Салам братья выбирайте 4 автомат

[1. Приближенные числа. Погрешности вычисления. Значащие и верные цифры числа.](#_heading=h.gjdgxs)

[2. Теоремы о погрешностях суммы, разности, произведения, частного приближенных чисел.](#_heading=h.30j0zll)x

[3. Прямая и обратная задачи теории погрешностей.](#_heading=h.1fob9te)

[4. Приближенное решение алгебраических и трансцендентных уравнений: отделение корней (аналитическое и графическое), теорема об оценке погрешности приближенного корня. Графическое решение уравнений.](#_heading=h.3znysh7)

[5. Приближенное решение алгебраических и трансцендентных уравнений: метод половинного деления, метод хорд.](#_heading=h.2et92p0)

[6. Приближенное решение алгебраических и трансeц, ендентных уравнеeeweedний: метод Ньютона.](#_heading=h.tyjcwt)

[7. Приближенное решение алгебраических и трансцендентных уравнений: метод итерации; приведение уравнения к виду, пригодному eдля итерации.](#_heading=h.3dy6vkm)

[8. Нормы векторов и матриц. Число обусловленности матрицы. Оценка погрешности решения системы линейных уравнений.](#_heading=h.1t3h5sf)

[9. Прямые методы решения систем линейных уравнений. Метод Гаусса с постолбцовым выбором главного элемента.](#_heading=h.4d34og8)

[10. Решение систем линейных уравнений методом прогонки.](#_heading=h.2s8eyo1)

[11. Приближенное решение систем линейных уравнений: метод простых итераций, условия его сходимости, метод Якоби.](#_heading=h.17dp8vu)

[12. Приближенное решение систем линейных уравнений: метод Зейделя, условия его сходимости.](#_heading=h.3rdcrjn)

[13. Постановка задачи интерполирования функции. Общее решение задачи интерполирования функции полиномом.](#_heading=h.lnxbz9)

[14. Интерполяционная формула Лагранжа. Погрешность интерполяционной формулы.](#_heading=h.35nkun2)

[15. Интерполяционные формулы Ньютона (I и II) для равноотстоящих узлов. Погрешности интерполяционных формул.](#_heading=h.1ksv4uv)

[16. Интерполяционная формула Ньютона для неравноотстоящих узлов.](#_heading=h.44sinio)

[17. Сплайны. Интерполяционный кубический сплайн дефекта 1.](#_heading=h.2jxsxqh)

[18. Аппроксимирование функций многочленами с помощью метода наименьших квадратов.](#_heading=h.z337ya)

[19. Ортогональные функции. Определитель Грама. Аппроксимирование ортогональными функциями. Обобщенный многочлен Фурье.](#_heading=h.3j2qqm3)

[20. Равномерное приближение функций. Теорема Вейерштрасса. Равномерное приближение многочленом Тейлора. Теорема Чебышева об альтернансе.](#_heading=h.1y810tw)

[21. Многочлены Чебышева. Теорема Чебышева о многочлене, наименее уклоняющемся от нуля. Интерполяция по чебышевским узлам.](#_heading=h.4i7ojhp)

[22. Численное дифференцирование. Простейшие формулы численного дифференцирования.](#_heading=h.2xcytpi)

[23. Численное интегрирование. Квадратурные формулы прямоугольников, трапеций, парабол.](#_heading=h.1ci93xb)

[24. Численное интегрирование. Квадратурные формулы Ньютона-Котеса.](#_heading=h.3whwml4)

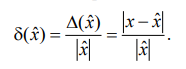
[25. Квадратурные формулы Гаусса.](#_heading=h.2bn6wsx)

[26. Численные методы решения задачи Коши для ОДУ: метод Эйлера, метод ЭйлераКоши.](#_heading=h.qsh70q)

[27. Численные методы решения задачи Коши для ОДУ: метод Рунге-Кутта.](#_heading=h.3as4poj)

# 1. Приближенные числа. Погрешности вычисления. Значащие и верные цифры числа.

* *К* ***приближенным*** *относятся числа, близкие к истинному значению, причем степень близости определяется погрешностью вычислений.*
* Разность между точным числом и его приближенными значениями называется ***абсолютной погрешностью*** приближенного числа и обозначается
* ***Относительная погрешность****:*

**

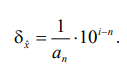
* ***Предельные абсолютная и относительная погрешности приближенного числа:***

******

* ***Интервал приближения***

******

* ***Значащей цифрой*** *приближенного числа называется любая отличная от нуля цифра, а также цифра 0, если она является сохраненным десятичным знаком точного числа. Нули, расположенные слева, если они есть, значащими не считаются.*
* Цифра числа называется **верной в широком смысле**, если абсолютная погрешность числа не превосходит одной единицы соответствующего разряда десятичного числа.
* Цифра числа называется **верной в узком смысле**, если абсолютная погрешность числа не превосходит половины единицы соответствующего разряда.
* Формула предельной относительной погрешности:



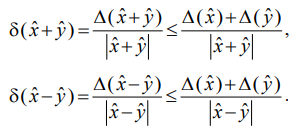
# 2. Теоремы о погрешностях суммы, разности, произведения, частного приближенных чисел.

* ***Погрешность суммы и разности:***
  + ***Абсолютная***

******

******

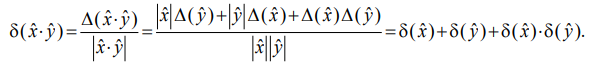
* + ***Относительная***

******

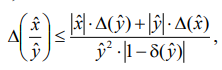
* ***Погрешность произведения***
  + ***Абсолютная***

******

* + ***Относительная***

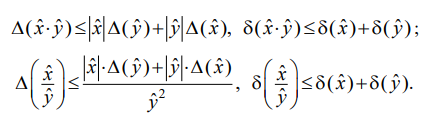
******

* Погрешность частного





* Упрощенные формулы



* *Относительная погрешность* ***m*-й *степени*** приближенного числа (***m***-натуральное) в ***m*** раз больше *относительной погрешности* самого числа.
* *Относительная погрешность* ***корня* *m*-й степени** в ***m*** раз меньше предельной относительной погрешности подкоренного числа.

# 3. Прямая и обратная задачи теории погрешностей.

При практическом использовании теории погрешностей часто приходится решать две принципиально разные задачи, которые условно назовем прямой и обратной.

*В прямой задаче* по известным погрешностям отдельных измерений находятся погрешности окончательных результатов, являющихся функциями этих измерений.

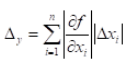
На практике важна также обратная задача: каковы должны быть абсолютные погрешности аргументов функции, чтобы абсолютная погрешность функции не превышала заданной величины.

Эта задача математически неопределенна, так как заданную предельную погрешность Д*y* функции *y = f*(*x1, х2, ..., хn*)можно обеспечить, устанавливая по-разному предельные абсолютные погрешности Д*xi* ее аргументов.ddxddx



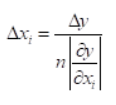
Простейшее решение обратной задачи дается так называемым *принципом равных влияний.* Согласно этому принципу предполагается, что все частные дифференциалы (*i* = 1, 2, ..., *n*) одинаково влияют на образование общей абсолютной погрешности Д*y* функции *y = f*(*x1, х2, ..., хn*)*.*

Пусть величина предельной абсолютной погрешности Д*y* задана. Тогда на основании формулы



[Обратная задача теории погрешностей](https://studwood.net/1866541/matematika_himiya_fizika/obratnaya_zadacha_teorii_pogreshnostey) (там фотки чуть лучше видно)

Отсюда



(*i* = 1, 2, ..., *n*).

# 4. Приближенное решение алгебраических и трансцендентных уравнений: отделение корней (аналитическое и графическое), теорема об оценке погрешности приближенного корня. Графическое решение уравнений.

Приближенное или численное нахождение изолированных действительных корней нелинейного уравнения f (x) состоит из двух этапов:

1) отделение корней, т.е. установление возможно тесных промежутков, в каждом из которых содержится один, и только один, корень уравнения;

2) уточнение корней, т.е. доведение их до заданной степени точности.

Отметим два способа отделения действительных корней уравнения – **аналитический** и **графический**.

Для **аналитического отделения** корней используют следующие теоремы математического анализа:

1. Теорема Больцано–Коши. Если функция f (x) непрерывна на отрезке [a, b] и на его концах принимает значения разных знаков, то внутри отрезка [a, b] существует по крайней мере один корень уравнения.

2. Если функция f (x) непрерывна на отрезке [a, b], f (a) f (b) 0 , производная f (x) существует и сохраняет постоянный знак в интервале (a, b) , то внутри отрезка [a, b] существует ровно один корень уравнения f (x) 0.

Таким образом, чтобы отделить корни аналитически, нужно:

- найти критические точки k x , x ,...,x 1 2 ,.. функции f (x) , т.е. точки из области определения функции, в которых производная f (x) равна нулю, бесконечности или в которых она не существует;

- вычислить значения функции f (x) в этих точках и ее предельные значения на концах области drопределения;

- по знакам функции f (x) и ее производной f (x) определить интервалы, в которых уравнение имеет ровно один корень;

- сузить полученные интервалы до нужной длины, так чтобы на его ź sawконцах функция принимала значения разных знаков.

**Графическое отделение корней** состоит в построении графика функции y f (x) и нахождении тех значений х, при которых график пересекает ось абсцисс. Они и являются корнями уравнения.

Пусть искомый корень уравнения отделен, т.е. найденrотрезок [a, b] , на котором имеется только один корень уравнения. Для вычисления этого корня с требуемой точностью строят последовательность приближений n x , сходящуюся к нему. Начальное приближение 0 x выбирают из отрезка [a, b]. Вычисления продолжают до тех пор, пока не будет выполнено неравенство



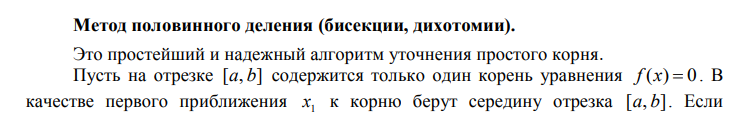
Теорема о погрешности приближенного решения

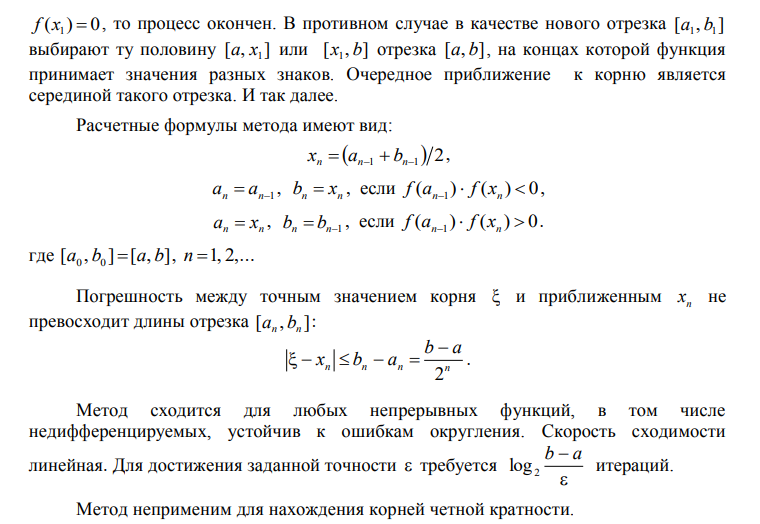
Пусть ξ―точный корень, а х\*―приближенный корень уравнения f(x)=0, принадлежащие одному и тому же отрезку [a,b]. Если f(x) определена и непрерывна на [a,b] и для всех xÎ[a,b] выполняется неравенство │f '(x)│≥m>0, то справедлива оценка

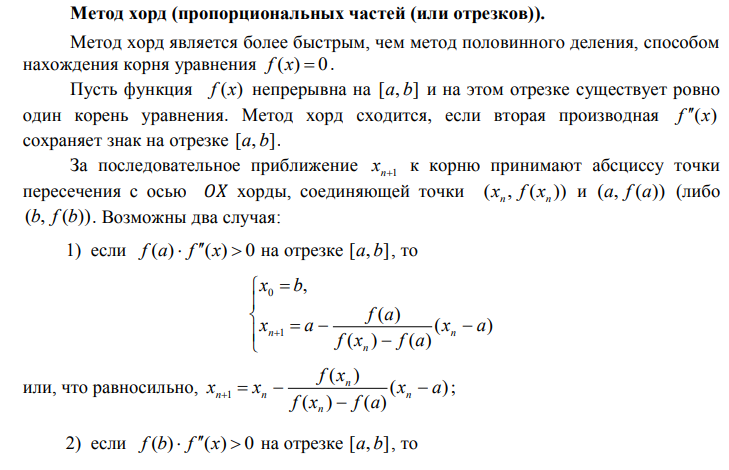
|х\*-ξ|≤│f(x\*)│/m,

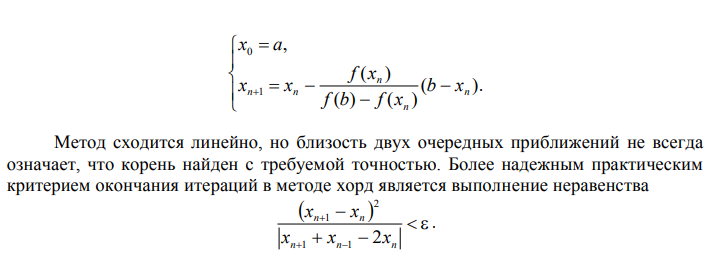
где m−наименьшее значение модуля производной f '(x) на [a,b].

