Clase 24-05-21

sábado, 22 de mayo de 2021 12:51 p. m.

Teorema 24

Una matriz A de $n \times n$ es diagonalizable si y sólo si tiene n vectores propios linealmente independientes. En tal caso:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & \lambda_n \end{bmatrix}$$ no necesariamente $\lambda_i \neq \lambda_j$

En donde D es la matriz semejante a A y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son los valores propios de A.

Si C es la matriz de $n \times n$ cuyas columnas son los vectores propios linealmente independientes de A, entonces:

$$D = C^{-1} A C$$

Demostración

Supóngase que A tiene n vectores propios linealmente independientes $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n$ que corresponden a los valores propios (no necesariamente diferentes) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Sea

$$\bar{v}_1 = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{bmatrix}, \quad \bar{v}_2 = \begin{bmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{n2} \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad \bar{v}_n = \begin{bmatrix} c_{1n} \\ c_{2n} \\ \vdots \\ c_{nn} \end{bmatrix}$$

y sea

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

Entonces C es invertible ya que sus columnas son linealmente independientes. Entonces:

$$AC = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

La columna i de AC es:

$$A \begin{bmatrix} c_{1i} \\ c_{2i} \\ \vdots \\ c_{ni} \end{bmatrix} = A\bar{v}_i = \lambda_i \bar{v}_i$$

De esta manera AC es la matriz cuya columna i es $\lambda_i \bar{v}_i$, y:

De esta manera AC es la matriz cuya columna i es $\lambda_i c_i$.

$$AC = \begin{bmatrix} \lambda_1 c_{11} & \lambda_2 c_{12} & \cdots & \lambda_n c_{1n} \\ \lambda_1 c_{21} & \lambda_2 c_{22} & \cdots & \lambda_n c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 c_{n1} & \lambda_2 c_{n2} & \cdots & \lambda_n c_{nn} \end{bmatrix}$$

Pero:

$$CD = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 c_{11} & \lambda_2 c_{12} & \cdots & \lambda_n c_{1n} \\ \lambda_1 c_{21} & \lambda_2 c_{22} & \cdots & \lambda_n c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 c_{n1} & \lambda_2 c_{n2} & \cdots & \lambda_n c_{nn} \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$AC = CD \quad (1)$$

Como C es invertible se pueden multiplicar ambos lados de (1) por la izquierda por C^{-1} obteniendo:

$$C^{-1}AC = C^{-1}CD$$

$$D = C^{-1}AC$$

Esto prueba que si A tiene n vectores propios linealmente independientes, entonces A es diagonalizable.

Corolario Si la matriz $A_{n\times n}$ tiene n valores propios diferentes, entonces es diagonalizable.

Leer la observación en página 582 de Grossman: la mayoría de las matrices tienen valores propios diferentes, por tanto, la mayoría de las matrices son diagonalizables.

Tarea. Grossman pag 588 problemas 1-15 impares

Ejemplo Obtener los valores y vectores propios de la siguiente matriz y si es diagonalizable, calcular $C^{-1}AC$ para obtener la matriz diagonal D.

Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ la matriz del ejemplo 4. Los valores propios fueron $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 3$

$$C^{-1}AC = -\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 6 \\ -3 & 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C^{-1}AC = -\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 6 \\ -3 & 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 6 \\ -3 & 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & -18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = D$$

Ejemplo 9 Diagonalización de una matriz de 3×3 con dos valores propios iguales y tres vectores propios linealmente independientes.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 + 15\lambda + 8 = -(\lambda+1)^2(\lambda-8)$$

$\therefore \det(A-\lambda I) = -(\lambda+1)^2(\lambda-8) = 0 \implies \lambda_1 = 8$ y $\lambda_{2,3} = -1$ con $ma = 2$

Para $\lambda_1 = 8$, $(A-\lambda I)\bar{v} = \bar{0}$

$$\begin{bmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolviendo por Gauss:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -5 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & -8 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & -5 & 0 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} X_1 = X_3 \\ X_3 = 2X_2 \\ X_2 \in \mathbb{R} \end{array} \implies \bar{V}_1 = (2,1,2) \text{ y } E_{\lambda=8} = \{(2X_2, X_2, 2X_2);\, X_2 \in \mathbb{R}\}$$

Para $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$, $(A+I)\bar{v} = \bar{0}$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolviendo por Gauss se obtiene $\bar{V}_2 = (1,-2,0)$ y $\bar{V}_3 = (0,-2,1)$ y $E_{\lambda=1} = \{(X_1, -2X_1 - 2X_3, X_3);\, X_1, X_3 \in \mathbb{R}\}$

Los vectores propios son linealmente independientes, ya que:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -9 \neq 0$$

Por tanto:

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{y } C^{-1}AC = -\frac{1}{9}\begin{bmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -5 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{9}\begin{bmatrix} -72 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Y se demuestra que A es diagonalizable.

