



Grado en Ingeniería Aeroespacial

EQUIPOS Y SISTEMAS DE CONTROL AEROESPACIALES

CURSO 2021-2022

---

### ENTREGA 3



---

José Luis Dugo Ortega  
Elena Gallego Hernández  
Alejandro Sánchez Torres  
Álvaro Jiménez Melendo

2 de diciembre de 2021

# Índice

<b>1. Ejercicio 5: Control Lateral MIMO</b>	<b>3</b>
1.1. Introducción . . . . .	3
1.2. Control por asignación de polos (Control Modal) . . . . .	3
1.3. Control óptimo cuadrático con Filtro de Kalman (LQG) . . . . .	5
1.4. Incorporación de acción integral al control modal . . . . .	7
1.5. Dotación de acción integral del LQG . . . . .	9
1.6. Control Lateral en tiempo discreto . . . . .	10
1.6.1. Control modal en tiempo discreto y elección del período de muestreo . .	11
1.6.2. Control óptimo cuadrático con Filtro de Kalman (LQG) en tiempo discreto	13
1.6.3. Incorporación de acción integral al control modal en tiempo discreto . .	14
1.6.4. Acción integral del LQG en tiempo discreto . . . . .	15
1.6.5. Comparación de respuestas en tiempo continuo y discreto . . . . .	16
<b>2. Ejercicio 6: Control Longitudinal MIMO</b>	<b>18</b>
2.1. Introducción . . . . .	18
2.2. Control por asignación de polos (Control Modal) . . . . .	18
2.3. Control óptimo cuadrático con Filtro de Kalman (LQG) . . . . .	20
2.4. Incorporación de acción integral al control modal . . . . .	22
2.5. Dotación de acción integral del LQG . . . . .	24
2.6. Control Longitudinal en tiempo discreto . . . . .	25
2.6.1. Control modal en tiempo discreto y elección del período de muestreo . .	25
2.6.2. Control óptimo cuadrático con Filtro de Kalman (LQG) en tiempo discreto	27
2.6.3. Incorporación de acción integral al control modal en tiempo discreto . .	28
2.6.4. Acción integral del LQG en tiempo discreto . . . . .	29
2.6.5. Comparación de respuestas en tiempo continuo y discreto . . . . .	29

<b>3. Ejercicio 7: Diseño en tiempo discreto</b>	<b>32</b>
3.1. Introducción . . . . .	32
3.2. Diseño control por asignación de polos (Control Modal) en tiempo discreto . . .	32
3.3. Diseño control óptimo cuadrático con Filtro de Kalman (LQG) en tiempo discreto	34
3.3.1. Dinámica lateral . . . . .	36
3.3.2. Dinámica longitudinal . . . . .	37
3.4. Dotación de acción integral al diseño del control LQG . . . . .	38
3.4.1. Dinámica lateral . . . . .	38
3.4.2. Dinámica longitudinal . . . . .	39
3.5. Comparación con el diseño en tiempo continuo y posterior discretización . . .	40

# 1. Ejercicio 5: Control Lateral MIMO

## 1.1. Introducción

En este informe se desarrollará la quinta práctica de la asignatura haciendo uso de **Matlab** y **Simulink**.

El objetivo será diseñar un controlado MIMO (entrada múltiple y salida múltiple). Para ello se realimentará del vector de estado para el control de la dinámica lateral eligiendo en cada caso las variables controladas. Para realizar el diseño, se utilizará el control por asignación de polos, el control óptimo cuadrático y se incluirá un observador de estado para dotar al controlador de acción integral.

## 1.2. Control por asignación de polos (Control Modal)

Como en las anteriores prácticas el sistema controlable será:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Teniendo en cuenta que se cumple la ley de control:

$$u(t) = -K_C \cdot x(t) + PreC \cdot r(t)$$

El sistema en lazo cerrado y el precompensador serán:

$$\dot{x}(t) = A_{yr}x(t) + B_{yr}u(t)$$

$$y(t) = C_{yr}x(t) + D_{yr}u(t)$$

$$PreC = [C_{yr}(-A_{yr})^{-1}B + D]^{-1}$$

Cabe destacar que el precontrolador se utilizará para que polos ubicados en un lugar específico y su ganancia estacionaria sea igual a la unidad.

Al diseñar un controlador, se observa que si los polos dominantes del controlador se sitúan alejados a la izquierda del eje imaginario, los elementos de la matriz de ganancia de realimentación del estado Kc se harán grandes. Grandes valores de la ganancia Kc harán que la salida del actuador sea también grande, de manera que puede dar lugar a saturación de los actuadores.

Se utilizará los siguientes valores [-1 -2 -3 -4] para posicionar los polos. Tras realizar el diagrama de bloques en Simulink, podemos ver como quedaría este sistema sin perturbaciones ni ruidos de sensores en la Figura 1.

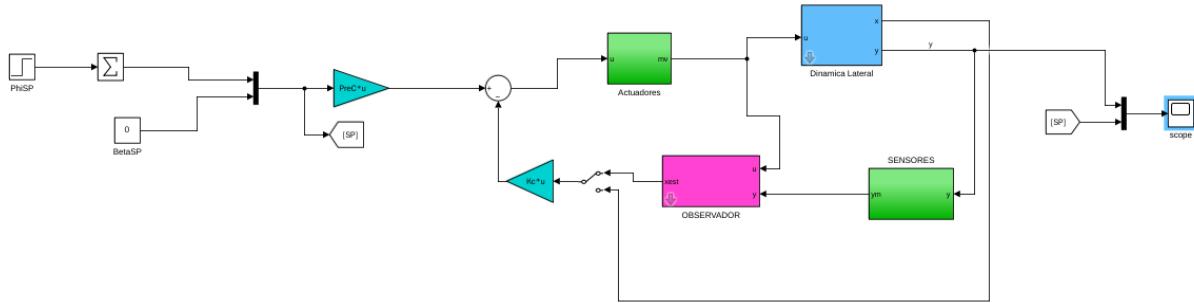


Figura 1: Control lateral con realimentación de estados ideal.

Para los set point dados, se obtiene el resultado de la Figura 2.

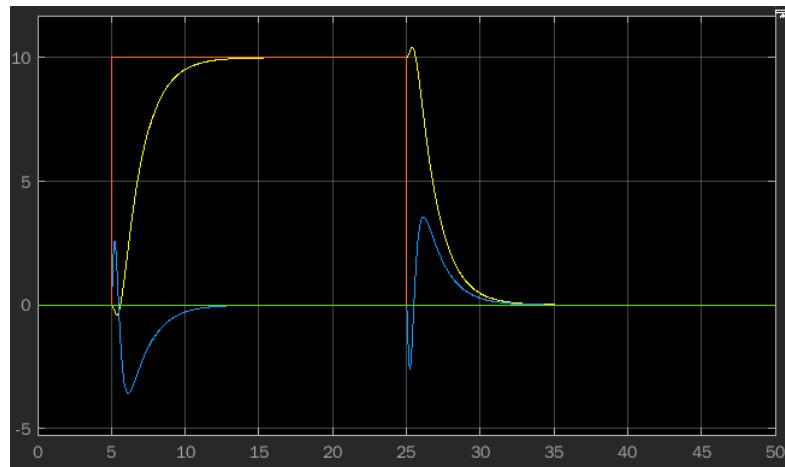


Figura 2: Scope para los valores dados sin perturbación.

Como se observa ambos sistemas convergen finalmente tras diferentes oscilaciones debidas a un pequeño deslizamiento en la aeronave que acelera y favorece al viraje.

A continuación, se realizará el mismo problema uniendo una perturbación (en el segundo 20) y sensores con ruidos (ver Figura 3).

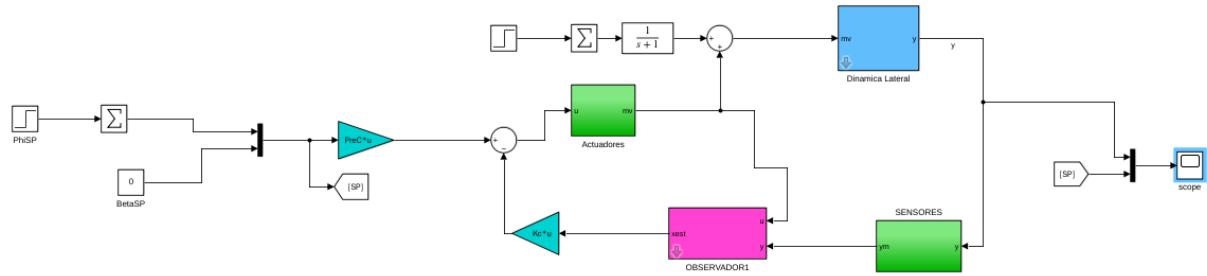


Figura 3: Diagrama para la asignación de polos (por control modal) *con perturbación y ruido de sensores.*

Utilizando los mismos setpoints se obtiene la Figura 4.

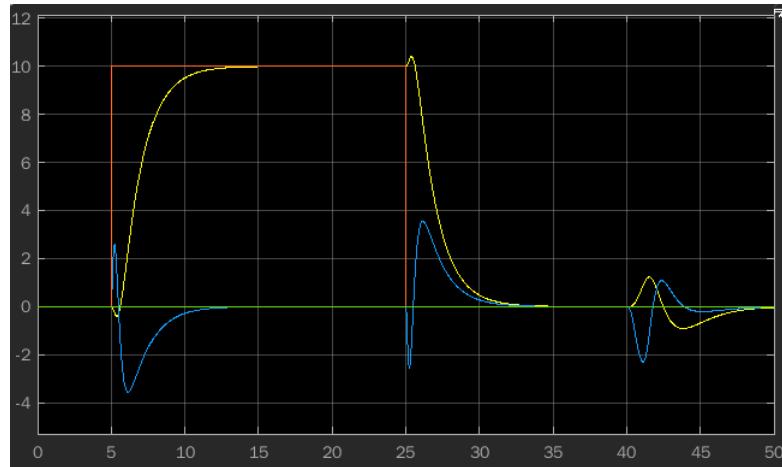


Figura 4: Scope para los ángulos dados *con ruido y perturbación.*

Igual que en caso anterior, el sistema converge tras solventar las perturbaciones y el ruido de los sensores.

### 1.3. Control óptimo cuadrático con Filtro de Kalman (LQG)

El control lineal cuadrático gaussiano (LQG) se basa en el empleo de un observador de estado óptimo o filtro de Kalman para estimar el vector de estado, además del empleo de una ley de control por realimentación de estado que se calcula como un regulador lineal cuadrático (LQR).

El comportamiento que se busca en el sistema en lazo cerrado se puede desarrollar como un problema de control óptimo, tratando de minimizar una función de coste  $J$ . Siendo:

$$J = \int_0^{\infty} [z^T(t)Q_c z(t) + u^T(t)R_c u(t)]dt = \int_0^{\infty} [x^T(t)M^T Q_c M x(t) + u^T(t)R_c u(t)]dt \quad (1)$$

donde:

- $Q_c$  y  $R_c$  son matrices de ponderación que cumplen con las especificaciones del sistema (implementadas en el script).

Durante esta parte de la práctica, se intenta obtener una ley de control óptima  $u(t)$ .

$$u(t) = -K_c x(t) \quad (2)$$

La ganancia,  $K_c$ , se calcula en Matlab empleando el comando LQR.

En una primera simulación, se utilizará los valores por defecto de las matrices  $Q_c$  y  $R_c$ .

A continuación, se presentan estos valores y su resultado mediante un Scope.

