INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES TOULOUSE

Martingales

4GMM

Définitions et Premières Propriétés

2020-2021

Université de Toulouse

INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES TOULOUSE

Exemple introductif

Rappels de Théorie de la Mesure

Définitions et Propriétés

Martingales de Carré Intégrable

Théorèmes d'Arrêt

Université de Toulouse

Introduction

Le terme **martingale** désigne une stratégie assurant des gains à un jeux de hasard.

https://fr.wikipedia.org/wiki/Martingale

En mathématiques, cette stratégie se traduit par **suite de variables aléatoires**.

Cet objet constitue le second cas (avec les chaines de Markov) où l'on peut traiter le cas de dépendance entre variable aléatoires.

Un exemple introductif

On joue à pile ou face:

$$\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(X = -1).$$

- $+1$ correspond à "gagné"
- -1 correspond à "perdu".

Un exemple introductif

On joue à pile ou face:

$$\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(X = -1).$$

- $+1$ correspond à "gagné"
- -1 correspond à "perdu".

Avant chaque lancé, on place sa mise,

- si on gagne, on double la mise
- si on perd, on perd la mise.

Un exemple introductif

On joue à pile ou face:

$$\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(X = -1).$$

- $+1$ correspond à "gagné"
- -1 correspond à "perdu".

Avant chaque lancé, on place sa mise,

- si on gagne, on double la mise
- si on perd, on perd la mise.

Stratégie:

Doubler sa mise tant qu'on perd. On arrête de miser dès qu'on a gagné.

Tableau de Gains

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES TOULOUSE

Modélisation mathématique

- Chaque lancé est modélisé par une variable aléatoire X_n:

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(X_n = -1).$$

Modélisation mathématique

- Chaque lancé est modélisé par une variable aléatoire X_n:

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(X_n = -1).$$

- On note W_n la fortune après n lancés, $W_0 = 0$ par convention.

Modélisation mathématique

- Chaque lancé est modélisé par une variable aléatoire X_n:

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(X_n = -1).$$

- On note W_n la fortune après n lancés, $W_0 = 0$ par convention.

On va montrer :

$$(W_n)_{n\geq 0} \text{ est une } \textbf{martingale}.$$

Gains au temps n

Propriété 1:

Pour chaque $n \geq 0$, on a $W_n \in \{1, -2^n + 1\}$.

INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES TOULOUSE

Gains au temps n

Propriété 1:

Pour chaque $n \geq 0$, on a $W_n \in \{1, -2^n + 1\}$.

- Si on gagne a n^e lancé:

$$W_n = 2^n - (1 + 2 + \cdots + 2^{n-1})$$

Gains au temps n

Propriété 1:

Pour chaque $n \geq 0$, on a $W_n \in \{1, -2^n + 1\}$.

- Si on gagne a n^e lancé:

$$\begin{aligned} W_n &= 2^n - (1 + 2 + \cdots + 2^{n-1}) \\ &= 2^n - \frac{1 - 2^n}{1 - 2} = 1 \end{aligned}$$

Gains au temps n

Propriété 1:

Pour chaque $n \geq 0$, on a $W_n \in \{1, -2^n + 1\}$.

- Si on gagne a n^e lancé:

$$\begin{aligned} W_n &= 2^n - (1 + 2 + \cdots + 2^{n-1}) \\ &= 2^n - \frac{1 - 2^n}{1 - 2} = 1 \end{aligned}$$

- Si on perd au n^e lancé:

$$W_n = -(1 + 2 + \cdots + 2^{n-1})$$

Gains au temps n

Propriété 1:

Pour chaque $n \geq 0$, on a $W_n \in \{1, -2^n + 1\}$.

- Si on gagne a n^e lancé:

$$\begin{aligned} W_n &= 2^n - (1 + 2 + \cdots + 2^{n-1}) \\ &= 2^n - \frac{1 - 2^n}{1 - 2} = 1 \end{aligned}$$

- Si on perd au n^e lancé:

$$\begin{aligned} W_n &= -(1 + 2 + \cdots + 2^{n-1}) \\ &= -\frac{1 - 2^n}{1 - 2} = -2^n + 1 \end{aligned}$$

Filtration et information

On note $\mathcal{F}_n = \sigma(X_k, k \leq n)$, c'est à dire, tous les événements impliquant $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Filtration et information

On note $\mathcal{F}_n = \sigma(X_k, k \leq n)$, c'est à dire, tous les événements impliquant $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

- C'est donc toute l'information disponible à l'instant n:

Filtration et information

On note $\mathcal{F}_n = \sigma(X_k, k \leq n)$, c'est à dire, tous les événements impliquant $X_1, X_2, \dots, X_n$.

- C'est donc toute l'information disponible à l'instant n:

Exemple:

L'événement

$$\{\text{on a perdu les 3 premiers lancés}\}$$

s'écrit

$$\{X_1 = -1, X_2 = -1, X_3 = -1\},$$

donc appartient à $\mathcal{F}_3$

INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES TOULOUSE

Filtration et information

On note $\mathcal{F}_n = \sigma(X_k, k \leq n)$, c'est à dire, tous les événements impliquant $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

- C'est donc toute l'information disponible à l'instant n:

Exemple:

L'événement

$$\{\text{on a perdu les 3 premiers lancés}\}$$

s'écrit

$$\{X_1 = -1, X_2 = -1, X_3 = -1\},$$

donc appartient à $\mathcal{F}_3$

Propriété 2:

Pour chaque $n \geq 0$, on a $\mathbb{E}(W_{n+1}|\mathcal{F}_n) = W_n$.

Espérance conditionnelle

- Si $W_n = 1$, on a gagné à l'étape n, et donc le jeux s'est arrêté, le gain n'a pas changé:

$$W_{n+1} = W_n,$$

Espérance conditionnelle

- Si $W_n = 1$, on a gagné à l'étape n, et donc le jeux s'est arrêté, le gain n'a pas changé:

$$W_{n+1} = W_n,$$

donc en particulier, $\mathbb{E}(W_{n+1}|W_n = 1) = 1 = W_n$.

Espérance conditionnelle

- Si $W_n = 1$, on a gagné à l'étape n, et donc le jeux s'est arrêté, le gain n'a pas changé:

$$W_{n+1} = W_n,$$

donc en particulier, $\mathbb{E}(W_{n+1}|W_n = 1) = 1 = W_n$.

- Si $W_n = -2^n + 1$, comme $W_{n+1} \in \{1, -2^{n+1} + 1\}$

Espérance conditionnelle

- Si $W_n = 1$, on a gagné à l'étape n, et donc le jeux s'est arrêté, le gain n'a pas changé:

$$W_{n+1} = W_n,$$

donc en particulier, $\mathbb{E}(W_{n+1} | W_n = 1) = 1 = W_n$.

- Si $W_n = -2^n + 1$, comme $W_{n+1} \in \{1, -2^{n+1} + 1\}$, son espérance s'écrit:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(W_{n+1} | W_n = -2^n + 1) \\ = \; & 1 \times \mathbb{P}(W_{n+1} = 1 | W_n = -2^n + 1) \\ & +(-2^{n+1} + 1) \times \mathbb{P}(W_{n+1} = -2^{n+1} + 1 | W_n = -2^n + 1) \end{aligned}$$

Espérance conditionnelle

Maintenant, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(W_{n+1} = 1 | W_n = -2^n + 1) &= \mathbb{P}(\text{gagné}) = \frac{1}{2} \\
\mathbb{P}(W_{n+1} = -2^{n+1} + 1 | W_n = -2^n + 1) &= \mathbb{P}(\text{perdu}) = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Espérance conditionnelle

Maintenant, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(W_{n+1} = 1 | W_n = -2^n + 1) &= \mathbb{P}(\text{gagné}) = \frac{1}{2}\\ \mathbb{P}(W_{n+1} = -2^{n+1} + 1 | W_n = -2^n + 1) &= \mathbb{P}(\text{perdu}) = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Donc le calcul d'espérance donne:

$$\mathbb{E}(W_{n+1} | W_n = -2^n + 1) = \frac{1}{2}(1 - 2^{n+1} + 1) = -2^n + 1$$

Espérance conditionnelle

Maintenant, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(W_{n+1} = 1 | W_n = -2^n + 1) &= \mathbb{P}(\text{gagné}) = \frac{1}{2}\\ \mathbb{P}(W_{n+1} = -2^{n+1} + 1 | W_n = -2^n + 1) &= \mathbb{P}(\text{perdu}) = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Donc le calcul d'espérance donne:

$$\mathbb{E}(W_{n+1} | W_n = -2^n + 1) = \frac{1}{2}(1 - 2^{n+1} + 1) = -2^n + 1$$

Conclusion

Dans les deux cas, on a bien $\mathbb{E}(W_{n+1} | \mathcal{F}_n) = W_n$.

Intuition d'une martingale:

La **filtration** $\mathcal{F}_n$ représente l'information disponible au temps présent.

Une **martingale** est une suite de variables aléatoires telles que, étant donné les information à l'instant n, en moyenne, ne fait pas pire à l'instant d'après.

En d'autre termes, le présent est la **meilleure approximation** du futur.

Résultat principaux

- Théorèmes d'arrêt:
  Valeur de $\mathbb{E}(W_T)$, où T est un **temps d'arret**, un instant aléatoire

- Théorèmes de convergence de martingales:
  Permet d'obtenir des résultats en **optimisation stochastique**, machine learning etc.

- Inégalité maximales
  Généralisation de **l'inégalité de Markov**

- Loi des grand nombres et théorèmes central limite
  Ouverture sur les **statistiques, la finance et l'assurance**.

Exemple introductif

Rappels de Théorie de la Mesure

Définitions et Propriétés

Martingales de Carré Intégrable

Théorèmes d'Arrêt

Tribus et mesurabilité

Soit Ω un ensemble et $\mathcal{F}$ une famille de parties de Ω. On dit que $\mathcal{F}$ est **une tribu** (sur Ω) si:

- $\Omega \in \mathcal{F}$.
- $\forall A \in \mathcal{F}$, on a $A^c \in \mathcal{F}$, où A^c désigne le complémentaire de A (stabilité par passage au complémentaire).
- pour toute famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Ω satisfaisant $\forall n,\ A_n \in \mathcal{F}$, alors $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$ (stabilité par union dénombrable).

Tribu engendrée

Soit $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (E, \mathcal{E})$, une variable aléatoire.

On appelle **tribu engendrée** par X et on note $\sigma(X)$:

$$\begin{aligned}
\sigma(X) &:= \sigma\left(\{X^{-1}(B) : B \in \mathcal{E}\}\right) \\
&= \sigma\left(\{\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \,;\, B \in \mathcal{E}\}\right) \\
&= \sigma\left(\{\{X \in B\} \,;\, B \in \mathcal{E}\}\right),
\end{aligned}$$

Il s'agit donc de la **plus petite tribu** sur Ω rendant X mesurable.

Tribu engendrée

Si $X_1, \ldots, X_n : (\Omega, \mathcal{F}) \to (E, \mathcal{E})$, alors on définit la tribu engendrée par ces v.a. comme

$$\sigma(X_1, \ldots, X_n) := \sigma\left(\{\cap_{i=1}^n \{X_i \in B_i\} \,;\, B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{E}\}\right).$$

Theorem

Étant données des v.a.r. $X_1, \ldots, X_n$, une autre v.a.r. Y est $\sigma(X_1, \ldots, X_n)$-mesurable si et seulement s'il exite une fonction borélienne $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que $Y = h(X_1, \ldots, X_n)$.

INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES TOULOUSE

Espace L^p

On définit l'espace vectoriel:

$$L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) := \left\{ \text{ v.a. } X : \|X\|_{L^p} := \mathbb{E}\left[|X|^p\right]^{1/p} < +\infty \right\},$$

Maintenant, si $\mathcal{F}$ est une sous tribu de $\mathcal{A}$, alors,

$$L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \text{ est un sous espace de } L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$$

En particulier, si $p = 2$, ces espaces vectoriels sont des espaces de Hilbert.

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) = \text{ projection orthogonale de } X \text{ sur } L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}).$$

Espérance conditionnelle

Theorem

Soit X une v.a. appartenant à l'espace L^2 (respectivement à L^1) et soit $\mathcal{F}$ une sous-tribu quelconque de $\mathcal{A}$.
Alors il existe une v.a. Y dans $L^2(\mathcal{F})$ (resp. dans $L^1(\mathcal{F})$), unique à équivalence près, telle que pour toute v.a. $Z \in L^2(\mathcal{F})$ (resp. tout événement $A \in \mathcal{F}$),

$$\mathbb{E}[XZ] = \mathbb{E}[YZ] \quad (\text{resp.} \quad \mathbb{E}[X1_A] = \mathbb{E}[Y1_A]).$$

On note $Y = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]$: c'est l'espérance conditionnelle de X sachant la tribu $\mathcal{F}$.

INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES TOULOUSE

Propriétés de l'Espérance Conditionnelle

- Si $X \geq 0$ p.s. alors $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] \geq 0$ p.s.
- L'application $X \to \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]$ est linéaire.
- (Inégalité de Jensen) Si $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe telle que $\mathbb{E}[|\varphi(X)|] < +\infty$, alors on a l'inégalité p.s.,

$$\varphi(\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]) \leq \mathbb{E}[\varphi(X) \mid \mathcal{F}].$$

- (Inégalité de Hölder) Soient X, Y deux v.a. respectivement dans L^p et L^q, où p et q vérifient $1/p + 1/q = 1$ avec $p, q > 1$. Alors on a l'inégalité p.s.,

$$|\mathbb{E}[XY \mid \mathcal{F}]| \leq (\mathbb{E}[|X|^p \mid \mathcal{F}])^{1/p} (\mathbb{E}[|Y|^q \mid \mathcal{F}])^{1/q}.$$

Pour $p = q = 2$ c'est la célèbre inégalité de Cauchy-Schwarz.

Propriétés de l'Espérance Conditionnelle

- (Convergence monotone) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de v.a. positives, tendant p.s. vers une v.a. X. Alors on a la convergence p.s.

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}] = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}].$$

- (Lemme de Fatou) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. positives. Alors p.s.,

$$\mathbb{E}[\liminf_{n\to+\infty} X_n \mid \mathcal{F}] \leq \liminf_{n\to+\infty} \mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}].$$

- (Convergence dominée) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. tendant p.s. vers une v.a. X et telles que $\sup_{n\in\mathbb{N}} |X_n| \leq V \in L^1$. Alors p.s.,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}] = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}].$$

Propriétés de l'Espérance Conditionnelle

- $\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{F}\right]\right] = \mathbb{E}\left[X\right]$.
- Si les tribus $\sigma(X)$ et $\mathcal{F}$ sont indépendantes, alors $\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{F}\right] = \mathbb{E}\left[X\right]$.
- Si X est $\mathcal{F}$-mesurable, alors $\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{F}\right] = X$.
- Si $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ alors $\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{F}\right] \mid \mathcal{G}\right] = \mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right]$.
- Si Y est une v.a. $\mathcal{F}$-mesurable
$$\mathbb{E}\left[XY \mid \mathcal{F}\right] = Y\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{F}\right].$$
- Si X est $\mathcal{F}$-mesurable et Y indépendante de $\mathcal{F}$,
$$\mathbb{E}[h(X,Y) \mid \mathcal{F}] = H(X), \qquad \text{avec} \qquad H(x) = \mathbb{E}\left[h(x,Y)\right].$$

Exercice

On lance deux pièces, et on définit les variables aléatoires:

$$\begin{aligned} X &= 1 \text{ si le 1er lancer est face} \\ Y &= \text{le nombre de face sur les deux lancers} \end{aligned}$$

Combien vaut $\mathbb{E}(X|Y)$?

Solution

Filtration

Une suite $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-tribus de $\mathcal{A}$ est appelée une filtration de l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ si

$$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_n \subset \cdots \subset \mathcal{A}.$$

Filtration

Une suite $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-tribus de $\mathcal{A}$ est appelée une filtration de l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ si

$$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_n \subset \cdots \subset \mathcal{A}.$$

L'espace $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}, \mathbb{P})$ est alors appelé un espace de probabilité filtré.

Filtration

Une suite $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-tribus de $\mathcal{A}$ est appelée une filtration de l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ si

$$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_n \subset \cdots \subset \mathcal{A}.$$

L'espace $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}, \mathbb{P})$ est alors appelé un espace de probabilité filtré.

Interprétation

$\mathcal{F}_n$ est toute l'information disponible à l'étape n.

Filtration

Une suite $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-tribus de $\mathcal{A}$ est appelée une filtration de l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ si

$$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_n \subset \cdots \subset \mathcal{A}.$$

L'espace $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}, \mathbb{P})$ est alors appelé un espace de probabilité filtré.

Interprétation

$\mathcal{F}_n$ est toute l'information disponible à l'étape n.

Example

Si $(X_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Bernoulli représentant des lancers d'une pièce successif,

$$\mathcal{F}_n = \sigma(X_k, k \leq n) \text{ est une filtration.}$$

Filtration

Une suite $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-tribus de $\mathcal{A}$ est appelée une filtration de l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ si

$$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_n \subset \cdots \subset \mathcal{A}.$$

L'espace $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}, \mathbb{P})$ est alors appelé un espace de probabilité filtré.

Interprétation

$\mathcal{F}_n$ est toute l'information disponible à l'étape n.

Example

Si $(X_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Bernoulli représentant des lancers d'une pièce successif,

$$\mathcal{F}_n = \sigma(X_k, k \leq n) \text{ est une filtration.}$$

$\mathcal{F}_n$ représente tous les résultats possibles de n lancers successifs.

Definition Martingale

Definition

Considérons un processus $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **intégrable et adapté** à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On dit que le processus $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une

- martingale si $\mathbb{E}[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = M_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- surmartingale si $\mathbb{E}[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] \leq M_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- sous-martingale si $\mathbb{E}[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] \geq M_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Definition Martingale

Definition

Considérons un processus $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **intégrable et adapté** à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
On dit que le processus $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une

- martingale si $\mathbb{E}[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = M_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- surmartingale si $\mathbb{E}[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] \leq M_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- sous-martingale si $\mathbb{E}[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] \geq M_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque

Le processus intégrable $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et adapté à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale si et seulement si $\forall A \in \mathcal{F}_n$,

$$\mathbb{E}\left[M_{n+1}1_A\right] = \mathbb{E}\left[M_n 1_A\right].$$

Examples de Martingales

- Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de v.a. indépendantes et **intégrables** telles que $\mathbb{E}[X_n]=0$, alors le processus
$$S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i$$
est une martingale pour $\mathcal{F}_n=\sigma(X_k, k\le n)$.
- Même conclusion pour le processus
$$M_n := S_n^2 - n\sigma^2,$$
sous réserve que les X_i ont même variance σ^2.
- Même conclusion, si $\mathbb{E}[X_n]=1$, pour le processus
$$M_n := \prod_{i=1}^{n} X_i$$
est une martingale.

Preuve

Examples de Martingales

- Si $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est tel que:
  - intégrable: $\forall n \geq 0$, $\mathbb{E}|M_n| < +\infty$,
  - centré: $\forall n \geq 0$, $\mathbb{E}[M_n] = 0$,
  - à accroissements indépendants: $(M_{n+1} - M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forme une suite de v.a. indépendantes,

  alors c'est une martingale par rapport à sa filtration naturelle.

- Si $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une filtration quelconque et X une v.a. intégrable, alors $M_n := \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_n]$ est une martingale pour $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Preuve

INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES TOULOUSE

Propriétés

- L'opposé d'une surmartingale est une sous-martingale, et inversement.
- La somme de deux surmartingales (resp. sous-martingales) est une surmartingale (resp. sous-martingale).
- L'ensemble des martingales forme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
- Si l'on compose une martingale avec une fonction convexe, on obtient une sous-martingale (sous l'hypothèse d'intégrabilité).

Exercice

Exercice

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. i.i.d., supposées intégrables, d'espérance commune m, et notons $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sa filtration naturelle. Que peut-on dire du processus $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ défini par

$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} iX_i - \frac{n(n+1)}{2} \times m, \quad n \in \mathbb{N}^* \,?$$

Solution

Propriétés

Proposition

Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un processus intégrable et adapté à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors c'est une martingale si et seulement si pour tous $n, p \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}[M_{n+p} \mid \mathcal{F}_n] = M_n.$$

On a le même résultat lorsque $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous ou surmartingale (remplacer l'égalité par l'inégalité qui convient).

Preuve:

Décomposition de Doob

Definition

On dit que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est prévisible pour une filtration $\mathcal{F}_n$ si A_{n+1} est $\mathcal{F}_n$ mesurable.

Theorem

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-martingale. Alors, il existe une unique martingale $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et un unique processus croissant prévisible $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, intégrable et issu de 0, tels que

$$X_n = M_n + A_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Preuve: Existence

On construit récursivement les variables $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned} M_n &= M_{n-1} + X_n - X_{n-1} - \mathbb{E}[X_n - X_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}],\ M_0 = X_0 \\ A_n &= A_{n-1} + \mathbb{E}[X_n - X_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}],\ A_0 = 0 \end{aligned}$$

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES TOULOUSE

Preuve: Existence

On construit récursivement les variables $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned} M_n &= M_{n-1} + X_n - X_{n-1} - \mathbb{E}[X_n - X_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}],\ M_0 = X_0 \\ A_n &= A_{n-1} + \mathbb{E}[X_n - X_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}],\ A_0 = 0 \end{aligned}$$

On vérifie aisément que

- $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale par construction
- $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un processus croissant, prévisible et intégrable.

INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES TOULOUSE

Preuve: Existence

On construit récursivement les variables $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned} M_n &= M_{n-1} + X_n - X_{n-1} - \mathbb{E}[X_n - X_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}], \ M_0 = X_0 \\ A_n &= A_{n-1} + \mathbb{E}[X_n - X_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}], \ A_0 = 0 \end{aligned}$$

On vérifie aisément que

- $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale par construction
- $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un processus croissant, prévisible et intégrable.

Clairement:

$$X_n = M_n + A_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Preuve: Unicité

Supposons qu'il existe deux couples de processus:

- $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$, martingale et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prévisible croissant
- $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$, martingale et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prévisible croissant.

vérifiant la conclusion.

Preuve: Unicité

Supposons qu'il existe deux couples de processus:

- $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$, martingale et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prévisible croissant
- $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$, martingale et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prévisible croissant.

vérifiant la conclusion. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n = M_n + A_n = N_n + B_n,$$

Preuve: Unicité

Supposons qu'il existe deux couples de processus:

- $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$, martingale et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prévisible croissant
- $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$, martingale et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prévisible croissant.

vérifiant la conclusion. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n = M_n + A_n = N_n + B_n,$$

on a que

$$M_n - N_n = B_n - A_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Preuve: Unicité

Ainsi, le processus $(B_n - A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **martingale** et l'on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}[B_{n+1} - A_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = B_n - A_n.$$

Preuve: Unicité

Ainsi, le processus $(B_n - A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **martingale** et l'on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}[B_{n+1} - A_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = B_n - A_n.$$

Or les processus $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant supposés **prévisibles**, on a

$$\mathbb{E}[B_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = B_{n+1} \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[A_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = A_{n+1}.$$

Preuve: Unicité

Ainsi, le processus $(B_n - A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **martingale** et l'on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}[B_{n+1} - A_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = B_n - A_n.$$

Or les processus $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant supposés **prévisibles**, on a

$$\mathbb{E}[B_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = B_{n+1} \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[A_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = A_{n+1}.$$

Autrement dit, le processus $(B_n - A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **constant** et vaut donc

$$B_0 - A_0 = 0.$$

Preuve: Unicité

Ainsi, le processus $(B_n - A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **martingale** et l'on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}[B_{n+1} - A_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = B_n - A_n.$$

Or les processus $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant supposés **prévisibles**, on a

$$\mathbb{E}[B_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = B_{n+1} \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[A_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = A_{n+1}.$$

Autrement dit, le processus $(B_n - A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **constant** et vaut donc

$$B_0 - A_0 = 0.$$

Ainsi, les processus $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ coïncident et donc les processus $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aussi.

Exercice

Exercice

Montrez qu'une sous-martingale (ou surmartingale) d'espérance constante est en fait une martingale.

Solution

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES TOULOUSE

Transformation prévisible

Definition

Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une martingale et soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un processus prévisible. La **transformation prévisible** de la martingale $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par le processus $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est définie par le processus donné par:

$$\widetilde{M}_n := M_0 + \sum_{i=1}^{n} A_i\,(M_i - M_{i-1}), \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Theorem

Si les v.a. A_n sont **bornées**, *alors $(\widetilde{M}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale.*

Remarques: Notations

Dans la littérature, on peut trouver la notation $(A \cdot M)_n$ qui reprend explicitement la dépendance en le processus prévisible A.

INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES TOULOUSE

Transformation prévisible

- $(\widetilde{M}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **adapté** par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

Transformation prévisible

- $(\widetilde{M}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **adapté** par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$,
- Les A_n bornés assurent **l'intégrabilité** des éléments $\widetilde{M}_n$.

Transformation prévisible

- $(\widetilde{M}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **adapté** par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$,
- Les A_n bornés assurent **l'intégrabilité** des éléments $\widetilde{M}_n$.
- Étant donné un entier n, on a par la prévisibilité de A_{n+1},

$$\mathbb{E}\left[\widetilde{M}_{n+1} - \widetilde{M}_n \mid \mathcal{F}_n\right] = \mathbb{E}\left[A_{n+1}(M_{n+1} - M_n) \mid \mathcal{F}_n\right]$$

Transformation prévisible

- $(\widetilde{M}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **adapté** par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$,
- Les A_n bornés assurent **l'intégrabilité** des éléments $\widetilde{M}_n$.
- Étant donné un entier n, on a par la prévisibilité de A_{n+1},

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\widetilde{M}_{n+1} - \widetilde{M}_n \mid \mathcal{F}_n\right] &= \mathbb{E}\left[A_{n+1}(M_{n+1} - M_n) \mid \mathcal{F}_n\right] \\ &= A_{n+1}\,\mathbb{E}\left[M_{n+1} - M_n \mid \mathcal{F}_n\right]\end{aligned}$$

INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES TOULOUSE

Transformation prévisible

- $(\widetilde{M}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **adapté** par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$,
- Les A_n bornés assurent **l'intégrabilité** des éléments $\widetilde{M}_n$.
- Étant donné un entier n, on a par la prévisibilité de A_{n+1},

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\widetilde{M}_{n+1} - \widetilde{M}_n \mid \mathcal{F}_n\right] &= \mathbb{E}\left[A_{n+1}(M_{n+1} - M_n) \mid \mathcal{F}_n\right] \\ &= A_{n+1}\,\mathbb{E}\left[M_{n+1} - M_n \mid \mathcal{F}_n\right] \\ &= 0,\end{aligned}$$

car $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale.

