

Grado en Ingeniería Aeroespacial

EQUIPOS Y SISTEMAS DE CONTROL AEROESPACIALES

CURSO 2021-2022

ENTREGA 1



José Luis Dugo Ortega
Elena Gallego Hernández
Alejandro Sánchez Torres
Álvaro Jiménez Melendo

17 de octubre de 2021

Índice

1. Ejercicio 1: Vehículo aéreo 1-DOF	3
1.1. Introducción	3
1.2. Modelo matemático	4
1.2.1. Análisis del modelo matemático del vehículo aéreo	4
1.2.2. Parámetros conocidos	4
1.3. Linealización del sistema	6
1.4. Rango de valores de estabilidad del lazo cerrado en función de K_p	9
1.5. Respuestas del sistema ante distintos cambios de Set Point	12
1.6. Montaje del modelo en Simulink e introducción de los parámetros mediante Script	15
1.7. Representación de los datos mediante Script	18
1.8. Comparativa modelos no lineal y lineal	19
2. Ejercicio 2: Modos asociados a la dinámica longitudinal y lateral	20
2.1. Introducción	20
2.2. Dinámica longitudinal	21
2.2.1. Determinación de las funciones de transferencias que relacionan las variables de estado con las variables manipuladas	21
2.2.2. Cálculo de polos y ceros (modos) del sistema	24
2.2.3. Determinación de los términos exponenciales y constantes de tiempo asociados a cada modo	26
2.2.4. Variación del orden del vector de estado	27
2.2.5. Validación del modelo para una condición de vuelo	29
2.3. Dinámica lateral	30
2.3.1. Determinación de las funciones de transferencias que relacionan las variables de estado con las variables manipuladas	30
2.3.2. Cálculo de polos y ceros (modos) del sistema	32

2.3.3.	Determinación de los términos exponenciales y constantes de tiempo asociados a cada modo	33
2.3.4.	Variación del orden del vector de estado	34
2.3.5.	Efecto sobre la validez del modelo lineal si se varía el ángulo β	35

1. Ejercicio 1: Vehículo aéreo 1-DOF

1.1. Introducción

En el siguiente informe se van a recopilar las actividades realizadas en los dos primeros ejercicios de la asignatura, mediante el uso de los softwares *Matlab* y *Simulink* .

En esta práctica, se llevó a cabo una simulación de la dinámica de vuelo de un vehículo aéreo, con un único grado de libertad. Para poder realizar esto, es necesario llevar a cabo una linealización del sistema. Además, habrá que estudiar la estabilidad en lazo abierto y su rango en función del parámetro proporcional k_p del controlador. También se pide la respuesta del sistema a distintos cambios de Set Point, y mostrar el Simulink realizado.

En clase se nos facilitó las ecuaciones del modelo dinámico del vehículo. Estas ecuaciones son explicadas y tratadas en el apartado 1.2.

1.2. Modelo matemático

1.2.1. Análisis del modelo matemático del vehículo aéreo

A continuación se presentan las ecuaciones del modelo matemático de las distintas partes del sistema, de cara a obtener el diagrama de bloques. Así mismo, se muestran los parámetros que definirán al sistema en la condición nominal de operación.

- Planta: Dinámica del vehículo

$$m \cdot \dot{V}(t) = F_P(t) - F_B(t) + \overset{\text{Sin perturbaciones}}{\cancel{F_D(t)}}; \text{ siendo, } F_B = B \cdot V^2(t) \quad (1)$$

- Actuador (Propulsor): Sistema de propulsión

$$\tau_P \cdot \dot{F}_P(t) + F_P(t) = K_T \cdot CO(t) \quad (2)$$

- Sensor/Transductor: Sistema de primer orden

$$\tau_m \cdot \dot{V}_m(t) + V_m(t) = K_m \cdot V(t) \quad (3)$$

- Filtro de medida: Pasabajas de primer orden

$$\tau_f \cdot \dot{V}_{mf}(t) + V_{mf}(t) = V_m(t) \quad (4)$$

- Controlador:

$$CO(t) = CO_{nom} + K_P \cdot E(t) + K_I \int E(t)dt + K_D \cdot \dot{E}_f(t) \quad (5)$$

1.2.2. Parámetros conocidos

Para el modelo estudiado se han establecido una serie de parámetros para un punto de operación nominal:

$$\begin{aligned}m &= 400Kg \\ B &= 0.162N/(m/s) \\ V_{nom} &= 800km/h = 222.22m/s \\ F_{Pnom} &= 8 \cdot 10^3 N \\ \dot{F}_p &\in [-1,1] \cdot \frac{16}{5} \cdot 10^3 N \cdot s^{-1} \\ F_p &\in [0,1] \cdot 16 \cdot 10^3 N \\ \tau_p &= 1s; \quad K_T = \frac{16 \cdot 10^3}{10} N/Volt \\ \tau_m &= 0.1s; \quad K_m = \frac{10}{300} Volt/(m/s) \\ V_m &\in [0,10] Volt\end{aligned}$$

Figura 1: Parámetros del modelo en un punto de operación nominal.

1.3. Linealización del sistema

Este sistema se trata de un modelo no lineal, por lo que su estudio se dificulta, y para ello se va a llevar a cabo una linealización del mismo. Esta linealización supone una aproximación bastante adecuada del modelo real. Más adelante, ambos modelos serán comparados.

El modelo lineal obtenido será válido para una condición de equilibrio, o nominal, en una condición de operación determinada, y a medida que se aleje de esta operación nominal, su aproximación del modelo no lineal irá disminuyendo hasta que deje de ser válido.

Para linealizar el sistema es necesario el vector de estado X , que está formado por la velocidad del vehículo V (m/s) con valor nominal \bar{V} , la fuerza propulsiva F_P (N) con valor nominal F_P , la velocidad medida por el sensor V_m (voltios) con valor nominal V_m la velocidad medida y filtrada para reducir el ruido de la medida V_{mf} (voltios) con valor nominal \bar{V}_{mf} . Respecto al vector de control U , es la señal de control CO (voltios), y para el vector de salida Y se escogerá la velocidad filtrada V_{mf} . La variable controlada será la velocidad del vehículo V .

$$\begin{cases} X = (V, F_P, V_m, V_{mf}) \\ Y = V_{mf} \\ U = CO(t) \end{cases} \quad (6)$$

Partiendo de las ecuaciones (1), (2), (3) y (4) que se definieron en el modelo matemático, se despejan las derivadas de mayor orden en cada una de ellas para combinarla posteriormente con la ecuación, obteniéndose:

$$\dot{V}(t) = -\frac{B}{m}V^2(t) + \frac{1}{m}F_P(t) \quad (7)$$

$$\dot{F}_P(t) = -\frac{1}{\tau_P}F_P(t) + \frac{K_T}{\tau_P}CO(t) \quad (8)$$

$$\dot{V}_m(t) = -\frac{1}{\tau_m}V_m(t) + \frac{K_m}{\tau_m}V(t) \quad (9)$$

$$\dot{V}_{mf}(t) = -\frac{1}{\tau_f}V_{mf}(t) + \frac{1}{\tau_f}V_m(t) \quad (10)$$

