# Práctica 2: Introducción al Modelamiento computacional usando inversa de una matriz.

## 1. ¿Qué significa matriz inversa en el modelamiento computacional?

La matriz inversa se utiliza principalmente para resolver sistemas de ecuaciones lineales en la forma:

$$\boxed{A \cdot X = B}$$

donde:

- $A$ es la **matriz de coeficientes** (cuadrada e invertible).
- $X$ es el vector (o matriz) de **incógnitas**.
- $B$ es el vector (o matriz) de **resultados**.

La solución es:

$$\boxed{X = A^{-1} \cdot B}$$

Esto permite modelar y resolver problemas de ingeniería, economía, física y ciencias sociales.

## 2. Aplicaciones de matriz inversa en el modelamiento

- Ingeniería eléctrica: Resolver circuitos con múltiples mallas y nodos (Leyes de Kirchhoff).
- Economía: Modelos insumo–producto de Leontief para analizar interdependencia entre sectores.
- Mecánica estructural: Resolver desplazamientos y fuerzas en vigas, pórticos y estructuras.
- Computación gráfica: Transformaciones geométricas (rotación, escala, traslación en 3D).
- Big Data / Machine Learning: En regresión lineal múltiple, la fórmula de estimación usa la inversa:

$$\boxed{\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T y}$$

## 3. Ejemplos aplicados

Supongamos una economía con 2 sectores: Agricultura (A) e Industria (I). Cada sector consume parte de lo que produce el otro.

$$\begin{bmatrix} A \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 \\ 0.4 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 50 \\ 30 \end{bmatrix}$$

La matriz inversa permite hallar la **producción total necesaria** para satisfacer la demanda externa.

## 4. Ventajas y limitaciones

- Preciso para sistemas pequeños y modelos bien condicionados.
- Permite análisis matricial directo y elegante.
- Para matrices muy grandes, calcular la inversa es costoso y numéricamente inestable → en esos casos se usan métodos iterativos (LU, Cholesky, Jacobi, Gauss-Seidel).

## 5. Sistemas de ecuaciones lineales, usando matriz inversa

### Ejercicio 1

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases} \Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$\det(A) = -7 \neq 0.$

$$A^{-1} = \tfrac{1}{-7}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Solución:** $x = 2,\ y = 1.$

### Ejercicio 2

$$\begin{cases} 4x - y = 1 \\ -2x + 3y = 7 \end{cases} \Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$\det(A) = 10 \neq 0.$

$$A^{-1} = \tfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

**Solución:** $x = 1,\ y = 3.$

### Ejercicio 3

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + 3z = 14 \\ -x + 4y + z = 7 \end{cases} \Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$\det(A) = -11 \neq 0.$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{13}{11} & -\frac{3}{11} & -\frac{4}{11} \\ \frac{5}{11} & -\frac{2}{11} & \frac{1}{11} \\ -\frac{7}{11} & \frac{5}{11} & \frac{3}{11} \end{pmatrix}, \quad X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{8}{11} \\ \frac{9}{11} \\ \frac{49}{11} \end{pmatrix}$$

**Solución:** $x = \frac{8}{11},\ y = \frac{9}{11},\ z = \frac{49}{11}.$

**Ejercicio 4**

$$\begin{cases} 3x + y - z = 1 \\ 2x + 4y + z = 11 \\ -x + 2y + 5z = 27 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \\ 27 \end{pmatrix}$$

$\det(A) = 35 \neq 0.$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{18}{35} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{7} \\ -\frac{11}{35} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{7} \\ \frac{8}{35} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}, \quad X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{76}{35} \\ \frac{8}{35} \\ \frac{201}{35} \end{pmatrix}$$

**Solución:** $x = \frac{76}{35}$, $y = \frac{8}{35}$, $z = \frac{201}{35}$.

**Ejercicio 5**

$$\begin{cases} 4x - y + 2z = 3 \\ x + 3y + z = 10 \\ 2x - y + 5z = 7 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$\det(A) = 53 \neq 0.$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{16}{53} & \frac{3}{53} & -\frac{7}{53} \\ -\frac{3}{53} & \frac{16}{53} & -\frac{2}{53} \\ -\frac{7}{53} & \frac{2}{53} & \frac{13}{53} \end{pmatrix}, \quad X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{29}{53} \\ \frac{137}{53} \\ \frac{90}{53} \end{pmatrix}$$

**Solución:** $x = \frac{29}{53}$, $y = \frac{137}{53}$, $z = \frac{90}{53}$.

**Ejercicio 6**

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ -y + 4z = 7 \\ x - 2y + 3z = 5 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$\det(A) = 23 \neq 0.$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{23} & -\frac{11}{23} & \frac{13}{23} \\ \frac{4}{23} & \frac{5}{23} & -\frac{8}{23} \\ \frac{1}{23} & \frac{7}{23} & -\frac{2}{23} \end{pmatrix}, \quad X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -\frac{7}{23} \\ -\frac{1}{23} \\ \frac{40}{23} \end{pmatrix}$$

**Solución:** $x = -\frac{7}{23}$, $y = -\frac{1}{23}$, $z = \frac{40}{23}$.

**Ejercicio 7**

Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales, expréselo en forma matricial 2x2 y defina su solución usando pseudocódigo

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

**Ejercicio 8**

Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales, expréselo en forma matricial 3x3 y defina su solución usando pseudocódigo

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + 3z = 14 \\ -x + 4y + z = 7 \end{cases}$$