Exemple introductif

Rappels de Théorie de la Mesure

Définitions et Propriétés

Martingales de Carré Intégrable

Théorèmes d'Arrêt

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES TOULOUSE

Définition: Carré intégrable

Definition

Un processus $(X_n)_{n\geq 0}$ est dit de carré intégrable si

$$\forall n \geq 0,\ \mathbb{E}[|X_n|^2] < +\infty.$$

Définition: Carré intégrable

Definition

Un processus $(X_n)_{n\geq 0}$ est dit de carré intégrable si

$$\forall n \geq 0,\ \mathbb{E}[|X_n|^2] < +\infty.$$

Remarque:

Plus tard, nous utiliserons la notion de **borné dans** L^2:

$$\sup_{n\geq 0} \mathbb{E}[|X_n|^2] < +\infty$$

INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES TOULOUSE

Définition: Carré intégrable

Definition

Un processus $(X_n)_{n\geq 0}$ est dit de carré intégrable si

$$\forall n \geq 0,\ \mathbb{E}[|X_n|^2] < +\infty.$$

Remarque:

Plus tard, nous utiliserons la notion de **borné dans** L^2:

$$\sup_{n\geq 0} \mathbb{E}[|X_n|^2] < +\infty$$

Clairement:

$$\text{Borné dans } L^2 \Rightarrow \text{ de carré intégrable}$$

Université de Toulouse

INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES TOULOUSE

Exemple:

Si X_i sont *i.i.d.* avec $\mathbb{E}[|X_i|^2] = \sigma^2$, alors, la marche aléatoire:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \text{ avec } X_i \quad i.i.d.$$

est de **carré intégrable**

Exemple:

Si X_i sont *i.i.d.* avec $\mathbb{E}[|X_i|^2] = \sigma^2$, alors, la marche aléatoire:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \text{ avec } X_i \ \ i.i.d.$$

est de **carré intégrable**

Preuve: On a:

$$\mathbb{E}[|S_n|^2] \leq C \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[|X_i|^2] = Cn\sigma^2 < +\infty$$

Notons que $(S_n)_{n\geq 0}$ n'est pas borné dans L^2.

Lien avec la transformation prévisible

Theorem

Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ *un processus prévisible et* $(M_n)_{n\geq 0}$ *une* **martingale de carré intégrable**.

Alors la transformation prévisible $\Big((A\cdot M)_n\Big)_{n\geq 0}$ *est une* **martingale de carré intégrable**.

Lien avec la transformation prévisible

Theorem

Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ un processus prévisible et $(M_n)_{n\geq 0}$ une **martingale de carré intégrable**.

Alors la transformation prévisible $\left((A\cdot M)_n\right)_{n\geq 0}$ est une **martingale de carré intégrable**.

Remarque

La transformation prévisible est la version discrète d'un outil fondamental en théorie des probabilités: **l'intégrale d'Itô**.

Exemple

Utilisation:

Ce théorème permet de prouver facilement que certaines variables aléatoires sont des martingales.

Exemple

Utilisation:

Ce théorème permet de prouver facilement que certaines variables aléatoires sont des martingales.

Soit $(X_i)_{i\geq 0}$ une suite de variables aléatoires *i.i.d.*, telle que

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = \frac{1}{2}.$$

Montrer que

$$M_n = \sum_{k=1}^{n} X_{k-1}X_k \text{ est une martingale de carré intégrable.}$$

Solution

Solution

- La filtration qu'on considère est

$$\mathcal{F}_n = \sigma(X_k, k \leq n).$$

Solution

- La filtration qu'on considère est

$$\mathcal{F}_n = \sigma(X_k, k \leq n).$$

- On sait déjà que $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ est une martingale de carré intégrable, puisque les X_i ont un moment d'ordre 2.

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES TOULOUSE

Solution

- La filtration qu'on considère est

$$\mathcal{F}_n = \sigma(X_k, k \leq n).$$

- On sait déjà que $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ est une martingale de carré intégrable, puisque les X_i ont un moment d'ordre 2.

- Si on prend $A_n = X_{n+1}$, alors la suite $(A_n)_{n \geq 0}$ est prévisible.

Solution

Enfin, on a

$$M_n = \sum_{k=1}^{n} X_{k-1} X_k = \sum_{k=1}^{n} A_k \left(S_k - S_{k-1} \right).$$

Solution

Enfin, on a

$$M_n = \sum_{k=1}^{n} X_{k-1} X_k = \sum_{k=1}^{n} A_k \Big(S_k - S_{k-1} \Big).$$

Donc $(M_n)_{n\geq 0}$ est la transformation prévisible:

$$(M_n)_{n\geq 0} = \Big((A \cdot S)_n \Big)_{n\geq 0}$$

Solution

Enfin, on a

$$M_n = \sum_{k=1}^{n} X_{k-1} X_k = \sum_{k=1}^{n} A_k \Big(S_k - S_{k-1} \Big).$$

Donc $(M_n)_{n \geq 0}$ est la transformation prévisible:

$$(M_n)_{n \geq 0} = \Big((A \cdot S)_n \Big)_{n \geq 0}$$

Mais $(S_n)_{n \geq 0}$ est de carré intégrable,

Solution

Enfin, on a

$$M_n = \sum_{k=1}^{n} X_{k-1} X_k = \sum_{k=1}^{n} A_k \Big(S_k - S_{k-1} \Big).$$

Donc $(M_n)_{n\geq 0}$ est la transformation prévisible:

$$(M_n)_{n\geq 0} = \Big((A \cdot S)_n \Big)_{n\geq 0}$$

Mais $(S_n)_{n\geq 0}$ est de carré intégrable,

Donc $(M_n)_{n\geq 0}$ est une martingale de carré intégrable.

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES TOULOUSE

Variation Quadratique

Theorem

Soit $(M_n)_{n\geq 0}$ *une martingale* **de carré intégrable**.
Il existe un unique processus croissant, prévisible, intégrable, issu de 0 noté $\left([M,M]_n\right)_{n\geq 0}$ *tel que*

$$M_n^2 - [M,M]_n$$

est une martingale.

Variation Quadratique

Theorem

Soit $(M_n)_{n\geq 0}$ une martingale **de carré intégrable**.
Il existe un unique processus croissant, prévisible, intégrable, issu de 0 noté $\Big([M,M]_n\Big)_{n\geq 0}$ tel que

$$M_n^2 - [M,M]_n$$

est une martingale.

On appelle ce processus la **variation quadratique** et on a:

$$[M,M]_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\Big[(M_i - M_{i-1})^2 | \mathcal{F}_{i-1}\Big]$$

Preuve: Existence

- $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant de carré intégrable

INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES TOULOUSE

Preuve: Existence

- $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant de carré intégrable
- Par Jensen, $(M_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-martingale

Preuve: Existence

- $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant de carré intégrable
- Par Jensen, $(M_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-martingale
- On a la décomposition de Doob:

$$M_n^2 = N_n + A_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

où $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, est un processus croissant prévisible, intégrable et issu de 0.

Preuve: Existence

- $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant de carré intégrable
- Par Jensen, $(M_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-martingale
- On a la décomposition de Doob:

$$M_n^2 = N_n + A_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

où $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, est un processus croissant prévisible, intégrable et issu de 0.

Ainsi, le processus $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ correspond à la **variation quadratique** $\left([M,M]_n\right)_{n\geq 0}$.

Preuve: Expression

Pour établir l'expression explicite, on invoque **l'unicité de la décomposition de Doob**.

INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES TOULOUSE

Preuve: Expression

Pour établir l'expression explicite, on invoque **l'unicité de la décomposition de Doob**. Il suffit de montrer que

$$N_n := M_n^2 - \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[(M_i - M_{i-1})^2 \mid \mathcal{F}_{i-1}\right] \text{ est une martingale.}$$

Université de Toulouse

Preuve: Expression

Pour établir l'expression explicite, on invoque **l'unicité de la décomposition de Doob**. Il suffit de montrer que

$$N_n := M_n^2 - \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[(M_i - M_{i-1})^2 \mid \mathcal{F}_{i-1}\right] \text{ est une martingale.}$$

Alors, on écrit:

$$\begin{aligned} N_{n+1} - N_n &= M_{n+1}^2 - \sum_{i=1}^{n+1} \mathbb{E}\left[(M_i - M_{i-1})^2 \mid \mathcal{F}_{i-1}\right] \\ & \quad - M_n^2 + \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[(M_i - M_{i-1})^2 \mid \mathcal{F}_{i-1}\right] \end{aligned}$$

INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES TOULOUSE

Preuve: Expression

Pour établir l'expression explicite, on invoque **l'unicité de la décomposition de Doob**. Il suffit de montrer que

$$N_n := M_n^2 - \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[(M_i - M_{i-1})^2 \mid \mathcal{F}_{i-1}\right] \text{ est une martingale.}$$

Alors, on écrit:

$$\begin{aligned} N_{n+1} - N_n &= M_{n+1}^2 - \sum_{i=1}^{n+1} \mathbb{E}\left[(M_i - M_{i-1})^2 \mid \mathcal{F}_{i-1}\right] \\ &\quad - M_n^2 + \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[(M_i - M_{i-1})^2 \mid \mathcal{F}_{i-1}\right] \\ &= M_{n+1}^2 - M_n^2 - \mathbb{E}[(M_{n+1} - M_n)^2 | F_n]. \end{aligned}$$

Preuve: Expression

En passant à l'espérance conditionnelle:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[N_{n+1} - N_n \mid \mathcal{F}_n] \\ = \quad & \mathbb{E}[M_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_n] - M_n^2 - \mathbb{E}\left[(M_{n+1} - M_n)^2 \mid \mathcal{F}_n\right]. \end{aligned}$$

Preuve: Expression

En passant à l'espérance conditionnelle:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[N_{n+1} - N_n \mid \mathcal{F}_n] \\ = \quad & \mathbb{E}[M_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_n] - M_n^2 - \mathbb{E}\left[(M_{n+1} - M_n)^2 \mid \mathcal{F}_n\right]. \end{aligned}$$

On développe:

$$\mathbb{E}\left[(M_{n+1} - M_n)^2 \mid \mathcal{F}_n\right] = \mathbb{E}\left[M_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_n\right] + M_n^2 - 2M_n \mathbb{E}\left[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right].$$

Preuve: Expression

En passant à l'espérance conditionnelle:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[N_{n+1} - N_n \mid \mathcal{F}_n] \\ = \quad & \mathbb{E}[M_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_n] - M_n^2 - \mathbb{E}\left[(M_{n+1} - M_n)^2 \mid \mathcal{F}_n\right]. \end{aligned}$$

On développe:

$$\mathbb{E}\left[(M_{n+1} - M_n)^2 \mid \mathcal{F}_n\right] = \mathbb{E}\left[M_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_n\right] + M_n^2 - 2M_n \mathbb{E}\left[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right].$$

Donc:

$$\mathbb{E}[N_{n+1} - N_n \mid \mathcal{F}_n] \quad = \quad -2M_n^2 + 2M_n \mathbb{E}\left[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right]$$

Preuve: Expression

En passant à l'espérance conditionnelle:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[N_{n+1} - N_n \mid \mathcal{F}_n] \\ = \quad & \mathbb{E}[M_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_n] - M_n^2 - \mathbb{E}\left[(M_{n+1} - M_n)^2 \mid \mathcal{F}_n\right]. \end{aligned}$$

On développe:

$$\mathbb{E}\left[(M_{n+1} - M_n)^2 \mid \mathcal{F}_n\right] = \mathbb{E}\left[M_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_n\right] + M_n^2 - 2M_n \mathbb{E}\left[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right].$$

Donc:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[N_{n+1} - N_n \mid \mathcal{F}_n] &= -2M_n^2 + 2M_n \mathbb{E}\left[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] \\ &= 0, \end{aligned}$$

car le processus $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une martingale.

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES TOULOUSE

Corollaire

Corollary

Si $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale de carré intégrable, alors on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}\left[(M_{n+1} - M_n)^2 \mid \mathcal{F}_n\right] = \mathbb{E}\left[M_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_n\right] - M_n^2.$$

Corollaire

Corollary

Si $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale de carré intégrable, alors on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}\left[(M_{n+1} - M_n)^2 \mid \mathcal{F}_n\right] = \mathbb{E}\left[M_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_n\right] - M_n^2.$$

Par ailleurs, en prenant l'espérance de la martingale $(M_n^2 - [M,M]_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on obtient

$$\mathbb{E}\left[M_n^2\right] = \mathbb{E}\left[M_0^2\right] + \mathbb{E}\Big[[M,M]_n\Big], \quad n \in \mathbb{N},$$

Corollaire

Corollary

Si $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale de carré intégrable, alors on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}\left[(M_{n+1}-M_n)^2 \mid \mathcal{F}_n\right] = \mathbb{E}\left[M_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_n\right] - M_n^2.$$

Par ailleurs, en prenant l'espérance de la martingale $(M_n^2 - [M,M]_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on obtient

$$\mathbb{E}\left[M_n^2\right] = \mathbb{E}\left[M_0^2\right] + \mathbb{E}\Big[[M,M]_n\Big], \quad n \in \mathbb{N},$$

et en particulier

$$\mathrm{Var}(M_n) = \mathrm{Var}(M_0) + \mathbb{E}\Big[[M,M]_n\Big], \quad n \in \mathbb{N},$$

Exemple

Question

Si $(X_i)_{i\geq 1}$ sont $i.i.d.$ telles que $\mathbb{E}(X_i) = 0$ et $\mathbb{E}(X_i^2) = \sigma^2$, quelle est la variation quadratique de

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Exemple

Question

Si $(X_i)_{i\geq 1}$ sont $i.i.d.$ telles que $\mathbb{E}(X_i) = 0$ et $\mathbb{E}(X_i^2) = \sigma^2$, quelle est la variation quadratique de

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Réponse

Or, on sait que

$$S_n^2 - n\sigma^2 \text{ est une martingale,}$$

Donc $[S,S]_n = n\sigma^2$.

Variation Quadratique et Transformation Prévisible

Theorem

Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une martingale de carré intégrable et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un processus prévisible. On note $\Big((A\cdot M)_n\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ la transformation prévisible associée.
Alors, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$[A\cdot M, A\cdot M]_n = \sum_{i=1}^{n} A_i^2\Big([M,M]_i - [M,M]_{i-1}\Big).$$

INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES TOULOUSE

Preuve:

On a $[A \cdot M, A \cdot M]_0 = 0$ par définition et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$[A \cdot M, A \cdot M]_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[(A \cdot M_i - A \cdot M_{i-1})^2 \mid \mathcal{F}_{i-1}\right]$$

Preuve:

On a $[A \cdot M, A \cdot M]_0 = 0$ par définition et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$[A \cdot M, A \cdot M]_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[(A \cdot M_i - A \cdot M_{i-1})^2 \mid \mathcal{F}_{i-1}\right]$$

Or, rappelons que

$$A \cdot M_k = M_0 + \sum_{i=1}^{k} A_i \left(M_i - M_{i-1}\right)$$

Preuve:

On a $[A \cdot M, A \cdot M]_0 = 0$ par définition et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$[A \cdot M, A \cdot M]_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[(A \cdot M_i - A \cdot M_{i-1})^2 \mid \mathcal{F}_{i-1}\right]$$

Or, rappelons que

$$A \cdot M_k = M_0 + \sum_{i=1}^{k} A_i \left(M_i - M_{i-1}\right)$$

Ainsi:

$$A \cdot M_k - A \cdot M_{k-1} = A_k \left(M_k - M_{k-1}\right)$$

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES TOULOUSE

Preuve:

Donc, on a:

$$[A \cdot M, A \cdot M]_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[A_i^2 (M_i - M_{i-1})^2 \mid \mathcal{F}_{i-1}\right]$$

Preuve:

Donc, on a:

$$
\begin{aligned}
[A \cdot M, A \cdot M]_n &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[A_i^2 (M_i - M_{i-1})^2 \mid \mathcal{F}_{i-1}\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} A_i^2 \mathbb{E}\left[(M_i - M_{i-1})^2 \mid \mathcal{F}_{i-1}\right]
\end{aligned}
$$

Preuve:

Donc, on a:

$$
\begin{aligned}
[A \cdot M, A \cdot M]_n &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[A_i^2 (M_i - M_{i-1})^2 \mid \mathcal{F}_{i-1}\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} A_i^2 \mathbb{E}\left[(M_i - M_{i-1})^2 \mid \mathcal{F}_{i-1}\right]
\end{aligned}
$$

car le processus $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est prévisible.

Preuve:

Donc, on a:

$$[A \cdot M, A \cdot M]_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[A_i^2 (M_i - M_{i-1})^2 \mid \mathcal{F}_{i-1}\right]$$
$$= \sum_{i=1}^{n} A_i^2 \mathbb{E}\left[(M_i - M_{i-1})^2 \mid \mathcal{F}_{i-1}\right]$$

car le processus $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est prévisible. Enfin,

$$[M, M]_i - [M, M]_{i-1} = \mathbb{E}\left[(M_i - M_{i-1})^2 \mid \mathcal{F}_{i-1}\right],$$

d'où le résultat désiré.

Exemple

Dans une exemple précédent, on a vu que

$$M_n = \sum_{k=1}^{n} X_{k-1} X_k = (A \cdot S)_n,$$

où $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ et $A_n = X_{n+1}$.

Exemple

Dans une exemple précédent, on a vu que

$$M_n = \sum_{k=1}^{n} X_{k-1} X_k = (A \cdot S)_n,$$

où $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ et $A_n = X_{n+1}$.