De nuevo utilizando las ecuaciones (7), (8), (9) y (10) en combinación con la ecuación (19), se obtiene una representación matricial de la ecuación de estado F y la ecuación de salida G del sistema:

$$\begin{cases} X(t) = F(X, U) = \begin{pmatrix} -\frac{B}{m}V^2 + \frac{1}{\tau_P}F_P \\ -\frac{1}{\tau_P}F_P + \frac{K_T}{\tau_P}CO \\ -\frac{1}{\tau_m}V_m + \frac{K_m}{\tau_m}V \\ -\frac{1}{\tau_f}V_{mf} + \frac{1}{\tau_f}V_m \end{pmatrix} \\ Y = G(X, U) = V_{mf} \end{cases} \quad (11)$$

Ahora se calculan las matrices jacobianas (A, B, C, D) respecto del vector de estado y del vector de control, evaluadas en la condición de operación o condición nominal para obtener un modelo lineal, que quede como:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Y las matrices jacobianas vendrán dadas por:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial X_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial X_n} \\ & \ddots & \\ \frac{\partial F_n}{\partial X_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial X_n} \end{pmatrix} & B &= \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial U_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial U_n} \\ & \ddots & \\ \frac{\partial F_n}{\partial U_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial U_n} \end{pmatrix} \\ C &= \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial X_1} & \dots & \frac{\partial G_1}{\partial X_n} \\ & \ddots & \\ \frac{\partial G_n}{\partial X_1} & \dots & \frac{\partial G_n}{\partial X_n} \end{pmatrix} & D &= \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial U_1} & \dots & \frac{\partial G_1}{\partial U_n} \\ & \ddots & \\ \frac{\partial G_n}{\partial U_1} & \dots & \frac{\partial G_n}{\partial U_n} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Partiendo de la ecuación (11) se calculan las ecuaciones jacobianas antes mencionadas, obteniéndose como resultado:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{-2BV}{m} & \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{\tau_P} & 0 & 0 \\ \frac{K_m}{\tau_m} & 0 & \frac{1}{\tau_f} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\tau_f} & \frac{-1}{\tau_f} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{K_T}{\tau_P} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 1)$$

$$D = 0$$

Las variables incrementales o de desviación sobre dicha condición quedan definidas como:

$$\left. \begin{aligned} x &= X - \bar{X} \\ u &= U - \bar{U} \\ y &= Y - \bar{Y} \end{aligned} \right\}$$

Si se analiza esto, se puede ver cómo la velocidad nominal del vehículo es alcanzada cuando el propulsor genere el empuje nominal \bar{F}_p . Por tanto se impondrá la condición nominal de equilibrio.

$$-\frac{B}{m}V^2 + \frac{1}{m}F_P = 0 \quad (12)$$

Ya se puede obtener el valor de V :

$$\bar{V} = \sqrt{\frac{\bar{F}_P}{B}} \quad (13)$$

1.4. Rango de valores de estabilidad del lazo cerrado en función de K_p

En el siguiente apartado, se va a analizar la respuesta del sistema en lazo abierto. De esta manera se podrá determinar el lugar de las raíces, así como la ganancia (K_p) que hace que el sistema sea inestable.

A partir de la Figura 2 se puede observar el lugar de las raíces del sistema. Con ello se puede obtener el intervalo de valor de la ganancia que hace estable al sistema.

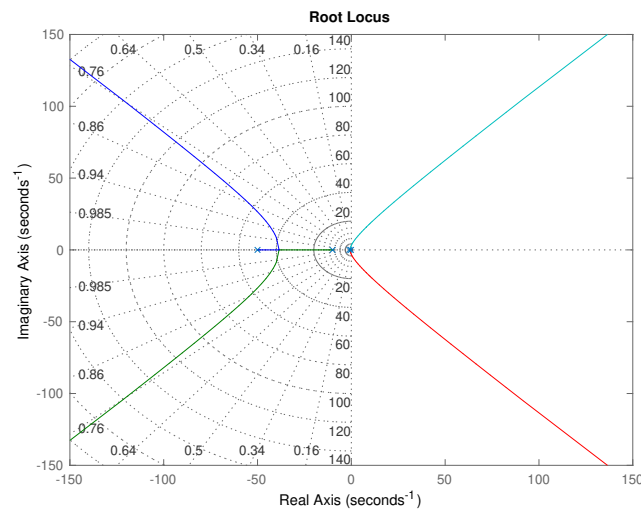


Figura 2: Lugar de la raíces del sistema (lazo abierto).

Por definición dada en cursos anteriores, un sistema es estable siempre que la parte real de sus polos o raíces sean negativas. Usando el *Data Cursor* que viene implementado en *Matlab* se puede hallar la ganancia en el momento preciso en que las raíces dejan de ser negativas, tal y como se ve en la siguiente figura.

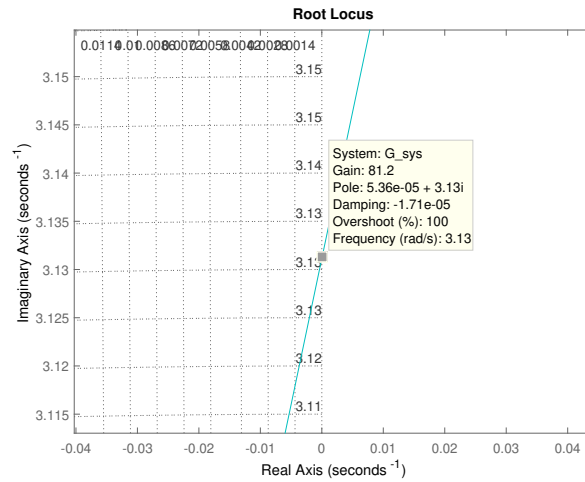
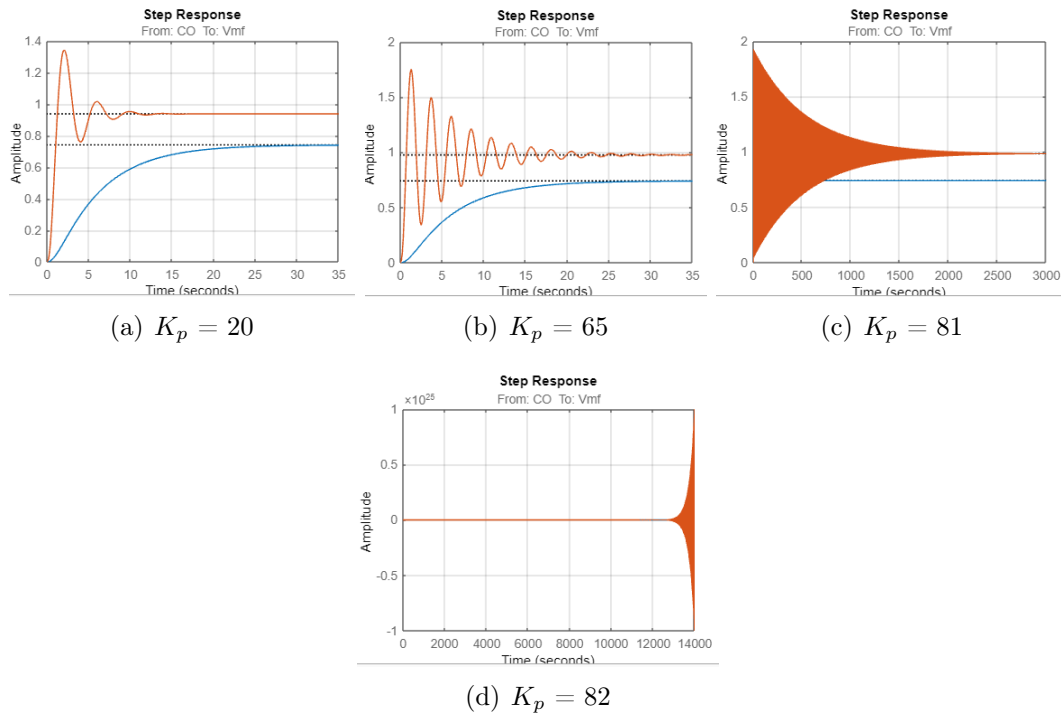