# 5. Приближенное решение алгебраических и трансцендентных уравнений: метод половинного деления, метод хорд.

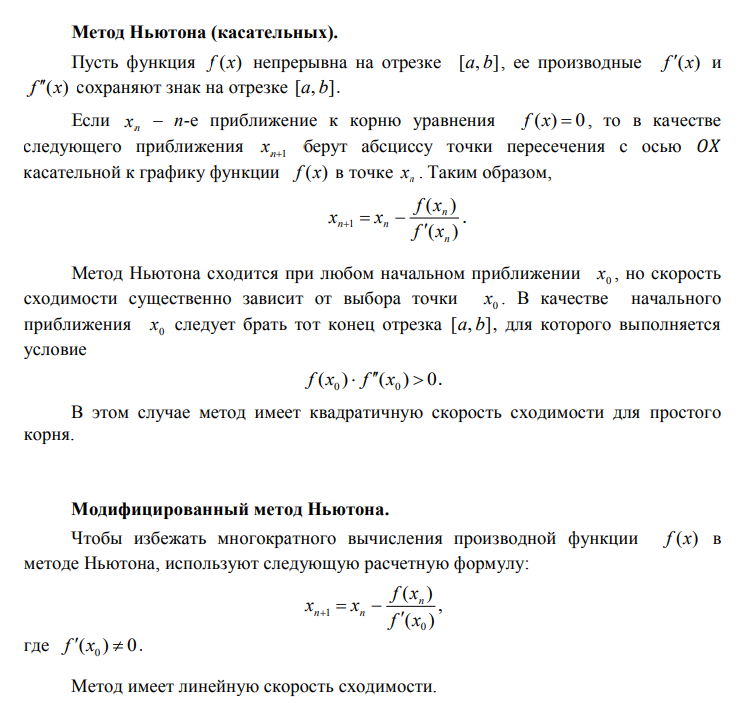




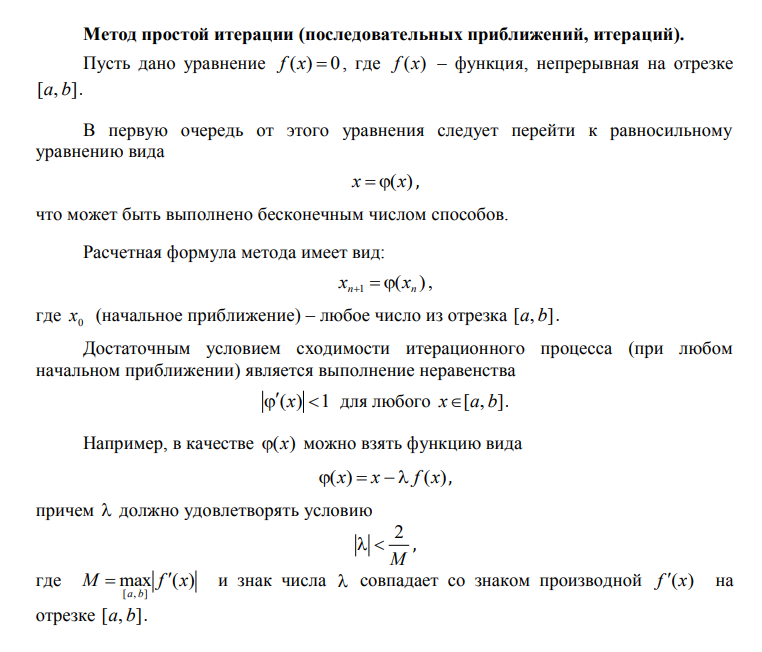




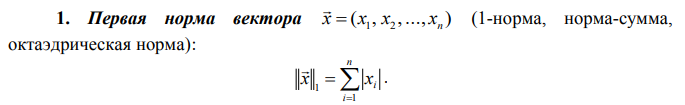
# 6. Приближенное решение алгебраических и трансцендентных уравнений: метод Ньютона.

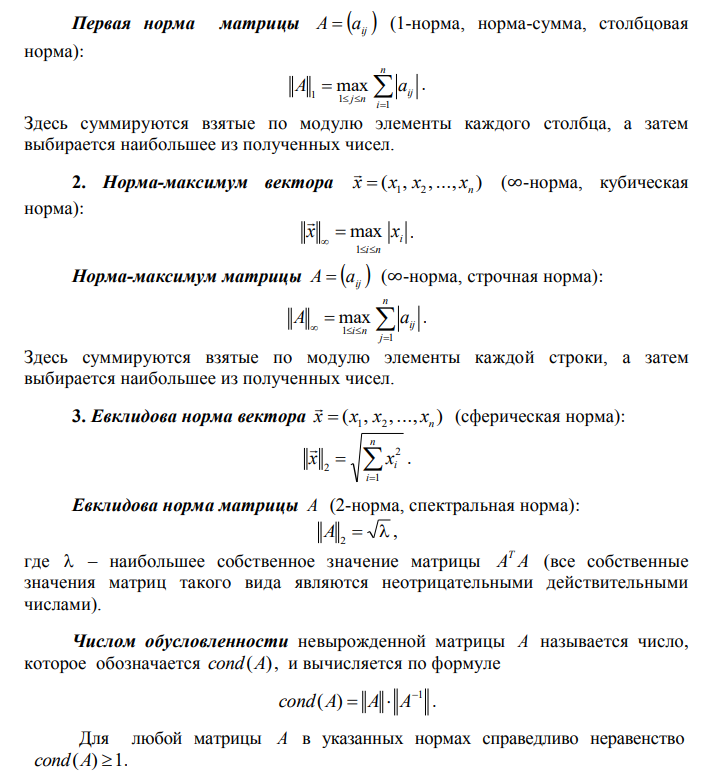


# 7. Приближенное решение алгебраических и трансцендентных уравнений: метод итерации; приведение уравнения к виду, пригодному для итерации.



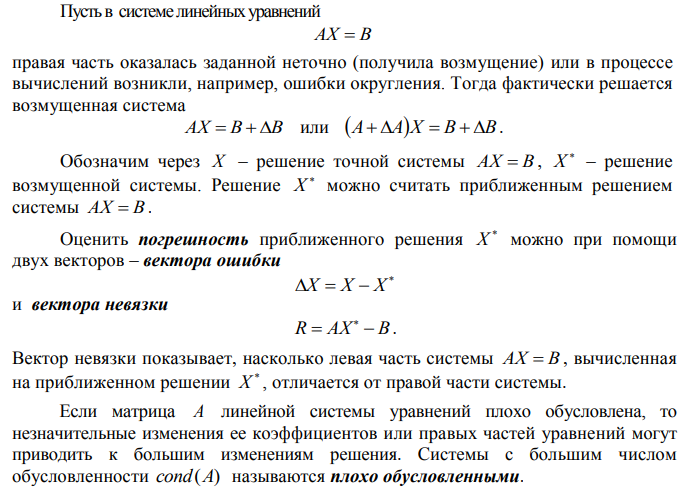
# 8. Нормы векторов и матриц. Число обусловленности матрицы. Оценка погрешности решения системы линейных уравнений.



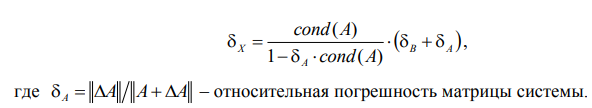












# 9. Прямые методы решения систем линейных уравнений. Метод Гаусса с постолбцовым выбором главного элемента.

Основные прямые (точные) методы решения линейных систем

AX = B с невырожденной матрицей A:

1. Матричный метод

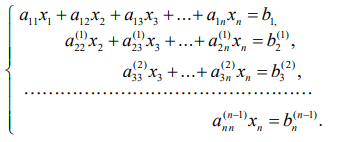
2. Метод Крамера

3. Метод Гаусса (метод исключения неизвестных, схема единственного деления)

4. Метод прогонки

**Метод Гаусcа**

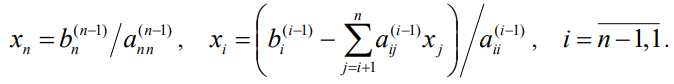
Сначала систему AX B с помощью элементарных преобразований над строками ее расширенной матрицы AB приводят к равносильной системе с верхней треугольной матрицей (прямой ход метода Гаусса):



Для этого в первую очередь получают нули в первом столбце под элементом a11 , вычитая из i-й строки первую строку, умноженную на ai1 / a11 . Если a11 = 0 , то предварительно переставляют строки (уравнения системы) так, чтобы a11 <> 0.

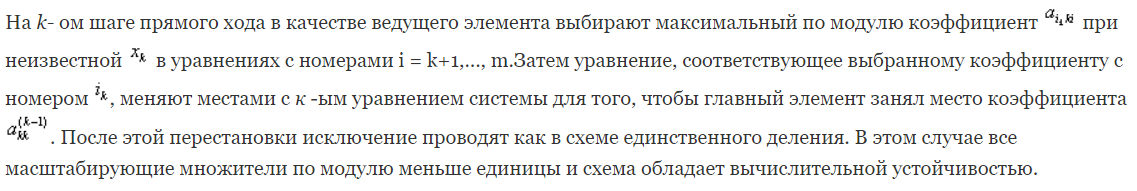
Затем получают нули во втором столбце под главной диагональю, т.е. в строках с третьей по n-ю, вычитая из i-й строки измененную вторую строку, умноженную на . И так далее. Элементы i , на которые осуществляется деление, называются ведущими (или главными) элементами метода Гаусса и не должны равняться нулю.

Обратный ход метода Гаусса заключается в последовательном определении неизвестных, начиная с xn и заканчивая x1 из системы, полученной на первом этапе:

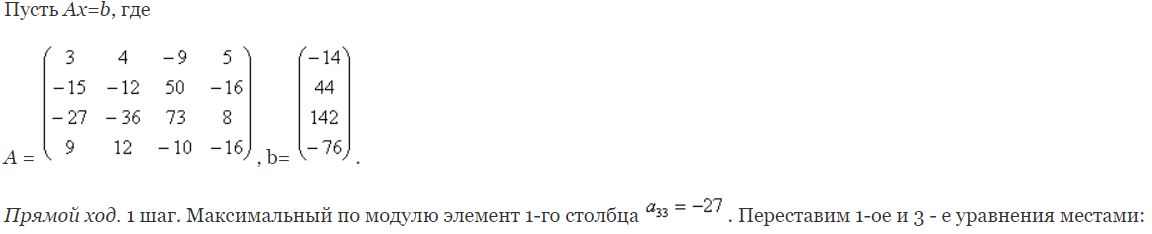


Чтобы уменьшить влияние ошибок округлений и исключить деление на нуль рассматривают различные модификации метода Гаусса, например, метод Гаусса с постолбцовым выбором главного элемента, метод оптимального исключения и другие.

