# Clase 24-02-21

lunes, 22 de febrero de 2021 01:58 p. m.

**Demostración** El Espacio Vectorial $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n = \{ \bar{x} \mid \bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n);\ x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, n \}$

Sean $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

S1) Cerradura de la suma: $\bar{x} + \bar{y} \in \mathbb{R}^n$

$\bar{x} + \bar{y} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ Sustitución

$= \underbrace{(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)}_{\text{Vector de } n \text{ elementos}}$ Por suma de vectores Def. 1

$\therefore\ \bar{x} + \bar{y} \in \mathbb{R}^n$ ✓

S2) Asociativa de la Suma: $\bar{x} + (\bar{y} + \bar{z}) = (\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z}$

trabajando con el miembro izquierdo:

$\bar{x} + (\bar{y} + \bar{z}) = (x_1, x_2, \ldots, x_n) + [(y_1, y_2, \ldots, y_n) + (z_1, z_2, \ldots, z_n)]$ Sustitución

$= (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1 + z_1, y_2 + z_2, \ldots, y_n + z_n)$ Suma de vectores def. 1

$= [x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + (y_2 + z_2), \ldots, x_n + (y_n + z_n)]$ Suma de vectores def. 1

$= (x_1 + y_1 + z_1, x_2 + y_2 + z_2, \ldots, x_n + y_n + z_n)$ Asociativa de la suma en $\mathbb{R}$.

$= [(x_1 + y_1) + z_1, (x_2 + y_2) + z_2, \ldots, (x_n + y_n) + z_n]$ Asociativa de la suma en $\mathbb{R}$.

$= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) + (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ Suma de Vectores def. 1

$= [(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n)] + (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ Suma de vectores def. 1

$\therefore\ \bar{x} + (\bar{y} + \bar{z}) = (\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z}$

S3) Existencia del Neutro Aditivo: $\bar{x} + \bar{0} = \bar{x}$

$\exists\ \bar{0} \in \mathbb{R}^n \mid \bar{0} = (0, 0, \ldots, 0)$

Entonces:

$\bar{x} + \bar{0} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (0, 0, \ldots, 0)$ Sustitución

$= (x_1 + 0, x_2 + 0, \ldots, x_n + 0)$ Suma de vectores Def. 1

$= (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ Existencia del neutro aditivo en $\mathbb{R}$.

$\therefore\ \bar{x} + \bar{0} = \bar{x}$

S4) Existencia del inverso aditivo: $\exists -\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid \bar{x} + (-\bar{x}) = \bar{0}$

$\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$-1\bar{x} = -1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ Sustitución

$-1\bar{x} = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$ Producto de vector por escalar Def. 2

$-\bar{x} = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n) \in \mathbb{R}^n$

Entonces: $\bar{x} + (-\bar{x}) = (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$ Sustitución

$= [x_1 + (-x_1), x_2 + (-x_2), \ldots, x_n + (-x_n)]$ Suma de vectores Def. 1

$= (x_1 - x_1, x_2 - x_2, \ldots, x_n - x_n)$ Por Regla de los signos

$= (0, 0, \ldots, 0)$ por inverso aditivo en $\mathbb{R}$.

$\bar{x} + (-\bar{x}) = \bar{0}$

S5) Conmutativa: $\bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x}$

Al trabajar con el miembro izquierdo:

$\bar{x} + \bar{y} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ Sustitución

$= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$ Suma de vectores Def. 1

$= (y_1 + x_1, y_2 + x_2, \ldots, y_n + x_n)$ Conmutatividad en $\mathbb{R}$

$= (y_1, y_2, \ldots, y_n) + (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ Suma de vectores Def. 1

$\bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x}$

M1) Cerradura bajo el producto: $\alpha \bar{x} \in \mathbb{R}^n$

$\alpha \bar{x} = \alpha (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ Sustitución

$= \underbrace{(\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)}_{\text{vector de n elementos}}$ Producto de vector por escalar Def. 2

$\therefore \ \alpha \bar{x} \in \mathbb{R}^n$ ✓

M2) 1ª Ley de distribución: $\alpha(\bar{x} + \bar{y}) = \alpha \bar{x} + \alpha \bar{y}$