Figura 3: Punto de corte con las raíces positivas.

Como comprobación, se va a calcular la respuesta del sistema frente a diferentes ganancias.

Figura 4: Respuesta del sistema para distintos valores de la ganancia (K_p)

Se puede observar en la figura 4 que a mayor ganancia, mayores oscilaciones se obtienen, hasta que se alcanza el valor crítico de la ganancia, momento en el cual el sistema es inestable.

Finalmente, combinando todo lo analizado anteriormente, se llega a la conclusión de que el intervalo es:

$$0 < K_p < 81,2 \quad (14)$$

1.5. Respuestas del sistema ante distintos cambios de Set Point

Aunque el controlador usado sea tipo PID, en este apartado se realizará una comparación sobre la respuesta del sistema ante distintos tipos de controladores (P, PI, PD, PID). Para ello se tienen que conocer los valores de K_P , K_I y K_D , necesarios para que el sistema funcione correctamente.

Esta práctica se ha realizado utilizando un controlador de tipo PID, pero se podría haber usado otro tipo de controlador, y eso es lo que se va a analizar en este apartado. Para poder utilizar otro tipo de controlador, primero es necesario conocer los valores de las tres ganancias que forman el controlador PID (K_P , K_I y K_D). En este caso se han proporcionado sus valores.

- $K_P = 5$
- $K_I = 0,5$
- $K_D = 5$

En primer lugar, se estudiará el controlador tipo P. Es decir, los valores de las ganancias serán $K_P = 5$, $K_I = 0$ y $K_D = 0$. En la siguiente figura, se puede ver el resultado obtenido.

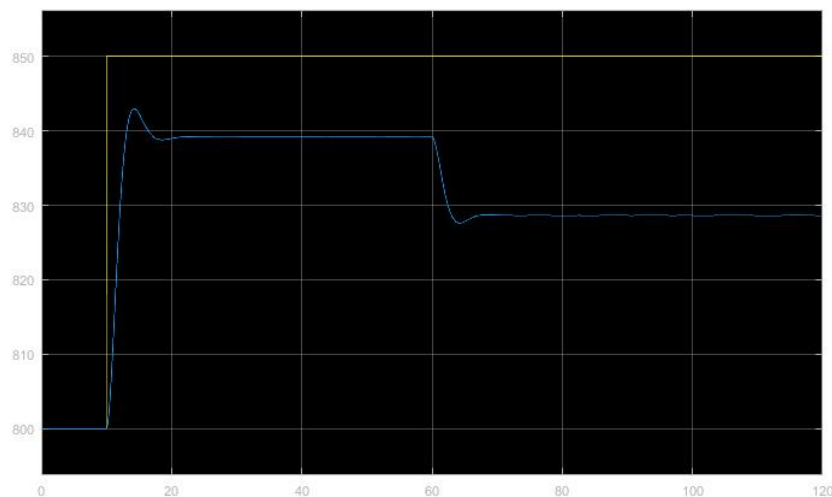


Figura 5: Respuesta del sistema con un controlador tipo P.

Tal y como se observa en la figura anterior, la respuesta del sistema no es capaz de alcanzar a la señal. Esto es debido a que el controlador tipo P no es el más adecuado, ya que no contiene acción integral y no toma el error para tenerlo en cuenta.

A continuación se estudiará el tipo PI, con los siguientes parámetros: $K_P = 5$, $K_I = 0,5$ y $K_D = 0$. Los resultados se muestran en la figura 6.

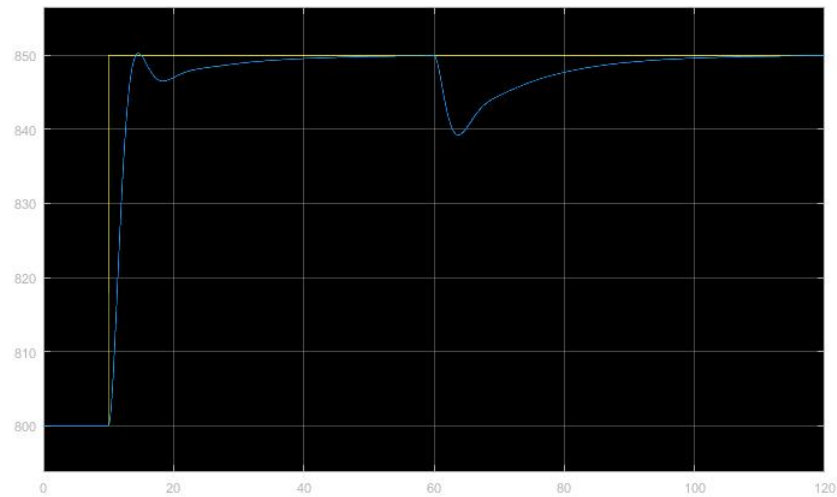


Figura 6: Respuesta del sistema con un controlador tipo PI.

A diferencia del controlador tipo P, que no tiene acción integral, el controlador PI sí la tiene, por lo que el sistema consigue llegar al valor del Set-Point. 6.

En tercer lugar se estudiará el controlador tipo PD, por lo que los valores de las ganancias serán $K_P = 5$, $K_I = 0$ y $K_D = 5$. Se puede ver el resultado en la Figura 7.