Alors, par le théorème précédent, on a

$$\begin{aligned} [M, M]_n &= \sum_{i=1}^{n} A_i^2 \Big([S, S]_i - [S, S]_{i-1} \Big) \\ &= \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sigma^2 \end{aligned}$$

INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES TOULOUSE

Exercice

On considère $(Y_i)_{i\geq 0}$ une suite de variables *i.i.d.* de loi:

$$\mathbb{P}(Y_i = -1) = \mathbb{P}(Y_i = 1) = \frac{1}{2}.$$

On note $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_k, k \leq n)$ et $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$ et on pose

$$M_n = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sgn}(S_{k-1}) Y_k, \text{ où}$$

1. Rappeler l'expression de $\Big([S,S]_n\Big)_{n\geq 0}$
2. Montrer que $(M_n)_{n\geq 0}$ est une martingale et calculer $\Big([M,M]_n\Big)_{n\geq 0}$.
3. Quelle est la décomposition de Doob de $(|S_n|)_{n\geq 0}$?

Solution

Définition, notations

On note:

$$\mathcal{F}_\infty := \sigma\left(\cup_{n\geq 0}\mathcal{F}_n\right).$$

Définition, notations

On note:

$$\mathcal{F}_\infty := \sigma\left(\cup_{n\geq 0}\mathcal{F}_n\right).$$

Interprétation

C'est la plus petite tribu contenant toute l'information.

Définition, notations

On note:

$$\mathcal{F}_\infty := \sigma\left(\cup_{n\geq 0}\mathcal{F}_n\right).$$

Interprétation

C'est la plus petite tribu contenant toute l'information.

Remarque

L'union de tribus n'est pas nécessairement une tribu, d'où le σ.

Temps d'Arrêt

Definition

Une v.a. entière τ, pouvant prendre la valeur $+\infty$, est un **temps d'arrêt** pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n.$$

Temps d'Arrêt

Definition

Une v.a. entière τ, pouvant prendre la valeur $+\infty$, est un **temps d'arrêt** pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n.$$

Interprétation

Un **temps d'arrêt** est un temps tel que l'événement $\{\tau \leq n\}$ est observable au temps n.

Temps d'Arrêt

Definition

Une v.a. entière τ, pouvant prendre la valeur $+\infty$, est un **temps d'arrêt** pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n.$$

Interprétation

Un **temps d'arrêt** est un temps tel que l'événement $\{\tau \leq n\}$ est observable au temps n.

Note

On peut remplacer $\{\tau \leq n\}$ par $\{\tau = n\}$.

Exemple: Le temps de ruine

- Un joueur entre dans un casino avec une somme S_0.
- On note S_n sa fortune après n paris.
- Le joueur joue tant qu'il a encore de l'argent.

Exemple: Le temps de ruine

- Un joueur entre dans un casino avec une somme S_0.
- On note S_n sa fortune après n paris.
- Le joueur joue tant qu'il a encore de l'argent.

Ainsi, le joueur joue jusqu'au temps aléatoire:

$$\tau := \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n = 0\}.$$

Exemple: Le temps de ruine

- Un joueur entre dans un casino avec une somme S_0.
- On note S_n sa fortune après n paris.
- Le joueur joue tant qu'il a encore de l'argent.

Ainsi, le joueur joue jusqu'au temps aléatoire:

$$\tau := \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n = 0\}.$$

Proposition

Alors, τ est un **temps d'arrêt** *pour la filtration naturelle de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$*

Preuve:

Il faut voir que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n.$$

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES TOULOUSE

Preuve:

Il faut voir que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n.$$

Mais si $\tau \leq n$, il existe un instant $i \leq n$ pour lequel $S_i = 0$:

$$\{\tau \leq n\} = \{\exists i \leq n; S_i = 0\}$$

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES TOULOUSE

Preuve:

Il faut voir que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n.$$

Mais si $\tau \leq n$, il existe un instant $i \leq n$ pour lequel $S_i = 0$:

$$\{\tau \leq n\} = \{\exists i \leq n; S_i = 0\} = \bigcup_{i=0}^{n} \{S_i = 0\}$$

INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES TOULOUSE

Preuve:

Il faut voir que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n.$$

Mais si $\tau \leq n$, il existe un instant $i \leq n$ pour lequel $S_i = 0$:

$$\{\tau \leq n\} = \{\exists i \leq n; S_i = 0\} = \bigcup_{i=0}^{n} \{S_i = 0\}$$

Chaque événement

$$\{S_i = 0\} \in \mathcal{F}_i$$

Preuve:

Il faut voir que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n.$$

Mais si $\tau \leq n$, il existe un instant $i \leq n$ pour lequel $S_i = 0$:

$$\{\tau \leq n\} = \{\exists i \leq n; S_i = 0\} = \bigcup_{i=0}^{n} \{S_i = 0\}$$

Chaque événement

$$\{S_i = 0\} \in \mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}_n \text{ car } (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0} \text{ est une filtration.}$$

INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES TOULOUSE

Preuve:

Il faut voir que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n.$$

Mais si $\tau \leq n$, il existe un instant $i \leq n$ pour lequel $S_i = 0$:

$$\{\tau \leq n\} = \{\exists i \leq n; S_i = 0\} = \bigcup_{i=0}^{n} \{S_i = 0\}$$

Chaque événement

$$\{S_i = 0\} \in \mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}_n \text{ car } (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0} \text{ est une filtration.}$$

Or, $\mathcal{F}_n$ est **stable par union dénombrable**, donc:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n.$$

Combinaison de Temps d'arrêt

Proposition

Soient τ_1 *et* τ_2 *deux temps d'arrêt. Alors,* $\min(\tau_1, \tau_2)$, $\max(\tau_1, \tau_2)$, $\tau_1 + \tau_2$, *sont des temps d'arrêt*

Combinaison de Temps d'arrêt

Proposition

Soient τ_1 *et* τ_2 *deux temps d'arrêt. Alors,* $\min(\tau_1, \tau_2)$, $\max(\tau_1, \tau_2)$, $\tau_1 + \tau_2$, *sont des temps d'arrêt*

Exemple

Le joueur du casino est un peu plus raisonnable, et décide de s'arrêter soit:

- lorsqu'il n'a plus d'argent,
- lorsqu'il atteint une somme $M > 0$ prédéterminée.

Le temps où le joueur s'arrête est un temps d'arrêt.

Preuve

On introduit:

$$\tau_0 = \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n = 0\} \text{ et } \tau_M = \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n = M\}$$

Preuve

On introduit:

$$\tau_0 = \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n = 0\} \text{ et } \tau_M = \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n = M\}$$

On a vu précédemment que τ_0 est un temps d'arrêt, et les mêmes arguments montrent que τ_M est également un temps d'arret.

Preuve

On introduit:

$$\tau_0 = \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n = 0\} \text{ et } \tau_M = \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n = M\}$$

On a vu précédemment que τ_0 est un temps d'arrêt, et les mêmes arguments montrent que τ_M est également un temps d'arret.

Le joueur s'arrête lorsque la première des deux conditions est satisfaite:

Preuve

On introduit:

$$\tau_0 = \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n = 0\} \text{ et } \tau_M = \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n = M\}$$

On a vu précédemment que τ_0 est un temps d'arrêt, et les mêmes arguments montrent que τ_M est également un temps d'arret.

Le joueur s'arrête lorsque la première des deux conditions est satisfaite:

$$S_n = 0 \text{ ou } S_n = M.$$

Preuve

On introduit:

$$\tau_0 = \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n = 0\} \text{ et } \tau_M = \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n = M\}$$

On a vu précédemment que τ_0 est un temps d'arrêt, et les mêmes arguments montrent que τ_M est également un temps d'arret.

Le joueur s'arrête lorsque la première des deux conditions est satisfaite:

$$S_n = 0 \text{ ou } S_n = M.$$

Le joueur joue donc au casino jusqu'à

$$\tau = \min(\tau_0, \tau_M) \text{ qui est bien un temps d'arrêt.}$$

Tribu Arreté

Definition

Soit un temps d'arrêt τ, on définit:

$$\mathcal{F}_\tau := \{A \in \mathcal{F}_\infty : A \cap \{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n \quad \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Alors, $\mathcal{F}_\tau$ définit une tribu, qu'on appelle **tribu des événements antérieurs à τ.**

Tribu Arreté

Definition

Soit un temps d'arrêt τ, on définit:

$$\mathcal{F}_\tau := \{A \in \mathcal{F}_\infty : A \cap \{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n \quad \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Alors, $\mathcal{F}_\tau$ définit une tribu, qu'on appelle **tribu des événements antérieurs à** τ.

Interprétation

Il s'agit de toute l'information disponible au temps aléatoire τ.