Al trabajar con el miembro izquierdo:

$\alpha(\bar{x} + \bar{y}) = \alpha[(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n)]$ Sustitución

$= \alpha(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$ Suma de vectores Def. 1

$= [\alpha(x_1 + y_1), \alpha(x_2 + y_2), \ldots, \alpha(x_n + y_n)]$ Producto de vector por escalar. Def. 2

$= (\alpha x_1 + \alpha y_1, \alpha x_2 + \alpha y_2, \ldots, \alpha x_n + \alpha y_n)$ Distributiva de la suma en $\mathbb{R}$.

$= (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n) + (\alpha y_1, \alpha y_2, \ldots, \alpha y_n)$ Suma de vectores. Def. 1

$= \alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \alpha(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ Producto de vector por escalar Def. 2

$\therefore\ \alpha(\bar{x} + \bar{y}) = \alpha\bar{x} + \alpha\bar{y}$

M3) 2ª Ley de distribución: $(\alpha + \beta)\bar{x} = \alpha\bar{x} + \beta\bar{x}$

Al trabajar con el miembro izquierdo se tiene:

$(\alpha+\beta)\bar{x} = (\alpha+\beta)(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ Sustitución

$= [(\alpha+\beta)x_1, (\alpha+\beta)x_2, \ldots, (\alpha+\beta)x_n]$ Producto de vector por escalar Def. 2

$= (\alpha x_1 + \beta x_1, \alpha x_2 + \beta x_2, \ldots, \alpha x_n + \beta x_n)$ Distributiva en $\mathbb{R}$.

$= (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n) + (\beta x_1, \beta x_2, \ldots, \beta x_n)$ Suma de vectores.

$= \alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \beta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ Producto de vector por escalar.

$\therefore\ (\alpha+\beta)\bar{x} = \alpha\bar{x} + \beta\bar{x}$

Tarea

M4) Ley Asociativa de la multiplicación por escalares: $\alpha(\beta\bar{x}) = (\alpha\beta)\bar{x}$

M5) $1\bar{x} = \bar{x}$

Por lo tanto, $\mathbb{R}^n$ es un Espacio Vectorial, y por ende, $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4, \ldots,$ etc., son espacios vectoriales.

Nota: Un espacio vectorial real es aquél cuyos escalares son números reales, y un espacio vectorial complejo es aquél cuyos escalares son números complejos.

Teorema 1

Sea $V$ un espacio vectorial. Entonces:

1) $\alpha\bar{0} = \bar{0}$ para todo escalar $\alpha$.

2) $\underbrace{0}_{\text{escalar } 0}\bar{x} = \underbrace{\bar{0}}_{\text{vector } \bar{0}}$ para todo $\bar{x} \in V$.

3) Si $\alpha\bar{x} = \bar{0}$, entonces $\alpha = 0$ ó $\bar{x} = \bar{0}$ (o ambos).

4) $(-1)\bar{x} = -\bar{x}$ para todo $\bar{x} \in V$.

Ejemplo Sea $V = \{\bar{0}\}$ el espacio vectorial trivial.

$\bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$ $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$

Sean $\bar{0}, \bar{0}, \bar{0} \in V$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

S1) $\bar{0}+\bar{0}=\bar{0} \in V$

S2) $\bar{0}+(\bar{0}+\bar{0})=(\bar{0}+\bar{0})+\bar{0}=\bar{0}$

S3) $\bar{0} \exists V$

S4) $-\bar{0}=(-1)(\bar{0})=\bar{0} \in V$

S5) $\bar{0}+\bar{0}=\bar{0}+\bar{0}$

M1) $\alpha\bar{0}=\bar{0} \in V$ Teorema 1

M2) $\alpha(\bar{0}+\bar{0})=\alpha\bar{0}+\alpha\bar{0}=\bar{0}+\bar{0}=\bar{0}$

M3) $(\alpha+\beta)\bar{0}=\alpha\bar{0}+\beta\bar{0}=\bar{0}+\bar{0}$

M4) $\alpha(\beta\bar{0})=(\alpha\beta)\bar{0}=\bar{0}$

M5) $1\bar{0}=\bar{0}$.

