Clase 12-03-21

jueves, 11 de marzo de 2021 11:55 a. m.

UNIDAD 2 BASE Y DIMENSIÓN DE UN ESPACIO VECTORIAL

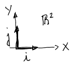
Objetivo: El alumno determinará si un conjunto de vectores es linealmente independiente o dependiente, obtendrá bases y establecerá la dimensión de un espacio vectorial, calculará las coordenadas de un vector respecto a una base dada y obtendrá la matriz de transición para el cambio de bases.

Definición 9 Combinación Lineal

Sean $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n$ vectores en un espacio vectorial V. Entonces cualquier vector de la forma:

$$a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \cdots + a_n\bar{v}_n$$

es una combinación lineal; a_i escalares



Ejemplos:

En $\mathbb{R}^2$: $ai + bj = a(1,0) + b(0,1)$

En $\mathbb{R}^3$: $(-7,7,7) = 2(-1,2,4) - (5,-3,1)$

En M_{23}: $\begin{bmatrix} -3 & 2 & 8 \\ -1 & 9 & 3 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & -6 \end{bmatrix}$

En P_3: $2x^3 + 3x^2 - x + 1 = 2(x^3) + 3(x^2) - 1(x) + 1$

Definición 10 Conjunto Generador

Los vectores $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n$ de un espacio vectorial V generan a V, si todo vector $\bar{v} \in V$ se puede escribir como una combinación lineal de los mismos, es decir:

$$\bar{v} = a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \cdots + a_n\bar{v}_n; \quad a_1, a_2, \ldots, a_n \text{ escalares}$$

Ejemplos:

En $\mathbb{R}^2$: $\{i, j\} = \{(1,0), (0,1)\}$

En $\mathbb{R}^3$: $\{i, j, k\} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

En P_n: $1, x, x^2, \ldots, x^n \longrightarrow n+1$ polinomios generan a P_n

En M_{22}: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

Definición 11 Espacio Generado por un conjunto de vectores

El espacio generado por $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k\}$ en V es el conjunto de todas las combinaciones lineales que podemos hacer con $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k$, es decir:

$$\text{gen}\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k\} = \{\bar{v} \in V : \bar{v} = a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \cdots + a_k\bar{v}_k\}$$

Problemas 5.3 pp. 320 Determine si el conjunto dado de vectores genera el espacio vectorial indicado:

1) En $\mathbb{R}^2$: $\{(2,10), (10,8)\}$

$$(x,y) = a_1(2,10) + a_2(10,8)$$
$$= (2a_1, 10a_1) + (10a_2, 8a_2)$$
$$= (2a_1 + 10a_2, 10a_1 + 8a_2)$$

Igualando:

$x = 2a_1 + 10a_2$
$y = 10a_1 + 8a_2$ $\longrightarrow$ Sistema Lineal no Homogéneo $A\bar{x} = \bar{b}$

Matricialmente:

$$\begin{bmatrix} 2 & 10 \\ 10 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Por Gauss - Jordan:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 10 & x \\ 10 & 8 & y \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & x/2 \\ 10 & 8 & y \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & x/2 \\ 0 & -42 & -5x+y \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & x/2 \\ 0 & 1 & \frac{5x-y}{42} \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{-4x+5y}{42} \\ 0 & 1 & \frac{5x-y}{42} \end{array}\right] \qquad \left.\begin{array}{l} a_1 = \frac{-4x+5y}{42} \\ a_2 = \frac{5x-y}{42} \end{array}\right\} \text{SOLUCIÓN ÚNICA}$$

$\therefore$ Los vectores $(2,10)$ y $(10,8)$ generan $\mathbb{R}^2$.