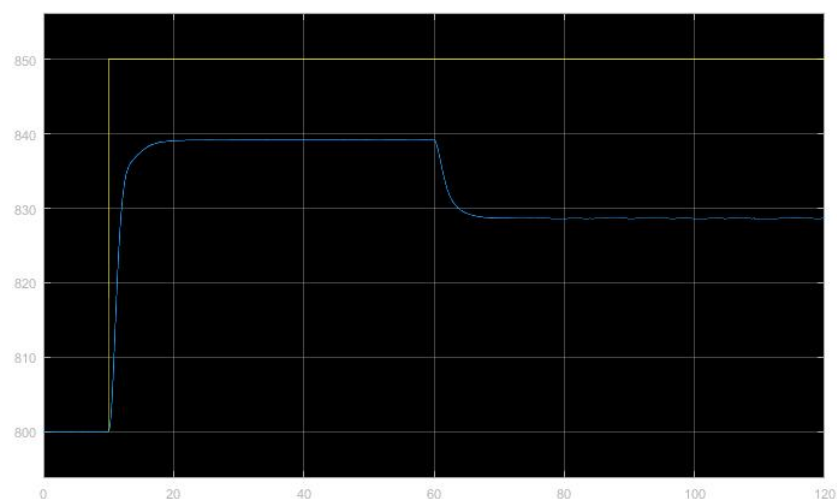


Figura 7: Respuesta del sistema con un controlador tipo PD.

Este controlador no cuenta tampoco con acción integral, por lo que al igual que el tipo P, no alcanza el valor del Set Point. Sin embargo, el controlador PD cuenta con acción derivativa, por lo que consigue un efecto de reducción del overshoot.

Finalmente, se estudia el controlador PID, con los valores que se definieron al principio de este apartado. Los resultados se muestran en la gráfica 8.

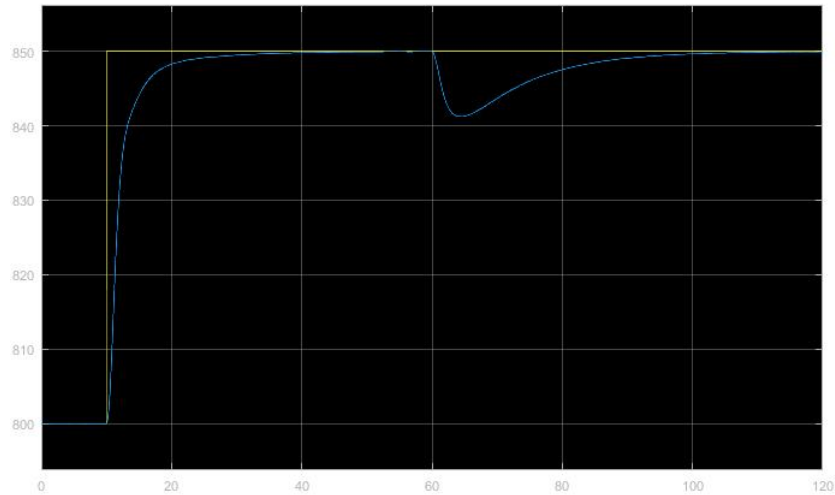


Figura 8: Respuesta del sistema con un controlador tipo PID.

Se puede observar cómo este controlador sí cumple con el alcance del set point, amén del uso de acción integral, además de reducir el overshoot gracias a la acción derivativa. Por tanto, se puede fácilmente deducir que se trata del controlador más adecuado.

1.6. Montaje del modelo en Simulink e introducción de los parámetros mediante Script

Una vez que se tiene el modelo linealizado, se realiza el montaje en simulink, tal como se muestra en la figura 9. Se van a mostrar los distintos subsistemas que lo conforman.

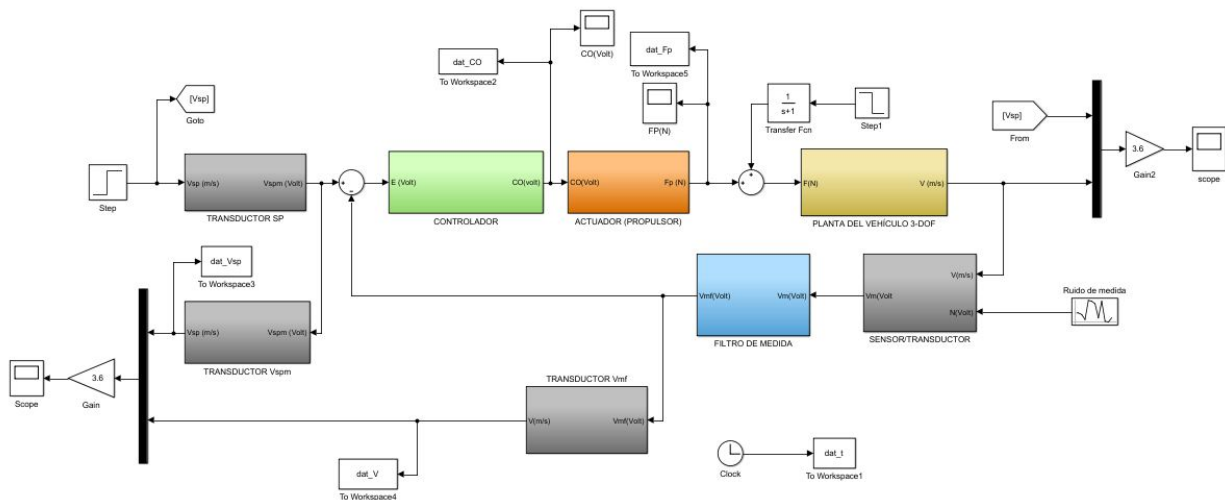


Figura 9: Diagrama de simulación.

■ Planta

La planta es el proceso a controlar.

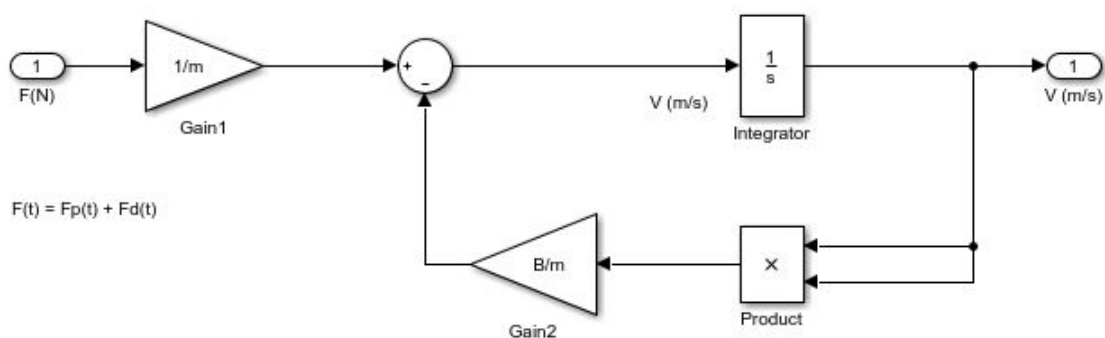


Figura 10: Diagrama de planta.

■ Propulsor

El propulsor o actuador transforma la señal de control en potencia, según la orden dada por el controlador.

