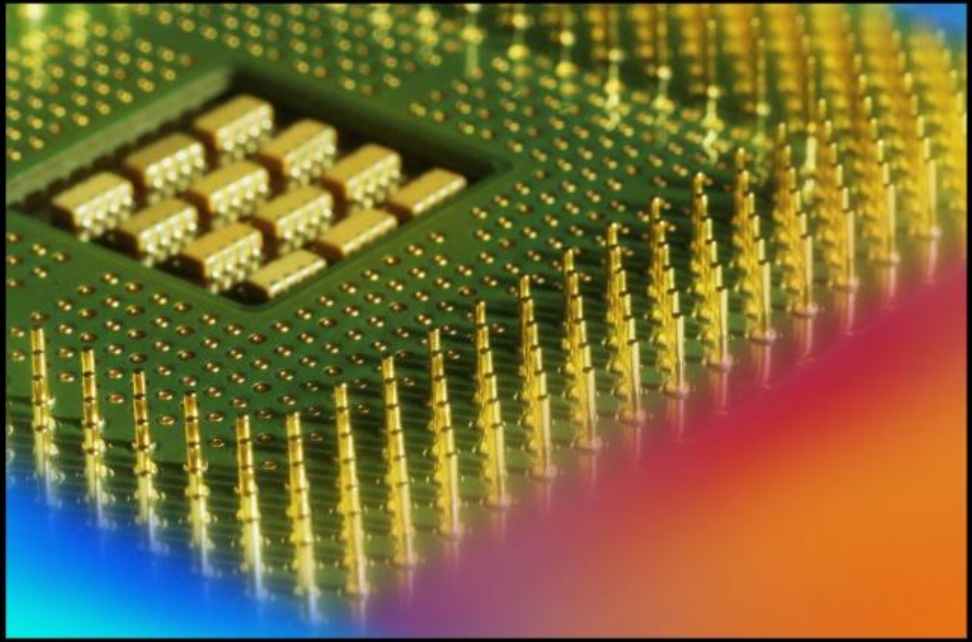
Fundamentos de sistemas digitales

Décima Edición

Floyd



Resumen

Suma booleana

En el álgebra booleana, una **variable** es un símbolo que se utiliza para representar magnitudes lógicas. Una única variable sólo puede tener un valor de 1 o 0.

El **complemento** representa la inversa de una variable y se indica con una barra superior. Por lo tanto, el complemento de A es $\overline{A}$.

Un **literal** es una variable o su complemento.

La suma booleana es equivalente a la operación OR. Un **término suma** es 1 si uno o más si los literales son 1. El término suma es cero sólo si cada literal es 0.

Ejemplo Determinar los valores de A, B, y C que hacen que el término suma de la expresión $A + \overline{B} + \overline{C} = 0$?

Solución Cada literal vale = 0; por lo tanto $A = 1$, $B = 0$ y $C = 1$.

Resumen

Multiplicación booleana

En el álgebra booleana, la multiplicación booleana es equivalente a la operación AND. El producto de literales forma un **término producto**. El término producto será 1 sólo si todos los literales son 1.

Ejemplo ¿Cuáles son los valores de A, B y C si el término producto de $A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} = 1$?

Solución Cada literal vale = 1; por lo tanto $A = 1$, $B = 0$ y $C = 0$.

Resumen

Leyes conmutativas

Las leyes **conmutativas** se aplican a la suma y la multiplicación. Por otra parte, la ley conmutativa afirma

En cuanto al resultado, el orden en el que las variables están en una operación OR no hace ninguna diferencia.

$$A + B = B + A$$

Para la multiplicación, la ley conmutativa afirma

En cuanto al resultado, el orden en que se procesan variables mediante un AND no hace ninguna diferencia.

$$AB = BA$$

Resumen

Leyes asociativas

Las **leyes asociativas** también se aplican a la suma y la multiplicación. Por otra parte, la ley asociativa establece

Una operación OR de más de dos variables, el resultado es el mismo, independientemente de la agrupación de las variables.

$$\boxed{A + (B + C) = (A + B) + C}$$

Para la multiplicación, la ley establece asociativo

Una operación AND de más de dos variables, el resultado es el mismo, independientemente de la agrupación de las variables.

