Universidade de São Paulo

Instituto de Física

Departamento de Física Matemática

4 de abril de 2024

Notas de Aula

João Carlos Alves Barata

Versão de 4 de abril de 2024

Estas notas, ou sua versão mais recente, podem ser encontradas no seguinte endereço WWW:

http://denebola.if.usp.br/~jbarata/Notas_de_aula

Lista de Capítulos

Capítulos e Seções

Índice

VI Topologia Geral, Teoria da Medida e Integração 1302

Prefácio

A intenção básica deste livro é fornecer a estudantes de Física noções matemáticas necessárias a uma melhor compreensão de desenvolvimentos modernos da Física Teórica e da Matemática. Longe vai o tempo em que o conhecimento matemático requerido a um físico teórico restringia-se a certos métodos de resolução de equações diferenciais ordinárias e parciais. Essa visão, porém, infelizmente impregna até o presente a concepção de certas disciplinas ditas de Física-Matemática (ou de Métodos Matemáticos da Física Teórica) e de certos maus livros sobre o tema. Em contraste, noções sobre Estruturas Algébricas, Topologia Geral, Teoria da Medida e da Integração, Geometria Diferencial, Teoria de Grupos, Teoria de Distribuições, Análise Funcional e Álgebras de Operadores são hoje imprescindíveis ao trabalho de um físico teórico.

Este livro cresceu a partir de notas de aula escritas pelo autor em diversas disciplinas de graduação e pós-graduação ministradas no IFUSP. Diversos de seus capítulos podem ser empregados em disciplinas de graduação ou pós-graduação, mas o mesmo foi concebido primordialmente para servir ao autoestudo de estudantes e docentes. De modo geral, o nível varia entre intermediário e avançado. Também de modo geral, o texto é de leitura autossuficiente, mas vez por outra algum estudo complementar é sugerido. A melhor maneira de um estudante conduzir-se no estudo de assuntos matemáticos é munindo-se de uma boa coleção de exemplos e contraexemplos de várias situações específicas, patologias, casos especiais etc. Além de servirem de auxílio à memória, exemplos ajudam a melhor entender a motivação de certas definições e a compreender restrições mencionadas em enunciados de teoremas. Dessa forma, procuramos sempre que possível apresentar (muitas vezes em exercícios!) um bom número de exemplos e contraexemplos para as várias situações tratadas.

Este texto, porém, não é substituto à leitura dos bons livros especializados nos diversos assuntos aqui tratados. Parte do material aqui apresentado pode ser encontrado em diversas fontes, citadas na bibliografia (página 2804), mas a apresentação e sua ordem são próprias. Há também neste texto demonstrações do próprio autor de resultados conhecidos que são, por alguma razão, dificilmente encontradas na literatura. Mas como comenta o autor de [290] em seu prefácio, *"qualquer livro-texto deve mais aos livros e notas de outros do que a seu autor nominal"*.

Fazemos notar que este livro está ainda sendo trabalhado e alguns capítulos e seções podem vir a ser alterados, corrigidos, eliminados ou acrescidos de material. Além disso, novos capítulos serão escritos. O material já presente é, porém, útil a todos aqueles que queiram iniciar-se nos assuntos aqui expostos. Versões atualizadas serão colocadas na "rede" (no endereço acima indicado) sempre que possível.

O autor agradece a todos os que apresentarem sugestões. Fabulosas somas em dinheiro são oferecidas a todos aqueles que encontrarem erros no texto. Entre os já aquinhoados encontram-se Prof. Matheus Grasselli, Prof. Alexandre T. Baraviera, Prof. Marcos V. Travaglia, Daniel Augusto Cortez, Djogo F. C. Patrão, Cléber de Mico Muramoto, Profa. Katiúscia Nadyne Cassemiro, Urbano Lopes França Junior, Gustavo Barbagallo de Oliveira, Priscila Vieira Franco Gondeck, Darielder Jesus Ribeiro, Henrique Scemes Xavier, Prof. Daniel Augusto Turolla Vanzella, Leonardo Fernandes Dias da Motta, Krishnamurti José de Andrade, Prof. Pedro Tavares Paes Lopes, Diego Cortegoso Assêncio, Fleury José de Oliveira Filho, Paulo Henrique Reimberg, Fabíola Diacenco Xavier, Márcio André Prieto Aparício Lopez, Dorival Gonçalves Netto, Célia Santos Jordão Alves, Bruno Lima de Souza, Leandro Saccoletto, João Pedro Jericó de Andrade, Ronaldo da Silva Alves Batista, Carolina Dias Alexiou, Arão Benjamin Garcea, Cláudio Mayrink Verdun, Leonardo Hanao Gabriel, Felipe Contatto, Victor Bernando Chabu, Bruno Hideki Kimura, Fabrizio Fogaça Bernardi, Alessandro Takeshi Morita Gagliardi, Cedrick Miranda Mello, Thiago Costa Raszeja, Pedro Rangel Caetano, Anderson Seigo Misobuchi, Leandro Silva Pimenta, Alexandre Homrich, Prof. Edélcio Gonçalves de Souza, