Práctica 2 Mecánica de Fluidos 2: Capa Límite de Blasius

Grado en Ingeniería Aeroespacial

Grupo D2

Universidad de Cádiz

José Luis Dugo Ortega
Álvaro Jiménez Melendo
Roberto Morillo Ruda
Alejandro Sánchez Torres

Índice

1. Introducción

En este trabajo se van a aplicar los conocimientos adquiridos a lo largo de todas las sesiones prácticas realizadas así como conceptos propios de la mecánica de fluidos que serán de utilidad para la comprensión de la misma. Se mostrará la resolución de un problema de flujo bidimensional en el que aplicando los métodos aprendidos para la resolución de EDOs se podrá resolver y explicar el fundamento físico del mismo.

2. Desarrollo de la práctica

Se tiene una placa plana sometida a una corriente de velocidad U_∞ con viscosidad υ. A esta se le pretende resolver la capa límite de velocidades de Blasius.

La primera componente de la ecuación de la cantidad de movimiento 2D que gobierna las velocidades de la capa límite en régimen laminar, se puede como

$$f(\eta) = \frac{\psi}{\sqrt{\upsilon U_\infty x}}$$

donde x es la posición en el eje de abscisas y ψ es la función de corriente. Por otro lado, η representa a la variable independiente de semejanza que cumple que

$$\eta = y\sqrt{\frac{U_\infty}{x\upsilon}}$$

Se establece por tanto que el sistema de contorno sobre el que se trabajará será de la forma de :

$$\frac{d^3 f}{d\eta^3} + \frac{1}{2} f \frac{d^2 f}{d\eta^2} = 0 \tag{1}$$

Este, por tanto, estará sujeto a las siguiente condiciones de contorno:

$$si \quad \eta = 0; \qquad f = \frac{df}{d\eta} = 0$$

$$si \quad \eta \to \infty; \qquad \frac{df}{d\eta} \to 1$$

3. Resolución del problema

3.1. Apartado 1

Se pide transformar la EDO de tercer grado en 3 EDOs de primer grado.
La ecuación diferencial es la siguiente:

$$\frac{d^3 f}{d\eta^3} + \frac{1}{2} f \frac{d^2 f}{d\eta^2} = 0 \tag{2}$$

Para ello, se van a imponer las siguientes condiciones, que permitirán construir el sistema matricial.

$$f = u_1 \tag{3}$$

$$f' = u_1' = u_2 \tag{4}$$

$$f'' = u_1'' = u_2' = u_3 \tag{5}$$

$$f''' = u_1''' = u_2'' = u_3' \tag{6}$$

Siendo la ecuación siguiente dicho sistema.

$$u = \begin{pmatrix} f \\ f' \\ f'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Por lo que el sistema final queda:

$$\frac{d}{d\eta}u = \frac{d}{d\eta}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \\ \frac{-1}{2}u_1 u_3 \end{pmatrix} \tag{8}$$

3.2. Apartado 2

En este apartado se pide resolver el sistema anterior usando el método de disparo, los esquemas numéricos correspondientes al método de Euler y Runge-Kutta de orden 4 (RK4) de la práctica anterior, con incrementos para la variable independiente de $\lambda\eta = 0{,}001$. Por otro lado, utilizando el método de la secante con valores iniciales para f"(0) los valores $\lambda_0 = 0{,}03$ y $\lambda_1 = 0{,}07$, utilizar el método de disparo que se detenga cuando dos aproximaciones consecutivas disten menos de una tolerancia de 10^{-6}. Empleando el valor de $\eta = 10$ para aproximar $\eta \to +\infty$. Se pide además el valor de f"(0) que satisface la condición de contorno en $\eta = 10$, así como las iteraciones necesarias para satisfacer la tolerancia.