$$\boxed{A(BC) = (AB)C}$$

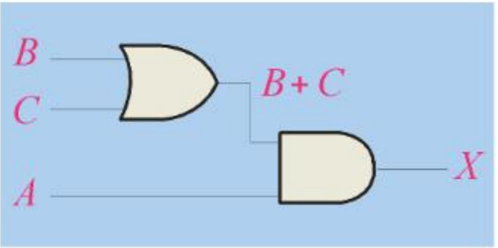
Resumen

Ley distributiva

La l**ey distributiva** es la ley de factorización. Una variable común puede ser un factor de una expresión al igual que en el álgebra ordinaria. Es decir

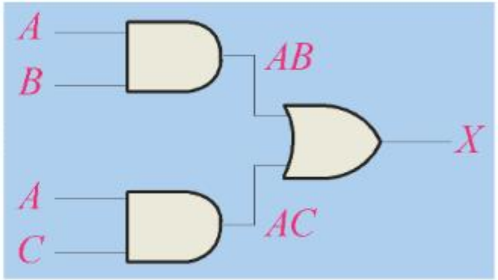
$$\boxed{AB + AC = A(B + C)}$$

La ley distributiva se puede ilustrar con circuitos equivalentes:



$A(B + C)$

≡



$AB + AC$

Resumen

Reglas del álgebra booleana

1. $A + 0 = A$
2. $A + 1 = 1$
3. $A \cdot 0 = 0$
4. $A \cdot 1 = A$
5. $A + A = A$
6. $A + \overline{A} = 1$
7. $A \cdot A = A$
8. $A \cdot \overline{A} = 0$
9. $\overline{\overline{A}} = A$
10. $A + AB = A$
11. $A + \overline{A}B = A + B$
12. $(A + B)(A + C) = A + BC$

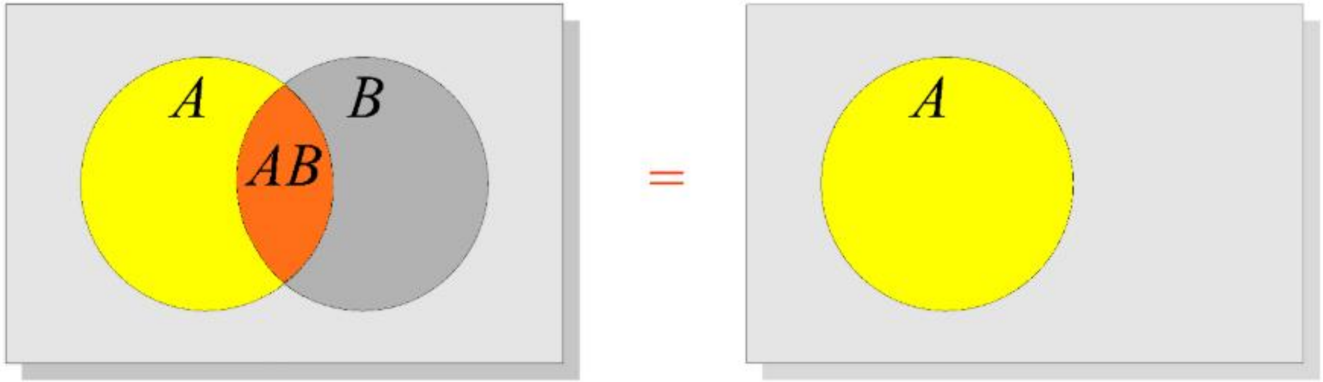
Resumen

Reglas del álgebra booleana

Las reglas del álgebra booleana se pueden ilustrar con diagramas de *Venn*. La variable A se muestra como un área.

La regla $A + AB = A$ puede ilustrarse fácilmente con un diagrama. Añada una zona de superposición para representar la variable B.

La región de solapamiento entre A y B representa AB.



El diagrama muestra visualmente que $A + AB = A$. Otras reglas pueden ilustrarse con los diagramas de Venn también.

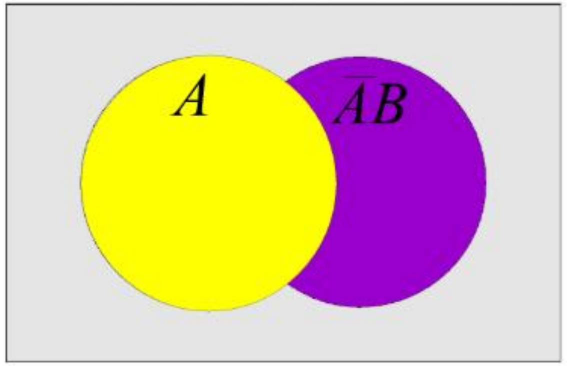
Resumen

Reglas del álgebra booleana

Ejemplo Ilustraremos la regla $A + \overline{A}B = A + B$ con un diagrama de Venn.

