Clase 12-05-21

lunes, 10 de mayo de 2021 07:00 p. m.

Teorema Rango-nulidad

Sea $T: V \to W$ una transformación lineal. Supóngase que $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_m\} \in V$ forma una base del $nu(T)$ ($\ker T$ o Kernel de T). Podemos expandir este conjunto para formar una base de V: $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_m, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_n\} \in V$. Puesto que la $\dim nu T = m$ y la $\dim V = m+n$, sólo se necesita demostrar que $\dim Rec T = n$.

Sea $\{T\bar{y}_1, T\bar{y}_2, \ldots, T\bar{y}_n\} \in W$ una base de $Rec T$. Para ello se debe demostrar que generan a $Rec T$ y que son linealmente independientes.

Sea $\bar{v} \in V$. Entonces:

$$\bar{v} = a_1\bar{x}_1 + a_2\bar{x}_2 + \ldots + a_m\bar{x}_m + b_1\bar{y}_1 + b_1\bar{y}_2 + \ldots + b_n\bar{y}_n$$

$$\Rightarrow T\bar{v} = a_1T\bar{x}_1 + a_2T\bar{x}_2 + \ldots + a_mT\bar{x}_m + b_1T\bar{y}_1 + b_2T\bar{y}_2 + \ldots + b_nT\bar{y}_n$$

$$\Rightarrow T\bar{v} = b_1T\bar{y}_1 + b_2T\bar{y}_2 + \ldots + b_nT\bar{y}_n, \text{ porque } T\bar{x}_i = \bar{0}_W$$

1) $nu T = \{\bar{v} \in V : T(\bar{v}) = \bar{0}_W\}$

$*$ $Rec T = \{\bar{w} \in W \mid \bar{w} = T(\bar{x}), \bar{x} \in V\}$

Por lo tanto $\{T\bar{y}_1, Ty_2, \ldots, Ty_n\}$ genera $Rec T$

Para independencia lineal de $\{T\bar{y}_1, T\bar{y}_2, \ldots, T\bar{y}_n\}$

$$c_1T\bar{y}_1 + c_2T\bar{y}_2 + \ldots + c_nT\bar{y}_n = \bar{0}_W \iff T(c_1\bar{y}_1 + c_2\bar{y}_2 + \ldots + c_n\bar{y}_n) = \bar{0}_W$$

$\therefore c_1\bar{y}_1 + c_2\bar{y}_2 + \ldots + c_n\bar{y}_n \in nu T$

Entonces, puesto que $\bar{x}_i$ genera a $nu T$, existe un conjunto de escalares d_i tales que:

$$c_1\bar{y}_1 + c_2\bar{y}_2 + \ldots + c_n\bar{y}_n = d_1\bar{x}_1 + d_2\bar{x}_2 + \ldots + d_m\bar{x}_m$$

Pero puesto que el conjunto $\{\bar{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \bar{x}_m, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_n\}$ forma una base de V, todos los escalares c_i, d_i deben ser cero. Por tanto, $\{T\bar{y}_1, T\bar{y}_2, \ldots, T\bar{y}_n\}$ es linealmente independiente y forma una base de $Rec T$. Esto prueba que la $\dim Rec T$ es n, como se deseaba.

Ejemplo Sea $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, T lineal definida como $T(x,y) = (-4y, y)$

a) $nu T = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^2 : T\bar{x} = \bar{0}_W\}$

1) $nu T = \{\bar{v} \in V : T(\bar{v}) = \bar{0}_W\}$

$$nu T = \{(x,y) : T(x,y) = (0,0)\}$$

$$T(x,y) = (-4y, y) = (0,0)$$

$$y = 0$$

$$x \in \mathbb{R}$$

$\therefore nu T = \{(x,0)\}$,

$B_{nu_T} = \{(1,0)\}$, para $x=1$ (base del núcleo de T)

$\nu(T) = 1$

2) $Rec T = \{\bar{w} \in W : \bar{w} = T(\bar{v})$ para algún $\bar{v} \in V\}$

$\nu(T)=1$

2) $\text{Rec}\,T = \{\bar{w} \in W : \bar{w} = T(\bar{v}) \text{ para algún } \bar{v} \in V\}$

$\text{Rec}\,T = \{\bar{b} \in \mathbb{R}^2 : \bar{b} = T(x,y)\}$

$\text{Rec}\,T = \{(a,b) : (a,b) = T(x,y)\} \longrightarrow$ Ejemplo Sea $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, T lineal definida como $T(x,y) = (-4y, y)$

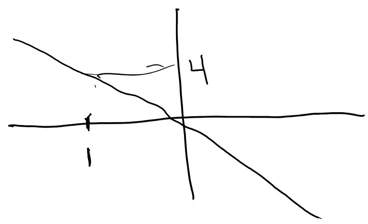
$(a,b) = (-4y, y)$

$\rho = 2-1 = 1 \longrightarrow \dim V = \dim \text{nu}(T) + \dim \text{Rec}(T)$

$n = \nu(T) + \rho(T)$

$\rho(T) = n - \nu(T)$

$\text{Rec}\,T = \{(\underbrace{-4y}_{a}, \underbrace{y}_{b})\}$



$B_{\text{Rec}T} = \{(-4,1)\}$, para $y=1$ (base del Recorrido de T)

Ejemplo Sea $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida como:

$T(x,y) = (x-y, x-y)$

a) $\text{nu}\,T = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^2 : T\bar{x} = \bar{0}_w\}$

$T(\bar{x}) = (x-y, x-y) = (0,0)$

$x - y = 0 \implies x = y,\ y \in \mathbb{R}$

$x - y = 0 \implies x = y,\ y \in \mathbb{R}$

$\therefore \text{nu}\,T = \{(y,y)\},\ y \in \mathbb{R}$

b) $B_{\text{nu}T} = \{(1,1)\}$, $\nu(T) = 1$

c) $\rho(T) = 1$ porque $n - \nu(T) = 2-1 = 1$

2) $\text{Rec}\,T = \{\bar{w} \in W : \bar{w} = T(\bar{v}) \text{ para algún } \bar{v} \in V\}$

$\text{Rec}\,T = \{\bar{b} \in \mathbb{R}^2 : \bar{b} = T(\bar{x}),\ \bar{x} \in \mathbb{R}^2\}$

$= \{(a,b) : (a,b) = T(\bar{x})\}$

Nos fijamos en la imagen de $T(x,y) = (\underbrace{x-y}_{a}, \underbrace{x-y}_{b})$

pero $a = b$

$\therefore \text{Rec}\,T = \{(a,a)\},\ a \in \mathbb{R}$

$B_{\text{Rec}T} = \{(1,1)\}$

$\rho(T) = 1$

Ejemplo $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, T lineal, definida como:

$T(x,y) = (3x-2y, x+4y)$

a) $\text{nu}\,T = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^2 : T(\bar{x}) = \bar{0}_W\}$

1) $\text{nu}\,T = \{\bar{v} \in V : T(\bar{v}) = \bar{0}_W\}$

$= \{(x,y) : T(x,y) = (0,0)\}$

Igualando $T(x,y)$:

$(3x-2y, x+4y) = (0,0)$

Por lo tanto:

$$\left.\begin{array}{l} 3x-2y=0 \\ x+4y=0 \end{array}\right\} \text{SLH}$$

Se resuelve:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 0 \\ 0 & -14 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \end{array}$$

a) $\text{nu}\, T = \{(0,0)\} = \{\bar{0}\}$

b) $\nu(T) = 0$

c) $\rho(T) = 2 \longrightarrow$ número de pivoteo en el sistema

$n = \nu(T) + \rho(T)$

$2 = 0 + \rho(T)$

d) $\text{Rec}\, T = \mathbb{R}^2 = \{(a,b)\}$

$B_{Rec} = \{(1,0),(0,1)\}$ una base para el recorrido

6) Grossman pp. 500

$T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$, T lineal, definida como:

$T(x,y,z,w) = (x+z, y+w)$

a) $\text{nu}\, T = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^4 : T(\bar{x}) = \bar{0}_W\}$

$= \{(x,y,z,w) : T(x,y,z,w) = (0,0)\}$

$T(x,y,z,w) = (x+z, y+w) = (0,0)$

Se resuelve:

$x+z=0$

$y+w=0$

Matricialmente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} x=-z \\ y=-w \\ z,w \in \mathbb{R} \end{array}$$

a) $\text{nu}\, T = \{(-z,-w,z,w)\}$; $z,w \in \mathbb{R}$

b) $B_{\text{nu}\,T}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} w$$

b) $B_{nuT} = \{(-1,0,1,0), (0,-1,0,1)\}$; $\nu(T) = 2$

c) $Rec\,T = \{\vec{b} \in \mathbb{R}^2 : \vec{b} = T(x,y,z,w)\}$

$n = \nu(T) + \rho(T)$

$\rho(T) = 4-2 = 2$

$(a,b) = T(x,y,z,w) = (\underbrace{x+z}_{a}, \underbrace{y+w}_{b})$

$\therefore\ Rec\,T = \mathbb{R}^2$; $Rec\,T = \{(a,b)\}$

$B_{RecT} = \{(1,0), (0,1)\}$

Ejemplo

Sea $T: P_2 \to P_1$ definida como $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_1 + a_2X$, T lineal.

Encuentre nuT, $\nu(T)$, $Rec\,T$, B_{RecT}, $\rho(T)$

a) $nuT = \{p(x) \in P_2 : T[p(x)] = 0 + 0x,\ \forall p(x) \in P_2\}$

$T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = 0 + 0X$

Sustituyendo:

$a_1 + a_2X = 0 + 0X$

Entonces:

$a_1 = 0$
$a_2 = 0$
$a_0 \in \mathbb{R}$

$\therefore\ nuT = \{a_0\}$

$B_{nuT} = \{1\}$

$\nu(T) = 1$

b) $n = \nu + \rho$ Teorema 16

$3 = 1 + \rho$

$\therefore\ \rho(T) = 2$

$Rec\,T = \{b_0 + b_1x : b_0 + b_1x = T[p(x)]\}$

$Rec\,T = P_1 = \{b_0 + b_1x\}$

$B_{Rec\,T} = \{1, x\}$

Tarea Grossman pag. 500 probs. 1-12