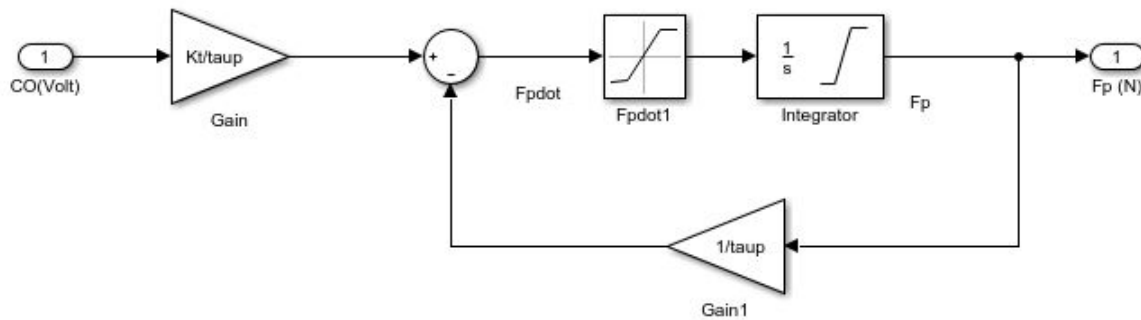


Figura 11: Diagrama del propulsor.

■ Sensor/transductor

Se le van a añadir perturbaciones.

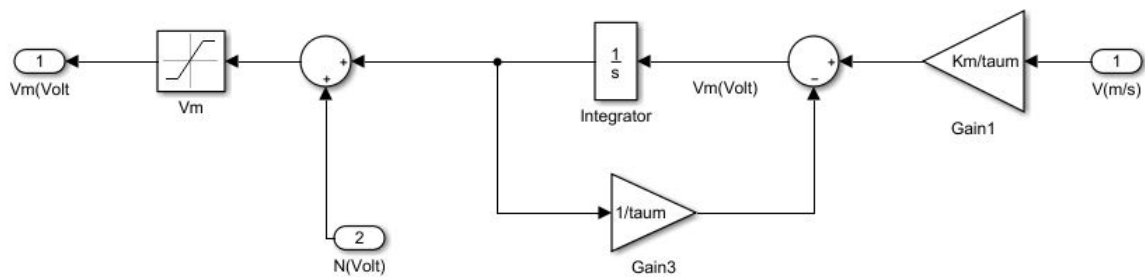


Figura 12: Diagrama del sensor/transductor.

■ Filtro

El filtro se utiliza para eliminar el ruido.

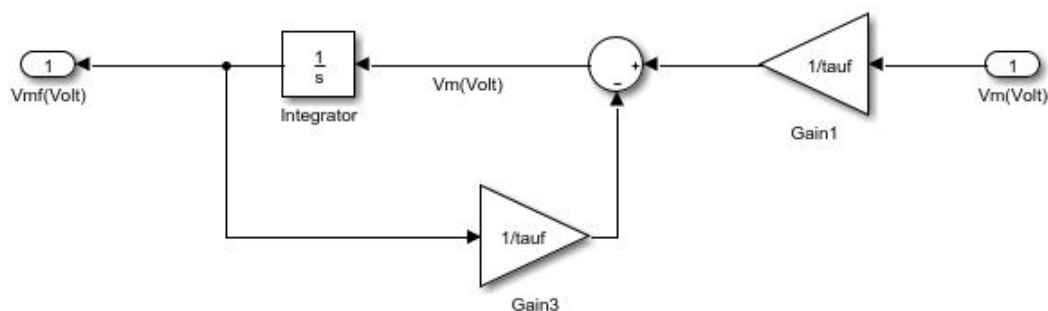


Figura 13: Diagrama del filtro.

■ Transductor

El transductor se encarga de recibir la información de una variable (Set Point) y la transforma en otra unidad, en este caso voltios (señal eléctrica).

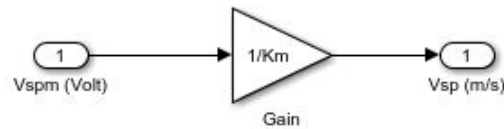


Figura 14: Diagrama del transductor.

■ Controlador PID

Un controlador o regulador PID es un tipo de controlador que permite controlar un sistema en lazo cerrado de forma que alcance una salida deseada. El controlador PID está compuesto de tres elementos que proporcionan una acción Proporcional, Integral y Derivativa, que le dan nombre al controlador

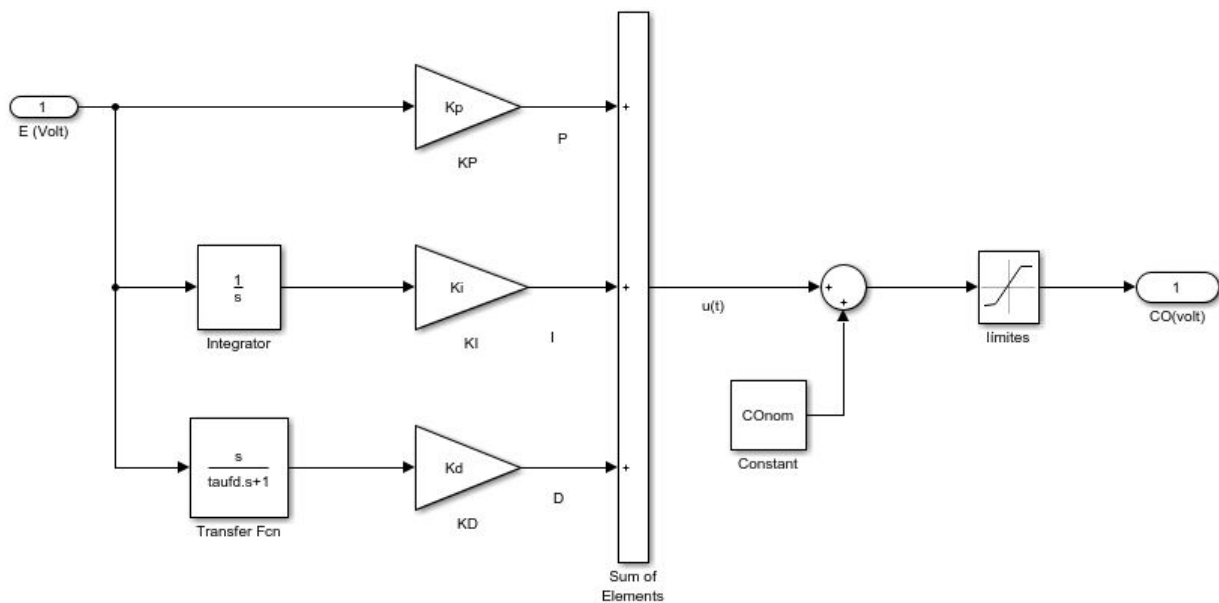


Figura 15: Diagrama del controlador.

1.7. Representación de los datos mediante Script

En *Simulink*, es posible utilizar el bloque *to workspace* para enviar datos de simulación a *Matlab*, y una vez aquí, es posible tratar esas variables como datos dentro de *Matlab*. Entre otras cosas, es posible realizar gráficos, que es lo que se va a hacer a continuación en esta práctica. En la figura 16 se puede observar que los resultados obtenidos mediante script de *Matlab* son idénticos a los obtenidos con *Scope*.