Solución

Esta vez, $\overline{A}$ está representado por el área azul y B de nuevo por el círculo rojo. La intersección representa $\overline{A}B$. Note que $A + \overline{A}B = A + B$



Resumen

Reglas de Álgebra de Boole

La regla 12, establece que $(A + B)(A + C) = A + BC$, se puede probar mediante la aplicación de las reglas anteriores de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
(A + B)(A + C) &= AA + AC + AB + BC \\
&= A + AC + AB + BC \\
&= A(1 + C + B) + BC \\
&= A \cdot 1 + BC \\
&= A + BC
\end{aligned}
$$

Esta regla es un poco más complicada, pero también se puede mostrar con un diagrama de Venn, tal como figuran en la siguiente diapositiva ...

Resumen

Tres áreas representan las variables A, B y C.

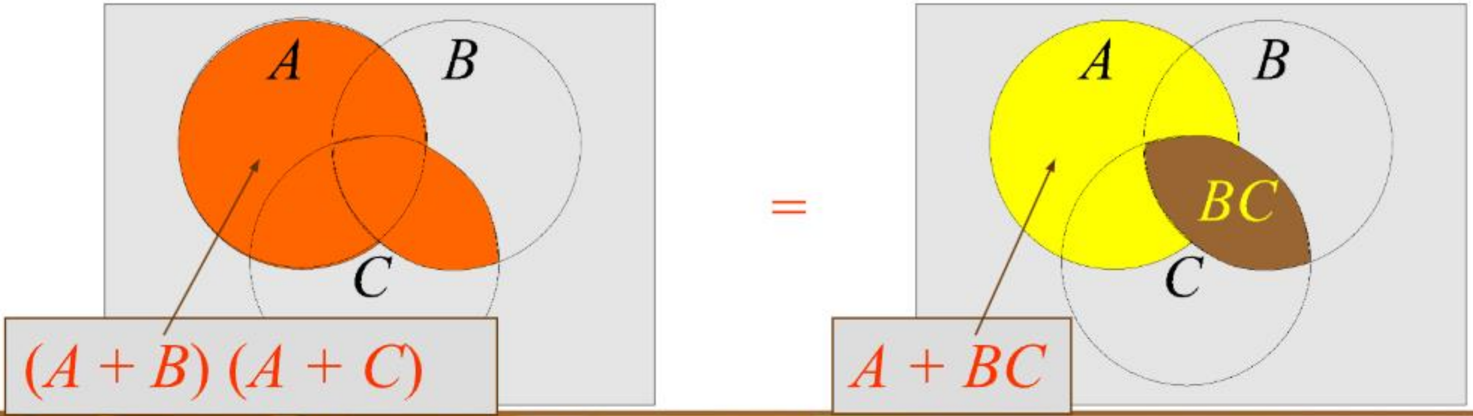
El área que representa $A + B$ se muestra en amarillo.

El área que representa $A + C$ se muestra en rojo.

La intersección de rojo y amarillo se muestra en la naranja.

El área de intersección entre B y C representa BC.

La operación OR con A da la misma zona que antes.



Resumen

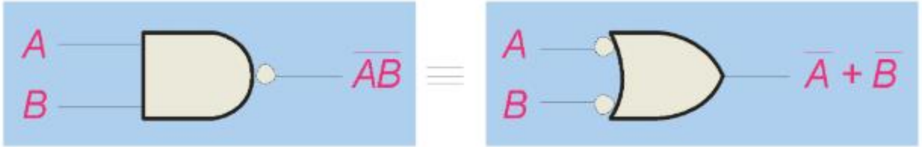
El teorema de DeMorgan

<u>1er Teorema de DeMorgan</u>

El complemento de un producto de variables es igual a la suma de las variables complementadas.

$$\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$$

Aplicando el 1er teorema de DeMorgan a las puertas:



NAND   Negative-OR

Inputs		Output	
A	B	$\overline{AB}$	$\overline{A} + \overline{B}$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0