MATRICES SIMÉTRICAS Valores y vectores propios de una matriz simétrica $(A = A^T)$

Los valores propios de una matriz simétrica siempre son reales.

Ejemplo Calcular los valores y vectores propios de la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \text{matriz simétrica}$$

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda - 1$$

$p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda - 1$. Valores propios de A: $\lambda^2 - 4\lambda - 1 = 0$

$$\left.\begin{matrix} \lambda_1 = 2 - \sqrt{5} \\ \lambda_2 = 2 + \sqrt{5} \end{matrix}\right\} \text{ reales y diferentes} \Rightarrow \text{la matriz es diagonalizable}$$

Vectores propios:

Para $\lambda_1 = 2 - \sqrt{5}$, $(A - \lambda I)\bar{v} = \bar{0}$

$$\begin{bmatrix} -1+\sqrt{5} & -2 \\ -2 & 1+\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como el sistema tiene infinidad de soluciones $(\det(A - \lambda I) = 0)$, escogemos un renglón de ceros y el otro no. Para este ejemplo, hacemos cero el 2° renglón y tenemos que:

$$(-1+\sqrt{5})x_1 - 2x_2 = 0$$

$$x_2 = \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) x_1$$

Por lo que $\bar{v}_1 = (2, -1+\sqrt{5})$ para $x_1 = 2$

Para $\lambda_2 = 2 + \sqrt{5}$, $(A - \lambda I)\bar{v} = \bar{0}$

$$\begin{bmatrix} -1-\sqrt{5} & -2 \\ -2 & 1-\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Haciendo ceros el 1er renglón: (esto sólo se hace para matrices de 2×2).

$$-2x_1 + (1-\sqrt{5})x_2 = 0$$

$$(1-\sqrt{5})x_2 = 2x_1$$

$$\frac{(1-\sqrt{5})}{2} x_2 = x_1, \quad \text{para } x_2 = 2: \quad \bar{v}_2 = (1-\sqrt{5}, 2)$$

Entonces: $C = \begin{bmatrix} 2 & 1-\sqrt{5} \\ -1+\sqrt{5} & 2 \end{bmatrix}$, $C^{-1} = \dfrac{1}{10 - 2\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & -1+\sqrt{5} \\ 1-\sqrt{5} & 2 \end{bmatrix}$

Al hacer $C^{-1}AC$ obtendremos la matriz D que diagonaliza a A:

$$C^{-1}AC = D = \frac{1}{10-2\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 30-14\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 10+6\sqrt{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 2-\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

valores propios en la diagonal (Comprobar)

Ejemplo Calcular los valores y vectores propios de la sig. matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{matriz simétrica}$$

Solución

$$p(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 & 2 \\ 4 & 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} \longleftarrow \text{calcularlo}$$

$$p(\lambda) = 0 \implies -(\lambda-1)^2(\lambda-10) = 0$$

Valores propios $\begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 = 1 & ma = 2 \\ \lambda_3 = 10 & ma = 1 \end{cases}$

Vectores propios:

Para $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $(A-\lambda I)\bar{v} = \bar{0}$

$\bar{v}_1 = (-1,1,0)$, $\bar{v}_2 = (-1,0,2)$ Comprobar $E_{\lambda_1=\lambda_2} = \{(-1,1,0), (-1,0,2)\}$ $mg_{\lambda=1} = 2$

Para $\lambda_3 = 10$, $(A-\lambda I)\bar{v} = \bar{0}$

$\bar{v}_3 = (2,2,1)$; $E_{\lambda_3} = \{(2,2,1)\}$, $mg_{\lambda=10} = 1$ Comprobar

Por lo tanto:

$$C = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Los 3 vectores son linealmente independientes (comprobar) y A es diagonalizable.

$$D = C^{-1}AC = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

los valores propios están en la diagonal (Comprobar)