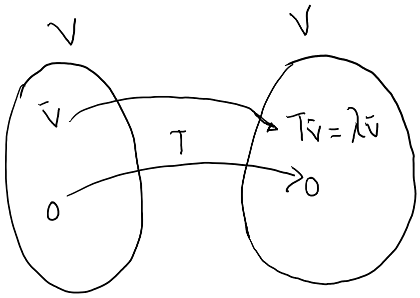
Clase 19-05-21

martes, 18 de mayo de 2021 07:00 p. m.

Unidad 4

VALORES Y VECTORES PROPIOS eigenvalores y eigenvectores

Sea T una TL:



A veces ocurre que el vector imagen de un vector del dominio es paralelo al mismo vector. En este caso: $T\bar{v}=\lambda\bar{v}$, donde λ es un escalar.

$T\bar{v}=\lambda\bar{v}$ ①, $\lambda\in\mathbb{C} \Rightarrow T\bar{v}$ y $\bar{v}$ son paralelos

Definición 22

Si $\bar{v}\neq 0$ y λ satisface ①, entonces λ se llama valor propio de T y $\bar{v}$ se llama vector propio de T correspondiente a λ.

Si V tiene dimensión finita entonces T se puede representar por la matriz A_T. Por tanto:

$$A\bar{v}=\lambda\bar{v} \quad ②$$

con A de $n\times n$, $\lambda\in\mathbb{C}$ y $\bar{v}\neq\bar{0}\in\mathbb{C}^n$

Para poder ejecutar ② necesitamos a la matriz identidad I_n en el 2º miembro de ②:

$A\bar{v}=\lambda I\bar{v}$ para que la igualdad se cumpla, dimensionalmente hablando.

Agrupando:

$$A\bar{v}-\lambda I\bar{v}=\bar{0}$$

Factorizando:

$(A-\lambda I)\bar{v}=\bar{0} \longrightarrow$ Sistema Lineal Homogéneo SLH

En un SLH hay 2 posibilidades de solución:

a) Solución única o trivial ($\bar{v}=\bar{0}$)

b) Infinidad de soluciones, o sea, $\bar{v}\neq\bar{0}$

Por definición, $\bar{v} \neq \bar{0}$, por lo que nuestro SLH va a tener SIEMPRE infinidad de soluciones.

Def 23 $\quad p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$

donde $p(\lambda)$ es el polinomio característico de A en λ, de grado n.

Como $(A-\lambda I)\bar{v} = \bar{0}$, el sistema tendrá infinidad de soluciones y

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Def 24 Ecuación Característica:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Con esta ecuación característica vamos a encontrar las raíces de $p(\lambda)$, o sea, los valores propios de T o de A_T.

Tarea pp. 561 problemas 3, 5, 11, 15, 20, 17, 21

Ejemplo 1 Obtener los valores propios de A.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 3 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 3 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$p(\lambda) = (4-\lambda)(3-\lambda) - 6$$
$$= 12 - 4\lambda - 3\lambda + \lambda^2 - 6$$

$p(\lambda) = \lambda^2 - 7\lambda + 6$ polinomio característico

$\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$ ecuación característica

$$(\lambda - 1)(\lambda - 6) = 0$$

$\therefore \left.\begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 6 \end{array}\right\}$ valores propios diferentes

Definición 25 multiplicidad algebraica (ma)

Es el número de veces que aparece el valor propio, por ejemplo, en el ejercicio anterior:

$ma_{\lambda_1} = 1$

$ma_{\lambda_2} = 1$

Continuando con el ejemplo, encontraremos los vectores propios correspondientes a sus valores propios:

Para $\lambda_1 = 1$, $(A-\lambda I)\bar{v} = \bar{0}$

Sustituyendo:

$$\begin{bmatrix} 4-1 & 2 \\ 3 & 3-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se resuelve por Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2/3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad x = -\frac{2}{3}y, \quad y \in \mathbb{R}$$

Para $y = -3$: $\bar{v}_1 = (2,-3)$ $mg = 1$ (multiplicidad geométrica correspondiente a λ_1)

un vector propio para λ_1

Para $\lambda_2 = 6$, $(A-\lambda I)\bar{v} = \bar{0}$

Sustituyendo:

$$\begin{bmatrix} 4-6 & 2 \\ 3 & 3-6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por Gauss:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad x = y, \quad y \in \mathbb{R}$$

Por tanto $\bar{v}_2 = (1,1)$, $mg = 1$. 1 vector propio para λ_2.

Nota como $\bar{v}_1 = (2,-3)$ y $\bar{v}_2 = (1,1)$ son l.indep $\Rightarrow$ A es diagonalizable.