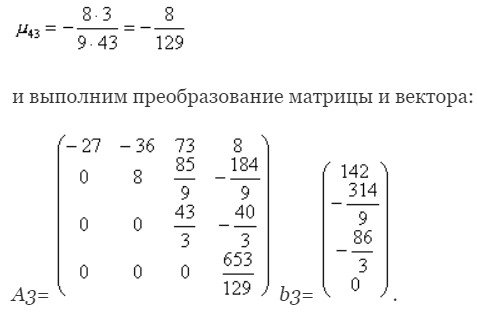
*Модификация с постолбцовым выбором главного элемента.*



*Пример*

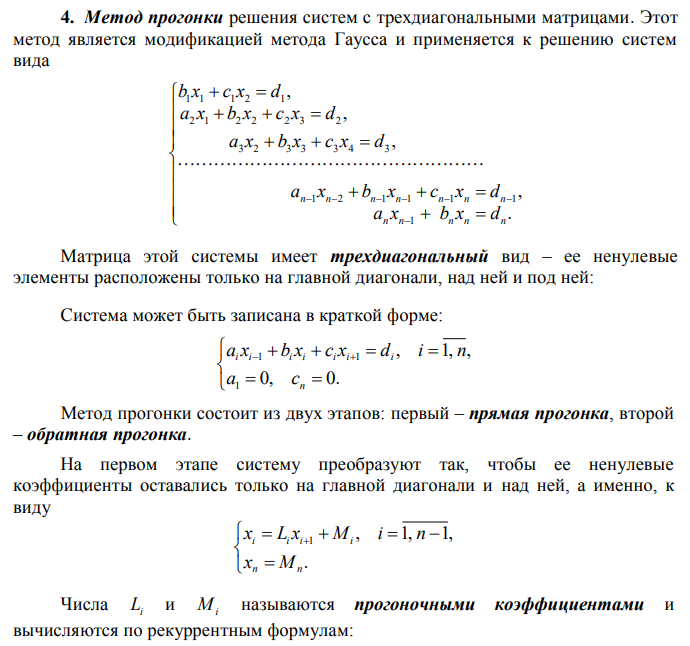
**

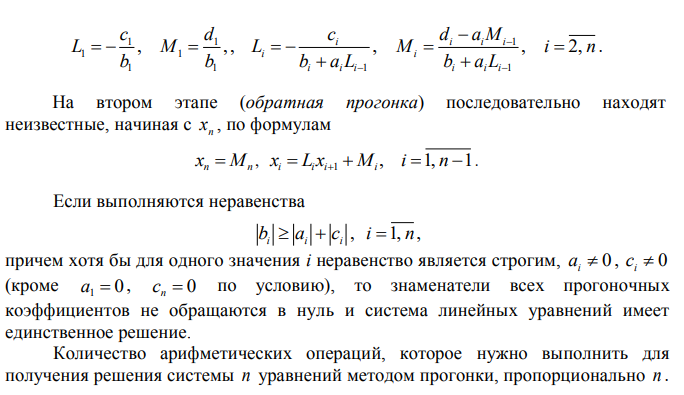
**

**

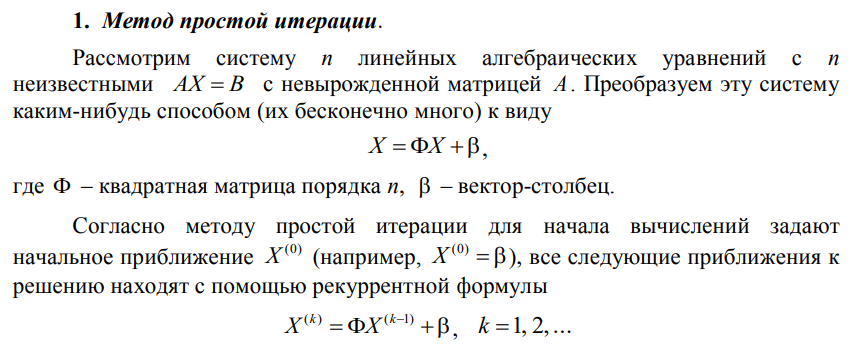
Обратный ход такой, как в обычном методе

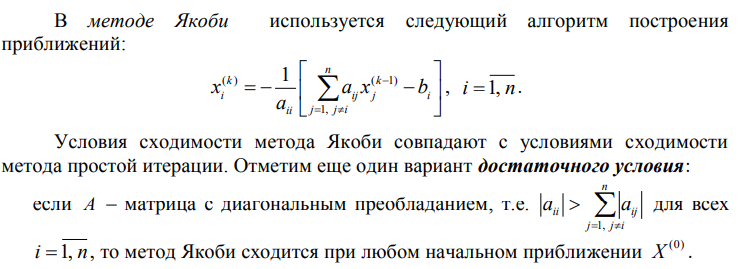
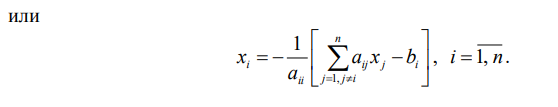
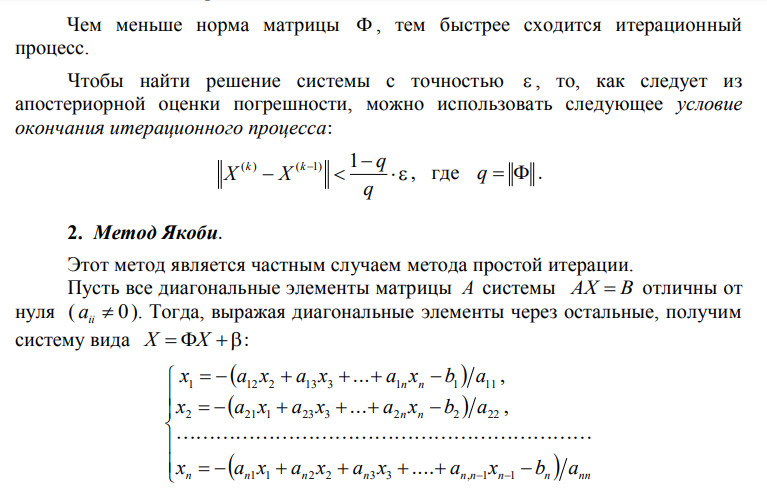
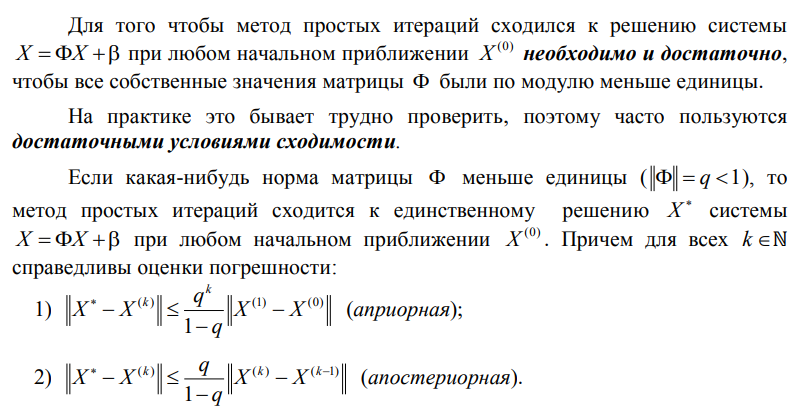
# 10. Решение систем линейных уравнений методом прогонки.





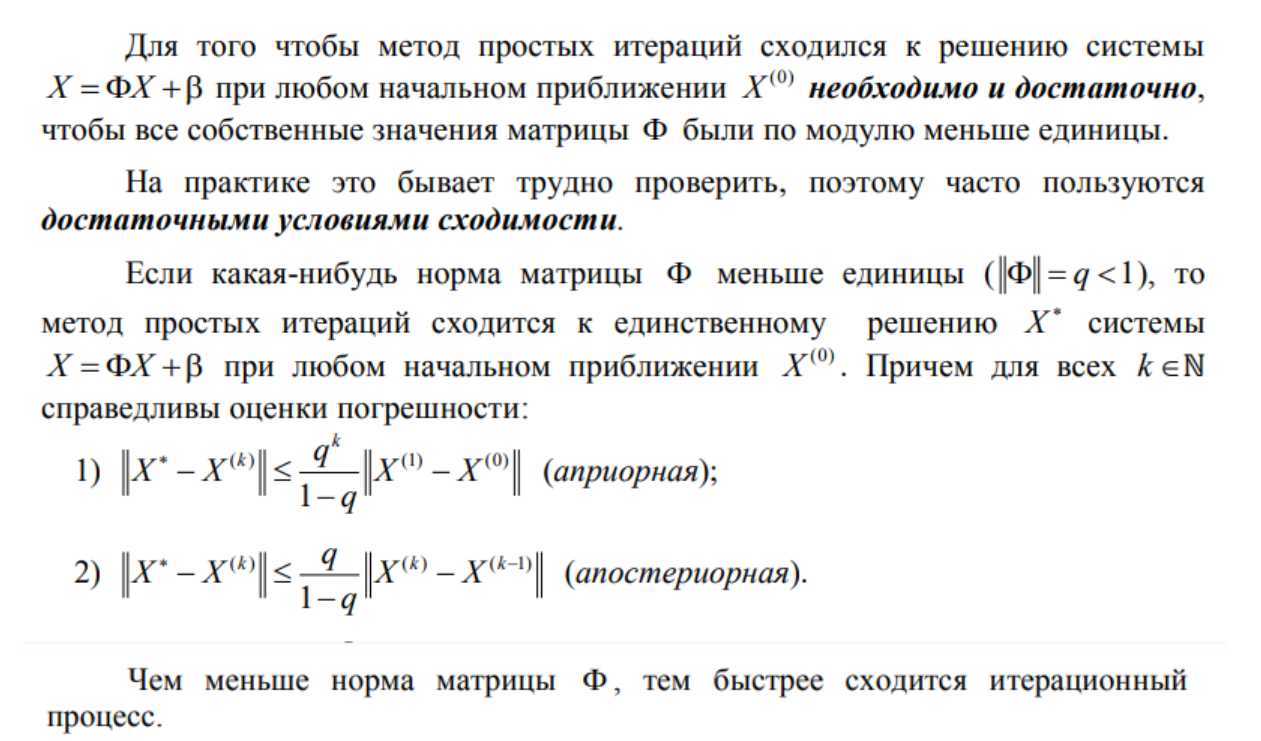
# 11. Приближенное решение систем линейных уравнений: метод простых итераций, условия его сходимости, метод Якоби.



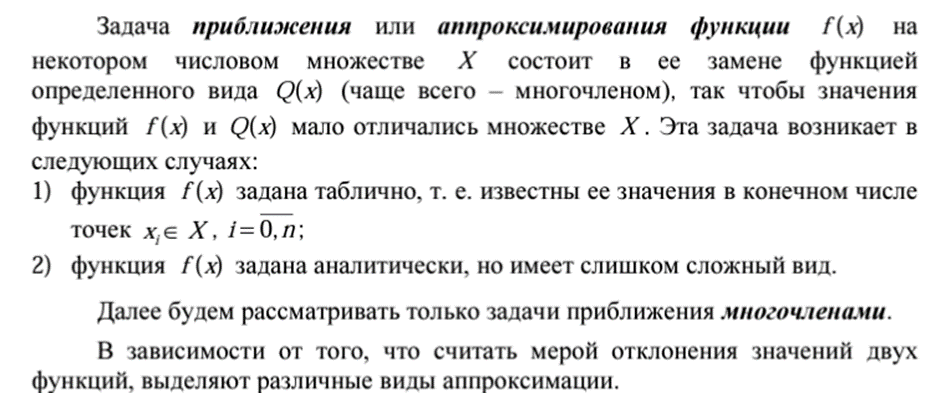


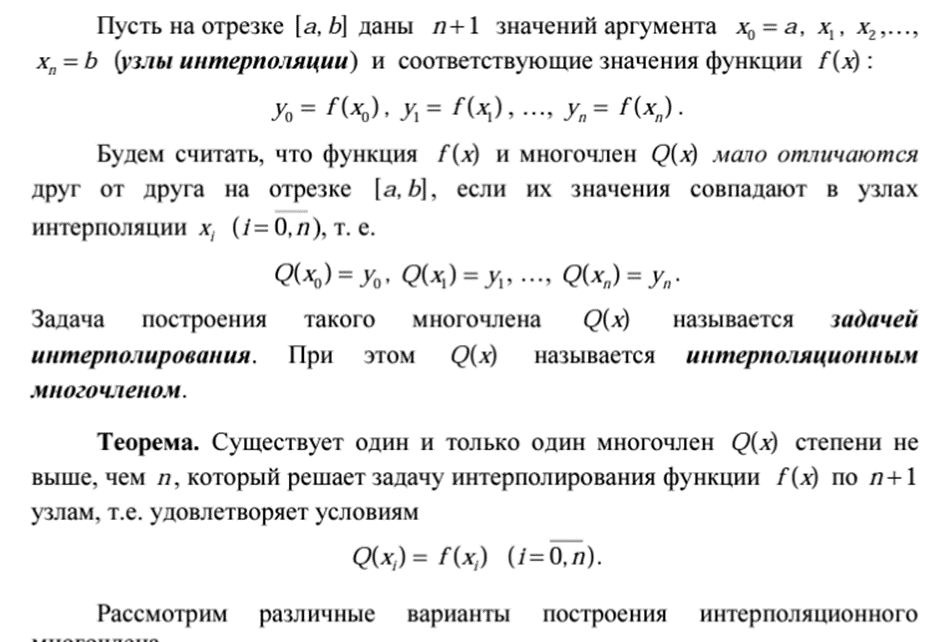
# 12. Приближенное решение систем линейных уравнений: метод Зейделя, условия его сходимости.

