§1. Элементы теории погрешностей

Точные и приближенные числа.

При численном решении задач приходится оперировать двумя видами чисел – ***точными*** и ***приближенными***. К точным относятся числа, которые дают истинное значение исследуемой величины.

К приближенным относятся числа, близкие к истинному значению, причем степень близости определяется погрешностью вычислений. Например, в утверждениях "в аудитории 102 слушателя", "в январе 31 день" числа 102 и 31 – точные. В высказываниях "сто метров спортсмен пробежал за 10,1 секунды", "масса мороженого 100 граммов" числа 10,1 и 100 – приближенные.

При измерениях появление приближенных чисел может быть связано с несовершенством измерительных приборов или с ошибкой наблюдателя. При счете ошибка может возникнуть, если количество предметов в системе изменяется. Кроме того, часто нет необходимости знать точное значение исследуемой величины.

Абсолютная и относительная погрешности.

Пусть x – точное значение числа, а $\hat{x}$ – его приближение, или приближенное значение. Говорят, что число $\hat{x}$ есть приближенное значение числа x ***с недостатком***, если $\hat{x} \le x$, и приближенное значение ***с избытком***, если $\hat{x} \ge x$.

Погрешностью (или ***ошибкой***) приближенного числа $\hat{x}$ называется разность $\Delta_{\hat{x}}$ между точным значением числа x и его приближенным значением $\hat{x}$: $\Delta_{\hat{x}} = x - \hat{x}$.

Абсолютной погрешностью $\Delta(\hat{x})$ приближенного числа $\hat{x}$ называется модуль (или абсолютное значение) его погрешности $\Delta_{\hat{x}}$: $\Delta(\hat{x}) = |x - \hat{x}|$.

Отсюда следует, что $x = \hat{x} \pm \Delta(\hat{x})$.

Абсолютная погрешность $\Delta(\hat{x})$ – это всегда неотрицательная величина, измеряемая в тех же единицах, что и x.

Относительной погрешностью $\delta(\hat{x})$ приближенного числа $\hat{x}$ называется отношение его абсолютной погрешности $\Delta(\hat{x})$ к модулю соответствующего точного числа x или, чаще, к модулю приближенного числа $\hat{x}$, так как точное значение x обычно неизвестно:

$$\delta(\hat{x}) = \frac{\Delta(\hat{x})}{|x|} = \frac{|x-\hat{x}|}{|x|} \quad \text{или} \quad \delta(\hat{x}) = \frac{\Delta(\hat{x})}{|\hat{x}|} = \frac{|x-\hat{x}|}{|\hat{x}|}.$$

Отсюда следует равенство $x = \hat{x} \cdot \left(1 \pm \delta(\hat{x})\right)$.

Относительная погрешность $\delta(\hat{x})$ – это всегда неотрицательная безразмерная величина, которую часто выражают в процентах:

$$\delta(\hat{x})\,\% = \frac{\Delta(\hat{x})}{|\hat{x}|} \cdot 100\,\%.$$

Поскольку точное число x чаще всего неизвестно, то невозможно определить абсолютную и относительную погрешности $\Delta(\hat{x})$ и $\delta(\hat{x})$. Поэтому вводят их оценки сверху – так называемые предельную абсолютную и предельную относительную погрешности.

Предельной абсолютной погрешностью Δ приближенного числа $\hat{x}$ называется любое число, не меньшее абсолютной погрешности $\Delta(\hat{x})$ этого числа, т. е.

$$\Delta(\hat{x}) = |x - \hat{x}| \le \Delta.$$

Отсюда следует, что

$$\hat{x} - \Delta \le x \le \hat{x} + \Delta.$$

При этом говорят, что число $\hat{x}$ является *приближением* числа x *с точностью до* Δ и пишут

$$x = \hat{x} \pm \Delta.$$

Интервал $[x - \Delta, x + \Delta]$ называется ***интервалом приближения*** (или ***доверительным интервалом***) величины x.

