Clase 01-03-21

viernes, 26 de febrero de 2021 02:35 p. m.

Definición 4 Matriz

Una matriz A de tamaño m×n es un arreglo rectangular de mn números dispuestos en m renglones y n columnas.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n} \leftarrow \text{i-ésimo renglón}$$

j-ésima columna

A también se puede escribir como $A = [a_{ij}]_{m\times n}$

Las matrices se denotan con letras mayúsculas: A, B, C, D, ...

a_{ij} es la componente ij de A; es el número que aparece en el renglón i y la columna j de A.

Definición 5 Suma de matrices

Dos matrices $A=[a_{ij}]$ y $B=[b_{ij}]$ se pueden sumar si y sólo si tienen el mismo tamaño. En este caso, A+B se define como:

$$A+B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

$$A+B = [a_{ij}]_{m\times n} + [b_{ij}]_{m\times n} = [a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}$$

Definición 6 Multiplicación de una matriz por un escalar

Sea $A=[a_{ij}]$ una matriz de m×n y sea α un escalar.

El producto αA se define como:

El producto αA se define como:

$$\alpha A = \alpha \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

$$\alpha A = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

En forma compacta: $\alpha A = \alpha [a_{ij}] = [\alpha a_{ij}]_{m\times n}$

Propiedades de la suma de matrices y el producto de matrices por escalares

Sean A, B y C tres matrices de $m\times n$ y sean α y β dos escalares.
Entonces:

1) $A + [0]_{m\times n} = A$

escalar cero

2) $0A = [0] \longrightarrow$ matriz cero

3) $A+B = B+A$ Ley conmutativa para la suma de matrices

4) $(A+B)+C = A+(B+C)$ Ley Asociativa para la suma de matrices.

5) $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$ Ley distributiva para la multiplicación por un escalar.

6) $1A = A$

7) $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$

Ver ejemplo 2.1.8 Grossman pag 53

Ejemplo: Demostrar que el conjunto de las matrices reales de tamaño $m\times n$ es un espacio vectorial.

Sea $M_{mn} = \{ A = [a_{ij}] \mid a_{ij} \in \mathbb{R}$ y $[a_{ij}]$ es de tamaño $m\times n \}$ el conjunto mencionado.

Sean A, B y $C \in M_{mn}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

S1) $A+B \in M_{mn}$

Si $A+B \in M_{mn}$ entonces $A+B$ es de tamaño $m\times n$ y $a_{ij}+b_{ij} \in \mathbb{R}$

Verificación

$A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$
$B = [b_{ij}]_{m\times n}$, $b_{ij} \in \mathbb{R}$

$A+B = [a_{ij}] + [b_{ij}]$ Sustitución
$= [a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}$ por definición de suma de matrices; $a_{ij}+b_{ij} \in \mathbb{R}$ por suma en $\mathbb{R}$.

$\therefore A+B \in M_{mn}$

S2) $A+(B+C) = (A+B)+C$ Se cumple por la Ley Asociativa de la suma de matrices.

S3) $\exists\, [0] \in M_{mn} \mid A+[0] = A$

$[0]_{m\times n}$ existe en M_{mn} ✓

Entonces $A+[0] = [a_{ij}] + [0_{ij}]$ Sustitución
$= [a_{ij}+0_{ij}]$ por suma de matrices
$= [a_{ij}]$ existencia del neutro aditivo en $\mathbb{R}$.
$A = A$

S4) $\exists\, -A \in M_{mn} \mid A+(-A) = [0]$

Existencia de $-A \in M_{mn}$:

$A = [a_{ij}] \in M_{mn}$
$-A = [-a_{ij}] \in M_{mn}$ ✓

$\therefore A+(-A) = [a_{ij}] + [-a_{ij}]$ Sustitución
$= [a_{ij}-a_{ij}]$ por suma de matrices
$= [0]$ por inverso aditivo en $\mathbb{R}$.

S5) $A+B = B+A$ se cumple por la Ley Conmutativa de la suma de matrices.