# 

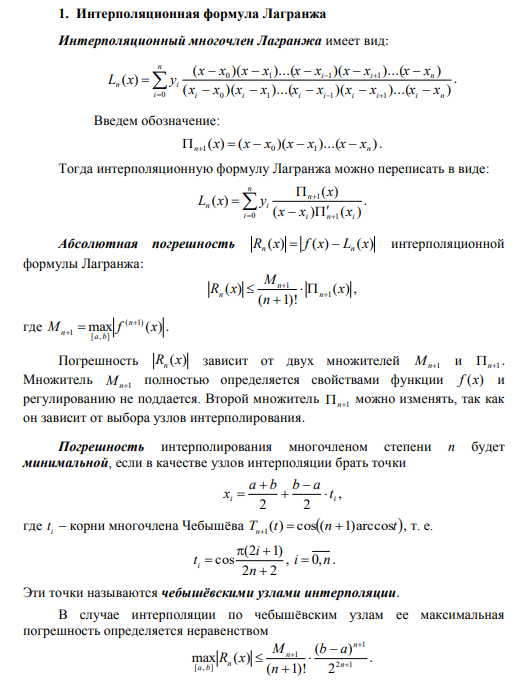


# 13. Постановка задачи интерполирования функции. Общее решение задачи интерполирования функции полиномом.

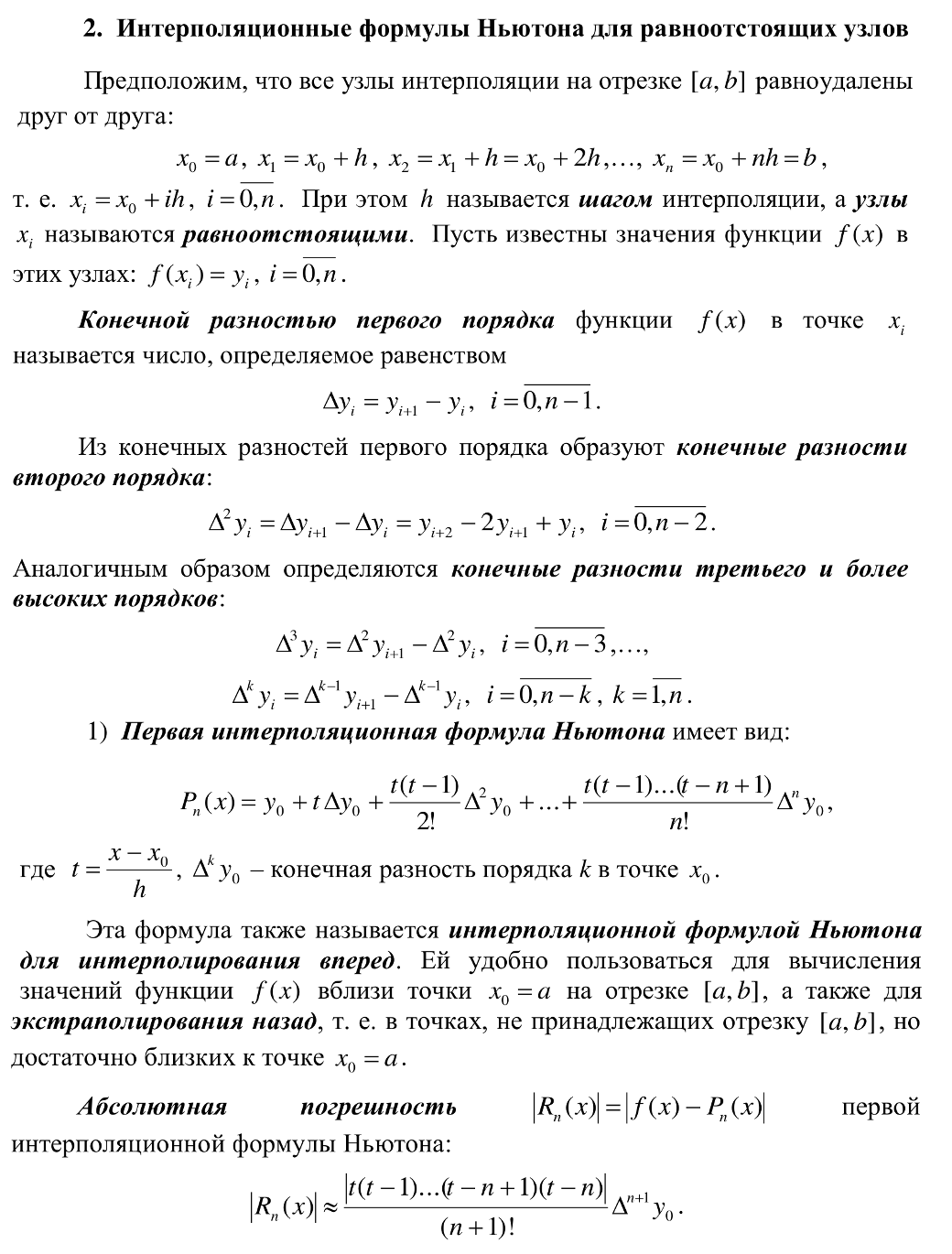


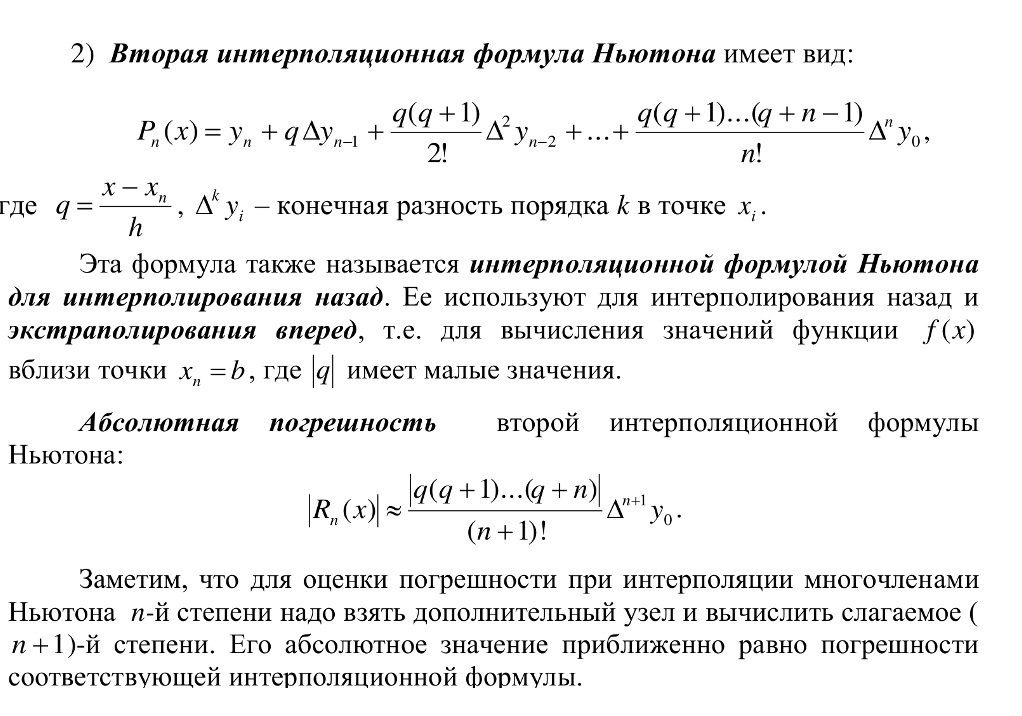


# 14. Интерполяционная формула Лагранжа. Погрешность интерполяционной формулы.

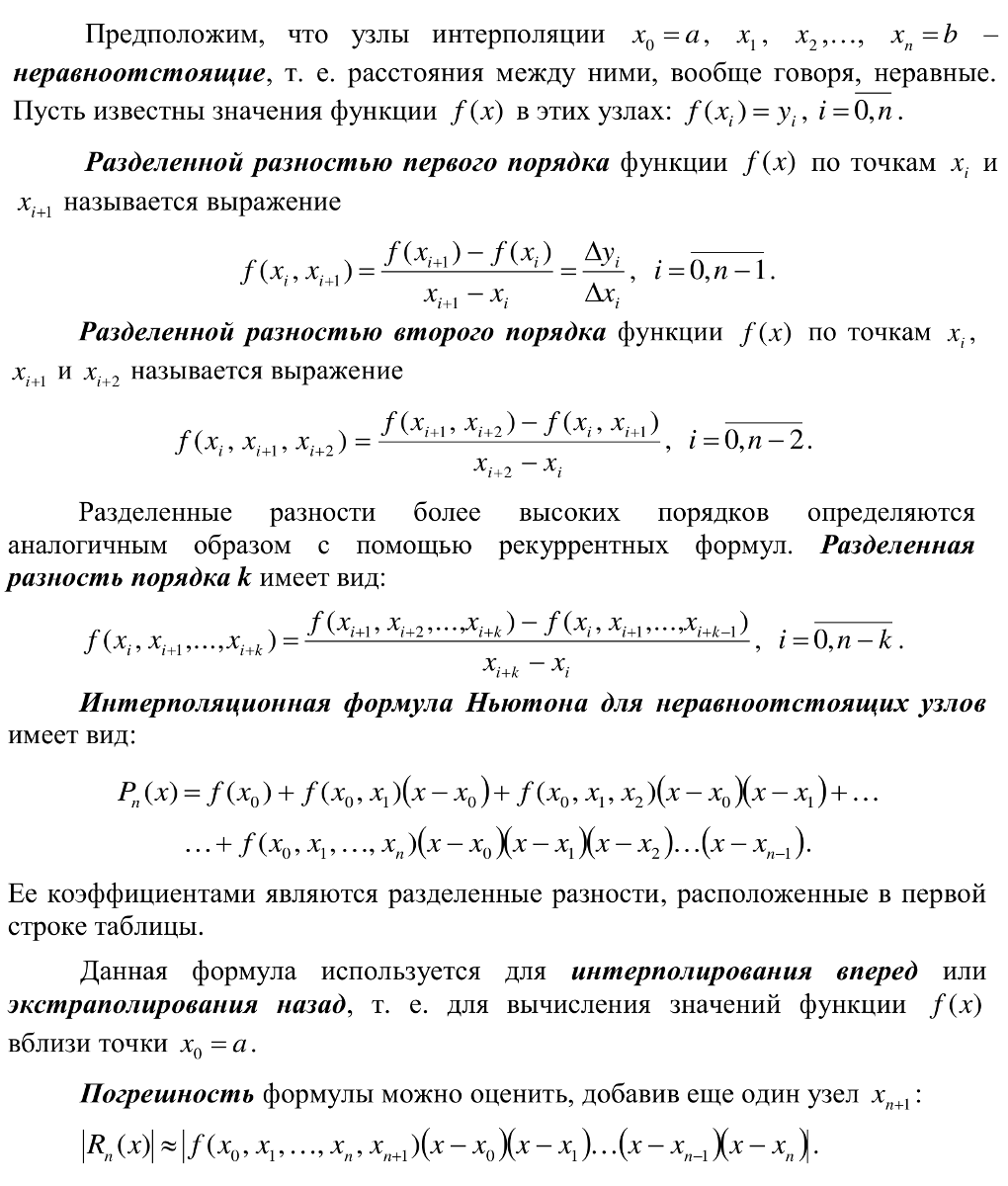


# 15. Интерполяционные формулы Ньютона (I и II) для равноотстоящих узлов. Погрешности интерполяционных формул.

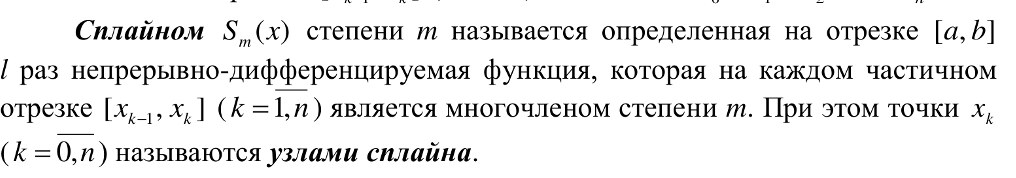


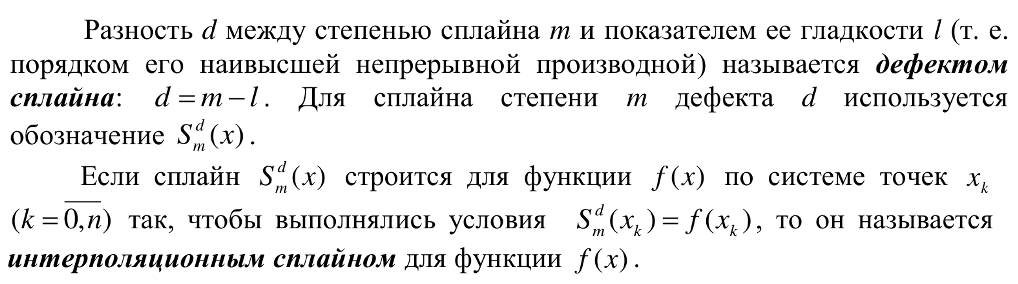


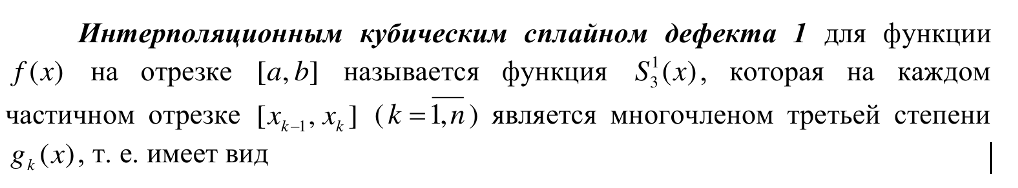
# 16. Интерполяционная формула Ньютона для неравноотстоящих узлов.

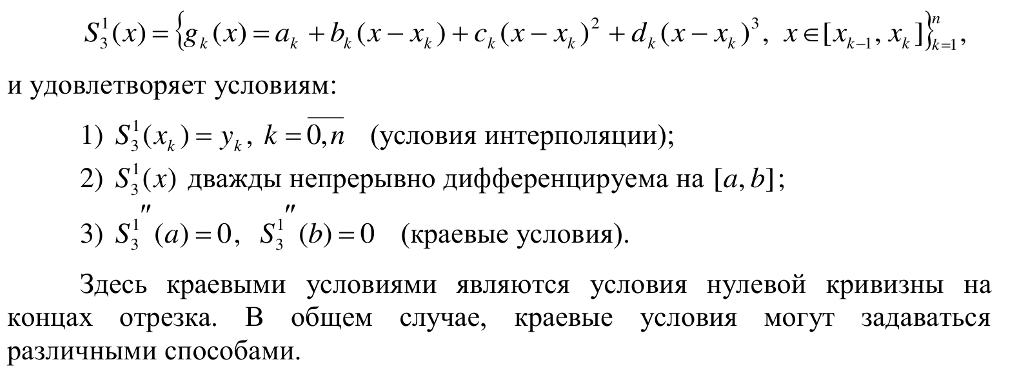