Resumen

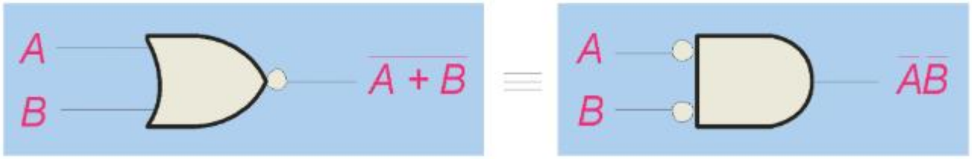
El teorema de DeMorgan

2do Teorema de DeMorgan

El complemento de una suma de variables es igual al producto de las variables complementadas.

$$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

Aplicando el 2do teorema de DeMorgan a las puertas:



NOR Negative-AND

Inputs		Output	
A	B	$\overline{A + B}$	$\overline{A}\,\overline{B}$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	0	0

Resumen

El teorema de DeMorgan

Ejemplo Aplicar el teorema de DeMorgan para eliminar la barra superior que cubre los términos de la expresión $X = \overline{\overline{C} + D}$.

Solución

Al aplicar el teorema de DeMorgan para la expresión, se puede romper la barra superior que cubre ambos términos y cambiar la señal entre los términos. Esto resulta en $X = \overline{\overline{C}} \cdot \overline{D}$. La eliminación de la doble barra da $X = C \cdot \overline{D}$.

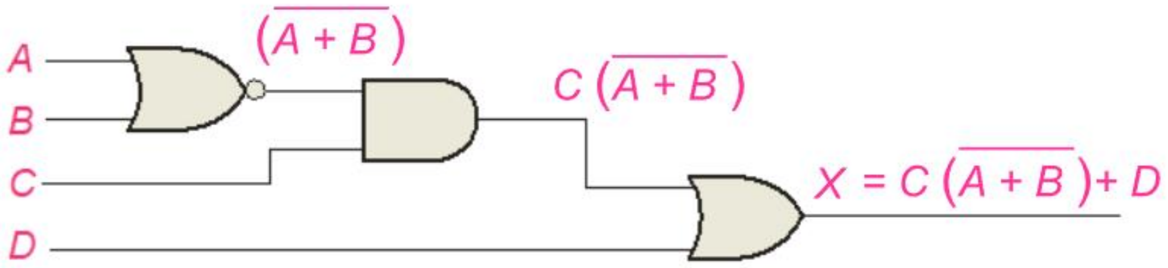
Resumen

Análisis booleano de circuitos lógicos

Los circuitos lógicos combinacionales pueden ser analizados escribiendo la expresión para cada puerta y la combinación de las expresiones de acuerdo con las reglas para el álgebra de Boole.

Ejemplo Aplicar el álgebra de Boole para derivar la expresión para *X*.

Solución Escribir la expresión para cada puerta;



Aplicando el teorema de DeMorgan y la ley distributiva:

$$X = C(\overline{A}\,\overline{B}) + D = \overline{A}\,\overline{B}\,C + D$$

Simplificación usando el álgebra de Boole

Utilizar las leyes fundamentales, las reglas y teoremas del álgebra de Boole para manipular y simplificar una expresión.

Ejemplo Ver los ejemplos en el libro pp. 214-217.

Resumen

Formas SOP y POS

Las expresiones booleanas se pueden escribir en forma **de suma de productos** (**SOP**) o en forma de **producto de sumas** (**POS**). Estas formas pueden simplificar la implementación de la lógica combinacional. En ambas formas, una barra superior no puede extenderse sobre más de una variable.

Una expresión está en forma SOP cuando dos o más términos de productos se suman como en los siguientes ejemplos:

$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + A\,B \qquad A\,B\,\overline{C} + \overline{C}\,\overline{D} \qquad C\,D + \overline{E}$

Una expresión es en forma POS cuando dos o más términos de suma se multiplican como en los siguientes ejemplos:

$(A + B)(\overline{A} + C) \qquad (A + B + \overline{C})(B + D) \qquad (\overline{A} + B)C$

Resumen

Forma estándar SOP

En **forma estándar SOP**, todas las variables en el dominio debe aparecer en cada término. Esta forma es útil para construir tablas de verdad o en el método de simplificación de los mapas de Karnaugh.

Puede ampliar un término no estándar en la forma estándar multiplicando el término por un término que consista en la suma de la variable que falta y su complemento.

Ejemplo Convertir $X = \overline{A}\,\overline{B} + A\ B\ C$ en la forma estándar.

Solución El primer término no incluye la variable C. Por lo tanto, se multiplica por la $(C + \overline{C})$, Que es = 1:

$$X = \overline{A}\,\overline{B}\,(C + \overline{C}) + ABC$$

$$= \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + ABC$$

Resumen

Forma estándar POS

En la **forma estándar POS**, todas las variables en el dominio debe aparecer en cada término suma de la expresión.

Puede ampliar una expresión POS no estándar en la forma estándar mediante la adición del producto de la variable que falta y su complemento y la aplicación de la regla 12, que establece que $(A + B)(A + C) = A + BC$.

Ejemplo Convertir $X = (\overline{A} + \overline{B})(A + B + C)$ A la forma estándar.

Solución El primer término suma no incluye la variable C. Por lo tanto, añadimos $C\overline{C}$ y ampliaremos el resultado por la regla 12.

$$X = (\overline{A} + \overline{B} + C\overline{C})(A + B + C)$$
$$= (\overline{A} + \overline{B} + C)(\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})(A + B + C)$$

$A\bar{B}C\bar{D}$ = 1010 : 1111 : 1

Resumen

Representación binaria de formas SOP y POS

Forma estándar SOP $A\overline{B}C\overline{D} = 1 \cdot \overline{0} \cdot 1 \cdot \overline{0} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

Forma estándar POS $A + \overline{B} + C + \overline{D} = 0 + \overline{1} + 0 + \overline{1} = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$

La conversión de la forma estándar SOP a POS

Forma estándar SOP

$$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + A\overline{B}C + ABC$$

$$000 + 010 + 011 + 101 + 111$$

La forma estándar POS equivalente contiene los otros tres términos restantes $001, 100 \; y \; 110$

$$(A + B + \overline{C})(\overline{A} + B + C)(\overline{A} + \overline{B} + C)$$

Resumen

La conversión de SOP a tabla de verdad

1. Primero listar todas las posibles combinaciones de valores binarios de las variables en la expresión.

2. Convertir los SOP en la forma estándar si no lo está ya.

3. Colocar un 1 en la columna de la salida para cada valor binario que hace que la expresión SOP estándar sea un 1 y colocar un 0 para todos los valores binarios restantes

Ex. 4-20 $\overline{A}\overline{B}C + A\overline{B}\overline{C} + ABC$

I/P A	B	C	O/P X	PRODUCT TERM
0	0	0	0	
0	0	1	1	$\overline{A}\,\overline{B}\,C$
0	1	0	0	
0	1	1	0	
1	0	0	1	$A\,\overline{B}\,\overline{C}$
1	0	1	0	
1	1	0	0	
1	1	1	1	ABC

Por favor, vea el libro de

- La conversión de POS a tabla de verdad
- Determinación de la expresión estándar a partir de una tabla de verdad