M1) $\alpha A \in M_{mn}$
si $\alpha A \in M_{mn}$ entonces αA es de tamaño $m\times n$ y $\alpha a_{ij} \in \mathbb{R}$

Verificación:
$\alpha A = \alpha [a_{ij}]_{m\times n}$ Sustitución
$= [\alpha a_{ij}]_{m\times n}$ Producto de matriz por escalar; $\alpha a_{ij} \in \mathbb{R}$ por producto en $\mathbb{R}$

$\therefore \alpha A \in M_{mn}$

M2) $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$

Trabajando con el miembro izquierdo:
$\alpha(A+B) = \alpha\left([a_{ij}] + [b_{ij}]\right)$ Sustitución
$= \alpha\,[a_{ij}+b_{ij}]$ por suma de matrices
$= [\alpha(a_{ij}+b_{ij})]$ producto de matriz por escalar

$= [\alpha a_{ij} + \alpha b_{ij}]$ prop. distributiva en $\mathbb{R}$

$= [\alpha a_{ij}] + [\alpha b_{ij}]$ suma de matrices

$= \alpha [a_{ij}] + \alpha [b_{ij}]$ producto de matriz por escalar

$= \alpha A + \alpha B$ Sustitución

$\therefore M_2$ se cumple

$M3)$ $(\alpha + \beta) A = \alpha A + \beta A$

trabajando con el miembro izquierdo:

$(\alpha+\beta) A = (\alpha+\beta) [a_{ij}]$ sustitución

$= [(\alpha+\beta) a_{ij}]$ multiplicación de matriz por escalar

$= [\alpha a_{ij} + \beta a_{ij}]$ propiedad distributiva en $\mathbb{R}$.

$= [\alpha a_{ij}] + [\beta a_{ij}]$ suma de matrices

$= \alpha [a_{ij}] + \beta [a_{ij}]$ multiplicación de matriz por escalar

$= \alpha A + \beta A$ sustitución

M4) tarea $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta) A$

M5) tarea

$\therefore M_{mn}$ es un Espacio Vectorial

Tarea Determine si el conjunto dado, junto con las operaciones de adición y multiplicación por escalar, es un espacio vectorial.

1) El conjunto de los vectores en $\mathbb{R}^2$ de la forma (x, x) con las operaciones habituales de adición y multiplicación por escalares, es decir:

$$H = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y ;\ x \in \mathbb{R} \}$$

2) El conjunto de todas las matrices de 2×2 de la forma

$\begin{bmatrix} a & b+1 \\ c & d \end{bmatrix}$; $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, con las operaciones habituales de suma de matrices y multiplicación por escalares.

(Describir el conjunto).

Ejemplo Sea el conjunto $\mathbb{C}^n = \{ \bar{z} \mid \bar{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n) ; \; z_k \in \mathbb{C} ; \; k = 1, \ldots, n \}$

Demostrar que $\mathbb{C}^n$ es un Espacio Vectorial.

[Recordar que $\mathbb{C} = \{ z \mid z = a + bi \; ; \; a, b \in \mathbb{R} \; ; \; i = \sqrt{-1} \}$]

Solución

Sean $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \mathbb{C}^n$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

S1) $\bar{x} + \bar{y} \in \mathbb{C}^n$

Verificación:

$\bar{x} + \bar{y} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ Sustitución

$= \underbrace{(\underbrace{x_1 + y_1}_{\in \mathbb{C}}, \underbrace{x_2 + y_2}_{\in \mathbb{C}}, \ldots, \underbrace{x_n + y_n}_{\in \mathbb{C}})}_{n \text{ elementos}}$ por suma de vectores en $\mathbb{C}^n$

$\therefore \; \bar{x} + \bar{y} \in \mathbb{C}^n$

S2) $\bar{x} + (\bar{y} + \bar{z}) = (\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z}$ ✓ se cumple (demostrar)