Grossman pág 320

11) En $\mathbb{R}^3$: $(2,0,1), (3,1,2), (1,1,1), (7,3,5)$

$$(x,y,z) = a_1(2,0,1) + a_2(3,1,2) + a_3(1,1,1) + a_4(7,3,5)$$
$$= (2a_1 + 3a_2 + a_3 + 7a_4,\ a_2 + a_3 + 3a_4,\ a_1 + 2a_2 + a_3 + 5a_4)$$

Igualando:

$$\left.\begin{array}{l} x = 2a_1 + 3a_2 + a_3 + 7a_4 \\ y = a_2 + a_3 + 3a_4 \\ z = a_1 + 2a_2 + a_3 + 5a_4 \end{array}\right\} \text{Sistema Lineal no Homogéneo}$$

Matricialmente:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Resolviendo por Gauss:

$$\underset{R_1 \leftrightarrow R_3}{\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 1 & 7 & x \\ 0 & 1 & 1 & 3 & y \\ 1 & 2 & 1 & 5 & z \end{array}\right]} \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 & z \\ 0 & 1 & 1 & 3 & y \\ 2 & 3 & 1 & 7 & x \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 & z \\ 0 & 1 & 1 & 3 & y \\ 0 & -1 & -1 & -3 & x-2z \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & z-2y \\ 0 & 1 & 1 & 3 & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x+y-2z \end{array}\right]$$

$\Rightarrow$ renglón de ceros
$\Rightarrow$ infinidad de soluciones

Para que el sistema tenga solución: $x + y - 2z = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow x = -y + 2z \\ y \in \mathbb{R} \\ z \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \text{infinidad de soluciones}$$

Por tanto el conjunto de vectores <u>NO</u> genera $\mathbb{R}^3$, y la solución estaría dada por:

$$S = \{(x,y,z) \mid x = -y + 2z;\ y,z \in \mathbb{R}\}$$ pero no todos los vectores de $\mathbb{R}^3$ se comportan de este modo.

Tendríamos vectores como por ejemplo:

$\bar{x} = (2,0,1)$, $y = 0$, $z = 1$
$\bar{x} = (-1,1,0)$, $y = 1$, $z = 0$
$\bar{x} = (1,1,1)$, $y = 1$, $z = 1$

18) En P_2: $\{1-x, 3-x^2\}$

cualquier polinomio en P_2 $\rightarrow$ $C_2x^2 + C_1x + C_0 = a_1(1-x) + a_2(3-x^2)$ $\leftarrow$ combinación lineal

$$= a_1 - a_1x + 3a_2 - a_2x^2$$
$$= (a_1 + 3a_2) - a_1x - a_2x^2$$

Igualando términos semejantes:

UNIDAD 2 BASE Y DIMENSIÓN DE UN ESPACIO VECTORIAL

El alumno determinará si un conjunto de vectores es linealmente independiente o dependiente, obtendrá bases y establecerá la dimensión de un espacio vectorial, calculará las coordenadas de un vector respecto a una base dada y obtendrá la matriz de transición para el cambio de bases.

Definición 5 Combinación Lineal

Sean $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$ en un espacio vectorial. Entonces cualquier vector de la forma:

$$a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \dots + a_n\bar{v}_n \quad ; \quad a_i \text{ son escalares}$$

es una combinación lineal.

Ejemplos:

En $\mathbb{R}^2$: $ai + bj = a(1,0) + b(0,1)$

En $\mathbb{R}^3$: $(-7,7,7) = 2(-1,2,4) - (5,-3,1)$

En M_{23}: $\begin{bmatrix} -3 & 2 & 8 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$

En P_3: $2x^3 + 3x^2 - x + 1 = 2(x^3) + 3(x^2) - (x) + 1$

Definición 7 Espacio Generado por un conjunto de vectores

El Espacio generado por $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k\}$ en V es el conjunto de todas las combinaciones lineales que podemos hacer con $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k$. Es decir:

$$\text{gen}\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k\} = \{\bar{v} \in V : \bar{v} = a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \dots + a_k\bar{v}_k\}$$

Definición 8 Conjunto Generador

Los vectores $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$ de un espacio vectorial V generan a V, si todo vector $\bar{v} \in V$ se puede escribir como una combinación lineal de los mismos, es decir:

$$\bar{v} = a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \dots + a_n\bar{v}_n \; ; \quad a_1, a_2, \dots, a_n \text{ escalares}$$

