Clase 12-10-20

lunes, 12 de octubre de 2020 01:00 p. m.

Ejemplo Demostrar por i.m. la validez de la siguiente proposición:

$n! > n^2 \quad \forall n \geq 4, \; n \in \mathbb{N}$

Paso 1 $n = 4$:

$4! > 4^2$

$4 \times 3 \times 2 \times 1 > 16$

$24 > 16$ ✓ se cumple

Paso 2 $n = k$ (Hipótesis)

$k! > k^2, \; k \geq 4$ ①

Paso 3 $n = k+1$ (Tesis)

$(k+1)! > (k+1)^2$ ②

Pero $(k+1)! = (k+1)\,k!$

Sustituyendo en ②:

$(k+1)\,k! > (k+1)^2$ ②

Paso 4 Multiplicando ambos miembros de ① por $(k+1)$:

$(k+1)k! > (k+1)k^2$ ①A

Por transitividad:

si $(k+1)k! > (k+1)k^2$ ①A

y $(k+1)k^2 > (k+1)^2 \longrightarrow$ P.D.

$\therefore$ $(k+1)k! > (k+1)^2$ TESIS

Demostrando:

$(k+1)k^2 > (k+1)^2$

$k^2 > k+1$, para $k > 1$

$\therefore$ La proposición $n! > n^2$ es verdadera $\forall n \geq 4$.

PERTENENCIA

Dos Cerraduras:

S1) Si $a, b \in \mathbb{N}$, $a+b \in \mathbb{N}$

M1) Si $a, b \in \mathbb{N}$, $a \cdot b \in \mathbb{N}$

Ejemplo Demostrar que si n es un número natural cualquiera, entonces:
$\frac{1}{6}(2n^3+3n^2+n)$ es un natural.

Paso 1 $n=1$: $\frac{1}{6}(2+3+1) = \frac{6}{6}$
$= 1 \in \mathbb{N}$ ✓ se cumple

Para $n=k$ (Hipótesis)
$\frac{1}{6}(2k^3+3k^2+k) \in \mathbb{N}$ ①

Para $n=k+1$ (Tesis):
$\frac{1}{6}\left[2(k+1)^3+3(k+1)^2+k+1\right] \in \mathbb{N}$ ② ⟵ por demostrar

Desarrollando la tesis:
$\frac{1}{6}(\underline{2k^3}+6k^2+6k+2+\underline{3k^2}+6k+3+\underline{k}+1)$
$= \underbrace{\frac{1}{6}(2k^3+3k^2+k)}_{\in \mathbb{N} \text{ por hipótesis}} + \frac{1}{6}(6k^2+12k+6)$ ③

y la parte que falta:

$\frac{1}{6}(6k^2+12k+6) = \frac{6}{6}(k^2+2k+1)$
$= k^2+2k+1 \in \mathbb{N}?$

Descomponiendo en partes:
$1 \in \mathbb{N}$
$2 \in \mathbb{N}$
$k \in \mathbb{N}$
$2k \in \mathbb{N}$ por cerradura del producto
$k^2 = k \cdot k \in \mathbb{N}$ por cerradura del producto

$\therefore k^2+2k+1 \in \mathbb{N}$ por cerradura bajo la suma

$\therefore$ en ③ $\frac{1}{6}(2k^3+3k^2+k) + \frac{1}{6}(6k^2+12k+6) \in \mathbb{N}$ por cerradura bajo la suma

y la proposición $\frac{1}{6}(2n^3+2n^2+n) \in \mathbb{N}$ es verdadera $\forall n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo Demostrar por inducción matemática la validez de la siguiente proposición:

$$\frac{n^3-n}{3} \in \mathbb{N} \quad \forall\ n \geq 2;\ n \in \mathbb{N}$$

Para $n=2$:

$$\frac{2^3-2}{3}=\frac{8-2}{3}=\frac{6}{3}$$
$$=2\in\mathbb{N}\checkmark$$

Para $n=k$ (Hipótesis):

$$\frac{k^3-k}{3}\in\mathbb{N},\quad k\geq 2$$

Para $n=k+1$ (Tesis)

$$\frac{(k+1)^3-(k+1)}{3}\in\mathbb{N}$$

Desarrollando la tesis:

$$\frac{k^3+3k^2+3k+1-k-1}{3}=\underbrace{\frac{k^3-k}{3}}_{\in\mathbb{N}}+\frac{3k^2+3k}{3}\quad (3)$$

Por hipotesis

Verificando si $\frac{3k^2+3k}{3}\in\mathbb{N}$:

$$\frac{3k^2+3k}{3}=\frac{3}{3}(k^2+k)$$
$$=k^2+k$$

$k\in\mathbb{N}$

$k^2=k\cdot k\in\mathbb{N}$ por cerradura del producto

$k^2+k\in\mathbb{N}$ por cerradura de la suma.