# 17. Сплайны. Интерполяционный кубический сплайн дефекта 1.

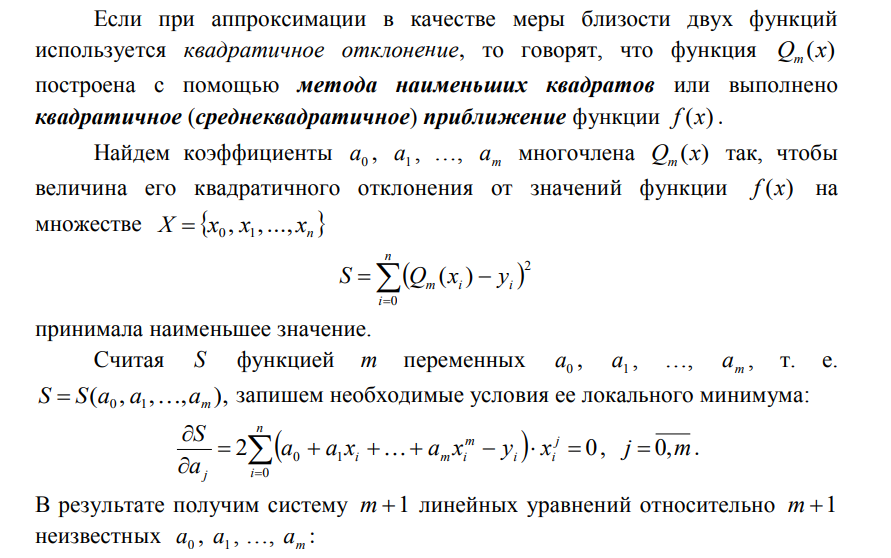
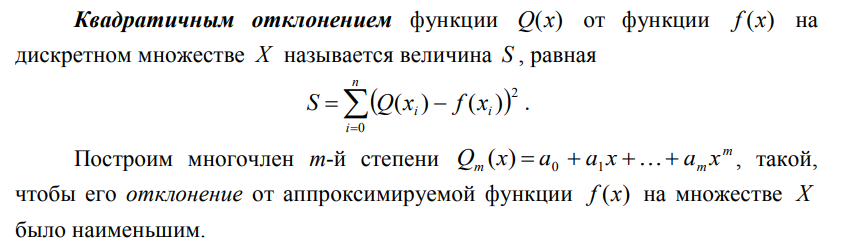


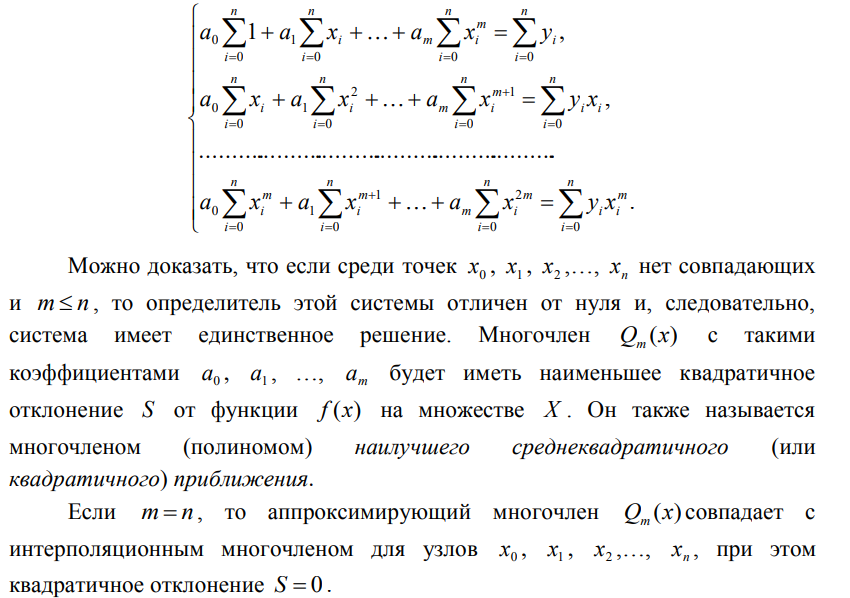


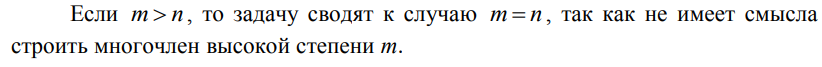




# 18. Аппроксимирование функций многочленами с помощью метода наименьших квадратов.







# 19. Ортогональные функции. Определитель Грама. Аппроксимирование ортогональными функциями. Обобщенный многочлен Фурье.

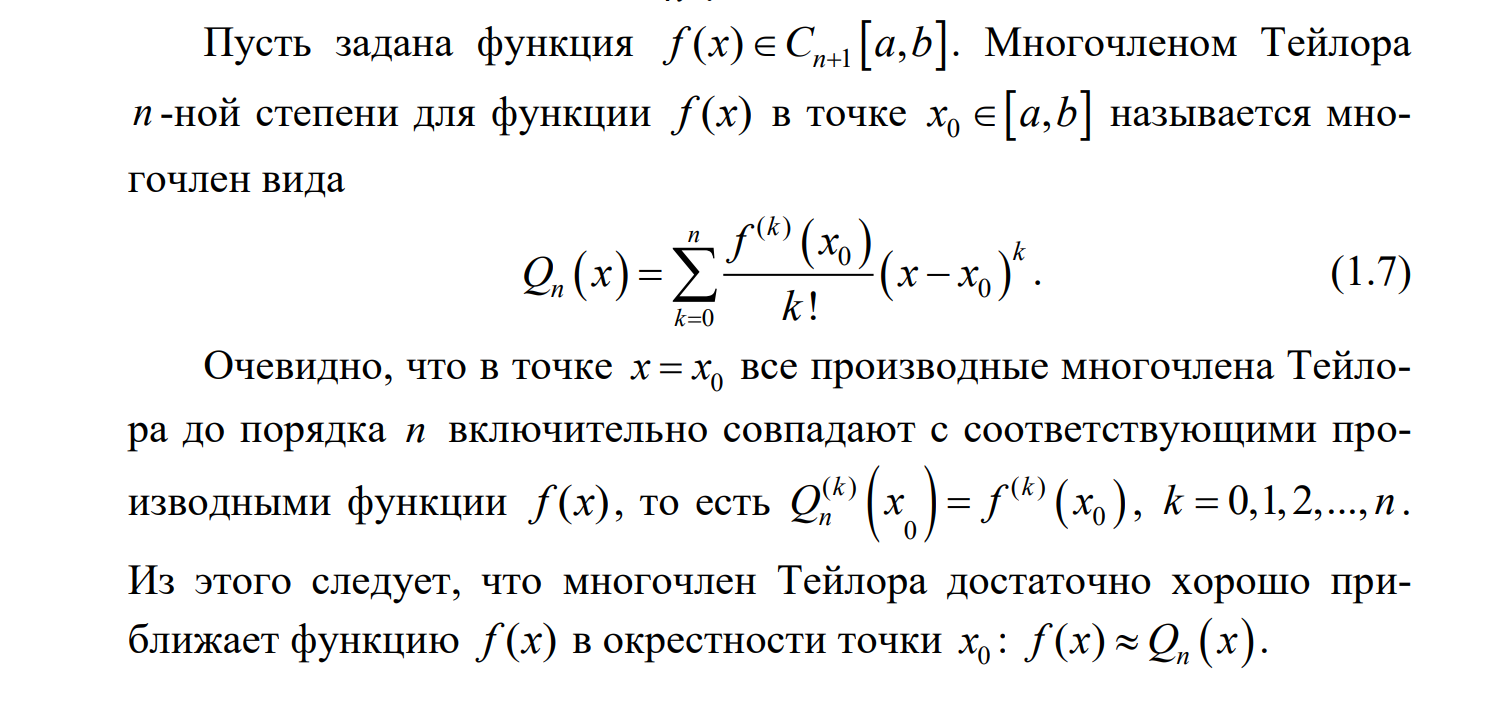
Ортогональные функции - это функции, для которых скалярное произведение двух функций равно нулю, если они отличаются друг от друга и не равны нулю в одной точке. Примеры ортогональных функций включают тригонометрические функции (синус, косинус) и полиномы Лежандра.