Ejemplo 2 $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

a) Valores propios

$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$

$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 4-\lambda & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 \end{vmatrix}$

$p(\lambda) = \det(A-\lambda I)$

$\det(A-\lambda I) = \det \begin{bmatrix} 4-\lambda & 0 \\ 0 & 4-\lambda \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 \\ 0 & 4-\lambda \end{vmatrix}$

$p(\lambda) = (4-\lambda)(4-\lambda) = 16-4\lambda-4\lambda+\lambda^2$

$p(\lambda) = \lambda^2 - 8\lambda + 16$

$\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0 \implies (\lambda-4)(\lambda-4) = 0$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 4, \quad ma = 2$ (Valores propios iguales)

b) Vectores propios: $(A-\lambda I)\bar{v} = \bar{0}$

para $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$:

$\begin{bmatrix} 4-4 & 0 \\ 0 & 4-4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

por Gauss:

$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ $\begin{matrix} 0x + 0y = 0 \implies x \in \mathbb{R} \\ 0x + 0y = 0 \implies y \in \mathbb{R} \end{matrix} \longrightarrow$ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} y$

$E_{\lambda_1=4} = \{(x,y);\ x,y \in \mathbb{R}\} \longrightarrow E_\lambda =$ espacio característico de A

Una base es:

$B_{E_\lambda} = \{(1,0),(0,1)\}$; $\left.\begin{matrix} \bar{v}_1 = (1,0) \\ \bar{v}_2 = (0,1) \end{matrix}\right\}$ para $\lambda_1 = \lambda_2 = 4 \implies mg = 2$ (2 vectores propios)

(Como $\bar{v}_1$ y $\bar{v}_2$ son l.indep, A es diagonalizable).

Teorema 21 Espacio característico de A

Sea λ un valor propio de $A_{n\times n}$ y sea $E_\lambda = \{\bar{v} : A\bar{v} = \lambda\bar{v}\}$.
Entonces E_λ es un subespacio de V.

Def 26 multiplicidad geométrica (mg)

$mg = \dim E_{\lambda_i}$ (número de vectores propios asociados a λ)

Ejemplo 3

$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

a) Valores propios

a) Valores propios

$$p(\lambda) = (4-\lambda)^2$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 4$, $ma = 2$ (valores propios iguales)

b) Vectores propios $(A-\lambda I)\bar{v} = \bar{0}$

$$\begin{bmatrix} 4-4 & 1 \\ 0 & 4-4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} x_2 = 0 \\ x_1 \in \mathbb{R} \end{array} \quad \Rightarrow E_\lambda = \{(x_1, 0) \,;\, x_1 \in \mathbb{R}\}$$

$B_{E_\lambda} = \{(1,0)\}$; $\bar{v}_1 = (1,0)$, $mg = 1$

Sólo tenemos 1 vector propio $\Rightarrow$ A no es diagonalizable.
Necesitamos 2 vectores propios pues A es de tamaño 2x2.

Ejemplo 4

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \;;\quad A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 & 4 \\ 3 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = \lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6$$

Por división sintética:

$\lambda_1 = 1$, $ma = 1$

$\lambda_2 = -2$, $ma = 1$

$\lambda_3 = 3$, $ma = 1$

Vectores propios

Para $\lambda_1 = 1$: $(A - \lambda I)\bar{v} = \bar{0}$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \to \cdots\cdots \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 4x_3 \\ x_3 \in \mathbb{R} \end{array}$$

$E_{\lambda_1 = 1} = \{(-x_3, 4x_3, x_3)\}$, $x_3 \in \mathbb{R}$

$\bar{v}_1 = (-1, 4, 1)$ $mg = 1$

Para $\lambda_2 = -2$: $(A - \lambda I)\bar{v} = \bar{0}$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \cdots\cdots \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} X_1 = -X_3 \\ X_2 = X_3 \\ X_3 \in \mathbb{R} \end{array}$$

$$E_{\lambda_1=2} = \{(-X_3, X_3, X_3),\ X_3 \in \mathbb{R}\}$$

$$\bar{V}_2 = (-1,1,1) \quad mg = 1$$

Para $\lambda_3 = 3$: $(A-\lambda I)\bar{v} = \bar{0}$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right] \to \cdots\cdots \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} X_1 = X_3 \\ X_2 = 2X_3 \\ X_3 \in \mathbb{R} \end{array}$$

$$E_{\lambda_3=3} = \{(X_3, 2X_3, X_3),\ X_3 \in \mathbb{R}\}$$

$$\bar{V}_3 = (1,2,1) \quad mg = 1$$

$\bar{V}_1, \bar{V}_2$ y $\bar{V}_3$ son linealmente independientes $\Rightarrow$ A es diagonalizable

Verificación:

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1(1-2) + (4-2) + (4-1) = +1+2+3 = 6 \neq 0 \quad \therefore \bar{V}_1, \bar{V}_2 \text{ y } \bar{V}_3 \text{ son l. independientes.}$$

Tarea. Grossman pp. 560 y 561 probs. 1, 3, 5, 9, 11, 17, 21