Clase 13-01-21

martes, 12 de enero de 2021 12:31 p. m.

Probaremos el Teorema 39 (def 67) $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A$. Para ello necesitamos

demostrar el siguiente teorema:

Teorema 38 Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces:

$$A(\operatorname{adj} A) = \begin{bmatrix} \det A & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \det A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \det A & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & \det A \end{bmatrix} = (\det A) I$$

Demostración

Sea $C = [c_{ij}] = A(\operatorname{adj} A)$. Entonces:

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Donde:

$$c_{ij} = (a_{i1}, a_{i2}, \dots a_{in}) \begin{bmatrix} A_{j1} \\ A_{j2} \\ \vdots \\ A_{jn} \end{bmatrix}$$

Haciendo el producto:

$$c_{ij} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn}$$

Si $i = j$:

$$c_{ij} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = \det A$$ Expansión por cofactores para el renglón i

Si $i \neq j$, $c_{ij} = 0$ (Ver demostración pag 203 Grossman)

Por tanto, $c_{ij} = \begin{cases} \det A & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

Teorema 39

Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces A es invertible si y sólo si $\det A \neq 0$.
Si $\det A \neq 0$, entonces:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A \quad (67)$$

Demostración

Multiplicando por A la ecuación (67):

$$AA^{-1} = \frac{1}{\det A} A \operatorname{adj} A = \frac{\det A\, I}{\det A} = I \quad \text{por Teorema 38}$$

Por definición de inversa:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\operatorname{adj} A) \quad \text{LQQD}$$

<u>Ejemplo</u> Determine si la matriz A es invertible. De ser así, calcular su inversa por el método de la adjunta.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

<u>Solución</u>

$|A| = 3(-2-2) = -12 \Rightarrow$ A es invertible

Entonces, calculamos B (la matriz de cofactores)

$$A_{11} = +\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{13} = +\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \qquad A_{22} = +\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -3 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 3$$

$$A_{31} = +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \qquad A_{32} = -1\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -6 \qquad A_{33} = +\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6$$

$$B = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & -3 \\ 2 & -6 & 6 \end{bmatrix}, \quad B^t = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -3 & 6 \end{bmatrix} = \operatorname{adj} A$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{12}\begin{bmatrix} -4 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

<u>Ejercicio</u> Calcule A^{-1} por medio de la adjunta

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$\det A = -9$

$$A_{11} = +\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -21, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -4 \quad A_{13} = +\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{14} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 15$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3 \quad A_{22} = +\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \quad A_{24} = +\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -6$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}1&1&1\\-1&2&1\\3&3&2\end{vmatrix}=3 \qquad A_{22}=+\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&3&2\end{vmatrix}=1 \qquad A_{23}=-\begin{vmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\1&3&2\end{vmatrix}=2 \qquad A_{24}=+\begin{vmatrix}1&1&1\\1&-1&2\\1&3&3\end{vmatrix}=-6$$

$$A_{31}=+\begin{vmatrix}1&1&1\\2&-1&2\\3&3&2\end{vmatrix}=3 \qquad A_{32}=-\begin{vmatrix}1&1&1\\1&-1&2\\1&3&2\end{vmatrix}=4 \qquad A_{33}=+\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&3&2\end{vmatrix}=-1 \qquad A_{34}=-\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&-1\\1&3&3\end{vmatrix}=-6$$

$$A_{41}=-\begin{vmatrix}1&1&1\\2&-1&2\\-1&2&1\end{vmatrix}=6 \qquad A_{42}=+\begin{vmatrix}1&1&1\\1&-1&2\\1&2&1\end{vmatrix}=-1 \qquad A_{43}=-\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&-1&1\end{vmatrix}=-2 \qquad A_{44}=+\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&-1\\1&-1&2\end{vmatrix}=-3$$

$$B^t=\operatorname{adj}A=\begin{bmatrix}-21&3&3&6\\-4&1&4&-1\\1&2&-1&-2\\15&-6&-6&-3\end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{7}{3}&-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\ \frac{4}{9}&-\frac{1}{9}&-\frac{4}{9}&\frac{1}{9}\\ -\frac{1}{9}&-\frac{2}{9}&\frac{1}{9}&\frac{2}{9}\\ -\frac{5}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

Tarea Grossman pp. 216, 217 probs 1-16, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25

20) ¿Para cuáles valores de α la matriz $\begin{bmatrix}\alpha+1&-3\\5&1-\alpha\end{bmatrix}$ es no invertible?

22) Suponga que la matriz A de $n\times n$ es no invertible. Demuestre que $A(\operatorname{adj}A)$ es la matriz cero.

23) Sea θ un número real. Demuestre que $\begin{bmatrix}\cos\theta&\operatorname{sen}\theta\\-\operatorname{sen}\theta&\cos\theta\end{bmatrix}$ es invertible y encuentre su inversa.

Ejemplo Encuentre la solución del siguiente sistema de ecuaciones por medio de la inversa y ésta por medio de la adjunta.

$$2x_1+x_2+x_3=6$$
$$3x_1-2x_2-3x_3=5$$
$$8x_1+2x_2+5x_3=11$$

Solución

$$|A|=-25$$

$$\bar{x}=\begin{bmatrix}2\\5\\-3\end{bmatrix}$$

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$