- $q_1 = 5 \cdot 10^5, q_2 = 5 \cdot 10^5, q_3 = 5 \cdot 10^5, q_4 = 5 \cdot 10^5, q_5 = 5 \cdot 10^5, q_6 = 5 \cdot 10^5$
- $r_1 = 1 \cdot 10^1, r_2 = 1 \cdot 10^1$

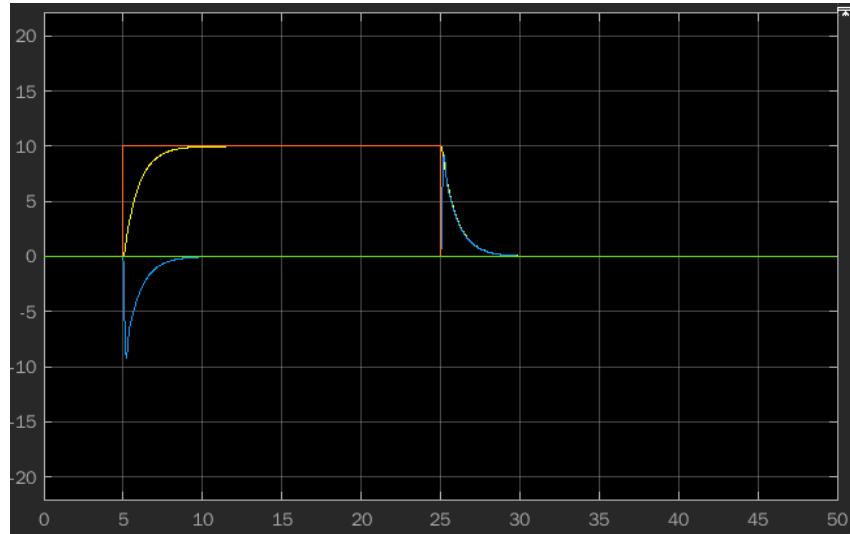


Figura 5: Respuesta del sistema para los valores de  $Q_c$  y  $R_c$  por defecto

Aumentando los valores de  $q$  y  $r$ :

- $q_1 = 8 \cdot 10^7, q_2 = 8 \cdot 10^7, q_3 = 8 \cdot 10^7, q_4 = 8 \cdot 10^7, q_5 = 8 \cdot 10^7, q_6 = 8 \cdot 10^7$

$$\cdot r_1 = 10^4, r_2 = 10^4$$

La respuesta del sistema ahora será:

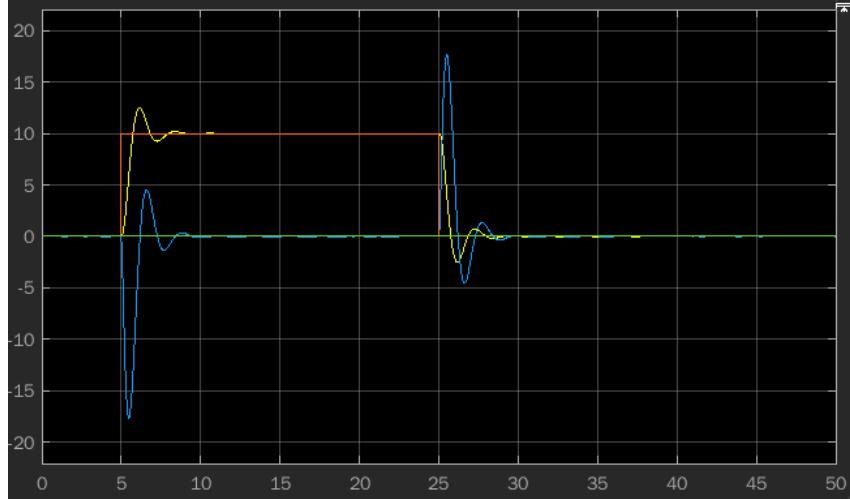


Figura 6: Respuesta del sistema para los valores de  $Q_c$  y  $R_c$  aumentados

Para concluir se observan y comparan ambas figuras. En la Figura 5, se ve una respuesta amortiguada pero con un valor mucho menor de overshoot que en la Figura 6. Al haber cambiado los valores de las matrices, aumentándolos, la respuesta ha sido peor debido a la saturación de los actuadores dando a un sistema más lento para estabilizarse. Si hubiera que elegir, nos quedaríamos con los primeros valores ya que logran un sistema con mejor comportamiento y estable en menos tiempo.

#### 1.4. Incorporación de acción integral al control modal

A continuación, se va a dotar al sistema de acción integral para su seguimiento. Se tiene la integral del error de seguimiento para la variable de estado añadida como:

$$\xi(t) = \int (r(t) - y(t))dt$$

$$\xi(t) = r(t) - y(t) = r(t) - Cx(t) - Du(t)$$

Dando lugar al sistema ampliado.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ \dot{\xi}(t) &= r(t) - Cx(t) - Du(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

La solución obtenida es óptima ya que minimiza la varianza del error de estimación del vector de estado. Por lo tanto, este observador de estado se denomina filtro de Kalman.

El observador de estado será de la forma:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= A\hat{x}(t) + Bu(t) + K_o(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \dot{\hat{y}} &= C\hat{x}(t) + Du(t)\end{aligned}$$

donde,  $K_o$  es la matriz de ganancia del observador.

Implementando esto en Simulink, quedará como en la figura 7.

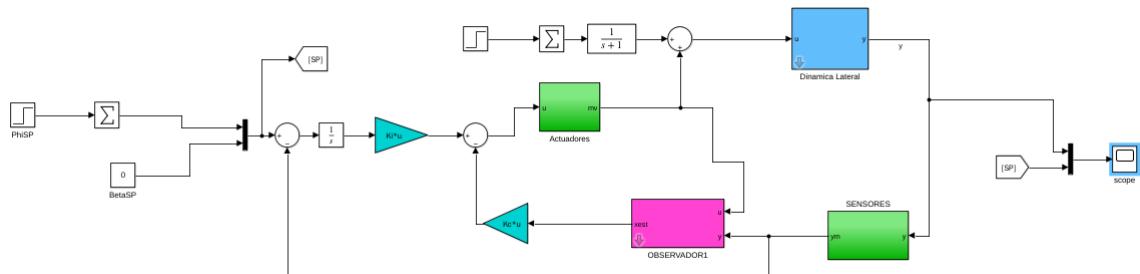


Figura 7: Diagrama de bloques con acción integral.

Análogamente, se prueban diferentes polos para el sistema.

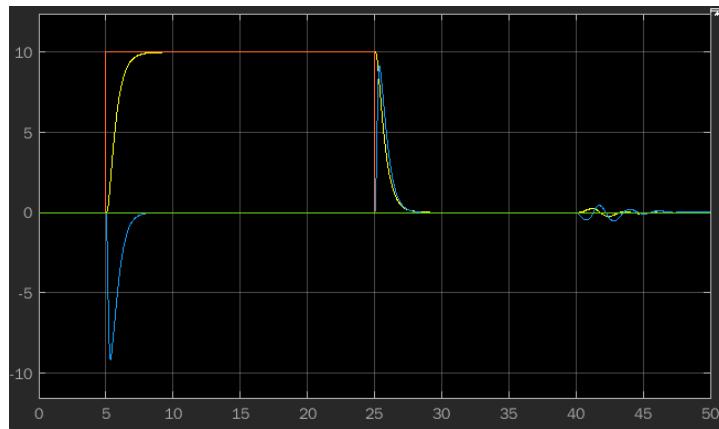


Figura 8: Resultado tras simular usando los polos  $[-1 -2 -3 -5 -5 -10]$ .

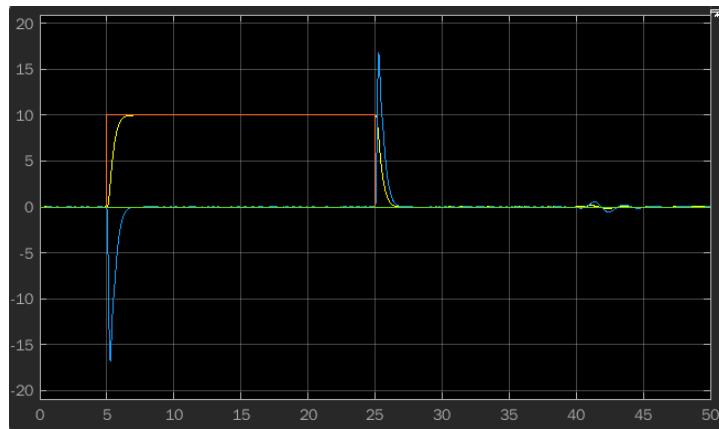


Figura 9: Resultado tras simular usando los polos  $[-3 -4 -5 -6 -7 -12]$ .

Como se puede apreciar en ambas gráficas, cuando los polos elegidos se alejan del eje imaginario aumenta la oscilación del sistema aunque finalmente se estabilizan ambos.

## 1.5. Dotación de acción integral del LQG

Finalmente, se dota al sistema con la acción integral, LQG. Esta se diferencia en dos partes, la primera resuelve el problema del control con el LQR (utilizado para el controlador) y la segunda solventa el problema del observador con el filtro de Kalman.

Análogamente se utilizan los mismos valores de los polos anteriores y los valores de  $q$  y  $r$  (ver Figuras 10 y 11).

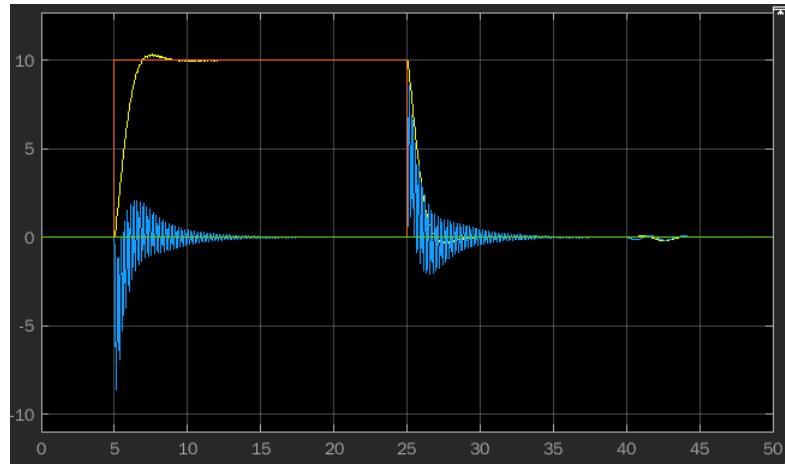


Figura 10: Resultado valores (por defecto).

Los valores serán:

- $q_1 = 8 \cdot 10^7, q_2 = 8 \cdot 10^7, q_3 = 8 \cdot 10^7, q_4 = 8 \cdot 10^7, q_5 = 8 \cdot 10^7, q_6 = 8 \cdot 10^7$
- $r_1 = 1 \cdot 10^4, r_2 = 1 \cdot 10^4$

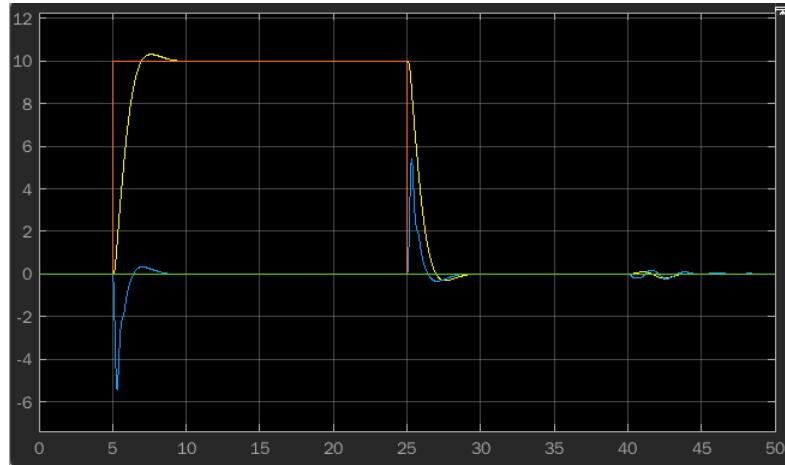


Figura 11: Resultado con los valores anteriores.

Al cambiar el valor de las componentes de las matrices de ponderación hace que el tiempo de establecimiento disminuya.

## 1.6. Control Lateral en tiempo discreto

En esta última parte de la práctica, se implementará en tiempo discreto los resultados obtenidos anteriormente.

Para la discretización se usan los métodos de Euler hacia adelante, Euler hacia atrás y el método de la Bilineal.

### 1.6.1. Control modal en tiempo discreto y elección del período de muestreo

En primer lugar, se debe realizar una discretización del observador. En este caso, se utilizará el método de Euler hacia delante. Siendo:

$$\begin{aligned}\hat{x}_{k+1} &= F\hat{x}_k + Gu_k + K_{od}(y_k - \hat{y}_k) \\ \hat{y}_k &= C\hat{x}_k + Du_k\end{aligned}$$

Sabiendo que:

$$\begin{aligned}F &= AT_m + I \\ G &= BT_m \\ K_{od} &= K_o T_m\end{aligned}$$

A continuación es importante seleccionar el periodo de muestreo  $T_m$ , que aparece tras discretizar al observador. Este se elegirá en función de la constante de tiempo menor del sistema a muestrear.

$$T_m = \frac{\tau_{min}}{100}$$

donde  $\tau_{min}$  en la dinámica lateral corresponde con  $\tau_{min} = \tau_{RC}$  (convergencia en balance) ya que es el modo más rápido.

$$T_m = \frac{\tau_{min}}{100} = \frac{1}{317} = 0,003s$$

El diagrama para la dinámica lateral quedará como:

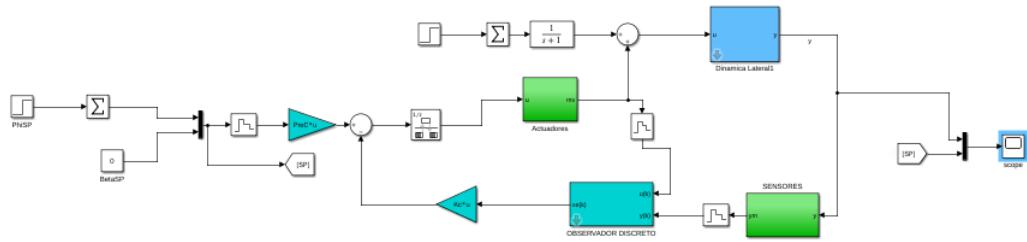


Figura 12: Diagrama de simulación en tiempo discreto.

La respuesta obtenida es:

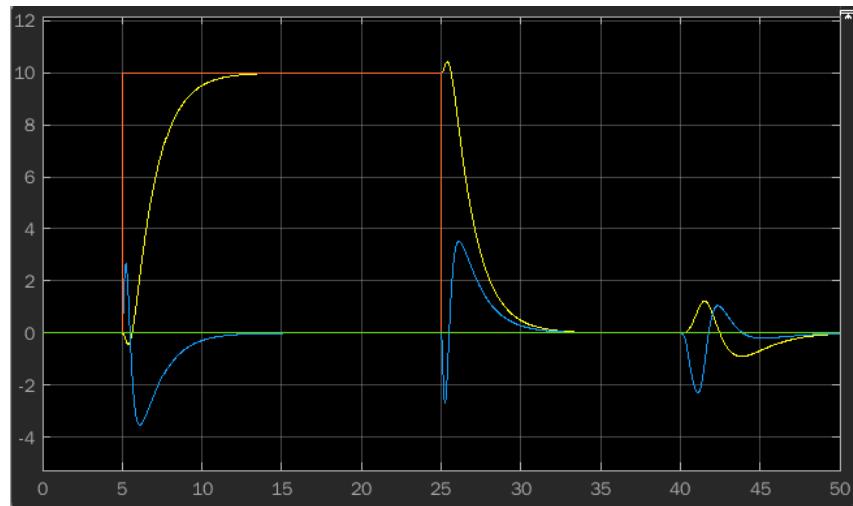


Figura 13: Respuesta de la dinámica lateral discreta.