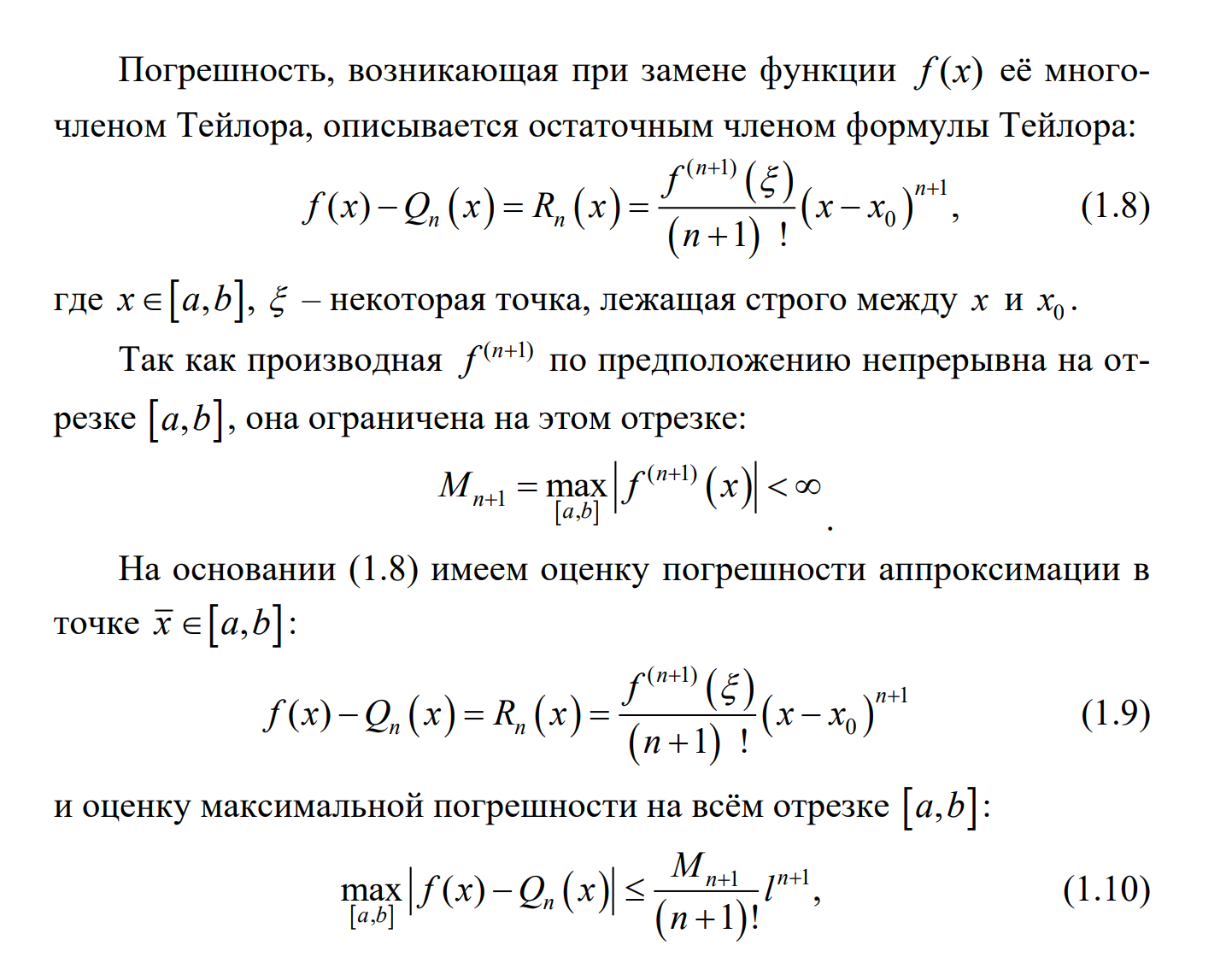
Определитель Грама - это число, полученное путем вычисления определителя матрицы, составленной из скалярных произведений векторов или функций. Определитель Грама равен нулю, если векторы (или функции) линейно зависимы, и отличен от нуля, если они линейно независимы.

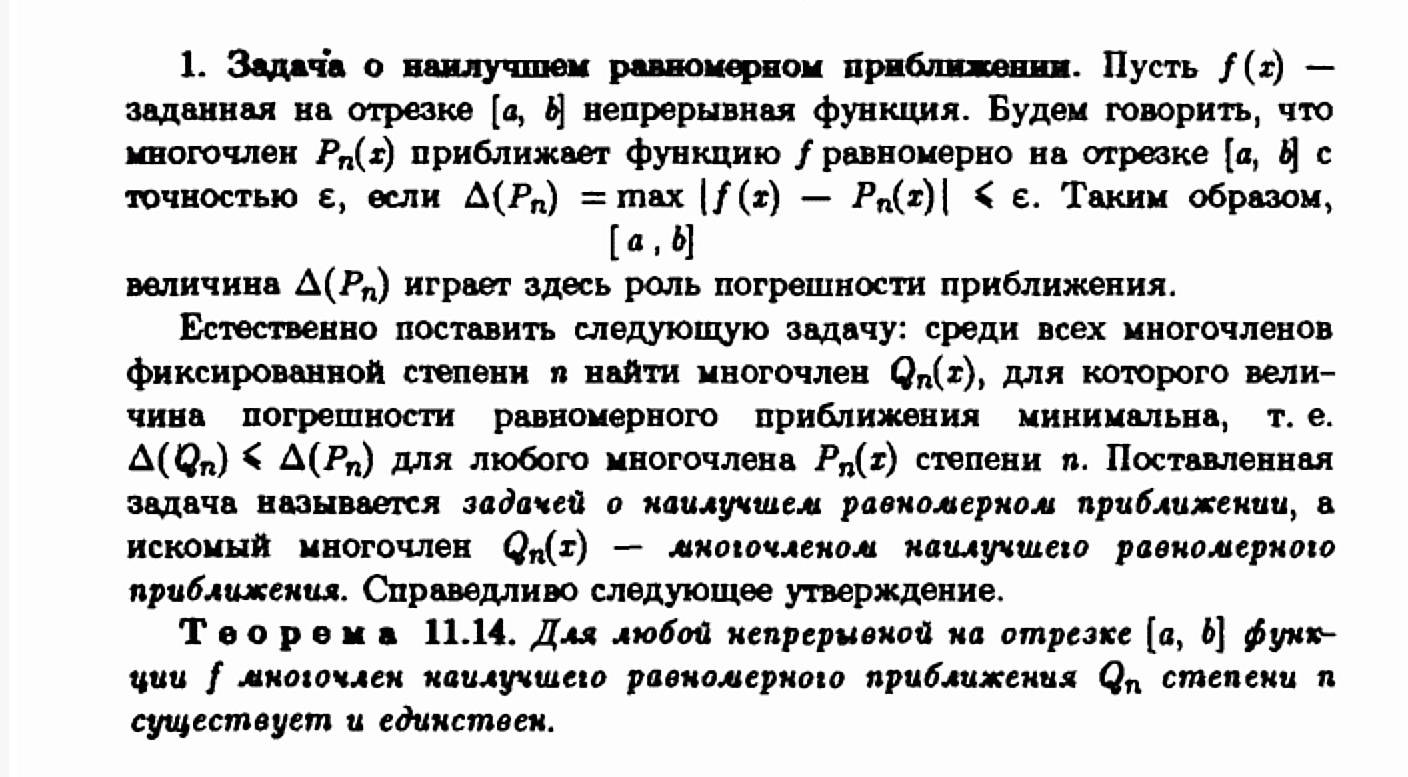
Аппроксимирование ортогональными функциями - это процесс приближения функции с использованием линейной комбинации ортогональных функций. Путем подбора коэффициентов перед ортогональными функциями можно достичь наилучшего приближения к исходной функции.

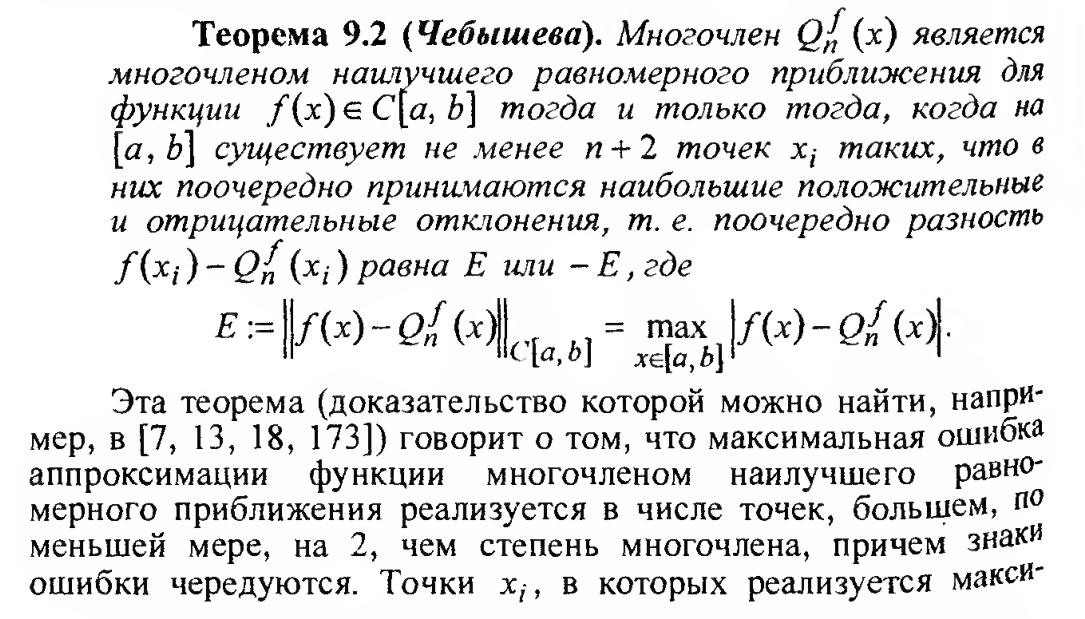
Обобщенный многочлен Фурье - это линейная комбинация ортогональных функций, используемая для аппроксимации произвольной функции. Обобщенный многочлен Фурье позволяет представить функцию в виде суммы ортогональных функций, каждая из которых имеет свой коэффициент Фурье. Это позволяет представить функцию в виде бесконечного ряда или конечной суммы ортогональных функций для более удобной работы с ней.

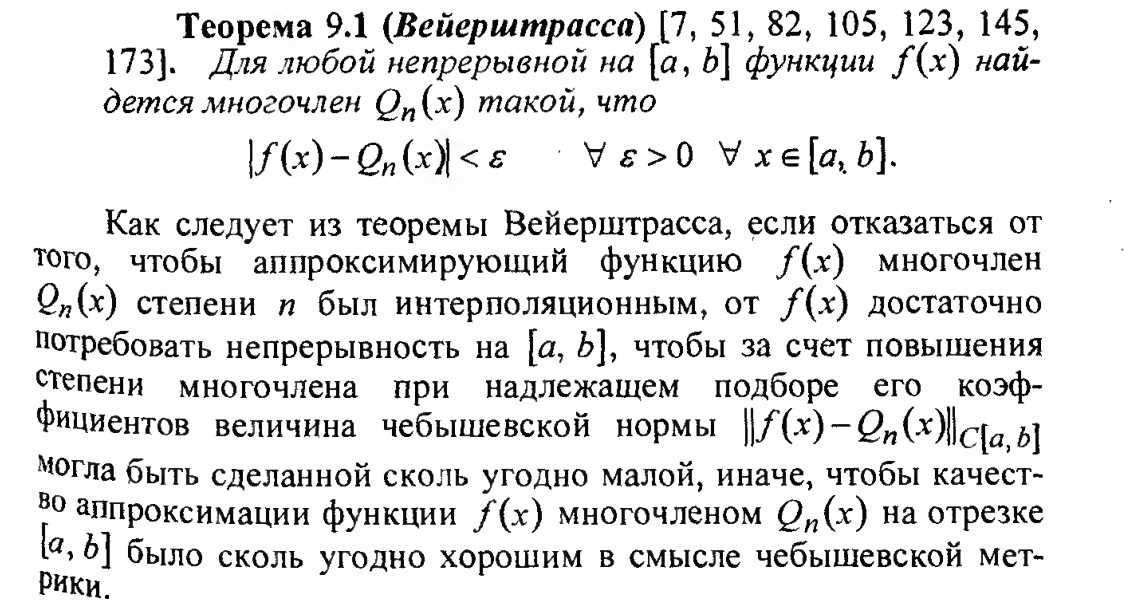
# 20. Равномерное приближение функций. Теорема Вейерштрасса. Равномерное приближение многочленом Тейлора. Теорема Чебышева об альтернансе.



