Clase 11-11-20

martes, 10 de noviembre de 2020 01:57 p. m.

RAÍCES DE UN POLINOMIO

Definición 30

Sea $p(x)$ un polinomio en x con coeficientes en $\mathbb{C}$, y sea α un número complejo. α es una raíz de $p(x)$ si $p(\alpha)=0$

Los conceptos de "raíz de un polinomio" y "solución de una ecuación algebraica" son equivalentes, ya que se conoce como ecuación algebraica de grado n a una ecuación de la forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0, \text{ con } a_n \neq 0.$$

Teorema 20 Teorema Fundamental del Álgebra

Si $p(x)$ es un polinomio en x con coeficientes en $\mathbb{C}$ de grado mayor o igual que uno, entonces $p(x)$ tiene al menos una raíz en $\mathbb{C}$.

DESCOMPOSICIÓN DE UN POLINOMIO EN FACTORES LINEALES

Sea $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ un polinomio en x con coeficientes en $\mathbb{C}$ de grado $n \geq 1$. Por el Teorema 20 $p(x)$ tiene al menos una raíz $\alpha_1 \in \mathbb{C}$, es decir, $p(\alpha_1)=0$, y por el Teorema 19, $(x-\alpha_1)$ es un factor de $p(x)$. Por lo que podemos escribir:

$$p(x) = (x-\alpha_1)\, q_1(x) \qquad ①$$

donde $q_1(x)$ es un polinomio de grado $n-1$.

Si $n-1 \geq 1$, entonces por el Teorema 20, $q_1(x)$ tiene por lo menos una raíz $\alpha_2 \in \mathbb{C}$ y podemos escribir:

$$q_1(x) = (x-\alpha_2)\, q_2(x) \qquad ②$$

donde $q_2(x)$ es de grado $n-2$.

Si todavía $gr(q_2) = n-2 \geq 1$, se repite el razonamiento un número finito de veces hasta obtener un polinomio q_n de grado cero, esto es:

$$q_{n-1} = (x-\alpha_n)\, q_n \qquad ⓝ$$

y como q_n es de grado cero, es un número y no tiene raíces y el proceso se termina.

Sustituyendo la expresión ⓝ en la $(n-1)$, el resultado en la expresión $(n-2)$ y así sucesivamente hasta sustituir en la expresión ①, obtenemos:

$$p(x) = \underbrace{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\cdots(x-\alpha_n)}_{\text{producto de polinomios de grado 1}}\; q_n \rightarrow \text{coincide con el coeficiente } a_n \neq 0$$

Esta descomposición de un polinomio en n factores lineales es ÚNICA, salvo el orden de los factores.

Teorema 21

Si $p(x)$ es un polinomio en x con coeficientes en $\mathbb{C}$ de grado $n \geq 1$, entonces $p(x)$ tiene exactamente n raíces.

Ejemplo Considérese el siguiente polinomio:

$p(x) = 3x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 2x + 1$, $gr(p) = 4$ y sea una de sus raíces $\alpha_1 = 1$. Entonces:

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 3 & -2 & -4 & 2 & 1 \\ & & 3 & 1 & -3 & -1 \\ \hline & 3 & 1 & -3 & -1 & \boxed{0} \end{array} \Rightarrow \text{residuo cero}$$

Por tanto, podemos expresar $p(x)$ de la sig. manera:

$p(x) = (x-1)\, q_1(x)$, ①

donde $q_1(x) = 3x^3 + x^2 - 3x - 1$, $gr(q_1) = 3$

Sea $\alpha_2 = -1$ una raíz de $q_1(x)$, ya que:

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 3 & 1 & -3 & -1 \\ & & -3 & 2 & 1 \\ \hline & \underbrace{3 \quad -2 \quad -1} & & & \boxed{0} \end{array}$$

Y podemos escribir:

$q_1(x) = (x+1)\, q_2(x)$ ②

donde $q_2(x) = 3x^2 - 2x - 1$, $gr(q_2) = 2$

Ahora, sea $\alpha_3 = -\frac{1}{3}$ una raíz de q_2, ya que:

$$\begin{array}{r|rrr} -\frac{1}{3} & 3 & -2 & -1 \\ & & -1 & 1 \\ \hline & 3 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