Como se observa en la figura el comportamiento es similar al del sistema en tiempo continuo que se obtuvo con anterioridad en la práctica.

Por otro lado, se puede obtener la respuesta mediante un bloque llamado Matlab function, proporcionado por el software. Este utiliza las variables del código del script y las entradas de setpoint del sistema. Este bloque está implementado en un sistema FBW (Fly By Wire). Se presenta en la Figura 14.

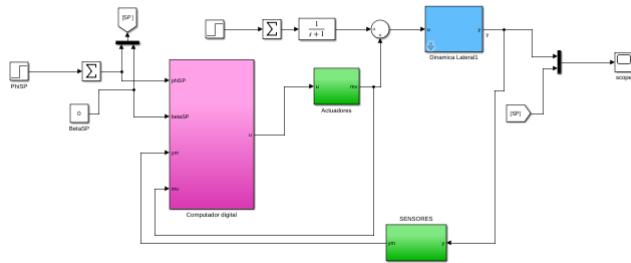


Figura 14: Diagrama de simulación FBW de la dinámica lateral en tiempo discreto

Dentro del bloque FBW aparece Matlab function:

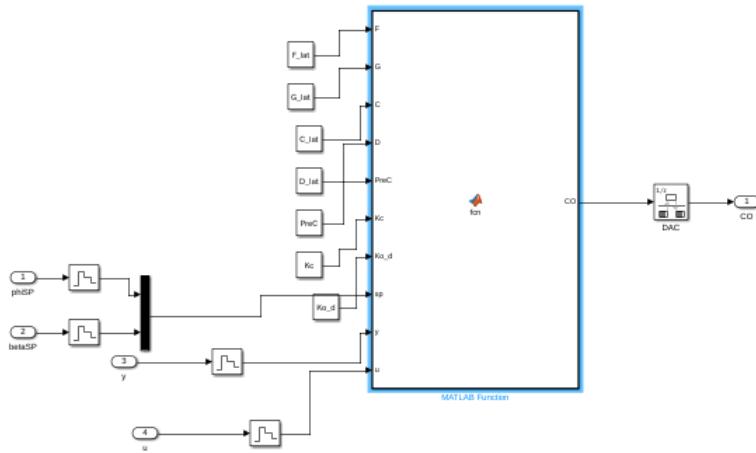


Figura 15: Bloque Matlab function de la dinámica lateral del sistema.

### 1.6.2. Control óptimo cuadrático con Filtro de Kalman (LQG) en tiempo discreto

El observador de estado óptimo o filtro de Kalman, el cual ya se explicó anteriormente para tiempo continuo, se discretiza. Las ecuaciones de un observador en tiempo continuo son:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) + K_o(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y} &= C\hat{x}(t) + Du(t)\end{aligned}$$

Se utilizará el método de Euler hacia adelante.

$$\frac{\hat{x}_{k+1} - \hat{x}_k}{T_m} \approx A\hat{x}_k + Bu_k + K_o(y_k - \hat{y}_k)$$

$$\hat{y}_k = C\hat{x}_k + Du_k$$

Por lo tanto:

$$\hat{x}_{k+1} = F\hat{x}_k + Gu_k + K_{od}(y_k - \hat{y}_k)$$

$$\hat{y}_k = C\hat{x}_k + Du_k$$

Siendo:

$$F = AT_m + I$$

$$G = BT_m$$

$$K_{od} = K_o T_m$$

Al igual que antes, se tomarán los valores de las matrices  $Q_c$  y  $R_c$  por defecto.

$$\cdot q_1 = 5 \cdot 10^5, q_2 = 5 \cdot 10^5, q_3 = 5 \cdot 10^5, q_4 = 5 \cdot 10^5$$

$$\cdot r_1 = 1 \cdot 10^1, r_2 = 1 \cdot 10^1$$

Se obtiene la respuesta del sistema.

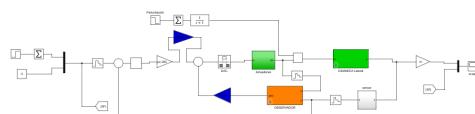


Figura 16: Respuesta control lateral en tiempo discreto.

### 1.6.3. Incorporación de acción integral al control modal en tiempo discreto

En este apartado se incorporará acción integral al control modal. La idea es analizar la respuesta al introducir acción integral en tiempo discreto y se podrá observar la diferencia con respecto al tiempo continuo. Esta diferencia se analizará en el último apartado.

El diagrama de bloques queda de la siguiente forma:

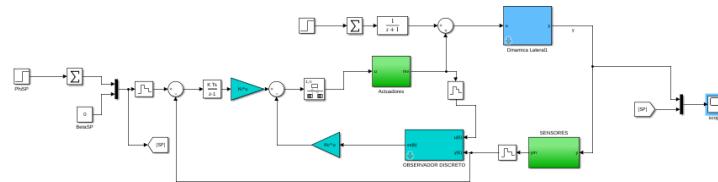


Figura 17: Diagrama de bloques control lateral con acción integral para tiempo discreto.

El resultado se representa en la Figura 18.

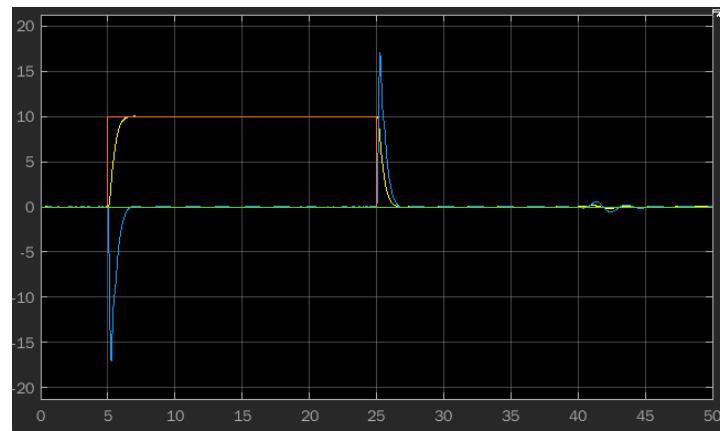


Figura 18: Respuesta control lateral acción integral tiempo discreto.

La respuesta se asemeja bastante al comportamiento obtenido de forma continua.

#### 1.6.4. Acción integral del LQG en tiempo discreto

Al igual, se pasará este sistema a tiempo discreto y se podrá observar la diferencia con respecto al tiempo continuo. Como ya se ha comentado, las comparaciones se desarrollarán en el siguiente subapartado.

Y su respuesta:

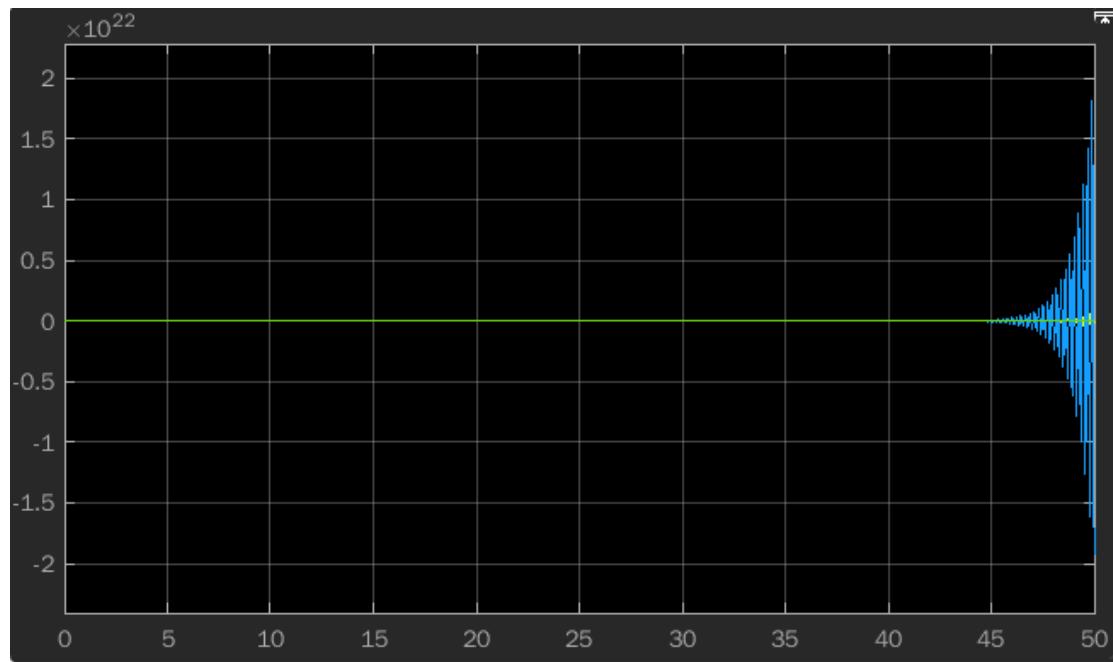


Figura 19: Respuesta del sistema.

#### 1.6.5. Comparación de respuestas en tiempo continuo y discreto

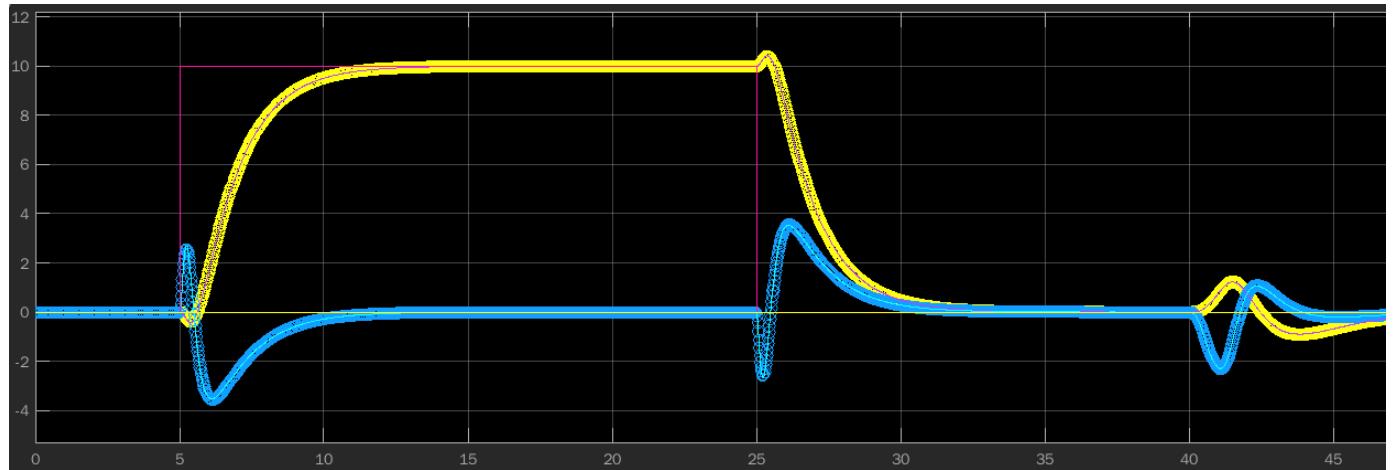


Figura 20: Comparativa modal.

En este figura se muestra la comparativa para el observador modal.

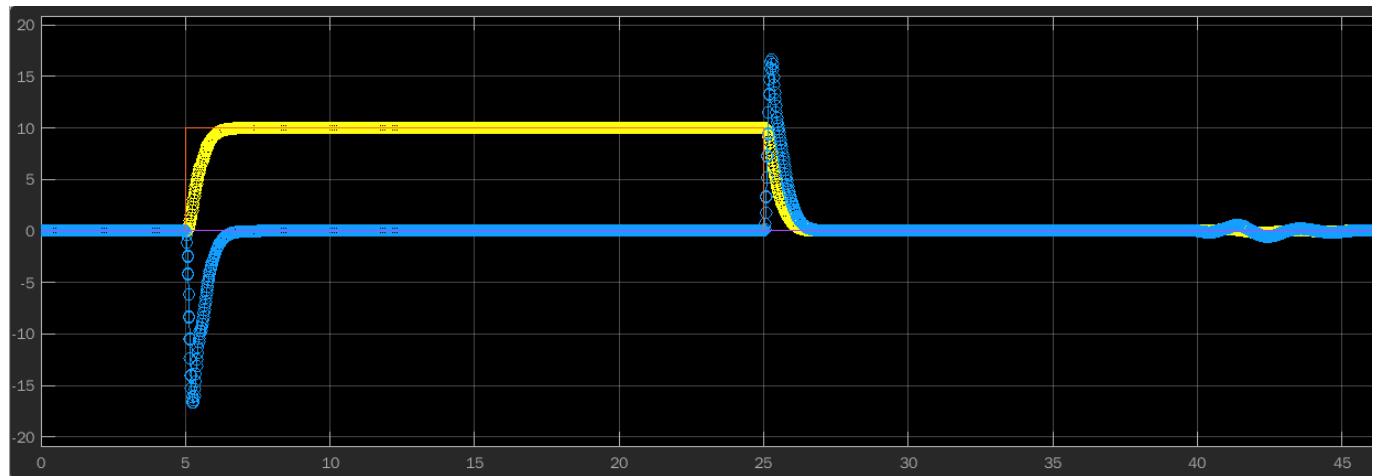


Figura 21: Comparativa con acción integral.

