Clase 19-10-20

miércoles, 28 de agosto de 2019 04:52 a. m.

Solución Parcial 1

Tarea: Historia de ***i***

NÚMEROS COMPLEJOS

Los números complejos aparecen con la introducción de los números imaginarios. Estos surgieron en Álgebra como consecuencia de una necesidad.
Gerolamo Cardano (matemático italiano, 1501-1576), fue el primero en reconocer la verdadera importancia de las raíces negativas, al establecer la Teoría General de las Ecuaciones de tercero y cuarto grado.
Bombelli (Bolonia, 1526 - Roma, 1572), fue un matemático e ingeniero hidráulico italiano. Continuó la obra de Cardano y en 1572 señaló que los números imaginarios eran indispensables para la solución de las ecuaciones de la forma $x^2+c=0$, donde c es un número positivo.
Una ecuación como $x^2+1=0$ no podía quedarse sin solución. Las matemáticas requerían de los números imaginarios para desarrollarse.
¿Qué número, al ser multiplicado por sí mismo es igual a –1 ? : el imaginario más conocido, el que Euler representó con el símbolo ***i***.

$x^2=-1$

$x=\pm\sqrt{-1}$

FORMA BINÓMICA O RECTANGULAR

Una vez aceptada la existencia de i como un número tal, que $i \cdot i = -1$, un número imaginario queda definido como todo aquél de la forma bi, donde b ε R. Por ejemplo:

$$3i,\ -7i,\ \sqrt{2}\, i\ ,\ \tfrac{1}{5}i,\ \text{etc.}$$

Con las mismas reglas de operación que los números reales, y considerando que $i^2=-1$, los imaginarios proporcionan soluciones a toda ecuación de la forma $x^2+c=0$, con $c \geq 0$.

Por ejemplo, las soluciones de la ecuación $x^2+25=0$, son los números $+5i$ y $-5i$ puesto que:

$$(5i)^2 = (5i)(5i) = 25i^2 = 25(-1) = -25$$
$$(-5i)^2 = (-5i)(-5i) = 25i^2 = 25(-1) = -25$$

$x=\pm\sqrt{-25}$

$x=\pm\sqrt[2]{-(5)^2}$

$x=\pm 5\sqrt{-1} = \pm 5i$

Otro ejemplo es la ecuación $x^2+4x+13=0,\ x=-2\pm 3i$.

Cada una de las soluciones es la suma de un número real con un número imaginario, lo cual debe interpretarse como un nuevo "tipo" de número. Surgen así los Números Complejos, ℂ.

Definición 11.

ℂ

$$\mathbb{C} = \{ z \mid z = a+bi, a, b\ \varepsilon\ R;\ i=\sqrt{-1} \}$$

ℕ
ℤ
ℚ
ℚ'
ℝ

Definición 12 Igualdad de dos números complejos

$\mathbb{Q}$
$\mathbb{R}$
$\mathbb{C}$

Definición 12 Igualdad de dos números complejos

Sean $z_1 = a + bi,\ z_2 = c + di$ dos números complejos. Entonces:

$$z_1 = z_2 \;\leftrightarrow\; a = c \;\; y \;\; b = d$$

Definición 13 Suma de dos números complejos

Sean $z_1 = a + bi,\ z_2 = c + di \;\varepsilon\; \mathbb{C}$. El número $z_1 + z_2$ se define como:

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$$

$z_1 + z_2 = a + bi + c + di = (a+c) + (b+d)i$

Ejemplo $z_1 = -3+4i$, $z_2 = 5-7i$ $\quad \underline{z_1 + z_2 = 2-3i}$

Definición 14 Producto de dos números complejos

$i^2 = -1$

Sean $z_1 = a + bi,\ z_2 = c + di \;\varepsilon\; \mathbb{C}$. El número $z_1 \cdot z_2$ se define como:

$$z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$z_1 z_2 = (a+bi)(c+di) = ac + adi + bci + bdi^2$
$= ac + (ad+bc)i - bd$
$= (ac - bd) + (ad+bc)i$

$e + fi \in \mathbb{C}$

Teorema 6 Para todo $z_1, z_2, z_3 \;\varepsilon\; \mathbb{C}$:

6.1 $z_1 + z_2 \;\varepsilon\; \mathbb{C}$ — Cerradura de la suma
$z_1 \cdot z_2 \;\varepsilon\; \mathbb{C}$ — Cerradura del producto

6.2 $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ — Asociatividad de la suma
$z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$ — Asociatividad del producto

6.3 $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ — Conmutatividad de la suma
$z_1 z_2 = z_2 z_1$ — Conmutatividad del producto

6.4 $0+0i$ — Elemento idéntico de la suma
$1+0i$ — Elemento idéntico del producto

$z = 5-2i \in \mathbb{C}$
$-z = -(5-2i) = -5+2i \in \mathbb{C}$
$z + (-z) = (5-2i) + (-5+2i) = 0+0i$

6.5 $\forall\, z \;\varepsilon\; \mathbb{C},\ \exists\, (-z) \varepsilon \mathbb{C}$ tal que $z + (-z) = 0+0i$ — Inverso aditivo

Si $z \neq 0+0i$, $\exists\, z^{-1} \varepsilon\, \mathbb{C}$ tal que $zz^{-1} = \frac{z}{z} = 1+0i$ — Inverso multiplicativo

$\mathbb{C}$ es CAMPO

6.6 $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ — Distributividad

Por tanto, el conjunto de los números complejos tiene una estructura algebraica de CAMPO.