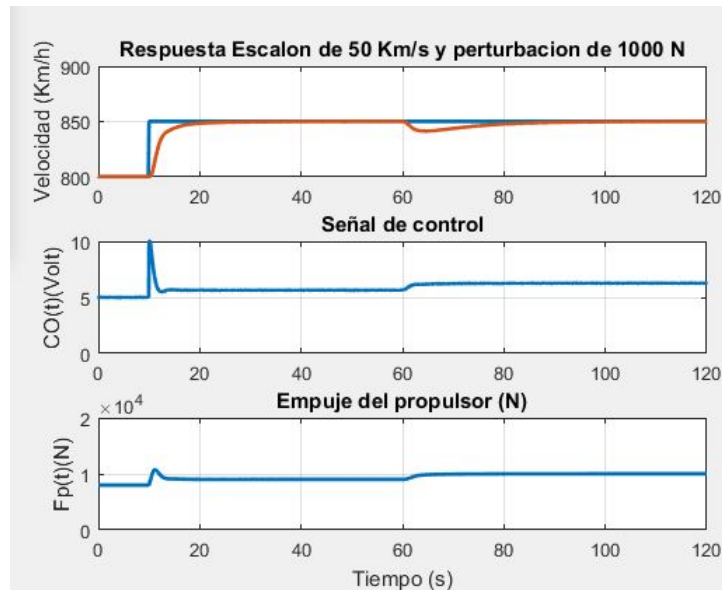


Figura 16: Resultado obtenido en *Matlab*.

Como conclusión, de las gráficas se puede ver que para aumentar esos 50 km/h de velocidad, el empuje debe aumentar bastante para después estabilizarse. Además la perturbación del segundo 60 provoca una pequeña pérdida de velocidad.

1.8. Comparativa modelos no lineal y lineal

Para terminar esta práctica, se van a comparar los modelos lineal y no lineal, en lazo abierto. Se puede ver el simulink empleado en la figura 17. Si se observan los resultados en la figura posterior 18, se puede ver la similitud de ambos modelos, existiendo tal vez un pequeño error que no llega a 4 m/s.

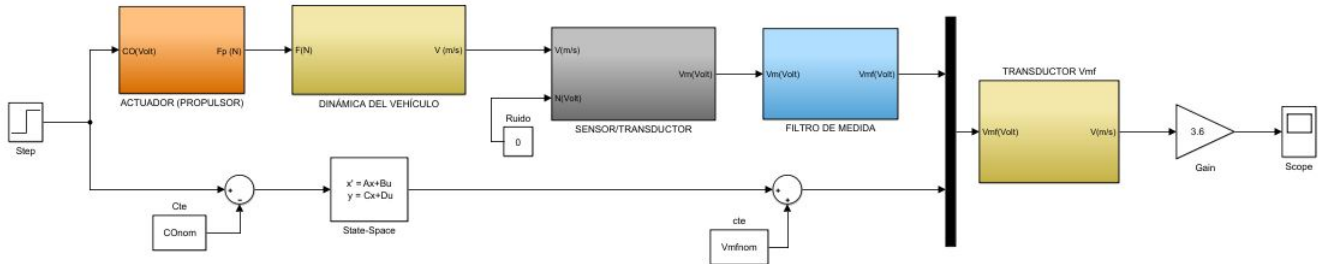


Figura 17: Comparativa modelos lineal y no-lineal (lazo abierto).

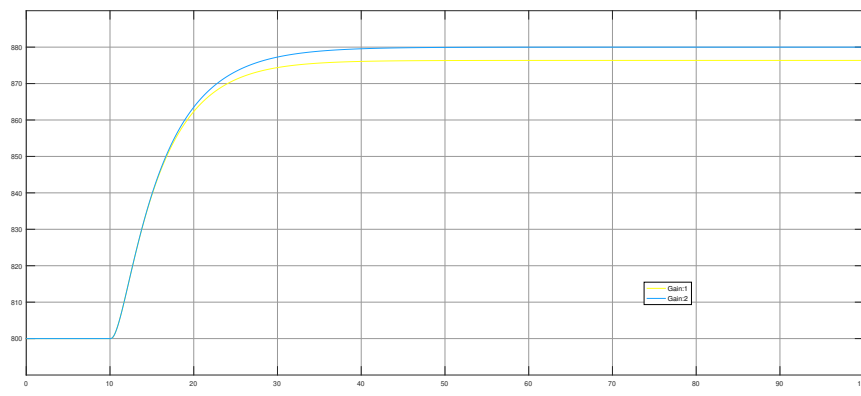


Figura 18: Comparativa de la respuesta de los modelos lineal y no-lineal

2. Ejercicio 2: Modos asociados a la dinámica longitudinal y lateral

2.1. Introducción

En el siguiente informe se recogen las explicaciones y actividades de la segunda práctica informática de la asignatura.

El objetivo de este problema es estudiar la dinámica lateral y longitudinal de una aeronave y los modos naturales asociados a dichas dinámicas, los cuales son el modo fugoide (PH) y el modo corto período (SP) para la dinámica longitudinal, y los modos Dutch Roll (DR), espiral (SP) y convergencia de balanceo (RC) para la dinámica lateral .

Para dicho estudio, se determinan las funciones de transferencia, los ceros y polos (modos) del sistema y, los términos exponenciales y las constantes de tiempo asociados a cada modo.

2.2. Dinámica longitudinal

2.2.1. Determinación de las funciones de transferencias que relacionan las variables de estado con las variables manipuladas

Lo primero que se va a hacer es relacionar las variables de estado con las manipuladas, es decir, calculando sus respectivas funciones de transferencia, que serán 8, ya que se tienen 4 variables de estado y dos variables manipuladas.

A continuación se definan dichas variables:

- Estados
 - V_T Velocidad transversal
 - α ángulo de ataque
 - θ ángulo de cabeceo
 - q velocidad angular de cabeceo
- Actuadores
 - δ_{TH} ángulo de desviación del *throttle*
 - δ_e ángulo de desviación del *elevator*
- Medidas (sensores)
 - V_{Tm}
 - α_m
 - θ_m
 - q_m

Para representar las funciones de transferencia, se dispone en matlab de varios comandos. Zpk nos permite ver las funciones de transferencia con el denominados factorizado, transfer function las obtiene sin factorizar, y finalmente el comando sys las muestra en pantalla.