Y finalmente, la comparativa con acción integral.

## 2. Ejercicio 6: Control Longitudinal MIMO

### 2.1. Introducción

En este informe se desarrollará la quinta práctica de la asignatura haciendo uso de **Matlab** y **Simulink**.

El objetivo será diseñar un controlado MIMO (entrada múltiple y salida múltiple). Para ello se realimentará del vector de estado para el control de la dinámica longitudinal eligiendo en cada caso las variables controladas. Para realizar el diseño, se utilizará el control por asignación de polos, el control óptimo cuadrático y se incluirá un observador de estado para dotar al controlador de acción integral.

### 2.2. Control por asignación de polos (Control Modal)

En esta práctica, se realizarán procesos análogos a la anterior aunque en este caso se trabaja con la dinámica longitudinal. Al igual, el sistema controlable será:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Teniendo en cuenta que se cumple la ley de control:

$$u(t) = -K_C \cdot x(t) + PreC \cdot r(t)$$

El sistema en lazo cerrado y el precompensador serán:

$$\dot{x}(t) = A_{yr}x(t) + B_{yr}u(t)$$

$$y(t) = C_{yr}x(t) + D_{yr}u(t)$$

$$PreC = [C_{yr}(-A_{yr})^{-1}B + D]^{-1}$$

Cabe destacar que el precontrolador se utilizará para que polos ubicados en un lugar específico y su ganancia estacionaria sea igual a la unidad.

Al diseñar un controlador, se observa que si los polos dominantes del controlador se sitúan alejados a la izquierda del eje imaginario, los elementos de la matriz de ganancia de realimentación del estado Kc se harán grandes. Grandes valores de la ganancia Kc harán que la salida del actuador sea también grande, de manera que puede dar lugar a saturación de los actuadores.

Se utilizará los siguientes valores [-1 -3 -4 -8 ] para posicionar los polos. Tras realizar el diagrama de bloques en Simulink, podemos ver como quedaría este sistema sin perturbaciones ni ruidos de sensores en la Figura 22.

A continuación se plantea un sistema con actuadores sin perturbaciones ni ruidos como se puede ver en la Figura 22. Se ha realizado con SetPoint de 15(m/s) en la velocidad y un ángulo de 7º en el ángulo de cabeceo como se puede observar en la Figura 23.

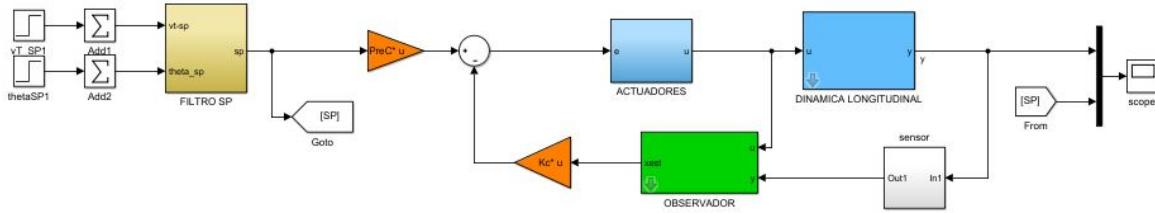


Figura 22: Simulación asignación de polos (por control modal) con actuadores sin perturbación ni ruido de sensores.

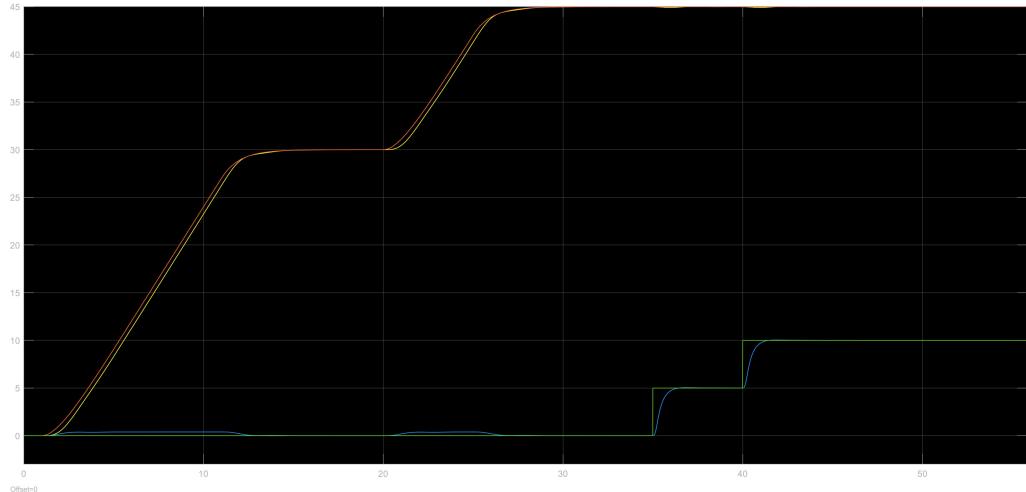


Figura 23: Control modal sin perturbación.

Se puede comprobar que se producen pequeñas fluctuaciones aunque finalmente consiguen converger al SetPoint deseado.

Por último se incluye una perturbación en el segundo 45 y el ruido de sensores como se puede ver en la Figura 24.

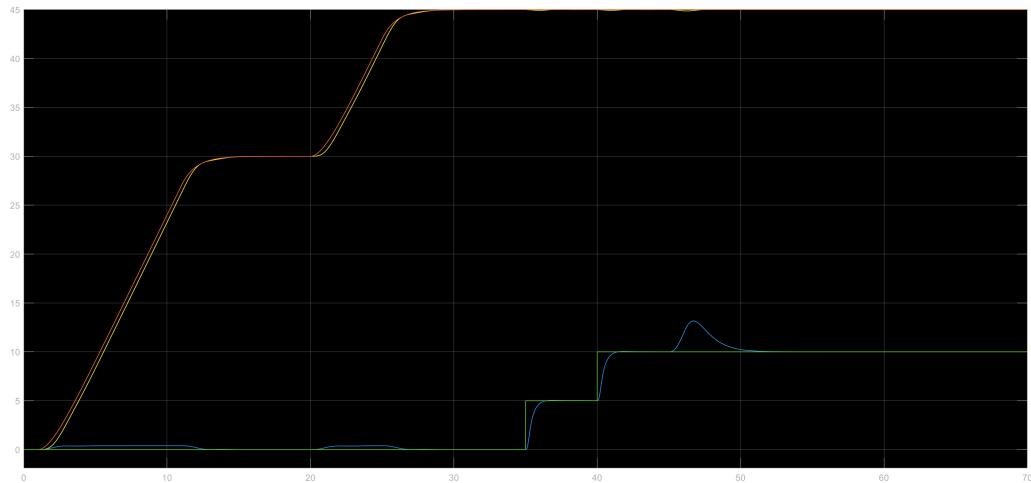


Figura 24: Control modal con perturbación.

### 2.3. Control óptimo cuadrático con Filtro de Kalman (LQG)

El control lineal cuadrático gaussiano (LQG) se basa en el empleo de un observador de estado óptimo o filtro de Kalman para estimar el vector de estado, además del empleo de una ley de control por realimentación de estado que se calcula como un regulador lineal cuadrático (LQR).

El comportamiento que se busca en el sistema en lazo cerrado se puede desarrollar como un problema de control óptimo, tratando de minimizar una función de coste  $J$ . Siendo:

$$J = \int_0^{\infty} [z^T(t)Q_c z(t) + u^T(t)R_c u(t)]dt = \int_0^{\infty} [x^T(t)M^T Q_c M x(t) + u^T(t)R_c u(t)]dt \quad (3)$$

donde:

- $Q_c$  y  $R_c$  son matrices de ponderación que cumplen con las especificaciones del sistema (implementadas en el script).

Durante esta parte de la práctica, se intenta obtener una ley de control óptima  $u(t)$ .

$$u(t) = -K_c x(t) \quad (4)$$

La ganancia,  $K_c$ , se calcula en Matlab empleando el comando LQR.

En una primera simulación, se utilizará los valores por defecto de las matrices  $Q_c$  y  $R_c$ .

A continuación, se presentan estos valores y su resultado mediante un Scope.

- $q_1 = 5 \cdot 10^5, q_2 = 5 \cdot 10^5, q_3 = 5 \cdot 10^5, q_4 = 5 \cdot 10^5$
- $r_1 = 1 \cdot 10^4, r_2 = 1 \cdot 10^4$

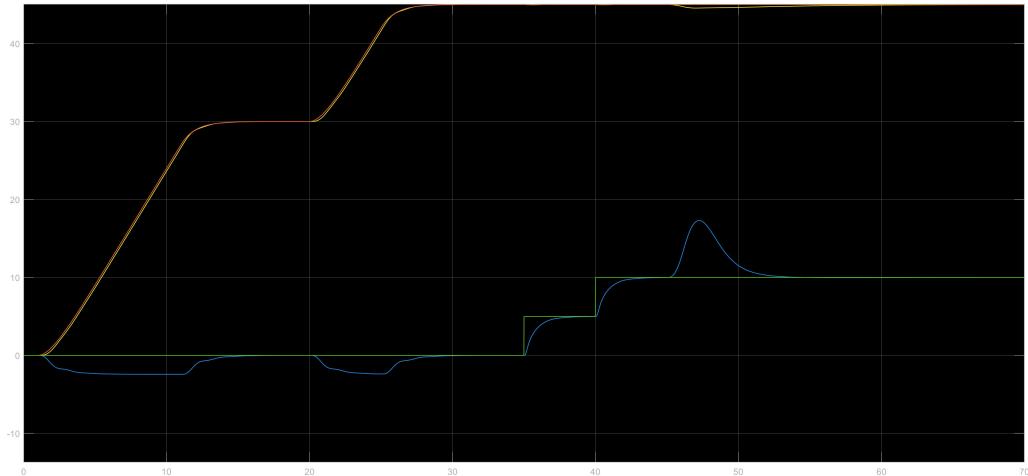


Figura 25: Resultado del scope.

Análogamente,

- $q_1 = 8 \cdot 10^7, q_2 = 8 \cdot 10^7, q_3 = 8 \cdot 10^7, q_4 = 8 \cdot 10^7$
- $r_1 = 5 \cdot 10^4, r_2 = 5 \cdot 10^4$

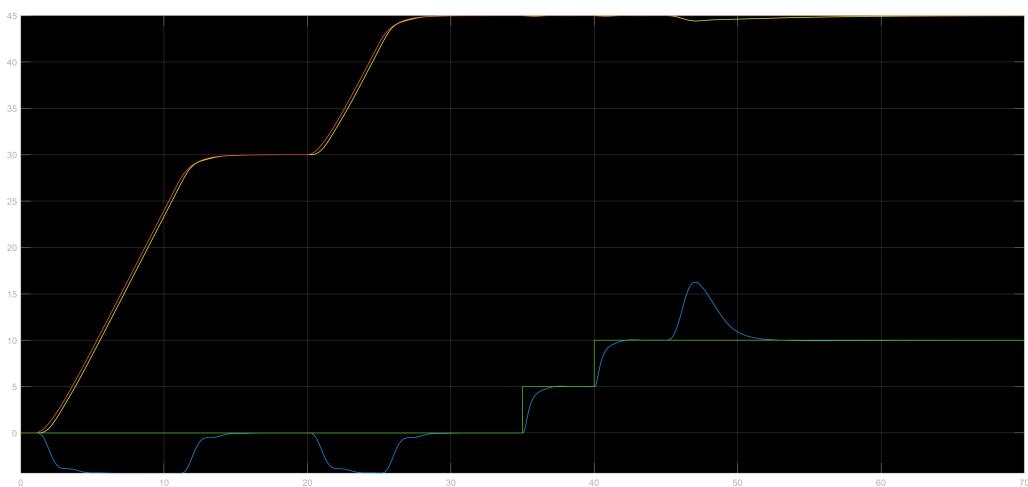


Figura 26: Resultado del scope para otros datos.

Realizando este cambio, el tiempo de establecimiento disminuya. Colateralmente, al aumentar el valor de las matrices puede ser perjudicial ya que aumenta el tiempo de saturación del elevador de cola.

## 2.4. Incorporación de acción integral al control modal

A continuación, se va a dotar al sistema de acción integral para su seguimiento. Se tiene la integral del error de seguimiento para la variable de estado añadida como:

$$\xi(t) = \int (r(t) - y(t))dt$$

$$\xi(t) = r(t) - y(t) = r(t) - Cx(t) - Du(t)$$

Dando lugar al sistema ampliado.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ \dot{\xi}(t) &= r(t) - Cx(t) - Du(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

La solución obtenida es óptima ya que minimiza la varianza del error de estimación del vector de estado. Por lo tanto, este observador de estado se denomina filtro de Kalman.

El observador de estado será de la forma:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= A\hat{x}(t) + Bu(t) + K_o(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \dot{\hat{y}} &= C\hat{x}(t) + Du(t)\end{aligned}$$

donde,  $K_o$  es la matriz de ganancia del observador.