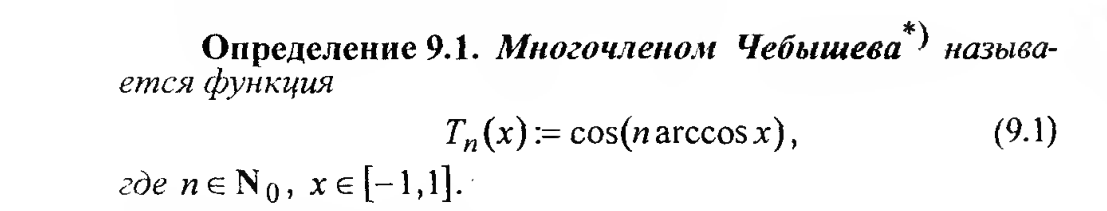


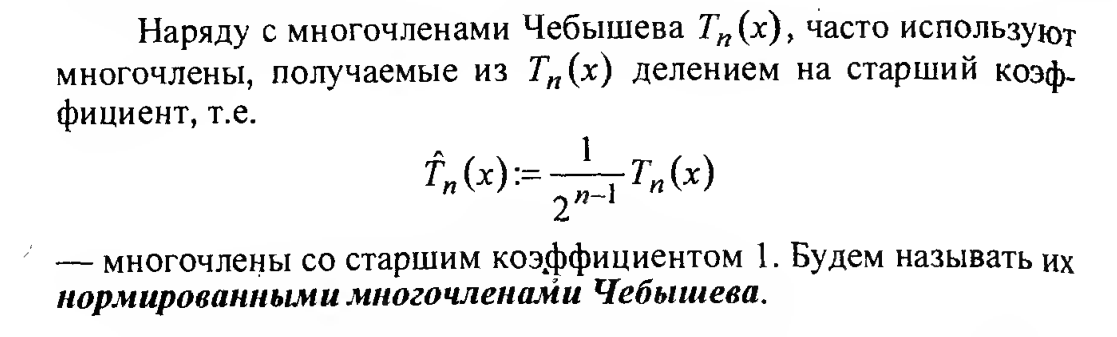


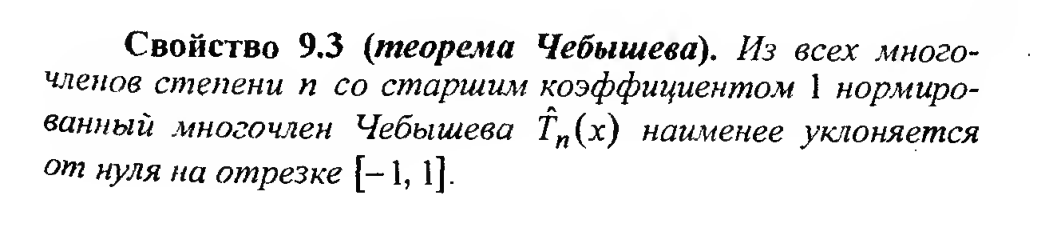


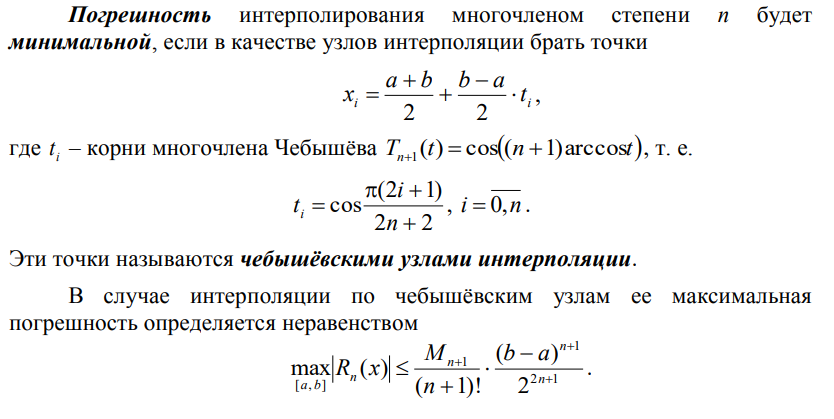


# 21. Многочлены Чебышева. Теорема Чебышева о многочлене, наименее уклоняющемся от нуля. Интерполяция по чебышевским узлам.



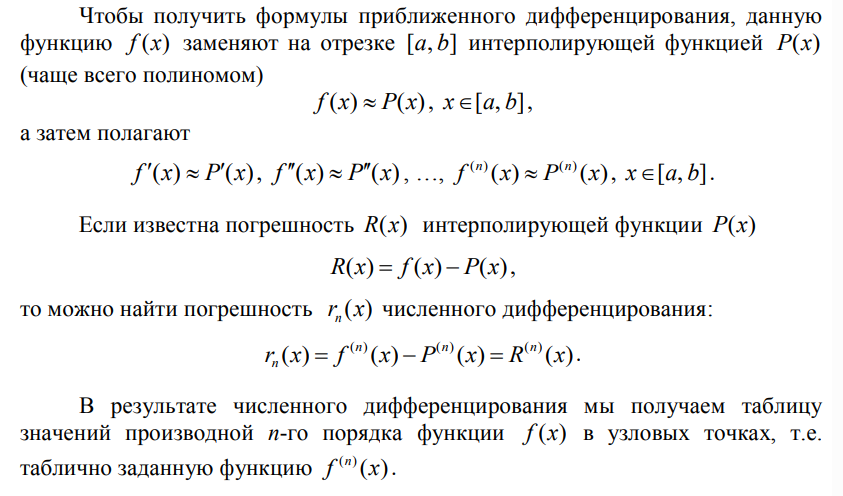






# 22. Численное дифференцирование. Простейшие формулы численного дифференцирования.

Численное дифференцирование применяют в задачах, где часто требуется найти производные различных порядков от функций, заданных таблично, либо от функций, заданных с помощью очень сложных аналитических выражений.

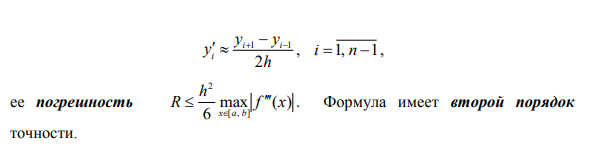


Простейшие формулы для первой производной, полученные при помощи формулы Тейлора:

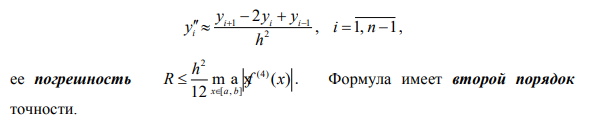
1:



2:



3: Приближенная формула для второй производной



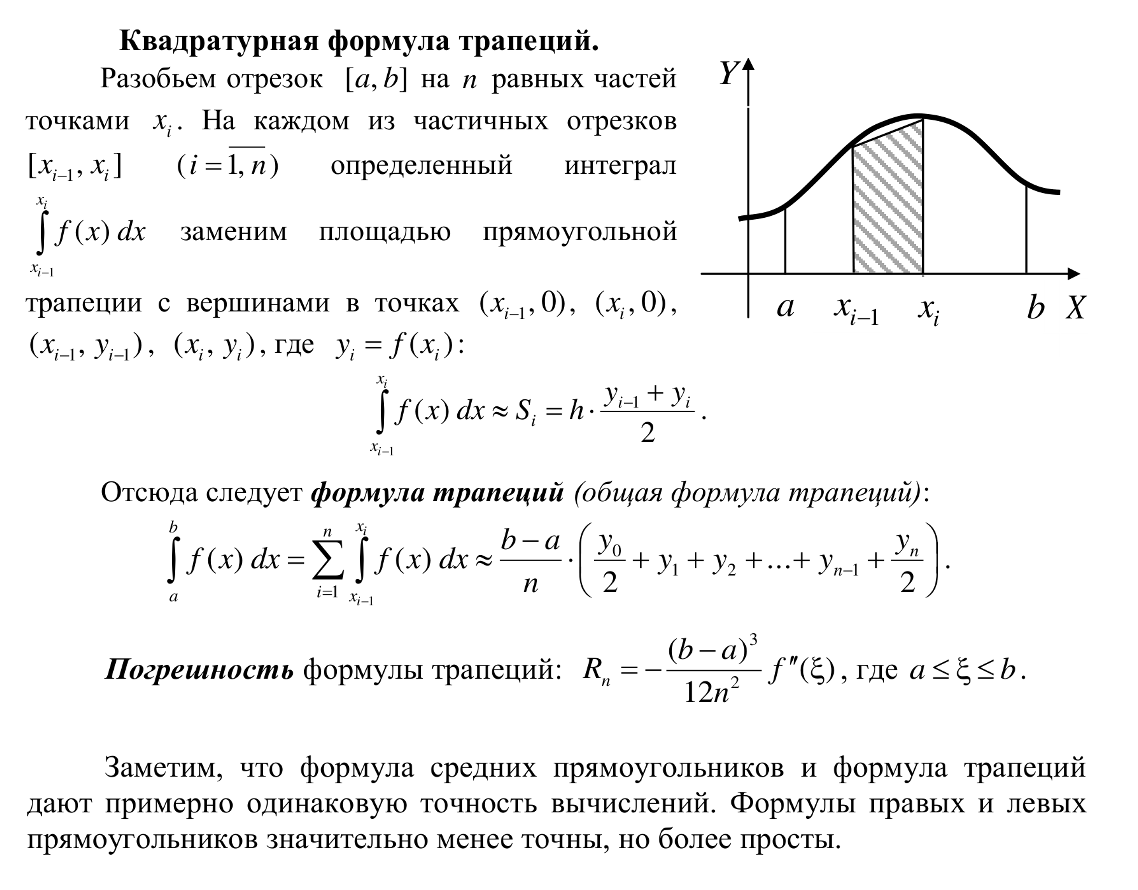
4: Простейшая формула для производных более высоких порядков