Propriétés

On a les propriétés suivantes :

- Si $\tau(\omega) = k$ pour tout $\omega \in \Omega$, alors τ est un temps d'arrêt et $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_k$ (il n'y a donc pas d'ambiguïté de notation).
- Le temps d'arrêt τ est $\mathcal{F}_\tau$-mesurable.
- Si $\tau_1 \leq \tau_2$, alors $\mathcal{F}_{\tau_1} \subset \mathcal{F}_{\tau_2}$.
- On a l'égalité $\mathcal{F}_{\tau_1 \wedge \tau_2} = \mathcal{F}_{\tau_1} \cap \mathcal{F}_{\tau_2}$.

Preuve:

- Si τ est constant alors on a $\{\tau \leq n\} = \Omega$ ou $\emptyset$ selon que $n \geq k$ ou $n < k$. Dans les deux cas l'événement $\{\tau \leq n\}$ appartient à la tribu $\mathcal{F}_n$, d'où τ est un temps d'arrêt.

Preuve:

- Si τ est constant alors on a $\{\tau \leq n\} = \Omega$ ou $\emptyset$ selon que $n \geq k$ ou $n < k$. Dans les deux cas l'événement $\{\tau \leq n\}$ appartient à la tribu $\mathcal{F}_n$, d'où τ est un temps d'arrêt.

  Si $A \in \mathcal{F}_k$ alors on a :
  - si $n \geq k$ alors $A \cap \{\tau \leq n\} = A \in \mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_n$;

Preuve:

- Si τ est constant alors on a $\{\tau \leq n\} = \Omega$ ou $\emptyset$ selon que $n \geq k$ ou $n < k$. Dans les deux cas l'événement $\{\tau \leq n\}$ appartient à la tribu $\mathcal{F}_n$, d'où τ est un temps d'arrêt.

  Si $A \in \mathcal{F}_k$ alors on a :
  - si $n \geq k$ alors $A \cap \{\tau \leq n\} = A \in \mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_n$;
  - si $n < k$ alors $A \cap \{\tau \leq n\} = \emptyset \in \mathcal{F}_n$.

  D'où $A \in \mathcal{F}_\tau$ et donc $\mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_\tau$.

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES TOULOUSE

Preuve:

- Si τ est constant alors on a $\{\tau \leq n\} = \Omega$ ou $\emptyset$ selon que $n \geq k$ ou $n < k$. Dans les deux cas l'événement $\{\tau \leq n\}$ appartient à la tribu $\mathcal{F}_n$, d'où τ est un temps d'arrêt.

  Si $A \in \mathcal{F}_k$ alors on a :
  - si $n \geq k$ alors $A \cap \{\tau \leq n\} = A \in \mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_n$;
  - si $n < k$ alors $A \cap \{\tau \leq n\} = \emptyset \in \mathcal{F}_n$.

  D'où $A \in \mathcal{F}_\tau$ et donc $\mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_\tau$.

  Si $A \in \mathcal{F}_\tau$ alors $A \cap \{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, en particulier pour $n \geq k$ on obtient que $A \in \mathcal{F}_k$.

Université de Toulouse

Preuve:

- Il faut montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\{\tau = k\} \in \mathcal{F}_\tau$, c'est-à-dire si pour tous

$$k, n \in \mathbb{N}, \ \{\tau = k\} \cap \{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n.$$

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES TOULOUSE

Preuve:

- Il faut montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\{\tau = k\} \in \mathcal{F}_\tau$, c'est-à-dire si pour tous
$$k, n \in \mathbb{N},\ \{\tau = k\} \cap \{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n.$$
- Soit $A \in \mathcal{F}_{\tau_1}$. Comme $\tau_1 \leq \tau_2$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$A \cap \{\tau_2 \leq n\} = A \cap \{\tau_1 \leq n\} \cap \{\tau_2 \leq n\} \in \mathcal{F}_n.$$

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES TOULOUSE

Preuve:

- Il faut montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\{\tau = k\} \in \mathcal{F}_\tau$, c'est-à-dire si pour tous
$$k, n \in \mathbb{N}, \ \{\tau = k\} \cap \{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n.$$
- Soit $A \in \mathcal{F}_{\tau_1}$. Comme $\tau_1 \leq \tau_2$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$A \cap \{\tau_2 \leq n\} = A \cap \{\tau_1 \leq n\} \cap \{\tau_2 \leq n\} \in \mathcal{F}_n.$$
- $\tau_1 \wedge \tau_2 \leq \tau_1$, donc $\mathcal{F}_{\tau_1 \wedge \tau_2} \subset \mathcal{F}_{\tau_1}$. En prenant τ_2 au lieu de τ_1, on obtient:
$$\mathcal{F}_{\tau_1 \wedge \tau_2} \subset \mathcal{F}_{\tau_1} \cap \mathcal{F}_{\tau_2}.$$

Université de Toulouse

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES TOULOUSE

Preuve:

- Il faut montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\{\tau = k\} \in \mathcal{F}_\tau$, c'est-à-dire si pour tous
$$k, n \in \mathbb{N},\ \{\tau = k\} \cap \{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n.$$
- Soit $A \in \mathcal{F}_{\tau_1}$. Comme $\tau_1 \leq \tau_2$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$A \cap \{\tau_2 \leq n\} = A \cap \{\tau_1 \leq n\} \cap \{\tau_2 \leq n\} \in \mathcal{F}_n.$$
- $\tau_1 \wedge \tau_2 \leq \tau_1$, donc $\mathcal{F}_{\tau_1 \wedge \tau_2} \subset \mathcal{F}_{\tau_1}$. En prenant τ_2 au lieu de τ_1, on obtient:
$$\mathcal{F}_{\tau_1 \wedge \tau_2} \subset \mathcal{F}_{\tau_1} \cap \mathcal{F}_{\tau_2}.$$
Soit $A \in \mathcal{F}_{\tau_1} \cap \mathcal{F}_{\tau_2}$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$A \cap \{\tau_1 \wedge \tau_2 \leq n\} = (A \cap \{\tau_1 \leq n\}) \cup (A \cap \{\tau_2 \leq n\}) \in \mathcal{F}_n,$$

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES TOULOUSE

Preuve:

- Il faut montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\{\tau = k\} \in \mathcal{F}_\tau$, c'est-à-dire si pour tous
$$k, n \in \mathbb{N},\ \{\tau = k\} \cap \{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n.$$
- Soit $A \in \mathcal{F}_{\tau_1}$. Comme $\tau_1 \leq \tau_2$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$A \cap \{\tau_2 \leq n\} = A \cap \{\tau_1 \leq n\} \cap \{\tau_2 \leq n\} \in \mathcal{F}_n.$$
- $\tau_1 \wedge \tau_2 \leq \tau_1$, donc $\mathcal{F}_{\tau_1 \wedge \tau_2} \subset \mathcal{F}_{\tau_1}$. En prenant τ_2 au lieu de τ_1, on obtient:
$$\mathcal{F}_{\tau_1 \wedge \tau_2} \subset \mathcal{F}_{\tau_1} \cap \mathcal{F}_{\tau_2}.$$
Soit $A \in \mathcal{F}_{\tau_1} \cap \mathcal{F}_{\tau_2}$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$A \cap \{\tau_1 \wedge \tau_2 \leq n\} = (A \cap \{\tau_1 \leq n\}) \cup (A \cap \{\tau_2 \leq n\}) \in \mathcal{F}_n,$$
Donc:
$$\mathcal{F}_{\tau_1} \cap \mathcal{F}_{\tau_2} \subset \mathcal{F}_{\tau_1 \wedge \tau_2}.$$

Université de Toulouse

Processus Arrêté

Definition

Un processus aléatoire $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à un instant aléatoire τ est définit comme:

$$X_\tau := \sum_{n\in\mathbb{N}} 1_{\{\tau=n\}} X_n.$$

Processus Arrêté

Definition

Un processus aléatoire $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à un instant aléatoire τ est définit comme:

$$X_\tau := \sum_{n\in\mathbb{N}} 1_{\{\tau=n\}} X_n.$$

Theorem

Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une martingale et soit τ un temps d'arrêt. Alors le processus arrêté $(M_{n\wedge\tau})_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi une martingale. De plus, si $\tau_1 \leq \tau_2$ sont deux **temps d'arrêt bornés**, *alors on a*

$$\mathbb{E}\left[M_{\tau_2} \mid \mathcal{F}_{\tau_1}\right] = M_{\tau_1} \quad \textit{et} \quad \mathbb{E}[M_{\tau_1}] = \mathbb{E}[M_{\tau_2}] = \mathbb{E}[M_0].$$

Preuve:

Quitte à remplacer $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la martingale $(M_n - M_0)_{n\in\mathbb{N}}$, supposons sans perte de généralité que $M_0 = 0$

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES TOULOUSE

Preuve:

Quitte à remplacer $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la martingale $(M_n - M_0)_{n\in\mathbb{N}}$, supposons sans perte de généralité que $M_0 = 0$

La v.a. τ étant un temps d'arrêt, les v.a. définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $A_n := 1_{\{\tau\geq n\}}$ forment un processus prévisible.