Se muestran a continuación las funciones de transferencia obtenidas, utilizando los comandos anteriores.

```

From input "delta_th" to output...
          0.1128 s^3 + 0.2518 s^2 + 0.2126 s
vt_m:  -----
          s^4 + 2.251 s^3 + 1.929 s^2 + 0.03868 s + 0.005674

          -9.024e-05 s^2 - 0.0001138 s
alpha_m: -----
          s^4 + 2.251 s^3 + 1.929 s^2 + 0.03868 s + 0.005674

          6.528e-05
theta_m: -----
          s^4 + 2.251 s^3 + 1.929 s^2 + 0.03868 s + 0.005674

          6.528e-05 s
q_m:  -----
          s^4 + 2.251 s^3 + 1.929 s^2 + 0.03868 s + 0.005674

```

Figura 19: Funciones de transferencia con δ_{th}

From input "delta_e" to output...

$$vt_m: \frac{0.0298 s^3 + 0.1052 s^2 + 1.4 s + 1.644}{s^4 + 2.251 s^3 + 1.929 s^2 + 0.03868 s + 0.005674}$$

$$\alpha_m: \frac{-0.0022 s^3 - 0.1619 s^2 - 0.003157 s - 0.001367}{s^4 + 2.251 s^3 + 1.929 s^2 + 0.03868 s + 0.005674}$$

$$\theta_m: \frac{-0.1743 s^2 - 0.171 s - 0.003537}{s^4 + 2.251 s^3 + 1.929 s^2 + 0.03868 s + 0.005674}$$

$$q_m: \frac{-0.1743 s^3 - 0.171 s^2 - 0.003537 s - 1.729e-19}{s^4 + 2.251 s^3 + 1.929 s^2 + 0.03868 s + 0.005674}$$

Figura 20: Funciones de transferencia con δ_e

2.2.2. Cálculo de polos y ceros (modos) del sistema

En el siguiente apartado se obtendrán los modos naturales de la dinámica longitudinal de la aeronave. Lo que se tendrá que hacer es calcular los autovalores de la matriz (A), que serán sus polos, cada uno teniendo un modo natural asociado. Para ello se utilizará el comando *damp*. Además, en el apartado anterior se puede ver que las funciones de transferencia tienen todas el mismo denominador, por lo que los polos serán comunes en todas ellas, pudiendo calcular dichos polos el cualquiera de ellas para este apartado.

Los resultados obtenidos son los siguientes:

Continuous-time zero/pole/gain model.

Pole	Damping	Frequency (rad/seconds)	Time Constant (seconds)
$-8.46e-03 + 5.42e-02i$	$1.54e-01$	$5.48e-02$	$1.18e+02$
$-8.46e-03 - 5.42e-02i$	$1.54e-01$	$5.48e-02$	$1.18e+02$
$-1.12e+00 + 8.00e-01i$	$8.13e-01$	$1.37e+00$	$8.95e-01$
$-1.12e+00 - 8.00e-01i$	$8.13e-01$	$1.37e+00$	$8.95e-01$

Figura 21: Polos del sistema usando el comando *damp*.

Tal y como se observa en la figura 21, existen dos pares de autovalores diferentes, que representan los dos modos naturales de la dinámica longitudinal. Dichos modos son:

- **Modo corto periodo (SP):** Es el par de autovalores que tiene asociada una dinámica más rápida, es decir, un movimiento de período corto muy amortiguado, debido a la interacción entre el ángulo de ataque α y la velocidad angular de cabeceo q . En este caso se trata del primer par de autovalores que se muestran en la gráfica.
- **Modo fugoide (PH):** Es el par de autovalores que tiene asociada una dinámica más lenta, es decir, un movimiento de período largo y con amortiguamiento pequeño, debido a la interacción entre el ángulo de cabeceo θ y la velocidad V_T . En este caso, serían los otros dos autovalores.

Como se ha comentado anteriormente, otra forma de obtener estos polos es calculando los autovalores de la matriz (A). Para ello se emplea el comando *eig(A)* en el script de *Matlab*, obteniéndose como resultado para el sistema:

También es posible obtener este resultado calculando los autovalores de la matriz (A) directamente, con el comando $\text{eig}(A)$. En la figura posterior se muestran.

```
-1.1171 + 0.8004i  
-1.1171 - 0.8004i  
-0.0085 + 0.0542i  
-0.0085 - 0.0542i
```

Figura 22: Autovalores de la matriz (A).

Como se puede apreciar, los valores son prácticamente idénticos a los polos del sistema.

2.2.3. Determinación de los términos exponenciales y constantes de tiempo asociados a cada modo

En este apartado se van a hallar los términos exponenciales asociados, así como las constantes de tiempo asociadas a los polos del sistema calculados en el anterior apartado.

Esto se podría hacer de varias maneras, por ejemplo, usando las siguientes ecuaciones que relacionan el coeficiente de amortiguamiento y la frecuencia natural.

$$e^{-\xi \cdot \omega_n \cdot t} \quad (15)$$

$$\tau_{efec} = \frac{1}{\xi \cdot \omega_n} \quad (16)$$

Donde ξ es el coeficiente de amortiguación y ω_n es la frecuencia natural.

La otra opción, empleada en nuestro caso, es usar la función *damp* y con ella hallar la transformada inversa de Laplace para los términos exponenciales.

```
ans =
(3355443200000*2^(1/2)*66030511662060971416937^(1/2)*exp(-(1693*t)/200000)*sin((2^(1/2)*66030511662060971416937^(1/2)*t)/6710886400000))/66030511662060971416937

ans =
(1000*641311^(1/2)*exp(-(1117*t)/1000)*sin((641311^(1/2)*t)/1000))/641311
```

Figura 23: Autovalores de la matriz (A).

2.2.4. Variación del orden del vector de estado

En este apartado se van a determinar las matrices A y B correspondientes al vector de estado, pero para un orden de variables diferente. Este vector ahora estará formado por $[\nu_T \ \alpha \ \theta \ q]$ a ser $[\nu_T \ \alpha \ q \ \theta]$.

Las matrices A y B correspondientes al vector de estado inicial son:

$$A = \begin{pmatrix} -0,0191 & 2,5172 & -9,8036 & -0,2540 \\ -0,0008 & -0,9713 & 0 & 0,9126 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0,7234 & 0 & -1,2607 \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$B = \begin{pmatrix} 0,1128 & 0,0298 \\ 0 & -0,0022 \\ 0 & 0 \\ 0 & -0,1743 \end{pmatrix} \quad (18)$$

Para determinar las matrices A y B se parte de la siguiente expresión:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (19)$$

En principio:

$$\begin{pmatrix} \dot{\nu}_T \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\theta} \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \nu_T \\ \alpha \\ \theta \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta_{TH} \\ \delta_e \end{pmatrix} \quad (20)$$

- $\dot{\nu}_T = -0,0191\nu_T + 2,5172\alpha - 9,8036\theta - 0,2540q + 0,1128\delta_{TH} + 0,0298\delta_e$
- $\dot{\alpha} = -0,0008\nu_T - 0,9713\alpha + 0,9126q - 0,0022\delta_e$
- $\dot{\theta} = q$
- $\dot{q} = -0,7234\alpha - 1,2607q - 0,1743\delta_e$

Si se cambia el orden del vector de estado, queda:

$$\begin{pmatrix} \dot{\nu}_T \\ \dot{\alpha} \\ \dot{q} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \nu_T \\ \alpha \\ q \\ \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta_{TH} \\ \delta_e \end{pmatrix} \quad (21)$$

- $\dot{\nu}_T = -0,0191\nu_T + 2,5172\alpha - 0,2540q - 9,8036\theta + 0,1128\delta_{TH} + 0,0298\delta_e$
- $\dot{\alpha} = -0,0008\nu_T - 0,9713\alpha + 0,9126q - 0,0022\delta_e$
- $\dot{q} = -0,7234\alpha - 1,2607q - 0,1743\delta_e$
- $\dot{\theta} = q$

Por lo tanto, las matrices A y B correspondiente al nuevo vector de estado son:

$$A = \begin{pmatrix} -0,0191 & 2,5172 & -0,2540 & -9,8036 \\ -0,0008 & -0,9713 & 0,9126 & 0 \\ 0 & -0,7234 & -1,2607 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (22)$$

$$B = \begin{pmatrix} 0,1128 & 0,0298 \\ 0 & -0,0022 \\ 0 & -0,1743 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (23)$$

2.2.5. Validación del modelo para una condición de vuelo

En este apartado se va a comentar qué ocurriría si se quisiera probar este mismo modelo lineal para una velocidad de 300m/s, en lugar de los 153 m/s para los cuales está pensado.

