Clase 21-05-21

jueves, 20 de mayo de 2021 01:21 p. m.

Ejemplo 5

$$A=\begin{bmatrix}3 & -5\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$p(\lambda)=(3-\lambda)(-1-\lambda)+5$$

$$p(\lambda)=\lambda^2-2\lambda+2$$

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_1=1+i,\ ma=1\\ \lambda_2=1-i,\ ma=1\end{array}\right\}$$ valores propios diferentes complejos y conjugados

Vectores propios:

para $\lambda_1=1+i$: $(A-\lambda I)\bar{v}=\bar{0}$

$$\begin{bmatrix}3-1-i & -5\\ 1 & -1-1-i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2-i & -5\\ 1 & -2-i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

Como un renglón se hace ceros (porque hay infinidad de soluciones y escogemos el 1er renglón haciéndolo cero) y trabajamos con el 2º renglón:

$$x_1+(-2-i)x_2=0 \implies x_1=(2+i)x_2,\quad x_2\in\mathbb{R}$$

$$E_{\lambda_1}=\{(2+i)x_2, x_2;\ x_2\in\mathbb{R}\}$$

$$\bar{v}_1=(2+i,1);\ mg=1$$ 18/05/2021 04:47 p. m.

Para $\lambda_2=1-i$: $[A-(1-i)I]\bar{v}=\bar{0}$

$$\begin{bmatrix}2+i & -5\\ 1 & -2+i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

Como un renglón se hace ceros porque hay infinidad de soluciones (escogemos el 1er reglón igualado a cero) y trabajamos con el 2º renglón:

$$x_1+(-2+i)x_2=0 \implies E_{\lambda=1-i}=\{(2-i)x_2, x_2\},\ x_2\in\mathbb{R}$$

$$x_1=(2-i)x_2,\quad x_2\in\mathbb{R}$$

$$\bar{v}_2=(2-i,1),\ mg=1$$

CONCLUSIÓN Los valores propios de una matriz real ocurren en pares complejos conjugados
✓ vectores ✓ correspondientes son complejos conjugados entre sí.

Teorema 22 Los valores propios de una matriz triangular son las componentes diagonales de la matriz.

Demostración

$$\text{Si } A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\end{bmatrix};\quad A-\lambda I=\begin{bmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & & \ddots & \vdots\end{bmatrix}$$

Sea $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$; $A-\lambda I = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & & \cdots \\ 0 & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$

Como el determinante de una matriz triangular es igual al producto de las componentes de la diagonal (consultar tema de matrices en Algebra Superior), entonces:

$$p(\lambda) = \det(A-\lambda I) = (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\cdots(a_{nn}-\lambda)$$

Igualando a ceros (ecuación característica):

$$\lambda_1 = a_{11}$$
$$\lambda_2 = a_{22}$$
$$\vdots$$
$$\lambda_n = a_{nn}$$

Ejemplo 6

Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$; $|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 5 & 6 \\ 0 & -3-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix}$

$p(\lambda) = (2-\lambda)(-3-\lambda)(5-\lambda) \Rightarrow \lambda_1 = 2$
$\lambda_2 = -3$
$\lambda_3 = 5$

Ejemplo 7

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -9 \\ 0 & 5 & 18 \\ 0 & -2 & -7 \end{bmatrix}$$

$$p(\lambda) = (\lambda+1)^3$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$, $ma = 3$

Para $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$, $(A-\lambda I)\bar{v} = \bar{0}$

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 & -9 \\ 0 & 6 & 18 \\ 0 & -2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por Gauss:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & -9 & 0 \\ 0 & 6 & 18 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \cdots \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x_2 = -3x_3$
$x_1, x_3 \in \mathbb{R}$

$E_\lambda = \{(x_1, -3x_3, x_3);\ x_1, x_3 \in \mathbb{R}\}$

$B_\lambda = \{(1,0,0), (0,-3,1)\}$, $mg = 2$

Hay 2 vectores linealmente independientes $\Rightarrow$ A no es diagonalizable. (Necesitamos 3, pues A es de 3x3).

Ejemplo 8

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -5 & -9 \\ 8 & 9 & 18 \\ -2 & -3 & -7 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -5 & -9 \\ 8 & 9 & 18 \\ -2 & -3 & -7 \end{bmatrix}$$

$p(\lambda) = -(\lambda+1)^3$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$, $ma = 3$

Para $\lambda = -1$: $(A - \lambda I)\bar{v} = \bar{0}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -4 & -5 & -9 & 0 \\ 8 & 10 & 18 & 0 \\ -2 & -3 & -6 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \cdots\cdots \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} x_2 = -3x_3 \\ 2x_1 = 3x_3 \\ x_3 \in \mathbb{R} \end{array}$$

$\bar{v}_1 = (3, -6, 2)$, $mg = 1$

A no es diagonalizable

Teorema 23

Sea A una matriz de $n \times n$ y sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ valores característicos distintos de A, con vectores característicos correspondientes $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_m$. Entonces $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_m$ son linealmente independientes. Esto es, los vectores propios correspondientes a valores propios distintos son linealmente independientes.