Y podemos escribir:

$$q_2(x) = \left(x+\frac{1}{3}\right) q_3(x) \quad ③$$

donde $q_3(x) = 3x-3$, $gr(q_3)=1$

Finalmente $q_3(x)$ tiene como raíz $\alpha_4=1$, ya que:

$$\begin{array}{r|rr} & 3 & -3 \\ 1 & & 3 \\ \hline & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

y $q_3(x) = (x-1)\,3$ ④ $a_n = q_n$

Sustituyendo ④ en ③ y el resultado en ② y lo que se obtiene en ① llegamos a la expresión:

$$p(x) = (x-1)(x+1)\left(x+\frac{1}{3}\right)(x-1)3$$

Que es la descomposición de $p(x)$ en factores lineales.

Como $p(x)$ es de grado 4, tiene 4 raíces, que son:

$$\alpha_1=1, \quad \alpha_2=-1, \quad \alpha_3=-\frac{1}{3}, \quad \alpha_4=1$$

donde $\alpha_1=\alpha_4$ es una raíz de multiplicidad 2.

CÁLCULO DE RAÍCES

Obtener raíces de polinomios es equivalente a resolver ecuaciones algebraicas. De los griegos, para las llamadas ecuaciones cuadráticas:

$$ax^2+bx+c=0, \quad \text{con } a\neq 0$$

sabemos que:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Solución de la Ecuación General de 2º Grado.

Para las soluciones de la ec. gral de 3er grado: Fórmula de Cardano
" " " " " " " 4º " : " de Ferrari

En el S. XIX, Niels Henrick Abel (1824), matemático noruego demostró que las ecuaciones algebraicas de grado ≥ 4 no podían ser resueltas explícitamente en términos de sus coeficientes.
No existe un método general para obtener las raíces de un polinomio de grado > 4.

Nos ocuparemos básicamente de polinomios con coeficientes en $\mathbb{Q}$. Las raíces de estos polinomios pueden ser de 3 tipos:

1.- Raíces racionales
2.- Raíces irracionales
3.- Raíces complejas.

Las raíces racionales son las más fáciles de hallar y se pueden obtener mediante un procedimiento de prueba directa, el cual se apoya en el siguiente teorema:

Teorema 22

Sea $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ un polinomio en x con coeficientes enteros, donde $a_n \neq 0$ y $a_0 \neq 0$ y $n \geq 1$. Si un número racional es raíz de $p(x)$ y $\frac{p}{q}$ es su mínima expresión, entonces p es un factor de a_0 y q es un factor de a_n.

Ejemplo Sea $p(x) = 2x^3 + 7x^2 + 2x - 3$. Calcular las raíces de $p(x)$ y expresar el resultado como un producto de factores lineales.

Solución: $n = 3 \geq 1$

$a_0 = -3$; factores de a_0 (p): $\pm 1, \pm 3$

$a_n = 2$; factores de a_n (q): $\pm 1, \pm 2$

Del Teorema 22, si p(x) tiene raíces racionales, éstas deberán ser algunos de los siguientes números:

prr (posibles raíces racionales) $\frac{p}{q} = \pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm 3, \pm \frac{3}{2}$

Empleando la división sintética y con base en el Teorema del Residuo podemos determinar cuáles son esas posibles raíces racionales.

con $\alpha_1 = 1$:

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & 7 & 2 & -3 \\ & & 2 & 9 & 11 \\ \hline & 2 & 9 & 11 & \boxed{8} \end{array}$$ no es raíz

con $\alpha_1 = -1$:

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 2 & 7 & 2 & -3 \\ & & -2 & -5 & 3 \\ \hline & 2 & 5 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$ $\alpha_1 = -1$ sí es raíz

$\therefore\ p(x) = (x+1)\ (2x^2+5x-3)$

Ya que $2x^2+5x-3$ es un polinomio de 2º grado:

$$\alpha_{2,3} = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{4} = \frac{-5 \pm 7}{4}; \qquad \alpha_2 = -3$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2}$$

Entonces $p(x) = \underset{4}{2}\ \underbrace{(x+1)(x+3)\left(x-\frac{1}{2}\right)}$

Si tuviéramos, por ejemplo, $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{6}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}$

un polinomio con coeficientes en $\mathbb{Q}$, no podríamos usar el Teorema 22, a menos que multiplicáramos f(x) por 6, es decir:

$p(x) = 2x^3 + 7x^2 + 2x - 3$

y tendríamos las mismas raíces que f(x).