Implementando esto en Simulink, quedará como en la figura

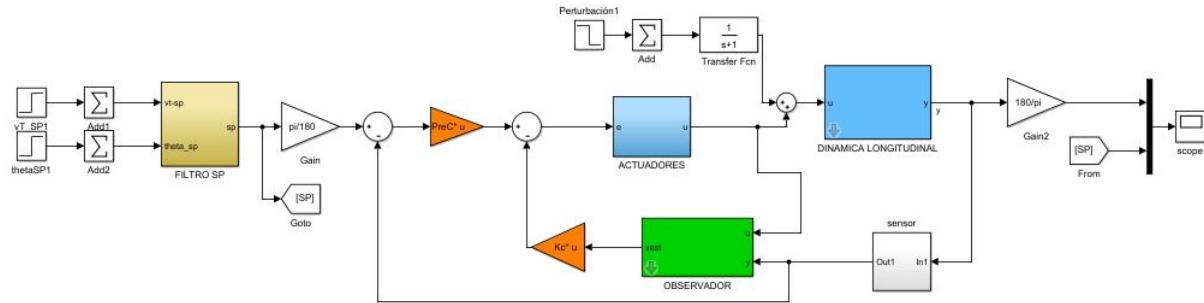


Figura 27: Diagrama acción integral.

A continuación, se comparan los resultados obtenidos variando los polos. En la Figura 28 y 29 se observan las respuestas mediante Scope.

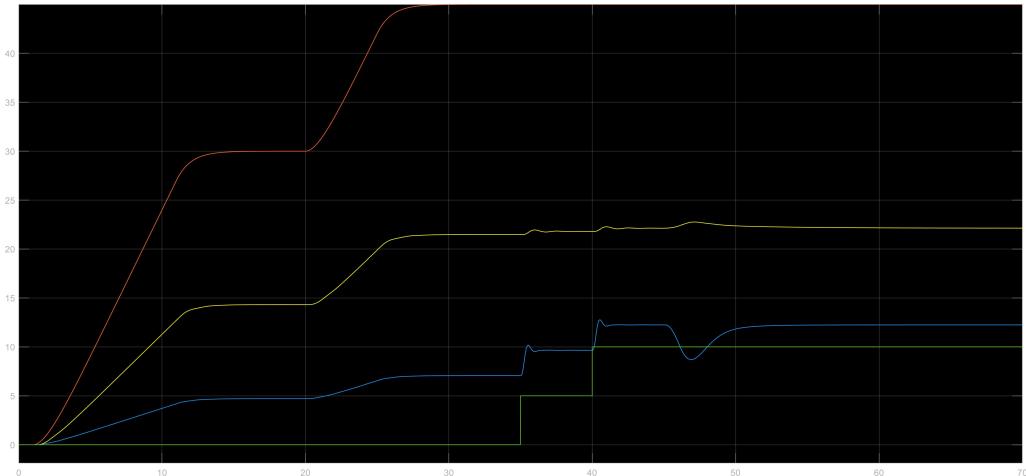


Figura 28: Control modal con acción integral sin perturbación.

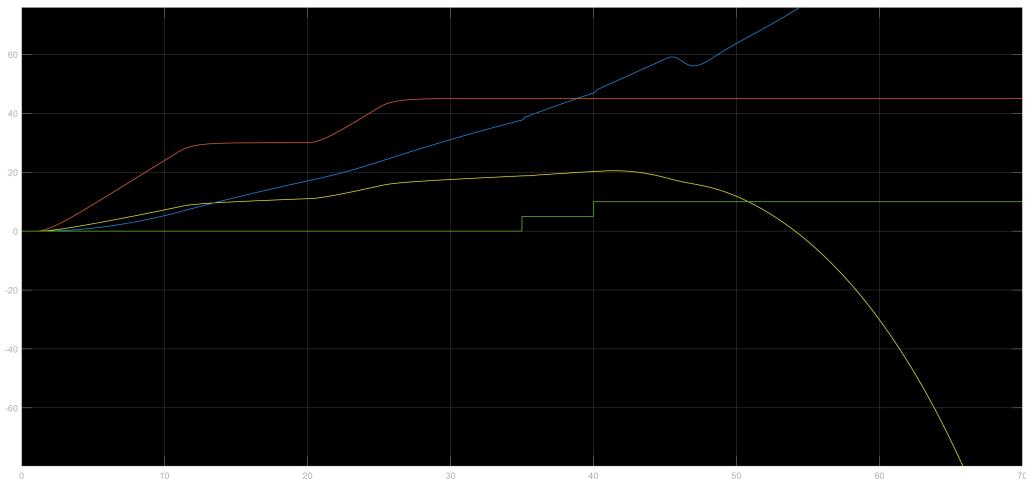


Figura 29: Control modal con acción integral con perturbación.

Comparando ambas, se observa como los primeros polos ya proporcionados dan una respuesta estable. Sin embargo, con los elegidos por nosotros el sistema es totalmente inestables. Esto se debe a las limitaciones de los actuadores ya que se saturan con diferentes valores de polos.

## 2.5. Dotación de acción integral del LQG

Finalmente, se dota al sistema con la acción integral, LQG. Esta se diferencia en dos partes, la primera resuelve el problema del control con el LQR (utilizado para el controlador) y la segunda solventa el problema del observador con el filtro de Kalman.

Análogamente se utilizan los mismos valores de los polos anteriores y los valores de  $q$  y  $r$  (ver Figuras 30).

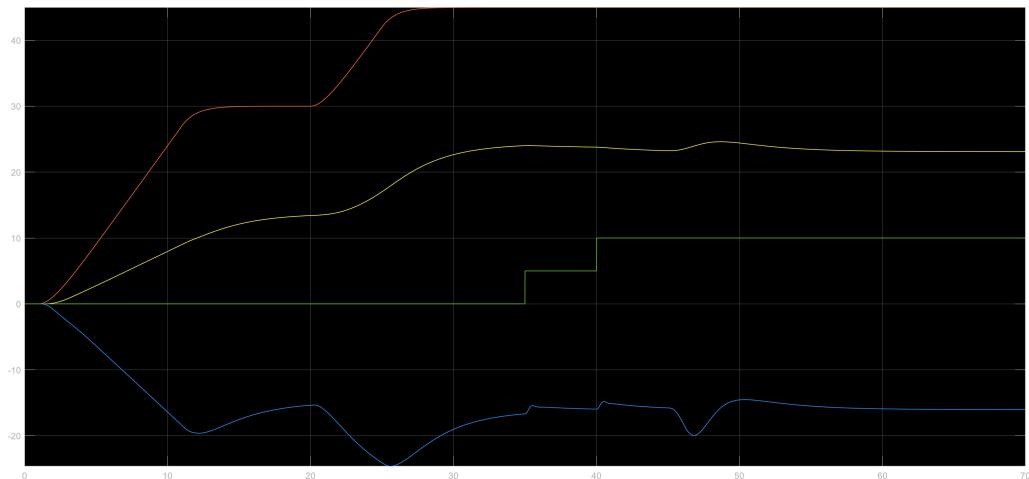


Figura 30: Respuesta del sistema con acción integral

## 2.6. Control Longitudinal en tiempo discreto

En este apartado, de forma similar a lo realizado al final de la práctica 5, se implementarán los datos obtenidos en la práctica 6 de forma discreta.

Para ello, se utilizarán de nuevo los métodos de Euler hacia adelante, Euler hacia atrás y el método de la Bilineal para discretizar el sistema.

### 2.6.1. Control modal en tiempo discreto y elección del período de muestreo

En primer lugar, se realizará de nuevo la discretización del observador empleando el método de Euler hacia delante. Siendo:

$$\begin{aligned}\hat{x}_{k+1} &= F\hat{x}_k + Gu_k + K_{od}(y_k - \hat{y}_k) \\ \hat{y}_k &= C\hat{x}_k + Du_k\end{aligned}$$

Sabiendo que:

$$\begin{aligned}F &= AT_m + I \\ G &= BT_m \\ K_{od} &= K_o T_m\end{aligned}$$

A continuación es importante seleccionar el periodo de muestreo  $T_m$ , que aparece tras discretizar al observador. Este se elegirá en función de la constante de tiempo menor del sistema a muestrear.

$$T_m = \frac{\tau_{min}}{100}$$

donde  $\tau_{min}$  en la dinámica longitudinal corresponde con  $\tau_{min} = \tau_{SP}$  (corto período) ya que es el modo más rápido.

$$T_m = \frac{\tau_{min}}{100} = \frac{1}{317} = 0,003s$$

El diagrama para la dinámica longitudinal quedará como:

Figura 31: Diagrama de simulación longitudinal en tiempo discreto.

Tras haber realizado la simulación de la dinámica lateral, se realizará la de la dinámica longitudinal variando el diagrama de simulación de la figura 12 de dinámica lateral por longitudinal.

Al igual que en el caso anterior, también se puede simular utilizando el bloque Matlab function, pero en este caso se ha optado por el diagrama de simulación de simulink, obteniendo como respuesta de la dinámica longitudinal del sistema en tiempo discreto:

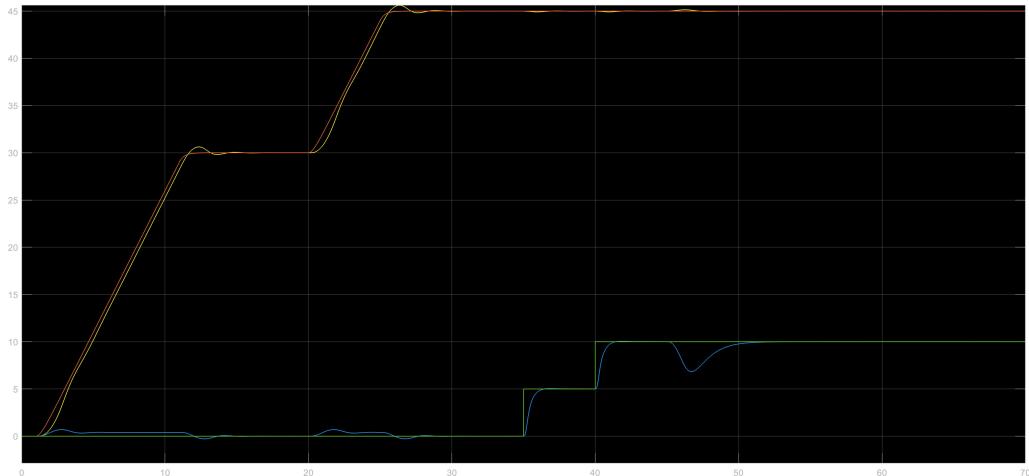


Figura 32: Respuesta de la dinámica longitudinal discreta.

Como se observa en la figura el comportamiento es similar al del sistema en tiempo continuo que se obtuvo con anterioridad en la práctica.

### 2.6.2. Control óptimo cuadrático con Filtro de Kalman (LQG) en tiempo discreto

El observador de estado óptimo o filtro de Kalman, se discretizará de igual forma que para el problema 5, partiendo de las ecuaciones de un observador en tiempo continuo:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) + K_o(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y} &= C\hat{x}(t) + Du(t)\end{aligned}$$

Se utilizará el método de Euler hacia adelante:

$$\begin{aligned}\frac{\hat{x}_{k+1} - \hat{x}_k}{T_m} &\approx A\hat{x}_k + Bu_k + K_o(y_k - \hat{y}_k) \\ \hat{y}_k &= C\hat{x}_k + Du_k\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\hat{x}_{k+1} &= F\hat{x}_k + Gu_k + K_{od}(y_k - \hat{y}_k) \\ \hat{y}_k &= C\hat{x}_k + Du_k\end{aligned}$$

Siendo:

$$\begin{aligned}F &= AT_m + I \\ G &= BT_m \\ K_{od} &= K_o T_m\end{aligned}$$

Al igual que antes, se tomarán los valores de las matrices  $Q_c$  y  $R_c$  por defecto.

$$\cdot q_1 = 5 \cdot 10^7, q_2 = 5 \cdot 10^7, q_3 = 5 \cdot 10^7, q_4 = 8 \cdot 10^7$$

$$\cdot r_1 = 1 \cdot 10^4, r_2 = 1 \cdot 10^4$$

Se obtiene la respuesta del sistema.

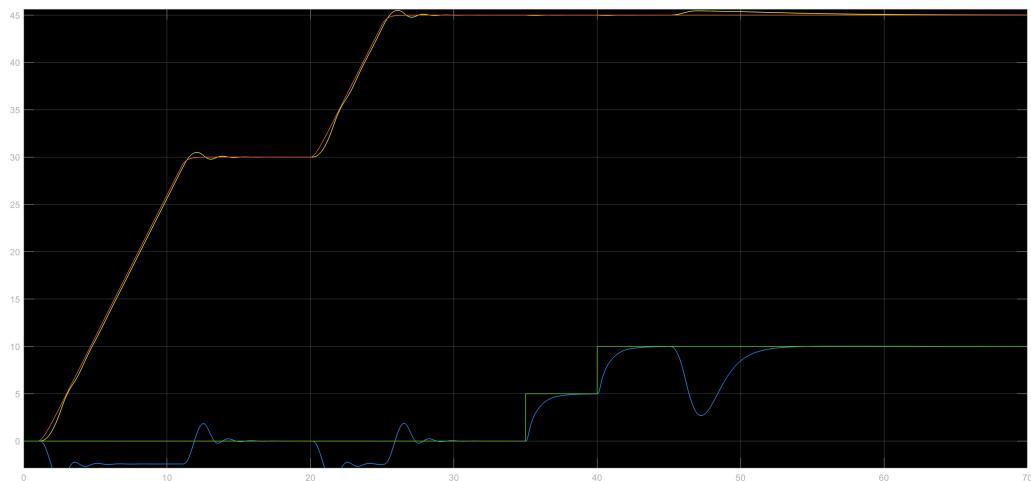


Figura 33: Respuesta control longitudinal en tiempo discreto.