Ejemplos:

En $\mathbb{R}^2$: $\{i, j\} = \{(1,0), (0,1)\}$

En $\mathbb{R}^3$: $\{i, j, k\} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

En P_n: $1, x, x^2, \dots, x^n \rightarrow n+1$ polinomios generan a P_n

En M_{22}: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

Problemas 5.3 pp. 320 Determine si el conjunto dado de vectores genera el espacio vectorial indicado:

1) En $\mathbb{R}^2$: $\{(2,10), (10,8)\}$

$$(x,y) = a_1(2,10) + a_2(10,8)$$
$$= (2a_1, 10a_1) + (10a_2, 8a_2)$$
$$= (2a_1 + 10a_2, 10a_1 + 8a_2)$$

$$\begin{aligned} x &= 2a_1 + 10a_2 \\ y &= 10a_1 + 8a_2 \end{aligned} \rightarrow \text{Sistema Lineal no Homogéneo } A\bar{x} = \bar{b}$$

Matricialmente:

$$\begin{bmatrix} 2 & 10 \\ 10 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Por Gauss - Jordan:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 10 & x \\ 10 & 8 & y \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & x/2 \\ 10 & 8 & y \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & x/2 \\ 0 & -42 & -5x+y \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & x/2 \\ 0 & 1 & \frac{5x-y}{42} \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{4x+5y}{42} \\ 0 & 1 & \frac{5x-y}{42} \end{array}\right] \qquad \left.\begin{aligned} a_1 &= -\frac{4x+5y}{42} \\ a_2 &= \frac{5x-y}{42} \end{aligned}\right\} \text{ SOLUCIÓN ÚNICA}$$

$\therefore$ Los vectores $(2,10)$ y $(10,8)$ generan $\mathbb{R}^2$.

$$\left.\begin{array}{l} c_2 = -a_2 \\ c_1 = -a_1 \\ c_0 = a_1 + 3a_2 \end{array}\right\} \text{Sistema Lineal no Homogéneo } A\bar{x} = \bar{b}$$

Matricialmente:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \end{bmatrix}}_{\bar{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_2 \\ c_1 \\ c_0 \end{bmatrix}}_{\bar{b}}$$

Resolviendo el sistema:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & c_2 \\ 0 & -1 & c_1 \\ 3 & 1 & c_0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -c_2 \\ 0 & -1 & c_1 \\ 3 & 1 & c_0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -c_2 \\ 0 & -1 & c_1 \\ 0 & 1 & 3c_2+c_0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -c_2 \\ 0 & 1 & -c_1 \\ 0 & 1 & 3c_2+c_0 \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -c_2 \\ 0 & 1 & -c_1 \\ 0 & 0 & c_0+c_1+3c_2 \end{array}\right]$$ renglón de ceros $\longrightarrow$ No hay solución única

Para que el sistema tenga solución: $c_0 + c_1 + 3c_2 = 0$,

$$\left.\begin{array}{l} c_0 = -c_1 - 3c_2 \\ c_1 \in \mathbb{R} \\ c_2 \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \text{infinidad de soluciones}$$

Por tanto, el conjunto $\{1-x, 3-x^2\}$ no genera P_2.

<u>Tarea</u> pp 320-321 probs. 1-25 impares

21) En P_2: $-12x+5x^2,\ -9-27x+8x^2,\ -3-5x+x^2$

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 = a_0(-12x+5x^2) + a_1(-9-27x+8x^2) + a_2(-3-5x+x^2)$$
$$= (-9a_1 - 3a_2) + (-12a_0 - 27a_1 - 5a_2)x + (5a_0 + 8a_1 + a_2)x^2$$

Igualando:

$$\left.\begin{array}{l} c_0 = -9a_1 - 3a_2 \\ c_1 = -12a_0 - 27a_1 - 5a_2 \\ c_2 = 5a_0 + 8a_1 + a_2 \end{array}\right\} \text{Sistema lineal no homogéneo}$$

