Clase 09-12-20

martes, 8 de diciembre de 2020 01:46 p. m.

Grossman pag 81

38) Encuentre una matriz $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ tal que $A\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Solución:

$$A\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2a+b & 3a+2b \\ 2c+d & 3c+2d \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$\begin{bmatrix} 2a+b & 3a+2b \\ 2c+d & 3c+2d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Igualando elementos:

$$2a+b=1$$
$$3a+2b=0$$

$$2c+d=0$$
$$3c+2d=1$$

Sistema ①:

$$2a+b=1$$
$$3a+2b=0$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}\xrightarrow{\frac{R_1}{2}}\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 3 & 2 & 0 \end{array}\right]\xrightarrow{R_2\to R_2-3R_1}\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -3/2 \end{array}\right]\xrightarrow{R_2\to 2R_2}\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -3 \end{array}\right]\xrightarrow{R_1\to R_1-\frac{1}{2}R_2}\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

$a=2$
$b=-3$

Sistema ②:

$$2c+d=0$$
$$3c+2d=1$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{array}\right]\xrightarrow{R_1\to\frac{R_1}{2}}\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1/2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{array}\right]\xrightarrow{R_2\to R_2-3R_1}\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{array}\right]\xrightarrow{R_2\to 2R_2}\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right]\xrightarrow{R_1\to R_1-\frac{1}{2}R_2}\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$c=-1$
$d=2$

Entonces $A=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

Comprobación

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

37) Sea $A=\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 8 & -6 \end{bmatrix}$, encuentre un vector no nulo $\bar{b}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ tal que $A\bar{b}=6\bar{b}$

$$A\bar{b}=\underbrace{\underset{2\times 2}{\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 8 & -6 \end{bmatrix}}\underset{2\times 1}{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}}=\underset{2\times 1}{\begin{bmatrix} 2x+6y \\ 8x-6y \end{bmatrix}}$$

Igualando con $6\bar{b}$:

$$\begin{bmatrix} 2x+6y \\ 8x-6y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6x \\ 6y \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema:

$$2x+6y=6x$$
$$6y=4x$$
$$y=\frac{4}{6}x=\frac{2}{3}x$$
$$x\in\mathbb{R}$$

$y = \frac{\;}{6}x = \frac{\;}{3}x$

$x \in \mathbb{R}$

$\therefore \bar{b} = \begin{bmatrix} x \\ \frac{2}{3}x \end{bmatrix}, x \in \mathbb{R}$, ó $\bar{b} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}y \\ y \end{bmatrix}, y \in \mathbb{R}$

probs. 40, 41, 42 y 46 Grossman pp 81-82

41) Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 8 & -2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$, pruebe que $A^2 + B^2 = (A+B)^2$ NOTA: $A^2 = AA$

Pruebe que en general: $A^2 + B^2 \neq (A+B)^2$

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = AA + AB + BA + BB = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + B^2$$

PROPIEDADES DEL PRODUCTO DE MATRICES Grossman pag 68

1) Ley Asociativa para la multiplicación de matrices

Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz de $n \times m$, $B = [b_{ij}]$ una matriz de $m \times p$ y $C = [c_{ij}]$ una matriz de $p \times q$. Entonces:

$$\underset{n\times m}{A}\,(\underset{m\times p}{B}\,\underset{p\times q}{C}) = (AB)C = ABC$$

$$\underbrace{A\,\underbrace{(BC)}_{m\times q}}_{}$$

y el producto es una matriz de $n \times q$.

La Ley Asociativa se puede extender a productos de más matrices, por ejemplo, suponga que AB, BC y CD están definidos. Entonces:

$$ABCD = A(B(CD)) = ((AB)C)D = A(BC)D = (AB)(CD)$$

Ejercicio 47. Verifique la Ley Asociativa para la multiplicación de las matrices

$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -2 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ $A(BC) = (AB)C = \begin{bmatrix} 26 & 44 \\ 43 & 71 \end{bmatrix}$

2) Leyes distributivas de la multiplicación de matrices:

Si todas las sumas y todos los productos siguientes están definidos, entonces:

$$A(B+C) = AB + AC$$

y $$(A+B)C = AC + BC$$

MATRICES Y SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Sea el siguiente sistema lineal no homogéneo de m ecuaciones con n incógnitas:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \quad &\ \ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \qquad (1)$$

Sea la matriz de coeficientes $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{bmatrix}$

Sea la matriz de coeficientes $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$

$\bar{x}$ el vector $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1}$ y $\bar{b}$ el vector $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}_{m\times 1}$

El sistema ① se puede escribir matricialmente como:

$$A\bar{x} = \bar{b} \leftarrow$$

Demostrarlo

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix}}_{m\times n} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{n\times 1} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}}_{m\times 1} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{m\times 1}$$

Ejemplo Considere el sistema:

$$2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 18$$
$$4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 24$$
$$3x_1 + x_2 - 2x_3 = 4$$

Representar matricialmente el sistema.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 24 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Tarea pp 98-99 probs 1-21 impares.

Definición 52 Matriz Identidad I_n

Es una matriz de $n\times n$ cuyos elementos de la diagonal principal son 1's y todos los demás son 0.

$$I_n = [b_{ij}], \text{ donde } b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} b_{11} & & & \bigcirc \\ & b_{22} & & \\ & & b_{33} & \\ \bigcirc & & & \ddots \quad b_{nn} \end{bmatrix}$$

Ejemplos:

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Teorema 28 Grossman pag. 103

Sea A una matriz de nxn. Entonces:

$$AI_n = I_nA = A$$

I_n conmuta con toda matriz de nxn y la deja sin cambio después de la multiplicación por la derecha o por la izquierda.

Definición 53 La inversa de una matriz

Sean A y B dos matrices de nxn, y suponga que:

$$AB = BA = I$$

Entonces B se llama la inversa de A y se denota por A^{-1}. Entonces se tiene:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

y se dice entonces que A es invertible.

RECORDAR QUE NO EXISTE LA DIVISIÓN ENTRE MATRICES

A una matriz invertible también se le llama no singular.

Teorema 29 Grossman pp. 103

Si A es una matriz invertible, entonces su inversa es ÚNICA.

Demostración por contradicción:

Sean B y C dos inversas de A.

Por def 53: $AB = BA = I$ y $AC = CA = I$.

Por Ley Asociativa de multiplicación de matrices:

$$B\underbrace{(AC)}_{I} = \underbrace{(BA)}_{I}C$$

$B = C$ Teorema 28

$\therefore$ La matriz inversa es ÚNICA.

Determinante de una matriz de 2x2.

Sea el sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

De la definición 32 de la Unidad 5 Sistemas de Ecuaciones Lineales se vió que:

$$\det S = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Este determinante se obtiene por un método aplicado a matrices (cofactores)

En este caso la matriz de coeficientes del sistema es:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

y $\det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ por el Método de Cofactores que posteriormente estudiaremos.

Teorema 30 Grossman pp. 107

Sea A una matriz de 2x2. Entonces:

1) A es invertible si y solo si $\det A \neq 0$

2) Si $\det A \neq 0$:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

Ejemplo Calcular A^{-1} si ésta existe, donde:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

1º Calculamos su determinante:

$$\det A = (2)(3) - (1)(-4) = 10 \checkmark \text{ existe } A^{-1}$$

2º $A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{10} & \frac{4}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{2}{10} \end{bmatrix}$$

Ejemplo Calcule A^{-1} si existe

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$\det A = 6 - 6 = 0 \Rightarrow$ A no es invertible

Tarea Problemas pp. 118 1-6 y 29, incisos a) y b)