$\{\bar{0}\}$ cumple con todos los Axiomas de Espacio Vectorial.

Ejemplo Determine si el conjunto de los vectores $(x,y)$ en $\mathbb{R}^2$ con $x \geq 0$ y $y \geq 0$ con las operaciones habituales de suma y multiplicación por escalar, es un espacio vectorial.
Si no lo es, enuncie los axiomas que no se cumplen.

Solución:

Sea $H=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2$, con $x \geq 0$ y $y \geq 0\}$ el conjunto dado, y sean $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in H$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Probando los axiomas de la suma se tiene:

S1) $\bar{x}+\bar{y} \in H$

si $\bar{x}+\bar{y} \in H$: $x \geq 0$ y $y \geq 0$

Verificación:

$\bar{x}=(x_1, y_1)$ , $x_1 \geq 0$ y $y_1 \geq 0$

$\bar{y}=(x_2, y_2)$ , $x_2 \geq 0$ y $y_2 \geq 0$

$$\bar{x}+\bar{y}=(\underbrace{x_1+x_2}_{x \geq 0}, \underbrace{y_1+y_2}_{y \geq 0})$$

$\therefore$ $\bar{x}+\bar{y} \in H$

S2) $\bar{x}+(\bar{y}+\bar{z})=(\bar{x}+\bar{y})+\bar{z}$

Al ser $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ vectores de $H$ que están en $\mathbb{R}^2$, y como se demostró anteriormente que $\mathbb{R}^2$ es un espacio vectorial, este axioma se cumple.

S3) $\exists \bar{0} \in H \mid \bar{x}+\bar{0}=\bar{x}$

Existencia del $\bar{0}$ en H : $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2$ con $x \geq 0$ y $y \geq 0\}$

por tanto, $\bar{0} = (0,0) \in H$

Entonces $\bar{x} + \bar{0} = (x_1, y_1) + (0,0)$

$= (x_1 + 0, y_1 + 0)$

$= (x_1, y_1)$

$= \bar{x}$.

S4) $\forall \bar{x} \in H \ \exists -\bar{x} \in H \mid \bar{x} + (-\bar{x}) = \bar{0}$

Existencia de $-\bar{x}$ en $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2$ con $x \geq 0$ y $y \geq 0\}$

$\therefore -\bar{x} \not\exists H$ y por tanto S4 <u>NO</u> se cumple.

S5) Por la misma razón que en S2, $\bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x}$

y la prop. conmutativa se cumple.

Probando los axiomas del producto:

M1) $\alpha \bar{x} \in H$

si $\alpha \bar{x} \in H$ : $x \geq 0$ y $y \geq 0$

Verificación:

$\alpha \bar{x} = \alpha (x_1, y_1)$ , $x_1 \geq 0$, $y_1 \geq 0$

$= (\underbrace{\alpha x_1}_{x}, \underbrace{\alpha y_1}_{y})$

si $\alpha < 0$, entonces $\alpha x_1 \not\geq 0$ y $\alpha y_1 \not\geq 0$

$\therefore \alpha \bar{x} \notin H$ y M1 no se cumple.

M2) $\alpha(\bar{x} + \bar{y}) = \alpha \bar{x} + \alpha \bar{y}$

$\alpha(\bar{x} + \bar{y}) = \alpha[(x_1, y_1) + (x_2, y_2)]$ Sustitución

$= \alpha(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ Suma de vectores

$= [\alpha(x_1 + x_2), \alpha(y_1 + y_2)]$ Producto de vector por escalar

$= (\alpha x_1 + \alpha x_2, \alpha y_1 + \alpha y_2)$ Ley distributiva de la suma en $\mathbb{R}$

$= (\alpha x_1, \alpha y_1) + (\alpha x_2, \alpha y_2)$ Suma de vectores

$= \alpha(x_1, y_1) + \alpha(x_2, y_2)$ producto de vector por escalar

$= \alpha\bar{x} + \alpha\bar{y}$

$\therefore$ M2 cumple.

Conclusión: H no es Espacio Vectorial.

Tarea: Demostrar axiomas M3, M4 y M5.