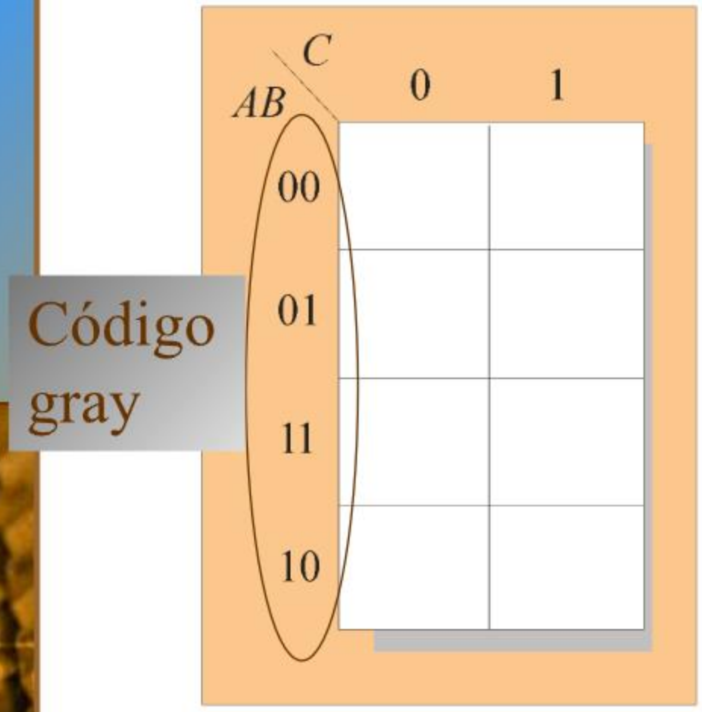
Resumen

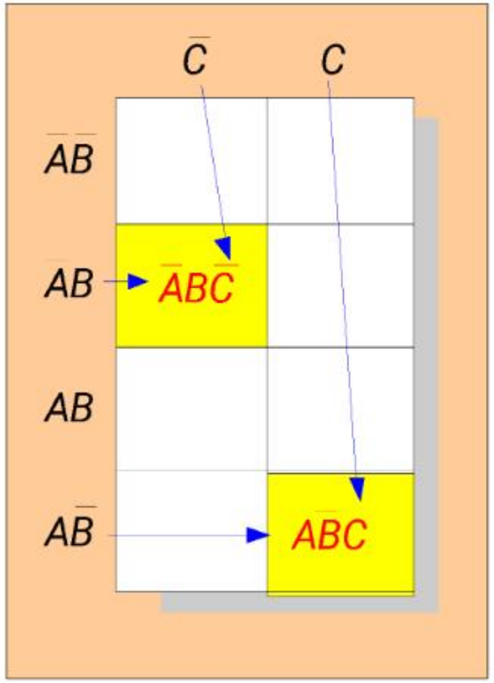
Mapas de Karnaugh

- Matriz de celdas, cada celda representa un posible término producto
- Es una herramienta para simplificar la lógica combinacional con 3 o 4 variables.
- Para 3 variables, se requieren 8 celdas (2^3).
- Cada celda es adyacente a las celdas que están inmediatamente al lado de él en cualquiera de sus cuatro lados.
- Una celda no es adyacente a las celdas que en diagonal toca cualquiera de sus esquinas.
- Adyacencia "envolvente" significa que la fila superior es adyacente a la fila inferior y de la columna izquierda a la columna derecha.

Mapas de Karnaugh

Los números se introducen en código Gray.





Mapeo de una SOP no estándar

$$\overline{A} + A\overline{B} + AB\overline{C}$$

000 100 110

001 101

010

011

AB \ C	0	1
00		
01		
11		
10		

La agrupación de los 1s

El objetivo es maximizar el tamaño de los grupos y para reducir al mínimo el número de los grupos

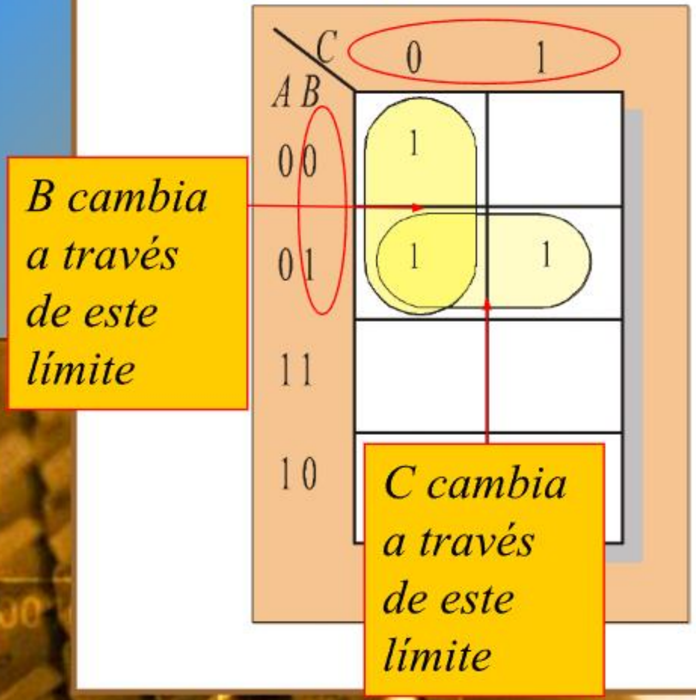
- Un grupo debe contener 1, 2, 4, 8, o 16 celdas.
- Cada celda de un grupo debe estar adyacente a una o más celdas en el mismo grupo.
- Incluir el mayor posible de #1 en un grupo, de acuerdo con la regla 1
- Cada 1 en el mapa debe incluirse en al menos un grupo.