Предельной относительной погрешностью δ приближенного числа $\hat{x}$ называется любое число, не меньшее относительной погрешности $\delta(\hat{x})$ этого числа, т. е.

$$\delta(\hat{x}) = \frac{|x - \hat{x}|}{|\hat{x}|} \le \delta.$$

Тогда

$$\hat{x}(1-\delta) \le x \le \hat{x}(1+\delta), \text{ если } \hat{x} > 0,$$

$$\hat{x}(1+\delta) \le x \le \hat{x}(1-\delta), \text{ если } \hat{x} < 0.$$

При этом пишут

$$x = \hat{x}(1 \pm \delta).$$

Если известна предельная относительная погрешность δ приближенного числа $\hat{x}$, то в качестве его предельной абсолютной погрешности можно взять $\Delta = |\hat{x}| \cdot \delta$.

Запись приближенных чисел. Верные значащие цифры.

Запись приближенных чисел должна подчиняться правилам, связанным с понятиями о верных значащих цифрах.

Значащей цифрой приближенного числа называется любая отличная от нуля цифра, а также цифра 0, если она является сохраненным десятичным знаком точного числа. Нули, расположенные слева, если они есть, значащими не считаются.

Например, число 0,00028745 имеет пять значащих цифр (2, 8, 7, 4 и 5), а число 200,37500, являющееся приближением точного числа 200,375012, имеет семь значащих цифр (2, 0, 0,3, 7, 5 и 0). Последняя цифра 0, не является сохраненным знаком точного числа, поэтому значащей не считается.

Пусть число $\hat{x}$ в десятичной системе счисления имеет вид $\hat{x} = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_0, a_{-1} a_{-2} \ldots}$. Цифра a_i числа $\hat{x}$ называется ***верной в широком смысле***, если $\Delta(\hat{x}) \le 10^i$, т.е. если абсолютная погрешность числа $\hat{x}$ не превосходит одной единицы соответствующего разряда десятичного числа. Цифра a_i числа $\hat{x}$ называется ***верной в узком*** (или ***строгом***) ***смысле***, если $\Delta(\hat{x}) \le \frac{1}{2} \cdot 10^i$, т.е. если абсолютная погрешность числа $\hat{x}$ не превосходит половины единицы соответствующего разряда. Цифры, не являющиеся верными, называются ***сомнительными***.

Далее будем рассматривать только верные в широком смысле цифры.

Если верная цифра a_i – значащая, то она называется ***верной значащей цифрой***.

Замечание. Приближенные числа принято записывать таким образом, чтобы все цифры числа, кроме нулей слева, если они есть, были значащими и верными цифрами. Приближенное число, в отличие от точного, дает не только числовое значение какой-либо величины, но и точность, с которой оно задано. Например, числа 3,41; 3,410 и 3,4100 – различные приближенные числа. Абсолютная погрешность числа 3,41 не превосходит 0,01, числа 3,410 – 0,001, а абсолютная погрешность числа 3,4100 не превосходит 0,0001.

Если цифра a_i является верной значащей цифрой приближенного числа, то это не значит, что она обязательно совпадает с соответствующей цифрой (десятичным знаком) точного числа. Например, число 2853 с одной, двумя или тремя верными значащими цифрами записывается в виде 3000, 2900 или 2850 соответственно.

Пример 1.1. Числа 27,0563 и 27,0563000, как приближенные, различны. Абсолютная погрешность первого числа не превосходит $10^{-4}\,(i=-4)$, а второго $10^{-7}\,(i=-7)$. ▲

Пример 1.2. Числа $x_1 = 34{,}174562$ и $x_2 = 375{,}16342$ содержат пять верных цифр. Определить их абсолютную погрешность.

Δ В числе x_1 последняя верная значащая цифра 4, считая слева, находится на третьем месте после запятой, т.е. $i=-3$. Следовательно, по определению $\Delta(\hat{x}_1)=10^{-3}=0,001$.

Во втором числе x_2 последняя значащая цифра 6 имеет индекс $i=-2$. Следовательно, $\Delta(\hat{x}_2)=10^{-2}=0,01$. ▲

Пример 1.3. Абсолютная погрешность чисел $x_1=28,9356$ и $x_2=183,45123$ составляет $\Delta=0,03$. Определить, какие цифры являются верными, и округлить числа, оставив только верные цифры.

Δ При заданной максимальной абсолютной погрешности $\Delta=0,03$ верной значащей цифрой, по определению, должна быть та a_i, для которой

$$\Delta(x)=0,03\le 10^i,$$

т.е. $i=-1$. Значит, в заданных числах верными являются все цифры до разряда десятых, считая слева. Для числа x_1 это цифры 2, 8 и 9; для числа x_2 – цифры 1, 8, 3 и 4. Округлив эти числа до указанного разряда, получим $\hat{x}_1=28{,}9$, $\hat{x}_2=183{,}5$.

Найдем абсолютные погрешности чисел $\hat{x}_1$ и $\hat{x}_2$. Они равны сумме погрешности заданного числа Δ и погрешности округления:

$$\Delta(\hat{x}_1)=\Delta+\Delta_{окр}=0{,}03+|28{,}9356-28{,}9|=0{,}0656,$$

$$\Delta(\hat{x}_2)=\Delta+\Delta_{окр}=0{,}03+|183{,}45123-183{,}5|=0{,}07877.$$

Так как найденные погрешности не превышают 10^{-1}, то все цифры чисел $\hat{x}_1$ и $\hat{x}_2$ являются верными. ▲

Связь между числом верных знаков и погрешностью числа.

Пусть число $\hat{x}$ является приближенным значением точного числа x и имеет вид

$$\hat{x}=a_n\cdot 10^n+a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+\ldots+a_i\cdot 10^i+\ldots+a_{-m}\cdot 10^{-m},\quad a_n\ne 0,$$

где цифры a_n, $a_{n-1},\ldots,$ a_i – верные.

По определению, число верных знаков числа $\hat{x}$ определяется неравенством $\Delta(\hat{x}_1)=|x-\hat{x}|<10^i$. Разделив обе части этого неравенства на $|\hat{x}|$, получим

$$\delta(\hat{x})=\frac{|x-\hat{x}|}{|\hat{x}|}\le\frac{10^i}{\left|a_n\cdot 10^n+a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+\ldots+a_i\cdot 10^i+\ldots+a_{-m}\cdot 10^{-m}\right|}.$$

Это неравенство еще больше усилится, если число $\hat{x}$ заменить заведомо меньшим числом $a_n \cdot 10^n$. Тогда будем иметь

$$\delta(\hat{x}) \le \frac{10^i}{a_n \cdot 10^n} = \frac{1}{a_n} \cdot 10^{i-n}.$$

Таким образом, относительная погрешность числа характеризуется количеством верных цифр числа, отсчитываемых от первой значащей цифры числа (a_n) до последней значащей цифры этого числа (a_i). В качестве ***предельной относительной погрешности*** δ приближенного числа $\hat{x}$ можно принять величину

$$\delta_{\hat{x}} = \frac{1}{a_n} \cdot 10^{i-n}.$$

Пример 1.4. Какова предельная относительная погрешность в процентах чисел $x_1 = 358,563$ и $x_2 = 0,047$, если все их цифры верные?

Δ Для числа x_1 имеем $n = 2$, $i = -3$. По формуле для $\delta_{\hat{x}}$ получаем

$$\delta_1 = \frac{1}{3} \cdot 10^{-3-2} \cdot 100\% \approx 0,0003\%.$$

Для числа x_2 при $n = -2$, $i = -3$ будем иметь

$$\delta_2 = \frac{1}{4} \cdot 10^{-3-(-2)} \cdot 100\% = 2,5\%. \qquad \blacktriangle$$

Пример 1.5. С каким минимальным количеством верных цифр нужно взять число $\sqrt[3]{28}$, чтобы погрешность не превышала 0,25%?

Δ Так как $\sqrt[n]{1+\alpha} \approx 1 + \frac{\alpha}{n}$, при достаточно малых α, то

$$\sqrt[3]{28} = \sqrt[3]{27+1} = 3 \cdot \sqrt[3]{1 + \frac{1}{27}} \approx 3 \cdot \left(1 + \frac{1}{81}\right) \approx 3,037037.$$

По условию $\delta \le 0,25\%$, т.е. $\delta \le 0,0025$. Для числа $\sqrt[3]{28}$ имеем $a_n = 3$, $n = 0$.

Согласно формуле для предельной относительной погрешности $\delta_{\hat{x}}$ получим

$$\frac{1}{3} \cdot 10^{i-0} \le 0,0025 \quad \Leftrightarrow \quad 10^i \le 0,0075 \quad \Rightarrow \quad i = -3.$$

Таким образом, число $\sqrt[3]{28} \approx 3,037037$ нужно округлить до разряда тысячных, оставив четыре верные значащие цифры, т.е. $\sqrt[3]{28} \approx 3,037$. $\blacktriangle$

Оценки погрешности при арифметических действиях.

Оценим теперь погрешности, возникающие при арифметических операциях с приближенными числами.

Пусть x и y – точные числа, $\hat{x}$ и $\hat{y}$ – их приближения, $\Delta(\hat{x})$ и $\Delta(\hat{y})$ – их абсолютные, $\delta(\hat{x})$ и $\delta(\hat{y})$ – их относительные погрешности соответственно.

1) ***Погрешность суммы и разности.*** Согласно определению, имеем:

$$\Delta(\hat{x}+\hat{y}) = \left|(x+y)-(\hat{x}+\hat{y})\right| = \left|(x-\hat{x})+(y-\hat{y})\right| \le \left|x-\hat{x}\right| + \left|y-\hat{y}\right| = \Delta(\hat{x})+\Delta(\hat{y}).$$

Таким образом,

$$\Delta(\hat{x}+\hat{y}) \le \Delta(\hat{x})+\Delta(\hat{y}),$$

т.е. ***абсолютная погрешность суммы*** *не превосходит суммы их абсолютных погрешностей*.

Аналогично получаем оценку погрешности для ***разности*** двух чисел:

$$\Delta(\hat{x}-\hat{y}) = \left|(x-y)-(\hat{x}-\hat{y})\right| = \left|(x-\hat{x})-(y-\hat{y})\right| \le \left|x-\hat{x}\right| + \left|y-\hat{y}\right| = \Delta(\hat{x})+\Delta(\hat{y}),$$

т.е.

$$\Delta(\hat{x}-\hat{y}) \le \Delta(\hat{x})+\Delta(\hat{y}).$$

Пусть теперь $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – точные числа, а $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n$ – соответствующие приближения. Тогда, обобщая изложенное выше, будем иметь

$$\Delta\left(\hat{x}_1 \pm \hat{x}_2 \pm \ldots \pm \hat{x}_n\right) \le \Delta(\hat{x}_1) + \Delta(\hat{x}_2) + \ldots + \Delta(\hat{x}_n).$$

Отсюда следует, что ***предельная абсолютная погрешность алгебраической суммы*** приближенных чисел равна сумме их предельных абсолютных погрешностей.

Из полученных результатов вытекает следующее ***правило сложения приближенных чисел различной абсолютной точности***:

1) выделяются числа, имеющие наибольшую абсолютную погрешность (числа наименьшей точности);
2) более точные числа округляются таким образом, чтобы сохранить в них на один знак больше, чем в выделенном числе (запасной знак);
3) производится сложение или вычитание всех чисел с учетом сохраненных знаков;
4) полученный результат округляется на один знак.

Пример 1.6. Вычислить $a = 0,1732 + 17,45 - 0,00354$, где все цифры чисел верные.

Δ Поскольку цифры всех чисел верные, то погрешность вычисления первого слагаемого не превышает 0,0001, второго – 0,01, третьего – 0,00001. Наибольшую погрешность имеет второе слагаемое 17,45, поэтому числа 0,1732 и 0,00354 округляются до трех знаков после запятой. В результате получим приближенное число

$$\hat{a} = 0{,}173 + 17{,}45 - 0{,}004 = 17{,}619.$$

Допускаемая при этом погрешность $\Delta(\hat{a})$ не превышает величины

$$\Delta = 0{,}01 + 0{,}001 + 0{,}00001 = 0{,}01101.$$

Округлив $\hat{a}$ до двух знаков после запятой, окончательно получим $\hat{a} = 17{,}62$. ▲

Относительная погрешность суммы и разности приближенных чисел определяются соотношениями:

$$\delta(\hat{x}+\hat{y}) = \frac{\Delta(\hat{x}+\hat{y})}{|\hat{x}+\hat{y}|} \le \frac{\Delta(\hat{x})+\Delta(\hat{y})}{|\hat{x}+\hat{y}|}, \qquad \delta(\hat{x}-\hat{y}) = \frac{\Delta(\hat{x}-\hat{y})}{|\hat{x}-\hat{y}|} \le \frac{\Delta(\hat{x})+\Delta(\hat{y})}{|\hat{x}-\hat{y}|}.$$

2) Погрешность произведения. Согласно определению, $x = \hat{x} \pm \Delta(\hat{x})$, $y = \hat{y} \pm \Delta(\hat{y})$. Тогда

$$\Delta(\hat{x}\cdot\hat{y}) = \left|(\hat{x}+\Delta(\hat{x}))(\hat{y}+\Delta(\hat{y})) - \hat{x}\hat{y}\right| = \left|\hat{x}\Delta(\hat{y}) + \hat{y}\Delta(\hat{x}) + \Delta(\hat{x})\Delta(\hat{y})\right| \le$$

$$\le |\hat{x}|\Delta(\hat{y}) + |\hat{y}|\Delta(\hat{x}) + \Delta(\hat{x})\Delta(\hat{y}).$$

Таким образом, справедливы формулы

$$\Delta(\hat{x}\cdot\hat{y}) \le |\hat{x}|\Delta(\hat{y}) + |\hat{y}|\Delta(\hat{x}) + \Delta(\hat{x})\Delta(\hat{y}),$$

$$\delta(\hat{x}\cdot\hat{y}) = \frac{\Delta(\hat{x}\cdot\hat{y})}{|\hat{x}\cdot\hat{y}|} = \frac{|\hat{x}|\Delta(\hat{y}) + |\hat{y}|\Delta(\hat{x}) + \Delta(\hat{x})\Delta(\hat{y})}{|\hat{x}|\cdot|\hat{y}|} = \delta(\hat{x}) + \delta(\hat{y}) + \delta(\hat{x})\cdot\delta(\hat{y}).$$

Отсюда следует ***правило умножения приближенных чисел различной абсолютной точности***:

1) выделяется число с наименьшим количеством верных значащих цифр;
2) оставшиеся сомножители округляются таким образом, чтобы они содержали на одну значащую цифру больше, чем количество верных значащих цифр в выделенном числе;
3) в произведении сохраняется столько значащих цифр, сколько верных значащих цифр имеет выделенное число.

Пример 1.7. Найти произведение приближенных чисел $x_1 = 3{,}75$ и $x_2 = 0{,}73788$, все цифры которых верные.

Δ Число x_1 содержит три верные значащие цифры, а число x_2 – пять. Поэтому второе число x_2 округляем до четырех значащих цифр: $x_2 = 0{,}7379$.
Тогда $\hat{a} = x_1 \cdot x_2 = 3{,}75 \cdot 0{,}7379 = 2{,}767125$.

В этом произведении сохраняем три значащие цифры, так что $\hat{a} = 2{,}77$.

Заметим, что если считать числа x_1 и x_2 точными, то $x_1 \cdot x_2 = 3{,}75 \cdot 0{,}73788 = 2{,}76705$. ▲

3) ***Погрешность частного***. При $y \neq 0$ и $\hat{y} \neq 0$ имеем

$$\Delta\left(\frac{\hat{x}}{\hat{y}}\right) = \left|\frac{\hat{x} + \Delta(\hat{x})}{\hat{y} + \Delta(\hat{y})} - \frac{\hat{x}}{\hat{y}}\right| = \left|\frac{\hat{y} \cdot \Delta(\hat{x}) - \hat{x} \cdot \Delta(\hat{y})}{\hat{y}^2\left(1 + \frac{\Delta(\hat{y})}{\hat{y}}\right)}\right| \leq \frac{|\hat{x}| \cdot \Delta(\hat{y}) + |\hat{y}| \cdot \Delta(\hat{x})}{\hat{y}^2\left(1 + \frac{\Delta(\hat{y})}{\hat{y}}\right)}.$$

Так как $|a + b| \geq ||a| - |b||$, то $\left|1 + \frac{\Delta(\hat{y})}{\hat{y}}\right| \geq \left|1 - \left|\frac{\Delta(\hat{y})}{\hat{y}}\right|\right| = |1 - \delta(\hat{y})|$. Отсюда получаем оценки погрешностей частного

$$\Delta\left(\frac{\hat{x}}{\hat{y}}\right) \leq \frac{|\hat{x}| \cdot \Delta(\hat{y}) + |\hat{y}| \cdot \Delta(\hat{x})}{\hat{y}^2 \cdot |1 - \delta(\hat{y})|}, \qquad \delta\left(\frac{\hat{x}}{\hat{y}}\right) = \Delta\left(\frac{\hat{x}}{\hat{y}}\right) \Big/ \left|\frac{\hat{x}}{\hat{y}}\right| \leq \frac{\delta(\hat{x}) + \delta(\hat{y})}{|1 - \delta(\hat{y})|}.$$