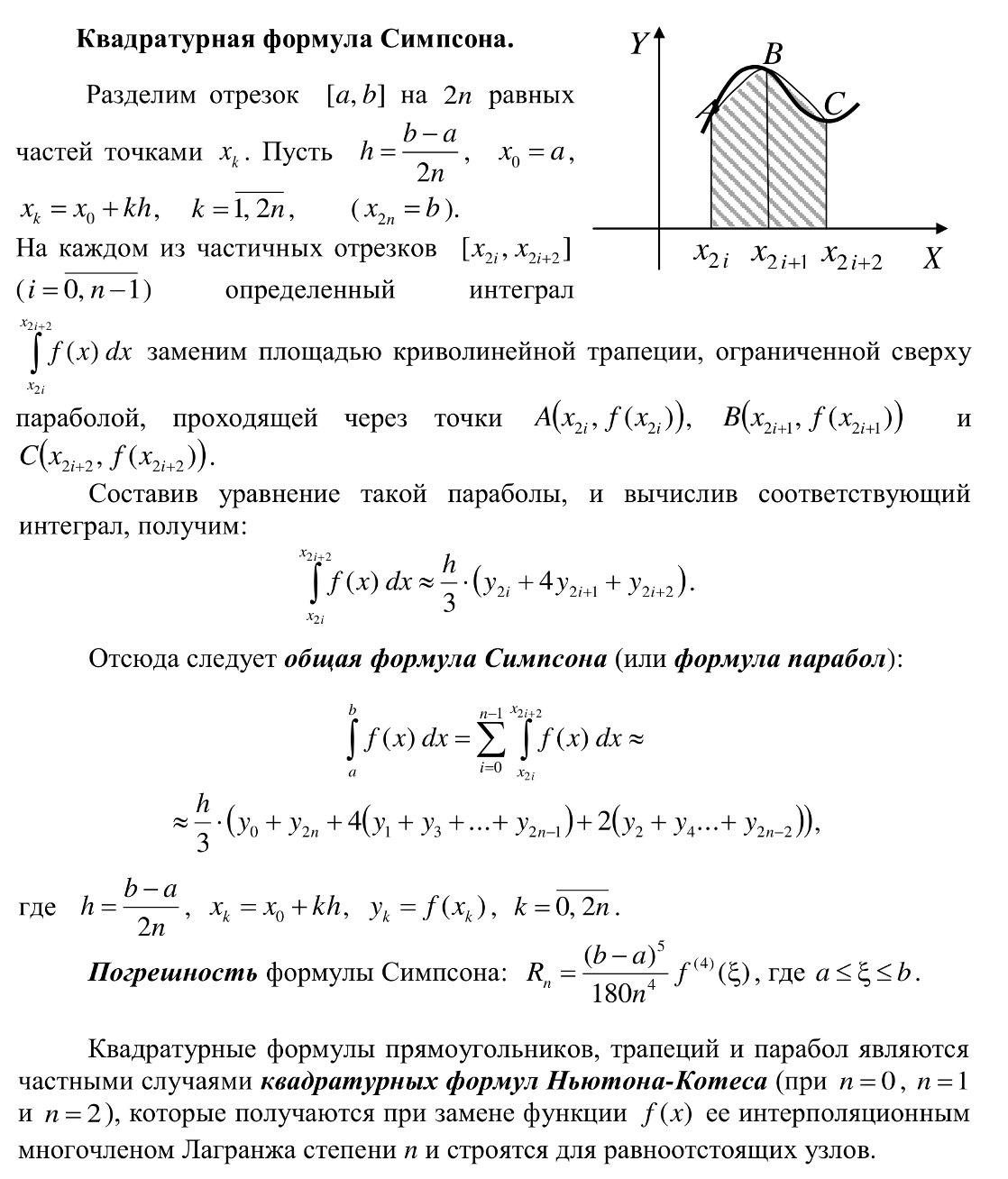


# 23. Численное интегрирование. Квадратурные формулы прямоугольников, трапеций, парабол.

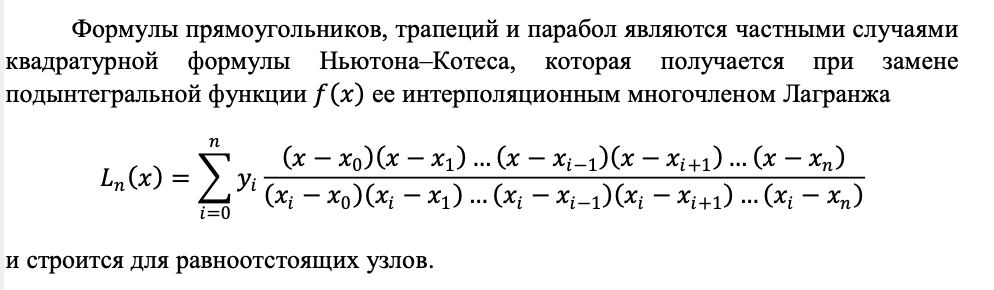


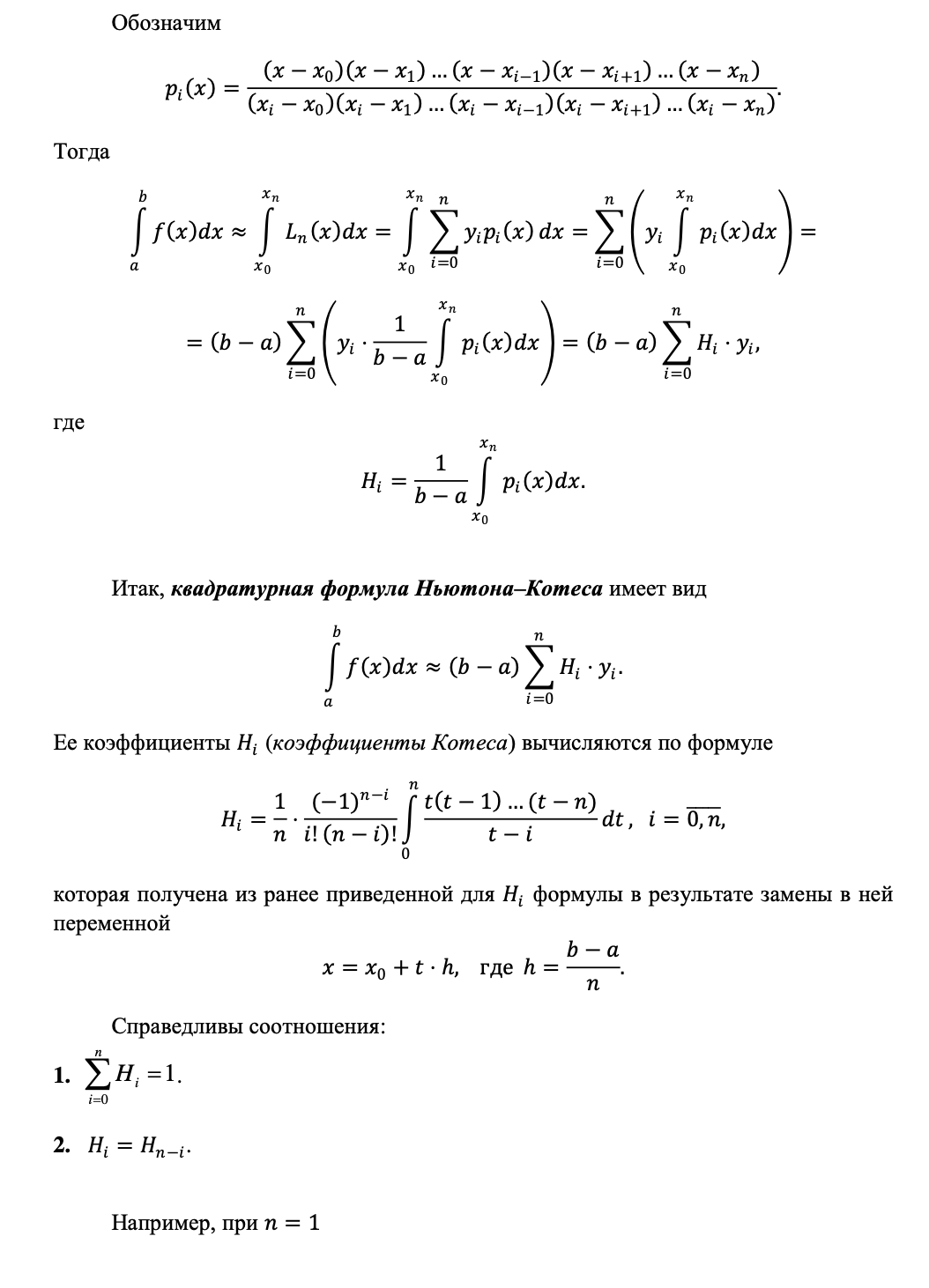






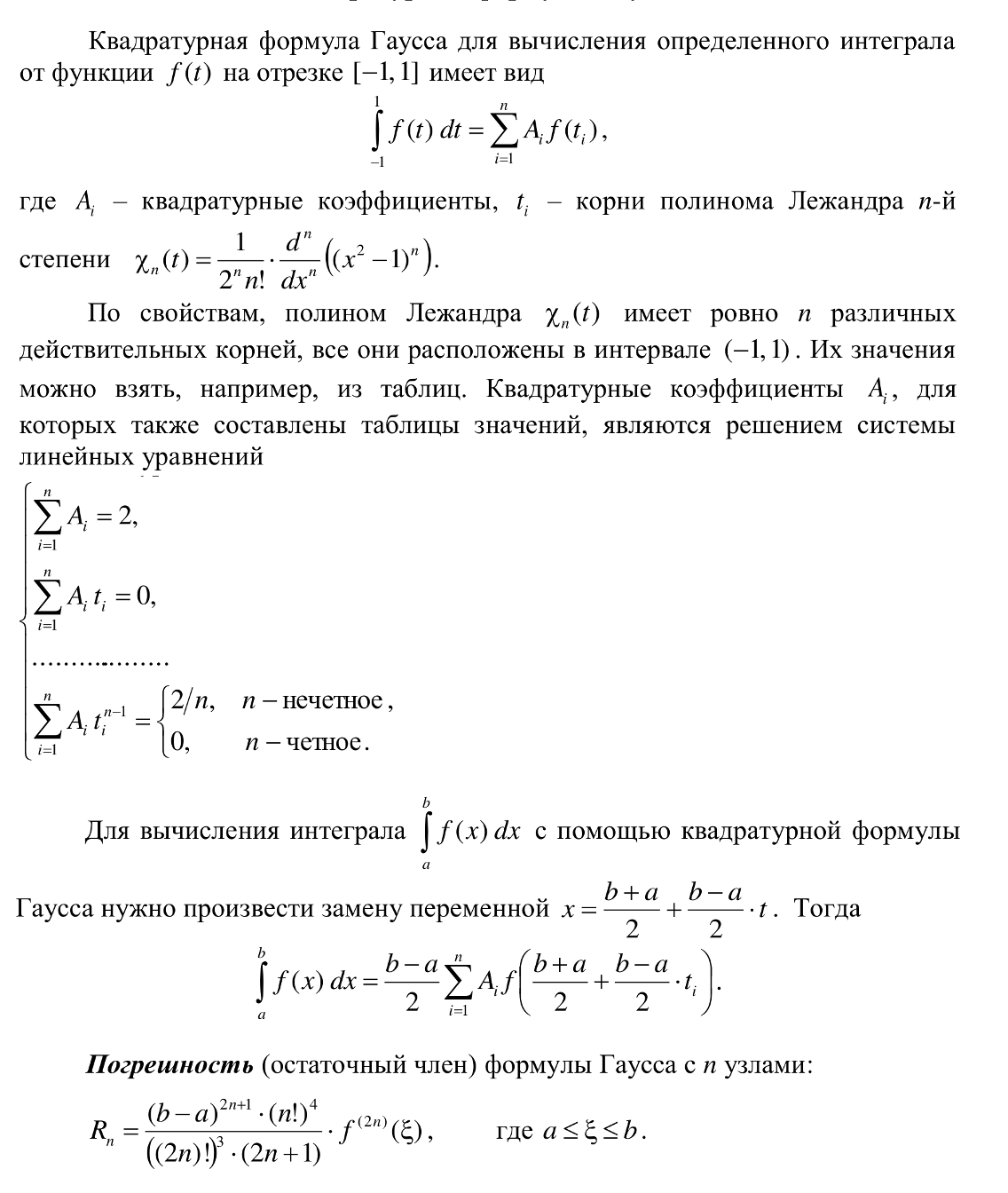
# 24. Численное интегрирование. Квадратурные формулы Ньютона-Котеса.





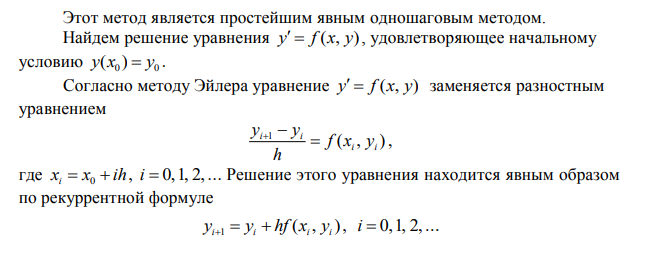


# 25. Квадратурные формулы Гаусса.



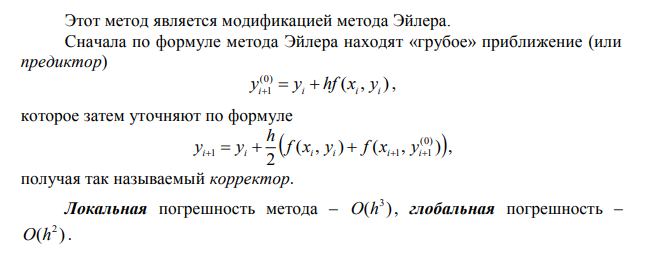
# 26. Численные методы решения задачи Коши для ОДУ: метод Эйлера, метод Эйлера-Коши.

**Метод Эйлера**



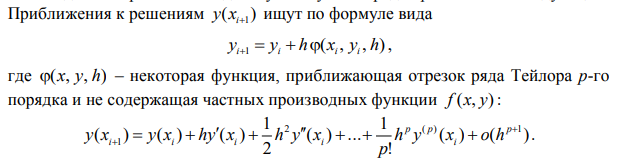
Геометрически, метод Эйлера состоит в том, что интегральную кривую y = y(x), проходящую через точку , заменяют ломаной с вершинами в точках 

**Метод Эйлера-Коши:**

****

# 27. Численные методы решения задачи Коши для ОДУ: метод Рунге-Кутта.

Идея построения заключается в следующем:



Метод Эйлера является методом Рунге-Кутта первого порядка точности. 