### 2.6.3. Incorporación de acción integral al control modal en tiempo discreto

En este apartado se incorporará nuevamente acción integral al control modal. La idea es analizar la respuesta al introducir acción integral en tiempo discreto y se podrá observar la diferencia con respecto al tiempo continuo. Esta diferencia se analizará en el último apartado.

El diagrama de bloques queda de la siguiente forma:

Figura 34: Diagrama de bloques control longitudinal con acción integral para tiempo discreto.

El resultado se representa en la Figura 35.

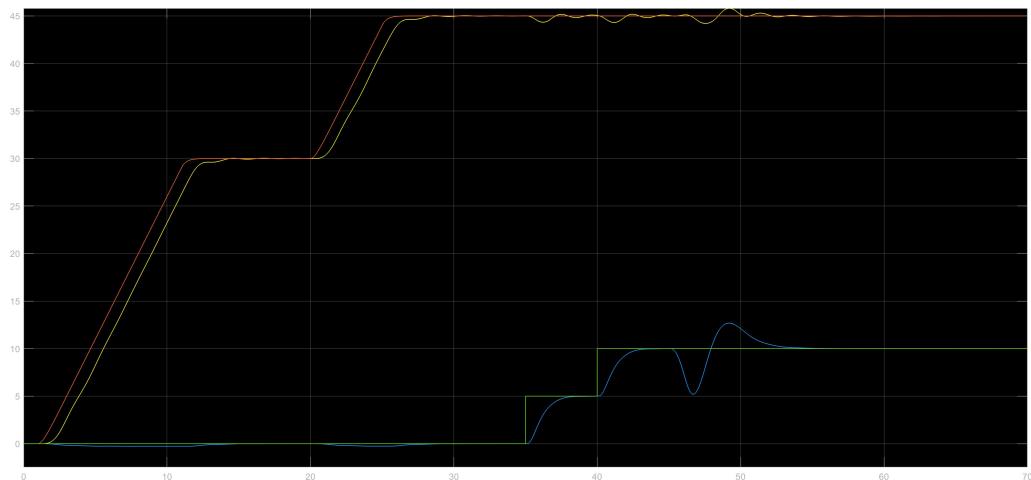


Figura 35: Respuesta control longitudinal acción integral tiempo discreto.

La respuesta se asemeja bastante al comportamiento obtenido de forma continua.

#### 2.6.4. Acción integral del LQG en tiempo discreto

En este apartado se incorporará acción integral al control LQG diseñado anteriormente. La idea, nuevamente, es analizar la respuesta al introducir acción integral, en este caso en tiempo discreto y se podrá observar la diferencia con respecto al tiempo continuo, la cual se analizará en el último apartado 2.6.5.

Ahora se observará el comportamiento de la dinámica longitudinal del sistema. El diagrama de bloques implementado en Simulink para resolver el control longitudinal discreto será el correspondiente con la Figura 36.

Figura 36: Diagrama de simulación dinámica longitudinal para LQG y acción integral en tiempo discreto

Y su respuesta:

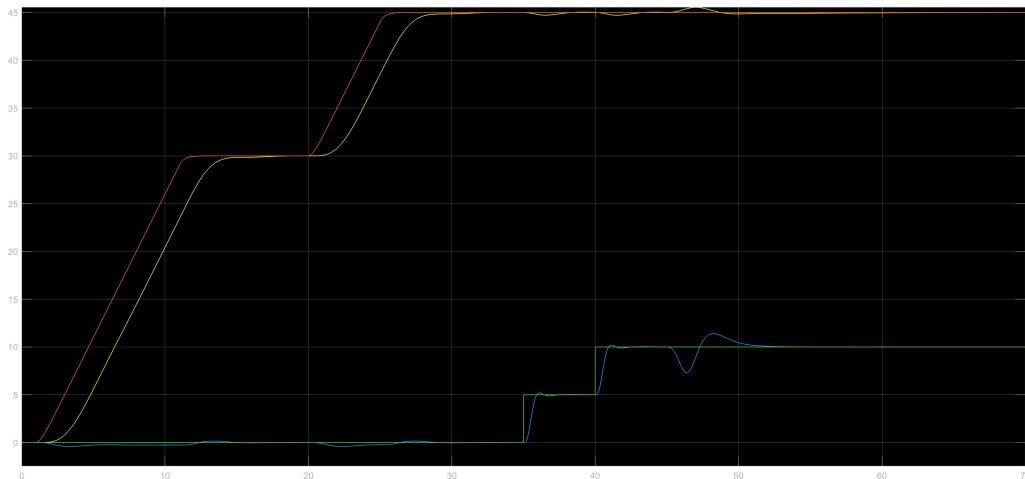


Figura 37: Respuesta del sistema.

#### 2.6.5. Comparación de respuestas en tiempo continuo y discreto

Para este último apartado, se realizarán las comparaciones entre continuo y discreto, para el control modal y el LQG, con y sin acción modal:

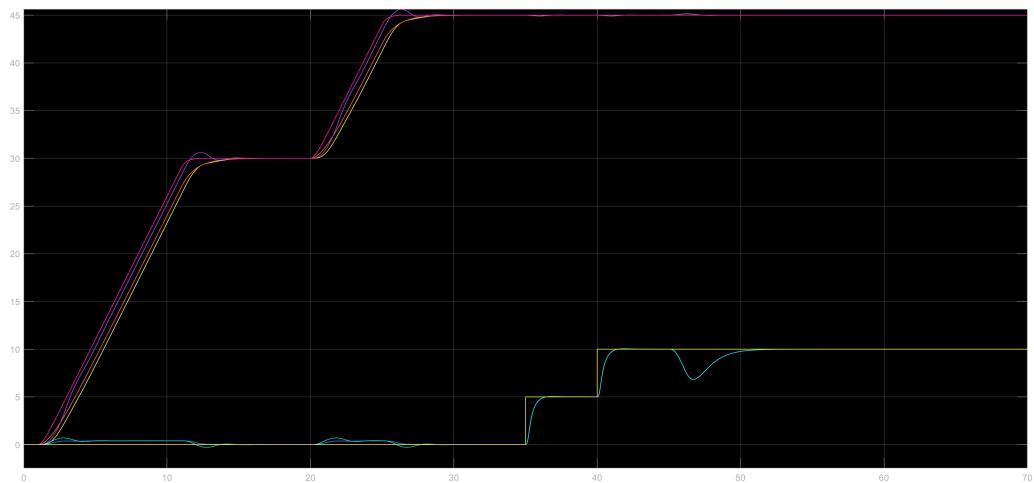


Figura 38: Comparación control modal continuo-discreto.

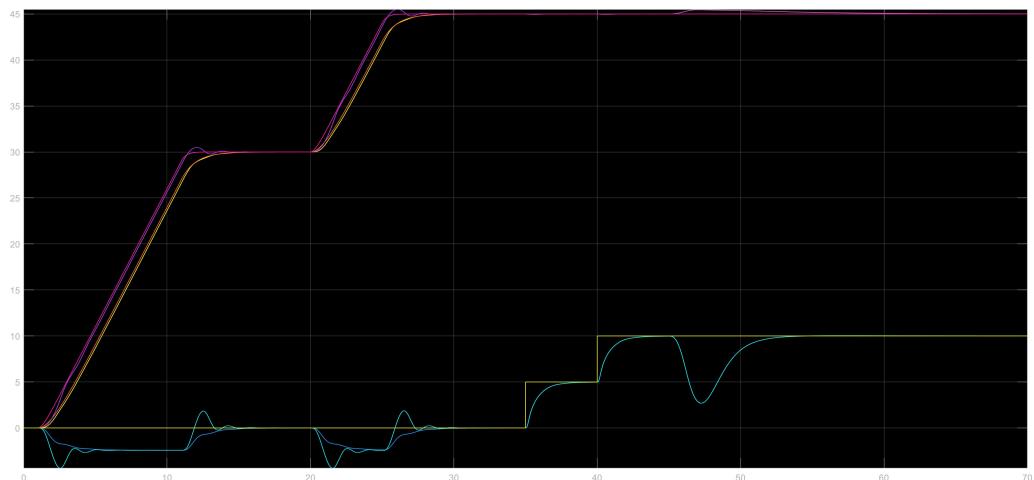


Figura 39: Comparación LQG continuo-discreto.

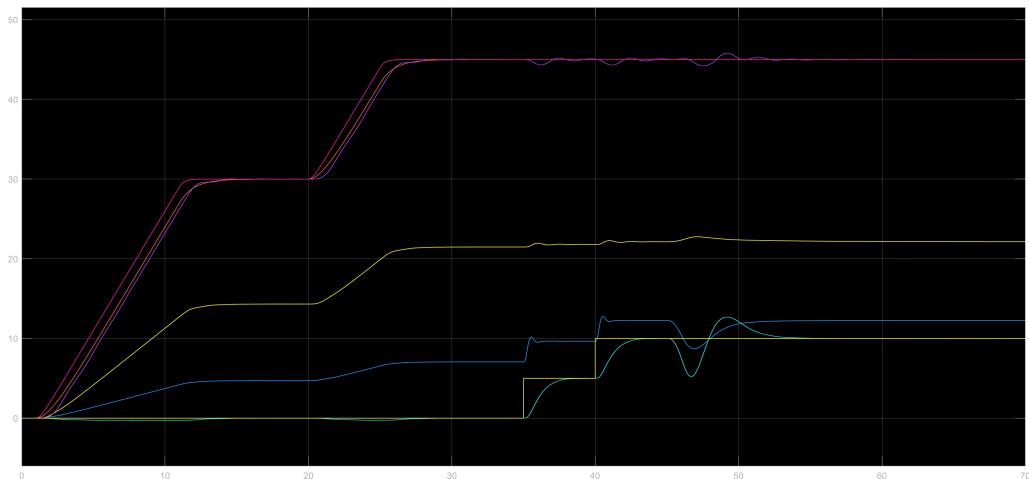


Figura 40: Comparación control modal con acción integral continuo-discreto.

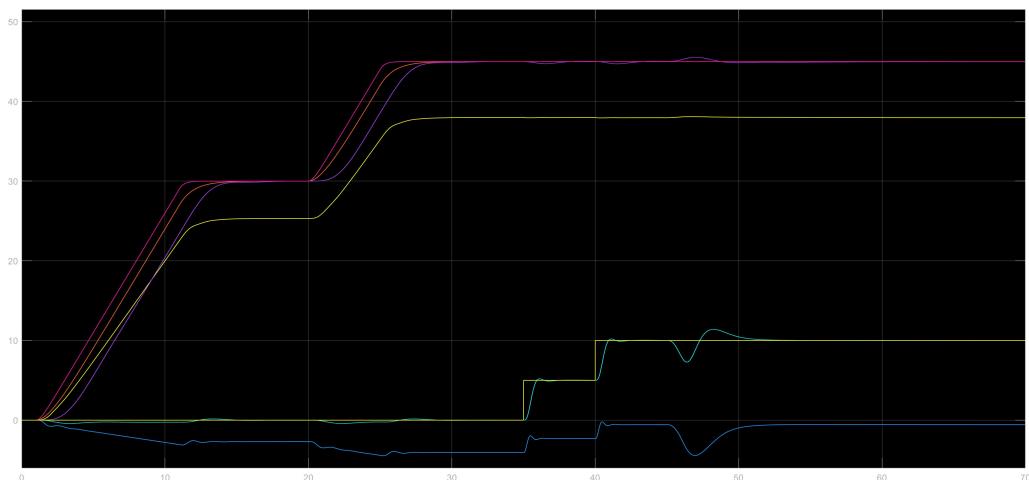


Figura 41: Comparación LQG con acción integral continuo-discreto.

Como puede observarse analizando las gráficas comparativas anteriores, para todos los casos, se puede apreciar gran similitud entre las respuestas continuas y discretas, ajustándose perfectamente las discretizaciones a las respuestas continuas.

### 3. Ejercicio 7: Diseño en tiempo discreto

#### 3.1. Introducción

En el siguiente informe se recogen las explicaciones y actividades del problema siete de la asignatura *Equipos y Sistemas De Control Aeroespacial* correspondiente al primer semestre del cuarto curso del *Grado en Ingeniería Aeroespacial*.

En esta ocasión se trata de realizar el diseño del controlador lateral y longitudinal de los ejercicios 5 y 6 utilizando métodos de diseño para tiempo discreto.

Para realizar lo descrito, se tiene que justificar la elección del período de muestreo, obtener el observador discreto (versión predictor), obtener el controlador en tiempo discreto (también con acción integral), realizar una comparativa de resultados y simular la implementación en un entorno digital.

#### 3.2. Diseño control por asignación de polos (Control Modal) en tiempo discreto

En este caso para realizar el diseño de control por asignación de polos será un procedimiento similar al utilizado en los problemas 5 y 6, pero en este caso introduciendo las matrices del sistema que pertenecen a nuestro sistema en tiempo discreto.