Resumen

Mapas de Karnaugh

Los mapas de Karnaugh pueden simplificar lógica combinatoria mediante la agrupación de las celdas y la eliminación de variables que cambian.

Ejemplo Agrupe los 1 en el mapa y lea la lógica mínima.



Solución

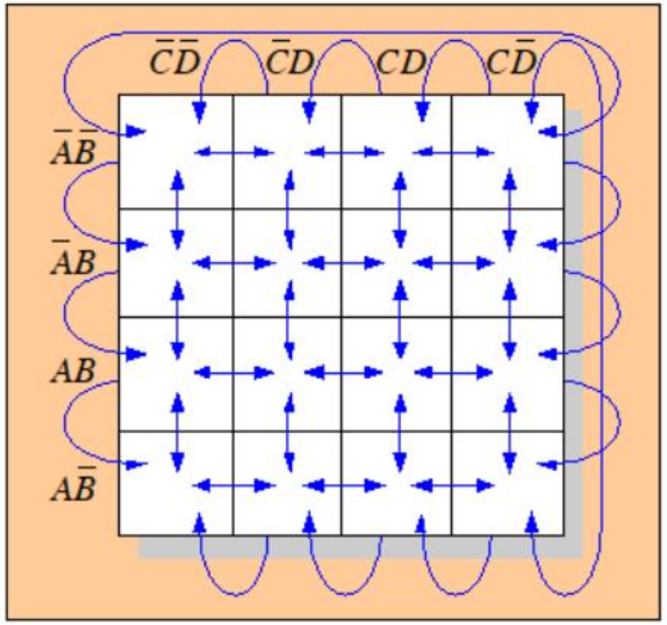
1. Agrupe los 1 en dos grupos superpuestos como se indica.
2. Lea cada grupo eliminando cualquier variable que cambie a través de un límite.
3. El grupo vertical se lee $\overline{A}\,\overline{C}$.
4. El grupo horizontal se lee $\overline{A}B$.

$$X = \overline{A}\,\overline{C} + \overline{A}B$$

Resumen

Mapas de Karnaugh

Un mapa de 4 variables tiene una celda adyacente en cada uno de sus cuatro límites, como se muestra.



Cada celda es diferente solo por una variable de una celda adyacente.

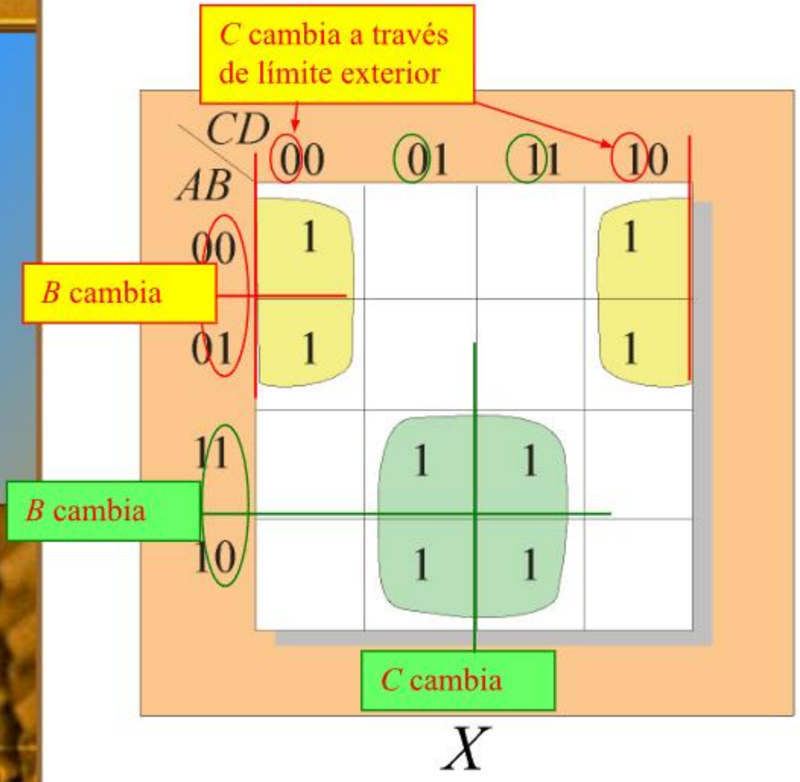
La agrupación sigue las reglas dadas en el texto.