Teorema 23 Regla de los Signos de Descartes

Sea $\mathrm{p}(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ un polinomio en x con coeficientes reales y $a_0 \neq 0$.

1) El número de raíces reales positivas de p(x) es igual al número de cambios de signo en la secuencia de coeficientes del polinomio p(x) o menor que éste en un número par.

2) El número de raíces reales negativas de p(x) es igual al número de cambios de signo en la secuencia de coeficientes del polinomio en x que se obtiene al sustituir x por $-x$ en p(x), o menor que éste en un número par.

Nota Sólo considerar coeficientes diferentes de cero.

Así por ejemplo, para el polinomio:

$$p(x) = x^5 + 4x^4 - x^2 + 3x - 2$$

Vemos que hay 3 cambios de signo en la secuencia de coeficientes de p(x):

$$p(x) = x^5 + 4x^4 - x^2 + 3x - 2$$

por lo que p(x) tiene 3 ó 1 raíces reales positivas (rrp).

Por otra parte:

$$p(-x) = -x^5 + 4x^4 - x^2 - 3x - 2$$ 2 ó 0 raíces reales negativas

Puesto que p(x) es de 5º grado, tiene 5 raíces, y dado que no tiene raíces nulas, del Teorema 23 se sigue que las únicas alternativas en cuanto al número y tipo de sus raíces son las que se resumen en la siguiente tabla:

	1^a	2^a	3^a	4^a
rrp	3	3	1	1
rrn	2	0	2	0
rc	0	2	2	4
TOTAL	5	5	5	5

$\uparrow$

Ejemplo Obtener las raíces del polinomio $p(x)=x^5-5x^4+9x^3-6x^2$

Solución: el Teorema 23 nos dice que $a_0 \neq 0$. Factorizando x^2:

$$p(x)=x^2\left(x^3-5x^2+9x-\underset{\substack{\uparrow \\ a_0}}{6}\right)$$

donde $\boxed{\begin{matrix}\alpha_1=0 \\ \alpha_2=0\end{matrix}}$, porque $x^2=(x-0)(x-0) \rightarrow$ 2 raíces nulas

Entonces:

$$p(x)=x^2 q_1(x)$$

donde $q_1(x)=x^3-5x^2+9x-6$ 3 ó 1 rrp

$$q_1(-x)=-x^3-5x^2-9x-6 \quad \text{0 raíces negativas}$$

Entonces tendremos el siguiente cuadro:

	1^a	2^a
raíces nulas rn	2	2
rrp	3	1
rrn	—	—
rc	0	2
TOTAL	5	5

Cálculo de las raíces faltantes en $q_1(x)$:

factores de $a_0 = -6$ (p): $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

factores de $a_n = 1$ (q): ± 1

posibles raíces racionales (prr) $\frac{p}{q}$: $1, 2, 3, 6$

Probando con $\alpha_3 = 1$ al emplear división sintética con $q_1(x) = x^3 - 5x^2 + 9x - 6$

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -5 & 9 & -6 \\ & & 1 & -4 & 5 \\ \hline & 1 & -4 & 5 & \boxed{-1} \end{array}$$ no es raíz

Con $\alpha_3 = 2$:

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & -5 & 9 & -6 \\ & & 2 & -6 & 6 \\ \hline & 1 & -3 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$ sí es raíz $\boxed{\alpha_3 = 2}$

Entonces $q_1(x) = (x-2)\, q_2(x)$

donde: $q_2(x) = x^2 - 3x + 3$

Usando la fórmula cuadrática:

$$\alpha_{4,5} = \frac{3 \pm \sqrt{9-12}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{(3)(-1)}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{3}\, i}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{\alpha_4 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i} \\ \\ \boxed{\alpha_5 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i} \end{array}\right\} \text{raíces complejas}$$

$$\therefore\ p(x) = x^2 (x-2) \left(x - \left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)\right) \left(x - \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)\right)$$