La estabilidad en el sistema es un punto clave y dicha estabilidad depende principalmente de los polos. Para que nuestro sistema sea estable se han seleccionado los polos del controlador con valor  $[-1, -3, -4, -8]$ , se cogen cuatro polos porque el sistema tiene 4 estados. Los polos del observador un valor correspondiente al doble de los polos utilizados para el controlador. Para pasar los polos del plano s al plano z se ha utilizado la expresión 6:

$$z = e^{(Tm \cdot s)} \quad (5)$$

El tiempo de muestreo se suele escoger en función de la mínima constante de tiempo del sistema a muestrear, en este caso el tiempo de muestreo escogido se corresponde con 0.003.

$$T_m = t_{min}/100 \quad (6)$$

A diferencia del ejercicio en tiempo continuo el precompensador se definirá por la expresión 7, aparece una matriz identidad:

$$PreC = [C(I - F)^{(-1)}G + D]^{(-1)} \quad (7)$$

El sistema representado en Simulink con los valores y diseños de controlador y observador realizados en Matlab será el mostrado en la Figura 42.

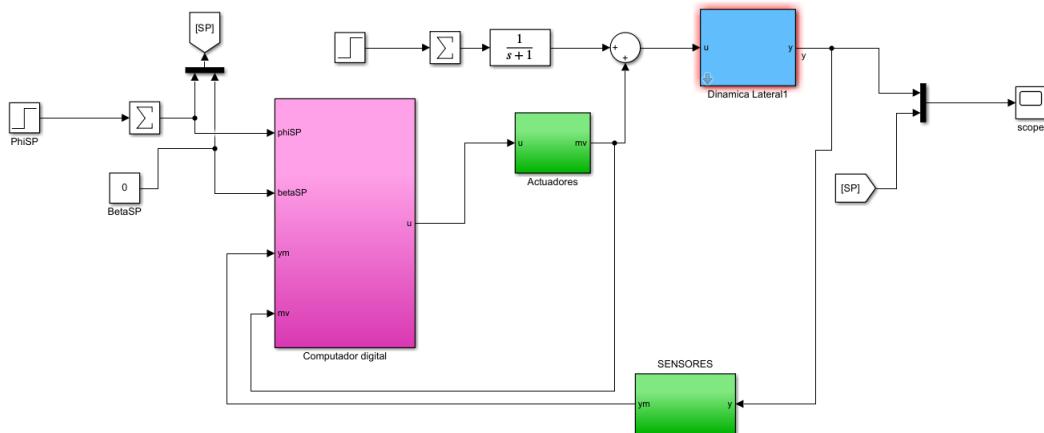


Figura 42: Diagrama de bloques control discreto con actuadores

Se puede observar en la Figura 42 el diagrama de bloques es bastante parecido al utilizado en los problemas anteriores. A continuación en la Figura 43 se observa la respuesta obtenida:

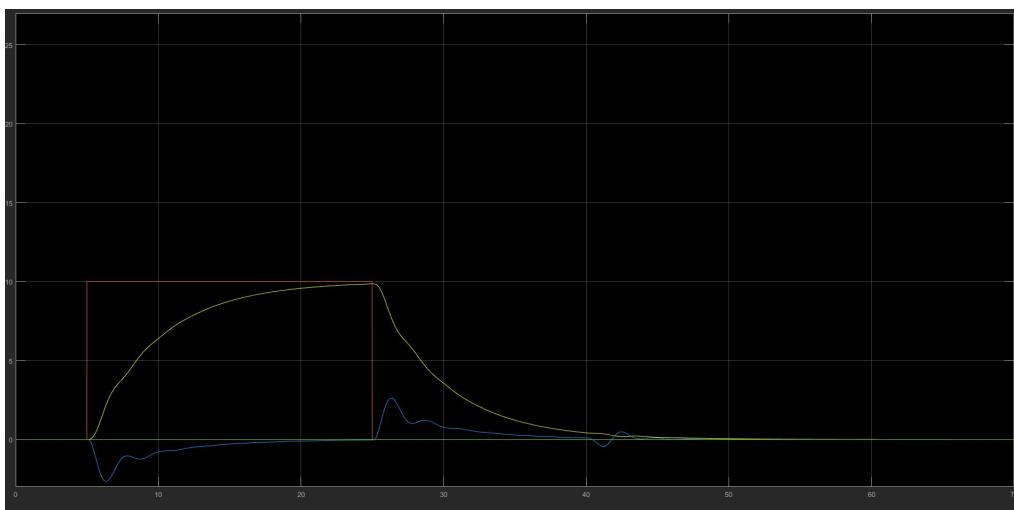


Figura 43: Respuesta del sistema discreto con actuadores

En la Figura 44 se muestra como se han introducido los actuadores y de esta forma el sistema estará mas cerca de un sistema real.

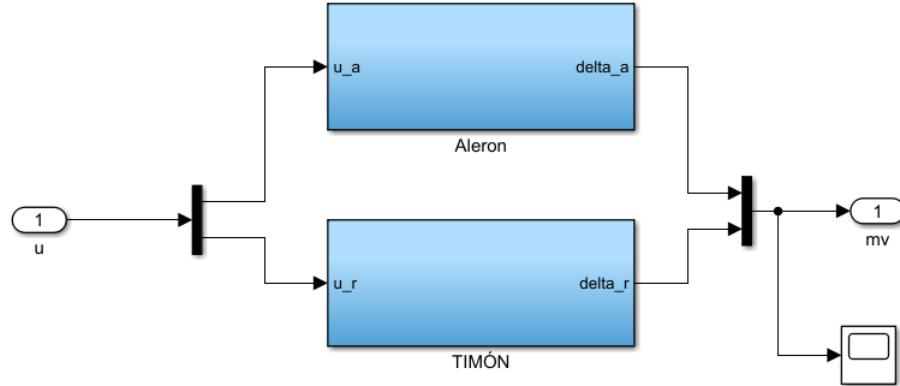


Figura 44: Diagrama de bloques actuador

### 3.3. Diseño control óptimo cuadrático con Filtro de Kalman (LQG) en tiempo discreto

En este apartado se diseñara un controlador usando el método LQG en tiempo discreto. El procedimiento es similar al realizado en los problemas 5 y 6, pero en este caso, introduciendo las matrices del sistema ya discretizadas.

El primer paso que hay que realizar es la discretización de las matrices del sistema. Un sistema en tiempo continuo viene dado por:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

Si para discretizar empleamos, por ejemplo, el método de Euler hacia adelante obtenemos:

$$\begin{aligned}\frac{x_{k+1} - x_k}{T_m} &\approx Ax_k + Bu_k \\ y_k &= Cx_k + Du_k\end{aligned}$$

Despejando:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= Fx_k + Gu_k \\ y_k &= Cx_k + Du_k\end{aligned}$$

Donde:

$$\begin{aligned}F &= AT_m + I \\ G &= BT_m\end{aligned}$$

donde  $T_m = 0,003$ s por el mismo criterio seguido en toda la práctica.

Además, el precompensador en tiempo discreto viene dado por:

$$PreC = [C(I - F)^{(-1)}G + D]^{(-1)} \quad (8)$$

Una vez que se tiene el sistema discretizado, se tienen que calcular las ganancias del observador y el controlador con el método LQG. Para ello se utiliza el siguiente código:

```
Kc_a = dlqr(F_lon_a,G_lon_a,Qc,Rc);
Ko_d = dlqe(F_lon,G_lon,C_lon,V1,V2);
```

Figura 45: Comando empleado para obtener las ganancias Kc y Ko

Como se observa en la figura, en este caso para la dinámica lateral, los comandos empleados para obtener las ganancias son *dlqe* y *dlqr*, que son similares a los empleados en tiempo continuo, pero añadiendo la letra d (discrete). En este caso se emplean las matrices ya discretizadas (F,G,C,D) y tanto las matrices de ponderación (Qc y Rc) como las varianzas ( $V_1$  y  $V_2$ ) son las mismas que en tiempo continuo.

Después de haber realizado la discretización del sistema, y haber implementado el método LQG en tiempo discreto, se pasa a realizar la simulación en Simulink tanto de la dinámica lateral como de la longitudinal del sistema.

### 3.3.1. Dinámica lateral

En primer lugar se simulará la dinámica lateral, para la cual se usará el siguiente diagrama de simulación:

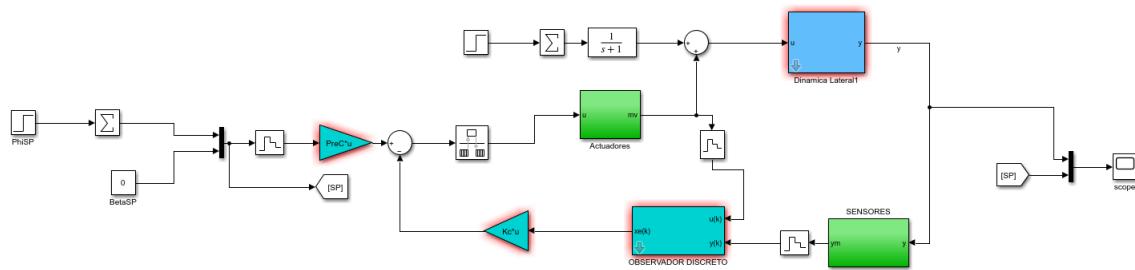


Figura 46: Diagrama de simulación dinámica lateral LQG

El resultado obtenido en el scope tras simular este diagrama viene dado por:

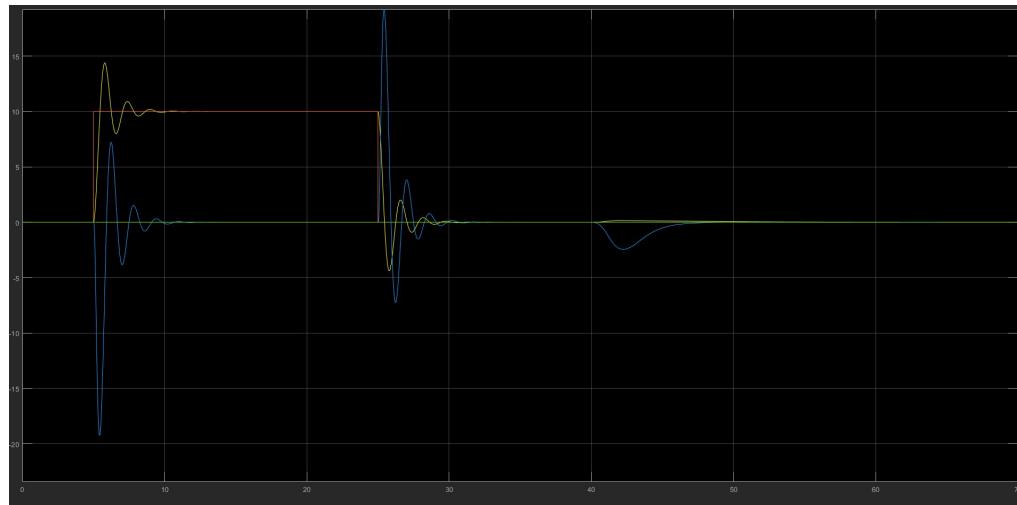


Figura 47: Respuesta de la dinámica lateral del sistema con LQG

Como se observa en la figura 47, se produce un overshoot muy elevado, debido a un cambio de SP en la velocidad muy brusco. Si este SP tuviese un filtro el overshoot sería menor.

### 3.3.2. Dinámica longitudinal

Ahora, se realiza lo mismo pero con la dinámica longitudinal. El diagrama de simulación empleado en este caso es el siguiente:

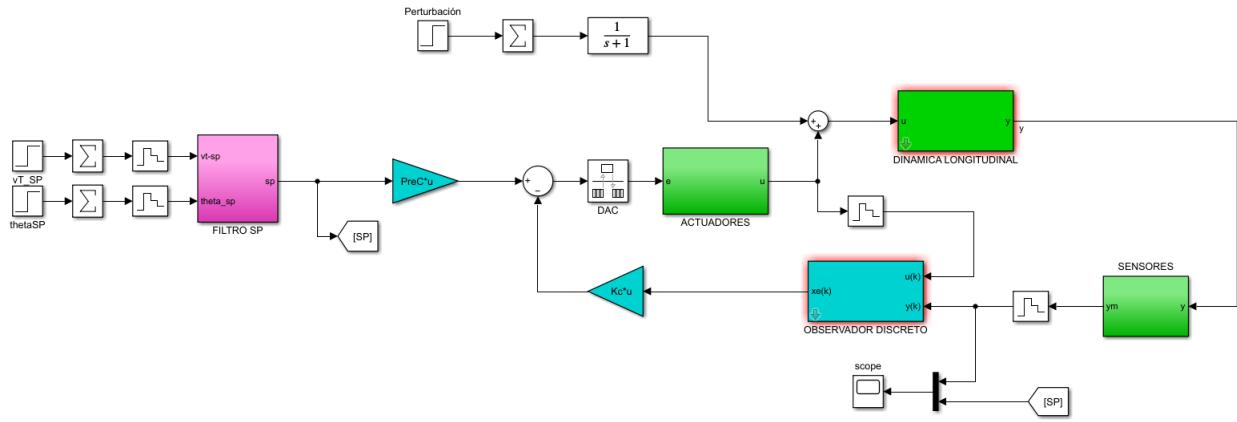


Figura 48: Diagrama de simulación dinámica longitudinal LQG

El resultado obtenido en el scope tras simular este diagrama viene dado por:

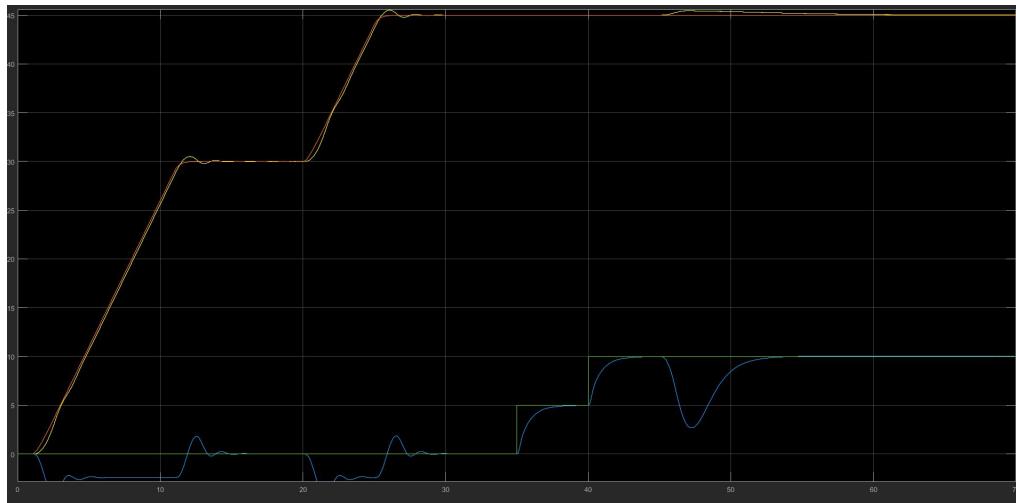


Figura 49: Respuesta de la dinámica longitudinal del sistema con LQG

### 3.4. Dotación de acción integral al diseño del control LQG

En este apartado se incorporará acción integral al control LQG diseñado en el apartado anterior. La idea es analizar la respuesta al introducir acción integral como ocurría en los problemas 5 y 6 pero en este caso en tiempo discreto y se podrá observar la diferencia con respecto al tiempo continuo, la cual se analizará en el apartado 4.5

#### 3.4.1. Dinámica lateral

El diagrama de bloques para resolver el control lateral en tiempo discreto se muestra en la figura 50.

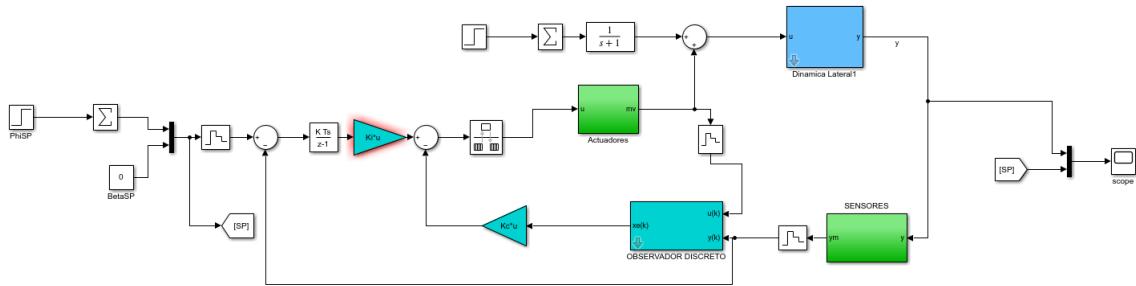


Figura 50: Diagrama de simulación del control lateral en tiempo discreto

A continuación se muestra el resultado obtenido en la figura 51

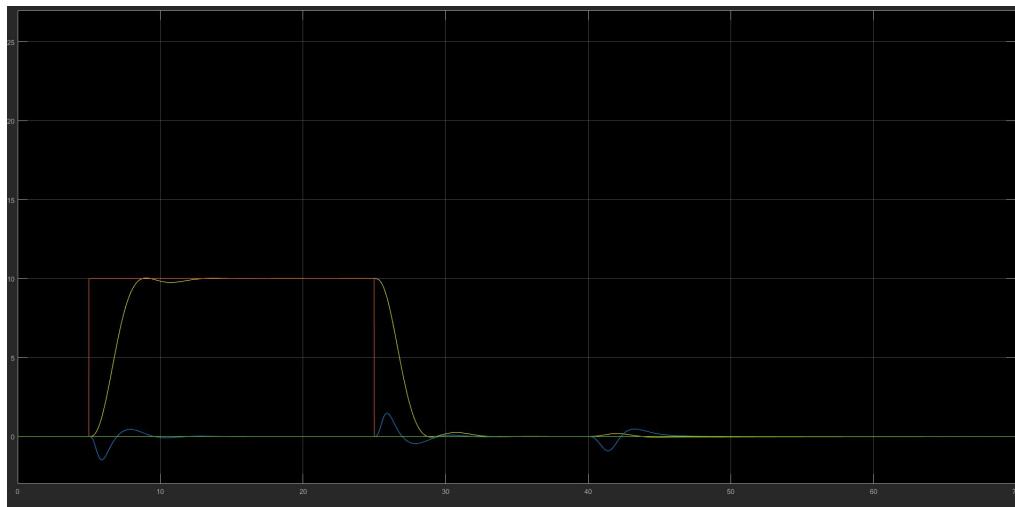


Figura 51: Respuesta control lateral en tiempo discreto

### 3.4.2. Dinámica longitudinal

El diagrama de bloques para resolver el control longitudinal en tiempo discreto se muestra en la figura 52.

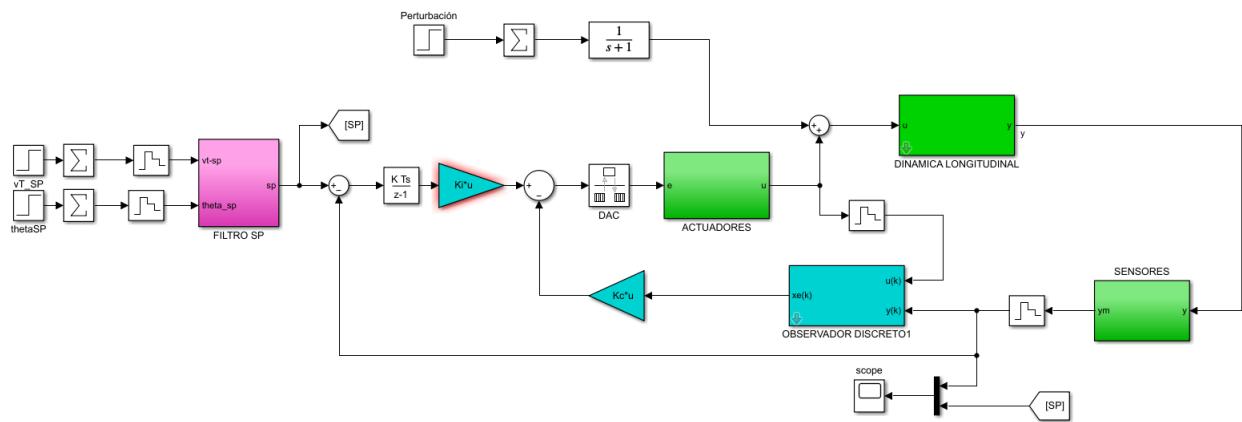


Figura 52: Diagrama de simulación del control longitudinal en tiempo discreto

A continuación se muestra el resultado obtenido en la figura 53

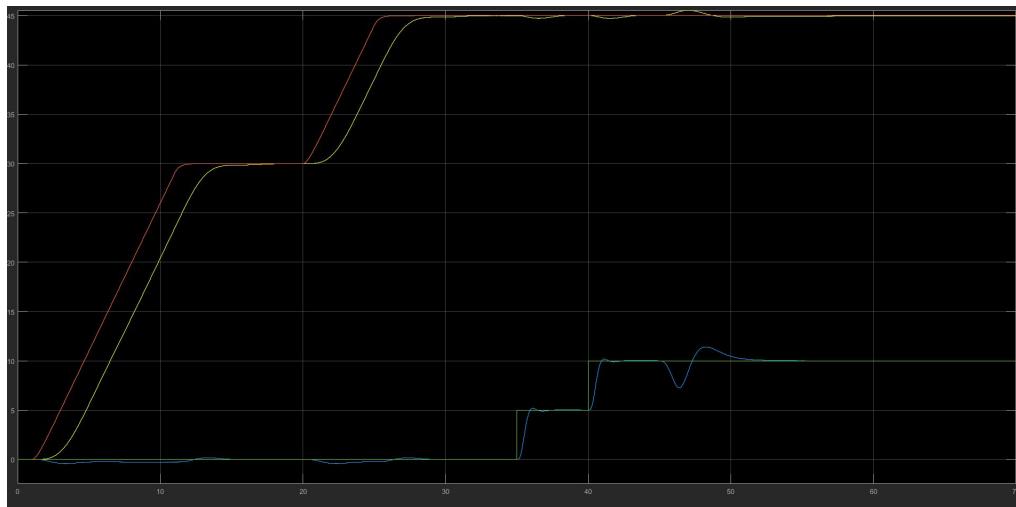


Figura 53: Respuesta control longitudinal en tiempo discreto

### 3.5. Comparación con el diseño en tiempo continuo y posterior discretización

Este apartado consiste en una comparativa entre los resultados obtenidos en el ejercicio 6 y los obtenidos en éste. Se plantea de esta manera ya que es interesante plantearse si la respuesta del sistema es igual si se plantea primero el diseño de los controladores en tiempo continuo y después se discretizan o si directamente se realiza el diseño en tiempo discreto.

La primera prueba que se realiza será la obtención de la respuesta mediante un controlador control modal con el código 6 y 7 (ver Figura 54).

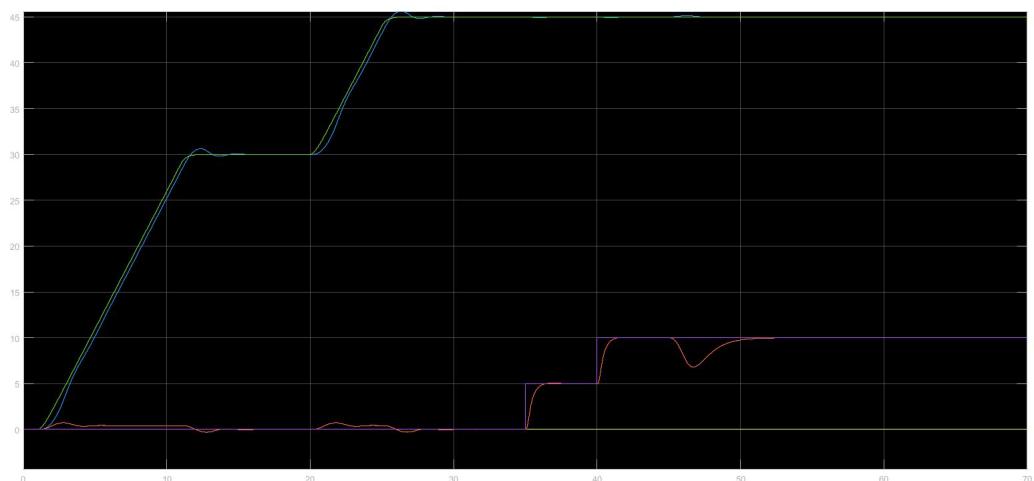


Figura 54: Respuesta comparativa control modal discreto código 6 y 7

Si se observa la Figura 54 se puede ver que efectivamente coinciden, ambas son iguales. Para demostrar que efectivamente no importa el camino a recorrer a la hora de obtener el sistema en tiempo discreto se realiza una segunda prueba, esta vez dotada de acción integral mediante el método LQG obteniendo la respuesta que se muestra en la Figura 55.

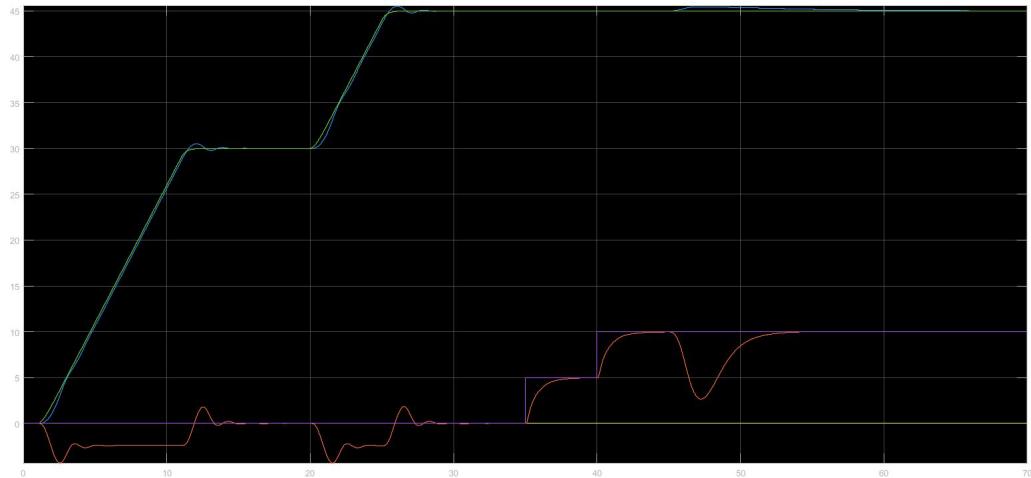


Figura 55: Respuesta comparativa LQG discreto código 6 y 7

Efectivamente si vuelve a analizarse la Figura 55 se obtiene que nuevamente éstas son idénticas con lo que se demostraría que se obtiene el mismo resultado de manera independiente al camino seguido a la hora del diseño del sistema de controlador y observador de estado.