Preuve:

Quitte à remplacer $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la martingale $(M_n - M_0)_{n\in\mathbb{N}}$, supposons sans perte de généralité que $M_0 = 0$

La v.a. τ étant un temps d'arrêt, les v.a. définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $A_n := 1_{\{\tau \geq n\}}$ forment un processus prévisible.

De plus, on a

$$\sum_{i=1}^{n} A_i\,(M_i - M_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n\wedge\tau}(M_i - M_{i-1}) = M_{n\wedge\tau},$$

ce qui entraîne que la suite $(M_{n\wedge\tau})_{n\in\mathbb{N}}$ est la **transformation prévisible** de la martingale $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par rapport à $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Preuve:

Supposons τ_2 borné par une constante positive κ.

Preuve:

Supposons τ_2 borné par une constante positive κ. Comme $(M_{n\wedge\tau_2})_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale, on a pour tout événement $A \in \mathcal{F}_{\tau_1}$:

$$\mathbb{E}\left[M_{\tau_2} 1_A\right] = \mathbb{E}\left[M_{(\lfloor\kappa\rfloor+1)\wedge\tau_2} 1_A\right]$$

Preuve:

Supposons τ_2 borné par une constante positive κ. Comme $(M_{n\wedge\tau_2})_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale, on a pour tout événement $A \in \mathcal{F}_{\tau_1}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[M_{\tau_2}1_A\right] &= \mathbb{E}\left[M_{(\lfloor\kappa\rfloor+1)\wedge\tau_2}1_A\right]\\ &= \sum_{p=0}^{\lfloor\kappa\rfloor+1-1}\mathbb{E}\left[M_{(\lfloor\kappa\rfloor+1)\wedge\tau_2}1_{\{\tau_1=p\}\cap A}\right]\end{aligned}$$

en utilisant que $\tau_1 < \lfloor\kappa\rfloor + 1$

Preuve:

Supposons τ_2 borné par une constante positive κ. Comme $(M_{n\wedge\tau_2})_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale, on a pour tout événement $A \in \mathcal{F}_{\tau_1}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[M_{\tau_2}1_A\right] &= \mathbb{E}\left[M_{(\lfloor\kappa\rfloor+1)\wedge\tau_2}1_A\right] \\
&= \sum_{p=0}^{\lfloor\kappa\rfloor+1-1} \mathbb{E}\left[M_{(\lfloor\kappa\rfloor+1)\wedge\tau_2}1_{\{\tau_1=p\}\cap A}\right]
\end{aligned}$$

en utilisant que $\tau_1 < \lfloor\kappa\rfloor + 1$

$$\mathbb{E}\left[M_{\tau_2}1_A\right] = \sum_{p=0}^{\lfloor\kappa\rfloor+1-1} \mathbb{E}\left[M_{p\wedge\tau_2}1_{\{\tau_1=p\}\cap A}\right]$$

en utilisant que $\{\tau_1 = p\} \cap A \in \mathcal{F}_p$

Preuve:

On a donc que:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[M_{\tau_2}1_A\right] &= \mathbb{E}\left[M_{\tau_1\wedge\tau_2}1_A\right]\\ &= \mathbb{E}\left[M_{\tau_1}1_A\right],\end{aligned}$$

Preuve:

On a donc que:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[M_{\tau_2}1_A\right] &= \mathbb{E}\left[M_{\tau_1\wedge\tau_2}1_A\right] \\ &= \mathbb{E}\left[M_{\tau_1}1_A\right],\end{aligned}$$

c'est-à-dire, en terme d'espérance conditionnelle, que

$$\mathbb{E}\left[M_{\tau_2} \mid \mathcal{F}_{\tau_1}\right] = M_{\tau_1}.$$

Preuve:

On a donc que:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[M_{\tau_2} 1_A\right] &= \mathbb{E}\left[M_{\tau_1 \wedge \tau_2} 1_A\right] \\ &= \mathbb{E}\left[M_{\tau_1} 1_A\right],\end{aligned}$$

c'est-à-dire, en terme d'espérance conditionnelle, que

$$\mathbb{E}\left[M_{\tau_2} \mid \mathcal{F}_{\tau_1}\right] = M_{\tau_1}.$$

Enfin, si τ désigne τ_1 ou τ_2, comme p.s. $M_{n\wedge\tau} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} M_\tau$

Preuve:

On a donc que:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[M_{\tau_2}1_A\right] &= \mathbb{E}\left[M_{\tau_1\wedge\tau_2}1_A\right]\\ &= \mathbb{E}\left[M_{\tau_1}1_A\right],\end{aligned}$$

c'est-à-dire, en terme d'espérance conditionnelle, que

$$\mathbb{E}\left[M_{\tau_2} \mid \mathcal{F}_{\tau_1}\right] = M_{\tau_1}.$$

Enfin, si τ désigne τ_1 ou τ_2, comme p.s. $M_{n\wedge\tau} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} M_\tau$ et que

$$|M_{n\wedge\tau}| \leq \sum_{i=1}^{n\wedge\tau}|M_i - M_{i-1}| \leq \sum_{i=1}^{\kappa}(|M_i| + |M_{i-1}|),$$

qui est intégrable sans dépendre de n,

Preuve:

On a donc que:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[M_{\tau_2} 1_A\right] &= \mathbb{E}\left[M_{\tau_1\wedge\tau_2} 1_A\right] \\ &= \mathbb{E}\left[M_{\tau_1} 1_A\right],\end{aligned}$$

c'est-à-dire, en terme d'espérance conditionnelle, que

$$\mathbb{E}\left[M_{\tau_2} \mid \mathcal{F}_{\tau_1}\right] = M_{\tau_1}.$$

Enfin, si τ désigne τ_1 ou τ_2, comme p.s. $M_{n\wedge\tau} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} M_\tau$ et que

$$|M_{n\wedge\tau}| \leq \sum_{i=1}^{n\wedge\tau} |M_i - M_{i-1}| \leq \sum_{i=1}^{\kappa} (|M_i| + |M_{i-1}|),$$

qui est intégrable sans dépendre de n, le théorème de convergence dominée entraîne que

$$\mathbb{E}[M_\tau] = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[M_{n\wedge\tau}] = 0.$$

Remarque

On peut montrer directement que $(M_{n\wedge\tau})_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale.

1. Montrer d'abord l'intégrabilité, ensuite le fait que $(M_{n\wedge\tau})_{n\in\mathbb{N}}$ est adapté à la filtration sous-jacente,
2. Montrer la propriété de martingale en remarquant que

$$\begin{aligned} M_{n\wedge\tau} &= M_n 1_{\{\tau\geq n\}} + M_\tau 1_{\{\tau<n\}} \\ &= M_n 1_{\{\tau\geq n\}} + \sum_{i=1}^{n-1} M_i 1_{\{\tau=i\}}. \end{aligned}$$

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES TOULOUSE

Exercice: La ruine du joueur

Deux joueurs A et B jouent un nombre illimité de parties indépendantes.

Si A gagne la n-ième partie, il prend un euro à B et réciproquement.

La probabilité que le joueur A gagne ou perde une partie donnée est $1/2$.

A et B commencent respectivement avec une fortune initiale a et b.

Question

Quelle est la probabilité que A gagne (ie: que B soit ruiné)?

Exercice: La ruine du joueur

Les gains de A sont modélisés par

$$M_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k, \quad n \in \mathbb{N},$$

où les $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont des v.a. indépendantes de loi:

$$\mathbb{P}(Y_n = 1) = 1 - \mathbb{P}(Y_n = -1) = \frac{1}{2}.$$

Le jeu s'arrête dès que l'un des deux joueurs est ruiné, c'est à dire à l'instant aléatoire T:

$$T = \inf\{n \geq 1 : M_n = -a \text{ ou } M_n = b\} \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}.$$

On admet que T est une v.a. p.s. finie, c'est-à-dire que

$$\mathbb{P}(T < \infty) = 1.$$

Exercice: La ruine du joueur

1. Montrez que T est un temps d'arrêt.

2. Montrez que $\mathbb{E}[M_T] = 0$.

3. Déduisez-en la valeur des probabilités $\mathbb{P}(M_T = -a)$ et $\mathbb{P}(M_T = b)$. À quoi correspondent-elles ?

4. Quelle est la loi de M_T ?

5. Montrez que le processus $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ défini par $Z_n = M_n^2 - n$ est une martingale.

6. Déduisez-en la valeur de l'espérance $\mathbb{E}[T]$.

Solution

Exercice 6:

Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i.i.d. et positives, de densité commune

$$f(x) = \frac{\alpha}{x^{\alpha+1}} 1_{x\geq 1}, \quad \alpha > 1.$$

On note $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sa filtration naturelle. On pose

$$X_n = \max\{Y_0, Y_1, \dots, Y_n\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

1. Montrez que

$$X_{n+1} = X_n + \max(Y_{n+1} - X_n, 0).$$

2. Montrez que X_n est intégrable pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrez que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-martingale.
4. Calculez l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}\left[(Y_{n+1} - X_n)_+ \mid \mathcal{F}_n\right]$.
5. Déduisez-en la décomposition de Doob de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Solution