alpha \bar{x} \in H$

Tarea Demostrar M2, M3, M4 y M5

> Por tanto: el conjunto de todas las rectas en $\mathbb{R}^2$ que pasan por el origen es un Espacio Vectorial.

4) $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x+1 ;\ x,y \in \mathbb{R}\}$ ← recta en $\mathbb{R}^2$ que no pasa por el origen

Solución

Sean $\bar{x}, \bar{y} \in H$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

S1) $\bar{x} + \bar{y} \in H$

si $\bar{x}+\bar{y} \in H$, $y = 2x+1$

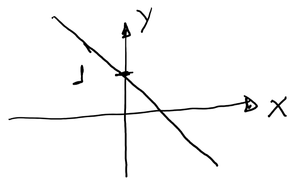
Verificación:

$\bar{x} = (x_1, y_1) = (x_1, 2x_1+1)$ Sustitución de la condición

$\bar{y} = (x_2, y_2) = (x_2, 2x_2+1)$

$\bar{x}+\bar{y} = (x_1+x_2, y_1+y_2) = (x_1+x_2, 2x_1+1+2x_2+1)$

$= (\underbrace{x_1+x_2}_{x}, \underbrace{2(x_1+x_2)+2}_{y=2x+2 \notin H})$



$\therefore \bar{x}+\bar{y} \notin H \Rightarrow H$ no es Espacio vectorial

S3) Como $y = 2x+1$ es una recta que no pasa por el origen, el $\bar{0} \notin H$, ya que $\bar{0} = (0, 2(0)+1) = (0,1) \neq \bar{0}$

$\therefore$ H no es Espacio vectorial.

M1) $\alpha \bar{x} \in H$

si $\alpha \bar{x} \in H$, $y = 2x+1$

Verificación:

$\alpha \bar{x} = \alpha(x_1, x_2)$ Sustitución

$= \alpha(x_1, 2x_1+1)$ Condición

$= (\alpha x_1, \alpha(2x_1+1))$ producto de vector por escalar

$= (\alpha x_1, 2\alpha x_1 + \alpha)$ distributividad en $\mathbb{R}$

$\underbrace{}_{x} \quad \underbrace{}_{y=2x+\alpha}$; $\alpha \in \mathbb{R}$, por lo que no necesariamente $\alpha = 1$

$\therefore \alpha\bar{x} \notin H$, y H no es Espacio Vectorial

<u>Conclusión</u>

El conjunto de <u>todas</u> las rectas en $\mathbb{R}^2$ que no pasan por el origen <u>NO</u> es un Espacio Vectorial