Un modelo lineal es válido para una determinada condición de operación, o bien un entorno cercano a esta, que suele ser en torno a un 30 %, es decir, en nuestro caso, velocidad entre 107 y 200 m/s.

En base a esto, se llega a la conclusión de que el modelo NO sería válido para esa condición de operación propuesta. Sería necesario hallar otro modelo lineal para la condición deseada.

2.3. Dinámica lateral

Análogamente, se realizan los mismos procesos para la dinámica lateral, teniendo en cuenta que las variables de estado ahora son $[\beta \ \phi \ p \ r]$ y las variables manipuladas $[\delta_a \delta_r]$. En este apartado se va a ser más conciso, ya que es una repetición de lo visto en la dinámica longitudinal, pero con distintas matrices y variables de estado.

2.3.1. Determinación de las funciones de transferencias que relacionan las variables de estado con las variables manipuladas

En esta ocasión se tienen las siguientes variables:

- Estados
 - β ángulo de deriva
 - ϕ ángulo de balance
 - p velocidad angular de guiñada
 - r velocidad angular de balance
- Actuadores
 - δ_a ángulo de desviación de alerones
 - δ_r ángulo de desviación de timón
- Medidas (sensores)
 - β
 - ϕ
 - p
 - r

Las funciones de transferencia que se obtienen son las siguientes:

From input "delta_a" to output...

$$\text{beta}_m: \frac{0.0002 s^3 - 0.001859 s^2 + 0.01226 s - 0.01938}{s^4 + 3.984 s^3 + 11 s^2 + 26.87 s + 0.4525}$$

$$\text{phi}_m: \frac{-0.6235 s^2 - 0.4781 s - 5.305}{s^4 + 3.984 s^3 + 11 s^2 + 26.87 s + 0.4525}$$

$$\text{p}_m: \frac{-0.6222 s^3 - 0.4747 s^2 - 5.293 s + 0.0158}{s^4 + 3.984 s^3 + 11 s^2 + 26.87 s + 0.4525}$$

$$\text{r}_m: \frac{-0.0268 s^3 - 0.07231 s^2 - 0.2596 s - 0.3362}{s^4 + 3.984 s^3 + 11 s^2 + 26.87 s + 0.4525}$$

Figura 24: Funciones de transferencia de δ_a .

From input "delta_r" to output...

$$\text{beta}_m: \frac{0.0007 s^3 + 0.06592 s^2 + 0.2015 s + 0.0003923}{s^4 + 3.984 s^3 + 11 s^2 + 26.87 s + 0.4525}$$

$$\text{phi}_m: \frac{0.1125 s^2 + 0.01725 s - 0.8127}{s^4 + 3.984 s^3 + 11 s^2 + 26.87 s + 0.4525}$$

$$\text{p}_m: \frac{0.1152 s^3 + 0.02688 s^2 - 0.8092 s + 0.002449}{s^4 + 3.984 s^3 + 11 s^2 + 26.87 s + 0.4525}$$

$$\text{r}_m: \frac{-0.0584 s^3 - 0.2049 s^2 - 0.0739 s - 0.05211}{s^4 + 3.984 s^3 + 11 s^2 + 26.87 s + 0.4525}$$
Figura 25: Funciones de transferencia de δ_r .

2.3.2. Cálculo de polos y ceros (modos) del sistema

De forma idéntica a lo que se realizó para la dinámica longitudinal, obtenemos lo siguiente:

Continuous-time zero/pole/gain model.

Pole	Damping	Frequency (rad/seconds)	Time Constant (seconds)
-1.70e-02	1.00e+00	1.70e-02	5.90e+01
-3.98e-01 + 2.87e+00i	1.37e-01	2.90e+00	2.51e+00
-3.98e-01 - 2.87e+00i	1.37e-01	2.90e+00	2.51e+00
-3.17e+00	1.00e+00	3.17e+00	3.15e-01

Figura 26: Polos de la matriz (A).

Así pues, se pueden observar los siguientes modos:

- **Modo espiral (SP):** Es el autovalor real que tiene menor módulo.
- **Modo convergencia de balance (RC):** Se trata del otro autovalor real.
- **Modo balanceo del holandés (DR):** Consta de los dos autovalores complejos conjugados.

Si se calculan directamente, sale:

```
ans =
| -3.1714 + 0.0000i
  -0.3977 + 2.8730i
  -0.3977 - 2.8730i
  -0.0170 + 0.0000i
```

Figura 27: Autovalores de la matriz (A).

2.3.3. Determinación de los términos exponenciales y constantes de tiempo asociados a cada modo

Tal y como se hizo en el modo longitudinal, se van a calcular los términos exponenciales asociados, que son los siguientes:

```
ans =  
  
exp(-(53*t)/3125)  
  
ans =  
  
(4000*132060719^(1/2)*exp(-(1591*t)/4000)*sin((132060719^(1/2)*t)/4000))/132060719  
  
ans =  
  
exp(-(3171*t)/1000)
```

Figura 28: Términos exponenciales asociados.

2.3.4. Variación del orden del vector de estado

Siguiendo un proceso análogo al de la dinámica longitudinal, para un cambio en el vector de estado de forma que quede $[p \ r \ \beta \ \phi]$, las matrices A y B para la dinámica lateral quedarían:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0,0470 \\ 0 & -3,2574 & -28,2010 & 0,6348 \\ 0,0640 & 0,0469 & -0,2723 & -0,9918 \\ 0 & -0,0335 & 7,2278 & -0,4542 \end{pmatrix} \quad (24)$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -0,6222 & 0,1152 \\ 0,0002 & 0,0007 \\ -0,0268 & -0,0584 \end{pmatrix} \quad (25)$$

2.3.5. Efecto sobre la validez del modelo lineal si se varía el ángulo β

Se pide analizar si el modelo lineal sería adecuado para dos casos distintos, con 3 % y 30 % de variación del ángulo de deslizamiento lateral, β , respectivamente.

En el caso de 3 % grados, probablemente el sistema seguiría siendo válido, ya que se trata de una variación muy pequeña.

No se podría decir lo mismo del segundo caso, que muy posiblemente cambiaría por completo la dinámica de la aeronave y ya no sería válido este modelo.