Таким образом, получаем следующее ***правило деления приближённыхчисел различной абсолютной погрешности***:

1) выделяется число с наименьшим количеством верных значащих цифр;
2) оставшиеся числа округляются таким образом, чтобы они содержали на однузначащую цифру больше, чем выделенное число;
3) в полученном результате деления сохраняется столько значащих цифр,сколько верных значащих цифр имеет выделенное число.

На практике при работе с числами достаточно хорошей точности обычно считают, что $\Delta(\hat{x}) \cdot \Delta(\hat{y}) \approx 0$, $\delta(\hat{x}) \cdot \delta(\hat{y}) \approx 0$. Поэтому вместо полученных ранее формул пользуются **упрощёнными формулами**:

$$\Delta(\hat{x} \cdot \hat{y}) \leq |\hat{x}| \Delta(\hat{y}) + |\hat{y}| \Delta(\hat{x}), \;\; \delta(\hat{x} \cdot \hat{y}) \leq \delta(\hat{x}) + \delta(\hat{y});$$

$$\Delta\left(\frac{\hat{x}}{\hat{y}}\right) \leq \frac{|\hat{x}| \cdot \Delta(\hat{y}) + |\hat{y}| \cdot \Delta(\hat{x})}{\hat{y}^2}, \;\; \delta\left(\frac{\hat{x}}{\hat{y}}\right) \leq \delta(\hat{x}) + \delta(\hat{y}).$$

Отсюда следует, что ***предельная относительная погрешность произведения и частного*** приближенных чисел, отличных от нуля, равна сумме их предельных относительных погрешностей.

Можно также показать, что:

- ***предельная относительная погрешность степени*** приближенного числа $\hat{x}^m$ равна произведению степени m на предельную относительную погрешность числа $\hat{x}$: $\delta(\hat{x}^m) = m \cdot \delta(\hat{x})$;

- ***предельная относительная погрешность корня с натуральным показателем*** $\sqrt[n]{\hat{x}}$ равна предельной относительной погрешности числа $\hat{x}$, деленной на показатель степени n: $\delta(\sqrt[n]{\hat{x}}) = \frac{1}{n} \cdot \delta(\hat{x})$.

Задания

1. Числа a и b содержат n верных цифр. Определить их абсолютную погрешность:

1) $a = 43{,}25601$, $b = 184{,}59982$, $n = 6$.

2) $a = 1565{,}7543$, $b = 2{,}33294$, $n = 4$.

3) $a = 2{,}85463$, $b = 0{,}375124$, $n = 5$.

2. Абсолютная погрешность чисел a и b равна Δ. Определить, какие цифры чисел a и b являются верными, и округлить их, оставив только верные цифры:

1) $a = 43{,}25601$, $b = 184{,}59982$, $\Delta = 0{,}02$.

2) $a = 1565{,}7543$, $b = 2{,}33294$, $\Delta = 0{,}6$.

3) $a = 2{,}85463$, $b = 0{,}375124$, $\Delta = 0{,}0042$.

3. Найти предельные относительные погрешности в процентах чисел a и b, если все их цифры верные.

1) $a = 0{,}0148201$, $b = 32{,}9058$.

2) $a = 4531{,}17$, $b = 0{,}0094020$.

3) $a = 7490{,}020300$, $b = 0{,}63204$.

4. Вычислить x и найти его предельные абсолютную и относительную погрешности:

1) $x = a + b - c$, $a = 23{,}723 \pm 0{,}005$, $b = 54{,}8 \pm 0{,}04$, $c = 7{,}2 \pm 0{,}03$.

2) $x = (a - b)/c^2$, $a = 17{,}21 \pm 0{,}02$, $b = 12{,}32 \pm 0{,}03$, $c = 25{,}16 \pm 0{,}01$.

3) $x = \sqrt{ab}/c$, $a = 4{,}385 \pm 0{,}003$, $b = 15{,}16 \pm 0{,}005$, $c = 9{,}2 \pm 0{,}1$.