Realizando el apartado, se obtuvo utilizando el método RK4, que el valor de f"(0) es igual a 0.33206 para satisfacer la condición de contorno impuesta, siendo necesarias un total de 6 iteraciones. Si se realiza el mismo procedimiento pero utilizando el método de Euler, se obtiene un resultado de f"(0) de 0.33168 y el mismo número de iteraciones. Por lo tanto, se puede concluir que no existe mucha diferencia entre ambos métodos, con resultados bastante similares y el mismo número de iteraciones requeridas.

Para saber cuál de los dos métodos es más exacto, simplemente hay que ver cuál satisface mejor la condición de contorno siguiente:

$$\eta \to +\infty; \qquad \frac{df}{d\eta} = 1 \tag{9}$$

Si se calcula el resultado para ambos métodos, para RK4 da un valor de 1.00000, mientras que para Euler el resultado es de 0.99965. Como RK4 aproxima mejor a 1, se puede afirmar que es más exacto.

3.3. Apartado 3

Una vez determinado el valor más exacto λ_{obt} de f"(0) en el anterior apartado, se solicita realizar un nuevo método de disparo, pero ahora partiendo de los valores iniciales $\lambda_0 = \lambda_{obt} + 10^{-2}$ y $\lambda_1 = \lambda_{obt} - 10^{-2}$ y comprobar si el número de iteraciones necesarias se reduce.

Teniendo en cuenta lo descrito, el valor que se toma de λ_{obt} será de 0.33206.

Se prosigue realizando lo mismo que anteriormente pero para los valores iniciales proporcionados en el enunciado del apartado. Así pues, para RK4 se obtiene el mismo valor (0.33206), pero con solamente 3 iteraciones. Algo similar ocurre para Euler, con un valor de 0.33188 y de nuevo, únicamente tres iteraciones. Por lo tanto, se puede concluir que sí se reducen las iteraciones, pasando de 6 iteraciones necesarias a 3.

3.4. Apartado 4

Finalmente, usando el valor de λ_{obt} y utilizando las siguientes ecuaciones:

$$u = U_\infty \frac{\partial f}{\partial \eta} \tag{10}$$

$$v = \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{U_\infty v}{x}}\right)\left(\eta\frac{\partial f}{\partial \eta} - f\right) \tag{11}$$

$$y = \eta\sqrt{\frac{vx}{U_\infty}} \tag{12}$$

Se pedía representar los perfiles de ambas velocidad (u y v) frente a y, para dos etapas en x=1 y x=2, y para los valores $U_\infty = 1\frac{m}{s}$ y $v = 1{,}3 \cdot 10^{-6}\frac{m^2}{s}$. Estimar el valor de la capa límite y compararlo con los valores teóricos, probando distintos valores de U_∞ y v.

Las gráficas obtenidas son las siguientes:

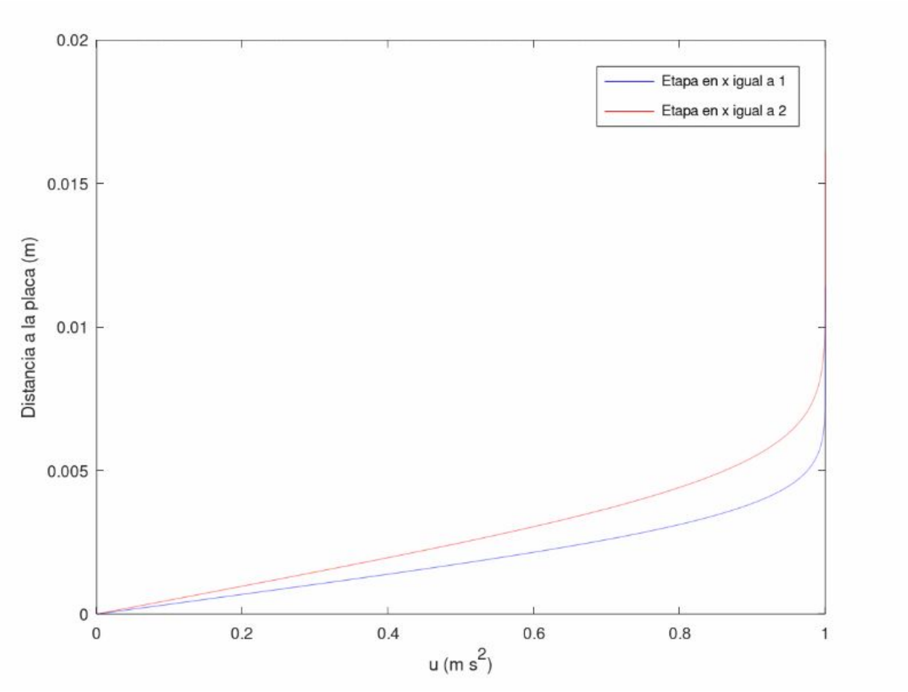

Figura 1: Perfil de u

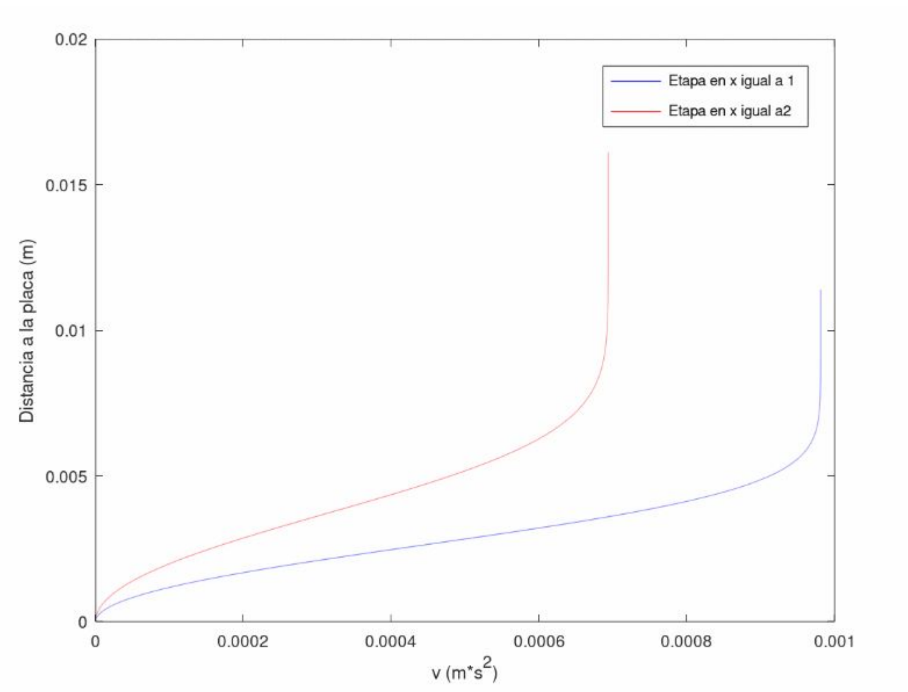

Figura 2: Perfil de v

A simple vista y de manera aproximada, se puede observar que el espesor δ de la capa límite tanto para u, como para v, para una velocidad de $U_\infty = 1\frac{m}{s}$ y para un valor de x igual a 1 tiene un valor de 0.006, un valor que es muy parecido también para x igual a 2.

Para comparar nuestros valores con valores de la literatura hemos cogido la resolución de un problema del cálculo del espesor δ de la capa límite para un Airbus $A320$ a 11000 metros de altitud, a una velocidad $U_\infty = 230\frac{m}{s}$ y con un número de Reynolds $Re = \frac{\rho VL}{\mu} = 6 \cdot 10^6$. Siendo $L_o = 10m$ y $v = 38 \cdot 10^{-6}\frac{m^2}{s}$

De manera teórica y aproximada el cálculo del espesor δ se obtiene de la siguiente manera:

$$\delta \sim L_o \frac{1}{\sqrt{Re}} \tag{13}$$

Que sustituyendo con nuestros valores obtenemos un valor de $\delta = 0{,}001$.
A continuación para comprobar si nuestro cálculo era correcto hemos cambiado el valor de U_∞ a $230\frac{m}{s}$ y $v = 38 \cdot 10^{-6}\frac{m^2}{s}$ y hemos obtenido las siguientes gráficas.

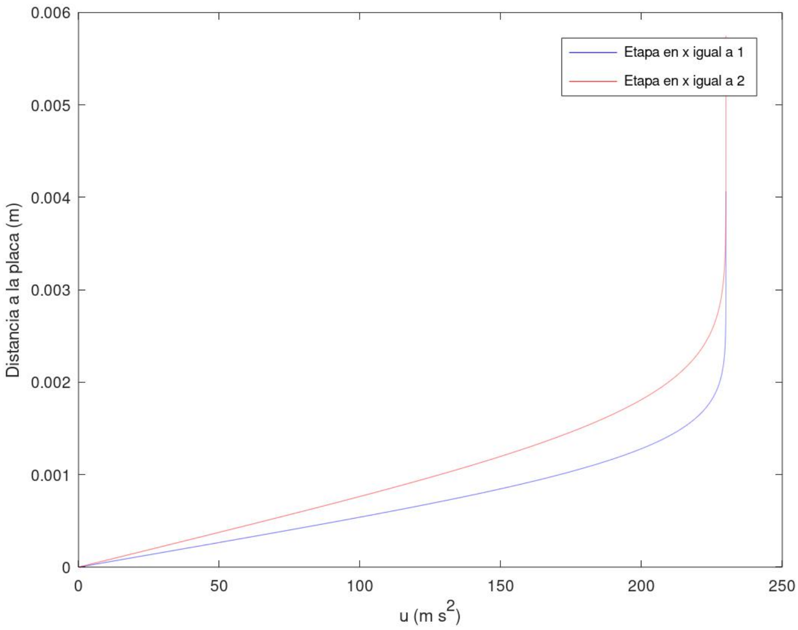

Figura 3: Perfil de u

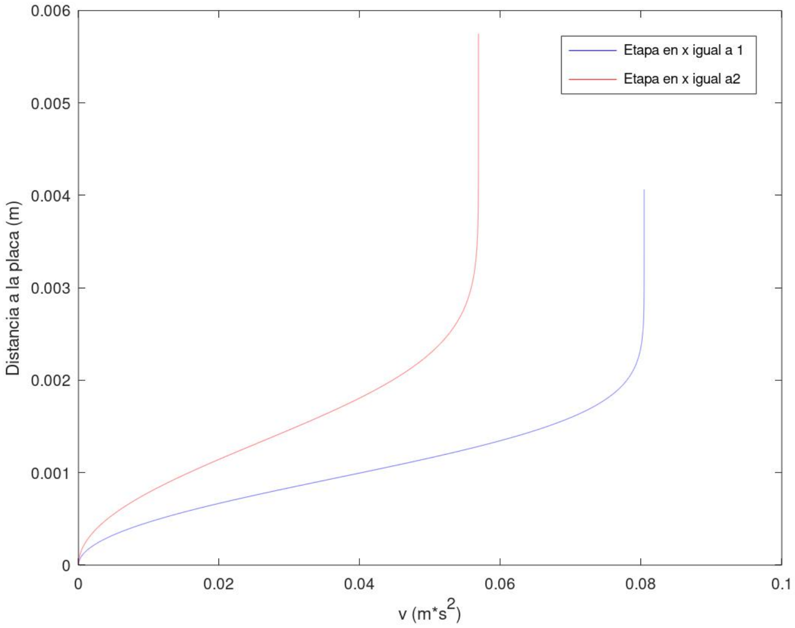

Figura 4: Perfil de v

Como se puede observar, el resultado obtenido es muy parecido al obtenido teóricamente, por lo tanto, podemos concluir que el resultado obtenido sobre el espesor de la capa límite es correcto.