Matricialmente:

$$\begin{bmatrix} 0 & -9 & -3 \\ -12 & -27 & -5 \\ 5 & 8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -9 & -3 & c_0 \\ -12 & -27 & -5 & c_1 \\ 5 & 8 & 1 & c_2 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 8 & 1 & c_2 \\ -12 & -27 & -5 & c_1 \\ 0 & -9 & -3 & c_0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 8/5 & 1/5 & c_2/5 \\ -12 & -27 & -5 & c_1 \\ 0 & -9 & -3 & c_0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 8/5 & 1/5 & c_2/5 \\ 0 & -39/5 & -13/5 & \frac{12}{5}c_2 + c_1 \\ 0 & -9 & -3 & c_0 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 8/5 & 1/5 & c_2/5 \\ 0 & 1 & 1/3 & -\frac{4}{13}c_2 - \frac{5}{39}c_1 \\ 0 & -9 & -3 & c_0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/3 & -\frac{4}{13}c_2 + \frac{5}{39}c_1 \\ 0 & 1 & 1/3 & \\ 0 & 0 & 0 & c_0 - \frac{15}{13}c_1 - \frac{36}{13}c_2 \end{array}\right]$$ renglón de ceros

Para que el sistema tenga solucion:

$$c_0 - \frac{15}{13}c_1 - \frac{36}{13}c_2 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} c_0 = \frac{15}{13}c_1 + \frac{36}{13}c_2 \\ c_1 \in \mathbb{R} \\ c_2 \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \text{infinidad de soluciones}$$

$\therefore$ Los polinomios $-12x+5x^2,\ -9-27x+8x^2,\ -3-5x^2+x$ no generan P_2

23) En M_{22}: $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

Cualquier matriz en M_{22} como combinación lineal de estas matrices:

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a_1 + 3a_3 & a_1 - a_3 \\ 2a_2 + 3a_4 & a_2 + a_4 \end{bmatrix}$$

Igualando elementos:

$$x = 2a_1 + 3a_3$$
$$y = a_1 - a_3$$
$$z = 2a_2 + 3a_4$$
$$w = a_2 + a_4$$

Matricialmente:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 3 & 0 & x \\ 1 & 0 & -1 & 0 & y \\ 0 & 2 & 0 & 3 & z \\ 0 & 1 & 0 & 1 & w \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & y \\ 2 & 0 & 3 & 0 & x \\ 0 & 2 & 0 & 3 & z \\ 0 & 1 & 0 & 1 & w \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 5 & 0 & x-2y \\ 0 & 2 & 0 & 3 & z \\ 0 & 1 & 0 & 1 & w \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & y \\ 0 & 1 & 0 & 1 & w \\ 0 & 2 & 0 & 3 & z \\ 0 & 0 & 5 & 0 & x-2y \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & y \\ 0 & 1 & 0 & 1 & w \\ 0 & 0 & 0 & 1 & z-2w \\ 0 & 0 & 5 & 0 & x-2y \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & y \\ 0 & 1 & 0 & 1 & w \\ 0 & 0 & 5 & 0 & x-2y \\ 0 & 0 & 0 & 1 & z-2w \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & y \\ 0 & 1 & 0 & 1 & w \\ 0 & 0 & 1 & 0 & (x-2y)/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & z-2w \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & (x+3y)/5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & w \\ 0 & 0 & 1 & 0 & (x-2y)/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & z-2w \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & (x+3y)/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -z+3w \\ 0 & 0 & 1 & 0 & (x-2y)/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & z-2w \end{array}\right]$$ solución única

La solución está dada por.

$$a_1 = \frac{x+3y}{5}$$
$$a_2 = -z+3w$$
$$a_3 = \frac{x-2y}{5}$$
$$a_4 = z - 2w$$

$\therefore$ Las matrices dadas sí generan M_{22}.