Demostración. Por inducción matemática:

para $m = 2$

$$c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 = \bar{0} \quad (1)$$

Multiplicando por A ambos miembros:

$$\bar{0} = A(c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2) = c_1 A\bar{v}_1 + c_2 A\bar{v}_2$$

Como $A\bar{v}_i = \lambda_i \bar{v}_i$, para $i = 1, 2$:

$$c_1\lambda_1\bar{v}_1 + c_2\lambda_2\bar{v}_2 = \bar{0} \quad (2)$$

Multiplicando (1) por λ_1 y restándolo de (2):

$$(c_1\lambda_1\bar{v}_1 + c_2\lambda_1\bar{v}_2) - (c_1\lambda_1\bar{v}_1 + c_2\lambda_2\bar{v}_2) = \bar{0}$$

O sea:

$$c_2(\lambda_1 - \lambda_2)\bar{v}_2 = \bar{0}$$

Como $\bar{v}_2 \neq \bar{0}$ (por definición de vector propio) y como $\lambda_1 \neq \lambda_2$, se concluye que $c_2 = 0$. Entonces sustituyendo $c_2 = 0$ en (1) se ve que $c_1 = 0$, lo que prueba el teorema para $m = 2$.

Supóngase que el teorema se cumple para $m = k$.

Ahora se prueba el teorema para $m = k+1$, así que:

$$c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 + \ldots + c_k\bar{v}_k + c_{k+1}\bar{v}_{k+1} = \bar{0} \quad (3)$$

Multiplicando ambos miembros de (3) por A y usando el hecho de que $A\bar{v}_i = \lambda_i\bar{v}_i$, se obtiene:

$$c_1\lambda_1\bar{v}_1 + c_2\lambda_2\bar{v}_2 + \ldots + c_k\lambda_k\bar{v}_k + c_{k+1}\lambda_{k+1}\bar{v}_{k+1} = \bar{0} \quad (4)$$

Se multiplican ambos miembros de (3) por λ_{k+1} y se resta de (4):

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1})\bar{v}_1 + c_2(\lambda_2 - \lambda_{k+1})\bar{v}_2 + \ldots + c_k(\lambda_k - \lambda_{k+1})\bar{v}_k = \bar{0}$$

Pero de acuerdo a la suposición de inducción, $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k$ son linealmente independientes. Así

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1}) = c_2(\lambda_2 - \lambda_{k+1}) = \ldots = c_k(\lambda_k - \lambda_{k+1}) = 0$$

Y como $\lambda_i \neq \lambda_{k+1}$ para $i = 1, 2, \ldots, k$ se concluye que $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0$. Pero de (3) esto significa que $c_{k+1} = 0$. Por lo tanto, el teorema se cumple para $m = k+1$ y la prueba queda completa.

MATRICES SEMEJANTES Y DIAGONALIZACIÓN

Def 27 Se dice que dos matrices A y B de $n \times n$ son

Def 27 Se dice que dos matrices A y B de $n \times n$ son semejantes si existe una matriz invertible C tal que:

$$B = C^{-1} A C$$

Teorema 23

Si A y B son matrices semejantes de $n \times n$, entonces A y B tienen el mismo polinomio característico y por consiguiente los mismos valores propios.

Demostración

$B = C^{-1}AC$ por hipótesis

Restando en ambos miembros λI:

$B - \lambda I = C^{-1}AC - \lambda I$

Aplicamos la función determinante en ambos miembros:

$\det(B - \lambda I) = \det[C^{-1}AC - \lambda I]$

$= \det[C^{-1}AC - C^{-1}(\lambda I)C]$

$= \det[C^{-1}(A - \lambda I)C]$ Factorizando

$= (\det C^{-1})(\det(A - \lambda I))(\det C)$ Propiedad de los determinantes

$= (\det C^{-1})(\det C)[\det(A - \lambda I)]$ Prop. Conmutativa del producto en $\mathbb{R}$

$= (\det C^{-1}C)[\det(A - \lambda I)]$ Propiedad de los determinantes

$= (\det I)[\det(A - \lambda I)]$

$= \det(A - \lambda I) \Rightarrow$ mismo $p(\lambda)$
misma ec. característica
mismos valores propios

LQQD.

Def 28 Matriz Diagonalizable

Una matriz A de $n \times n$ es diagonalizable si existe una matriz diagonal D tal que A es semejante a D. Es decir:

$$D = C^{-1}AC$$

En donde, en la diagonal de D están los valores propios de A.

Teorema 24

Una matriz A de $n \times n$ es diagonalizable si y solo si tiene n vectores propios linealmente independientes. En tal caso:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & \lambda_n \end{bmatrix}$$ no necesariamente $\lambda_i \neq \lambda_j$

y C es la matriz de $n \times n$ cuyas columnas son los vectores propios linealmente independientes de A.

$$D = C^{-1}AC$$

Ejemplo tomando el ejemplo 1:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} ; \quad p(\lambda) = \lambda^2 - 7\lambda + 6 ; \quad \begin{matrix} \lambda_1 = 1 , & \vec{v}_1 = (2,-3) \\ \lambda_2 = 6 , & \vec{v}_2 = (1,1) \end{matrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} ; \quad C^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C^{-1}AC = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 18 & 12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ es la matriz diagonal con los valores propios en la diagonal.

Corolario Si la matriz $A_{n \times n}$ tiene n valores propios diferentes, entonces es diagonalizable.

Tarea Grossman pag 561 probs 20, 24, 25, 26, 27, 28,
Grossman pag 588 probs. impares.