S3) $\exists \; \bar{0} \in \mathbb{C}^n \mid \bar{x} + \bar{0} = \bar{x}$

$\bar{0} = (0, 0, \ldots, 0)$, donde $0 = 0 + 0i \in \mathbb{C}$

$\therefore \; \bar{0} \in \mathbb{C}^n$ y $\bar{x} + \bar{0} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (0, 0, \ldots, 0)$ sustitución

$= (x_1 + 0, x_2 + 0, \ldots, x_n + 0)$ suma de vectores

$= (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$= \bar{x}$

S4) $\exists \; -\bar{x} \in \mathbb{C}^n \mid \bar{x} + (-\bar{x}) = \bar{0}$

$-\bar{x} = -1 (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$= (\underbrace{-x_1}_{\in \mathbb{C}}, \underbrace{-x_2}_{\in \mathbb{C}}, \ldots, \underbrace{-x_n}_{\in \mathbb{C}})$ multiplicación de vector por escalar

$\therefore \; -\bar{x} \in \mathbb{C}^n$ y $\bar{x} + (-\bar{x}) = \bar{0}$

S5) $\bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x}$ se cumple (demostrar)

M1) $\alpha \bar{x} \in \mathbb{C}^n$

Verificación:

$\alpha \bar{x} = \alpha (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ Sustitución

$= (\underbrace{\alpha x_1}_{\in \mathbb{C}}, \underbrace{\alpha x_2}_{\in \mathbb{C}}, \ldots, \underbrace{\alpha x_n}_{\in \mathbb{C}})$ multiplicación de vector por escalar

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{n \text{ elementos}}$

$\therefore \alpha\bar{x} \in \mathbb{C}^n$, con $\alpha \in \mathbb{C}$

M2) $\alpha(\bar{x}+\bar{y}) = \alpha\bar{x} + \alpha\bar{y}$

miembro izquierdo:

$\alpha(\bar{x}+\bar{y}) = \alpha[(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n)]$ Sustitución

$= \alpha(x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n)$ Suma de vectores

$= [\alpha(x_1+y_1), \alpha(x_2+y_2), \ldots, \alpha(x_n+y_n)]$ producto de escalar por vector

$= (\alpha x_1+\alpha y_1, \alpha x_2+\alpha y_2, \ldots, \alpha x_n+\alpha y_n)$ distributividad en $\mathbb{C}$

$= (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n) + (\alpha y_1, \alpha y_2, \ldots, \alpha y_n)$ Suma de vectores

$= \alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \alpha(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ producto de escalar por vector

$\therefore \alpha(\bar{x}+\bar{y}) = \alpha\bar{x} + \alpha\bar{y}$

M3) $(\alpha+\beta)\bar{x} = \alpha\bar{x} + \beta\bar{x}$ ✓ Se cumple (demostrar)

M4) $\alpha(\beta\bar{x}) = (\alpha\beta)\bar{x}$

miembro izquierdo:

$\alpha(\beta\bar{x}) = \alpha[\beta(x_1, x_2, \ldots, x_n)]$ Sustitución

$= \alpha(\beta x_1, \beta x_2, \ldots, \beta x_n)$ producto de escalar por vector

$= [\alpha(\beta x_1, \beta x_2, \ldots, \beta x_n)]$ producto de vector por escalar

$= [\alpha(\beta x_1), \alpha(\beta x_2), \ldots, \alpha(\beta x_n)]$ producto de vector por escalar

$= (\alpha\beta x_1, \alpha\beta x_2, \ldots, \alpha\beta x_n)$ prop. asociativa en $\mathbb{C}$.

$= \alpha\beta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ producto de escalar por vector

$\therefore \alpha(\beta\bar{x}) = (\alpha\beta)\bar{x}$

M5) $1\bar{x} = \bar{x}$ se cumple (demostrar)

$\therefore \mathbb{C}^n$ es un Espacio Vectorial

Tarea

El conjunto $\mathbb{C}^2$, con la adición habitual pero la multiplicación definida por $c(z_1, z_2) = (\bar{c}z_1, \bar{c}z_2)$, $c \in \mathbb{C}$

$H = \{ \qquad \}$