$\therefore$ En (3):

$$\frac{k^3-k}{3}+\frac{3k^2+3k}{3}\in\mathbb{N}$$ por cerradura bajo la suma

Y se comprueba que $\frac{n^3-n}{3}\in\mathbb{N},\ \forall n\geq 2$

Tarea Demostrar la validez de las siguientes proposiciones:

1) $\frac{2}{3}(2n^3+3n^2+n)\in\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{N}$

2) $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2\in\mathbb{N}$

DIVISIBILIDAD

Ejemplo Demostrar por i.m. que 6^n-1 es divisible entre 5 $\forall n\in\mathbb{N}$

Solución: 6^n-1 es divisible entre 5 se puede escribir como:

$$6^n - 1 = 5p, \quad p \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Paso 1 $n=1$:

$$6^1 - 1 = 5p$$
$$5 = 5p$$

con $p=1$: $5=5$ ✓

Paso 2 $n=k$ (HIPOTESIS):

$6^k - 1 = 5p$, $p \in \mathbb{N}$ para algún $k \in \mathbb{N}$ (p es dato del problema). ①

Paso 3 P.D. para $n=k+1$ (TESIS)

$6^{k+1} - 1 = 5m$, $m \in \mathbb{N}$ ② (m es una incógnita del problema) ②

Paso 4 Multiplicando por 6 ambos miembros de ①:

$$6(6^k - 1) = 6(5p) \quad (1A)$$
$$6^{k+1} - 6 = 6(5p)$$
$$6^{k+1} - 1 - 5 = 6(5p)$$
$$6^{k+1} - 1 = 6(5p) + 5$$
$$6^{k+1} - 1 = 5(6p) + 5$$
$$= 5\underbrace{(6p+1)}_{m} \qquad m \in \mathbb{N}?$$

Analizando m:

$1 \in \mathbb{N}$
$p \in \mathbb{N}$
$6 \in \mathbb{N}$
$6p \in \mathbb{N}$ por cerradura bajo el producto
$6p+1 \in \mathbb{N}$ por cerradura bajo la suma

$\therefore$ $m \in \mathbb{N}$ y se demuestra la tesis porque $5m$ es múltiplo de 5, y por lo tanto la proposición $6^n - 1$ es divisible entre 5, es verdadera $\forall n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo Demostrar por i.m. que $(3^{2n} - 1)$ es divisible por 8.

Solución.

$$3^{2n} - 1 = 8p, \quad p \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

para $n=1$:

$$3^2 - 1 = 8p$$
$$8 = 8p$$

$8 = 8$ para $p=1$ ✓

para $n=k$ (Hipótesis):

$3^{2k} - 1 = 8p$, $p \in \mathbb{N}$ para algún $k \in \mathbb{N}$ ①

P.D. para $n=k+1$ (Tesis)

$\longrightarrow \quad 3^{2(k+1)}-1 = 8m, \quad m \in \mathbb{N}\,?$ ②

Multiplicando por 3^2 ambos miembros de ①:

$$3^2\left(3^{2k}-1\right) = 3^2\,(8p)$$

$$3^{2k+2} - 9 = 3^2\,(8p)$$

$$3^{2(k+1)}-1-8 = 9\,(8p)$$

$$3^{2(k+1)}-1 = 9\,(8p)+8$$

$$3^{2(k+1)}-1 = 8\,(9p)+8$$

$$3^{2(k+1)}-1 = 8(\underbrace{9p+1}_{m})$$

$m = 9p+1 \in \mathbb{N}\,?$

$1 \in \mathbb{N}$

$p \in \mathbb{N}$

$9p \in \mathbb{N}$ por cerradura del producto

$9p+1 \in \mathbb{N}$ por cerradura bajo la suma

$\therefore\ 9p+1 = m \in \mathbb{N}$ y se demuestra la Tesis porque $8m$ es múltiplo de 8 y $3^{2n}-1$ es divisible por 8, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Tarea Demostrar por i.m. que la proposición (n^3-n) es divisible por 3, $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$