La siguiente diapositiva muestra un ejemplo de lectura de un mapa de cuatro variables usando números binarios para las variables ...

Resumen

Mapas de Karnaugh

Agrupe los 1 en el mapa y lea la lógica mínima.



1. Agrupe los 1 en dos grupos separados como se indica.
2. Lea cada grupo eliminando cualquier variable que cambie a través de un límite.
3. El grupo superior (amarillo) se lee como.

   $\overline{A}\,\overline{D}$

4. El grupo inferior (verde) se lee como.

   AD

$$X = \overline{A}\,\overline{D} + AD$$

AB \ C	0	1
00	1	
01		1
11	1	1
10		

AB \ C	0	1
00	1	1
01	1	
11		1
10	1	1

Véase también el ejemplo: 4-23 a 4-32

Condiciones indiferentes

Por ejemplo, en código BCD, hay seis combinaciones no válidas:

1010, 1011, 110, 1101, 1110, y 1111 que puede ser entendido como términos "indiferentes"

Estos términos "indiferentes" se pueden utilizar con ventaja en el mapa de Karnaugh. Véase el ejemplo en la página 241.

Véase también el ejemplo 4-32

Términos clave

Variable Símbolo utilizado para representar una cantidad lógica que puede tener un valor de 1 o 0, normalmente designado por una letra cursiva.

Complemento El inverso u opuesto de un número. En álgebra booleana, la función inversa, expresada con una barra sobre la variable.

Término suma Suma booleana de dos o más literales equivalente a una operación OR.

Término producto Producto booleano de dos o más literales equivalente a una operación AND.

Términos clave

Suma de productos (SOP) Expresión booleana que consiste simplemente en sumar (operación OR) términos que contienen productos (operación AND).

Producto de sumas (POS) Expresión booleana que consiste simplemente en multiplicar (operación AND) términos suma (operación OR).

Mapa de Karnaugh Disposición de celdas que representan combinaciones de literales en una expresión booleana y se utilizan para simplificar sistemáticamente la expresión.

VHDL Un lenguaje de descripción de hardware estándar. IEEE Std. 1076-1993.

Examen

1. La ley asociativa para la adición normalmente se escribe como

   a. $A + B = B + A$

   b. $(A + B) + C = A + (B + C)$

   c. $AB = BA$

   d. $A + AB = A$

2. La ecuación booleana $AB + AC = A(B + C)$ ilustra

   a. la ley asociativa

   b. la ley conmutativa

   c. la ley distributiva

   d. El teorema de DeMorgan

3. La expresión booleana $A \cdot 1$ es igual a

a. A

b. B

c. 0

d. 1

4. La expresión booleana $A + 1$ es igual a

a. A

b. B

c. 0

d. 1

5. La ecuación booleana $AB + AC = A(B + C)$ ilustra

a. la ley distributiva

b. la ley conmutativa

c. la ley asociativa

d. El teorema de DeMorgan

6. La expresión booleana que está en forma SOP estándar:

a. es la expresión lógica mínima

b. contiene sólo el término de un producto

c. tiene todas las variables en el dominio de cada término

d. Ninguna de las anteriores

7. Las céldas adyacentes en el mapa de Karnaugh difieren entre sí por

a. una variable

b. dos variables

c. tres variables

d. respuesta depende del tamaño del mapa

8. La expresión mínima que puede ser leída a partir del mapa de Karnaugh que se muestra es

a. $X = A$

b. $X = \overline{A}$

c. $X = B$

d. $X = \overline{B}$

	$\overline{C}$	C
$\overline{A}\,\overline{B}$		
$\overline{A}B$		
AB	1	1
$A\overline{B}$	1	1

9. La expresión mínima que puede ser leída a partir del mapa de Karnaugh que se muestra es

a. $X = A$

b. $X = \overline{A}$

c. $X = B$

d. $X = \overline{B}$

	$\overline{C}$	C
$\overline{A}\,\overline{B}$	1	1
$\overline{A}B$		
AB		
$A\overline{B}$	1	1

10. En el código VHDL, las dos partes principales son llamadas:

a. E/S y el módulo

b. la entidad y la arquitectura

c. el puerto y el módulo

d. el puerto y la arquitectura

Respuestas:

1. b	6. c
2. c	7. a
3. a	8. a
4. d	9. d
5. a	10. b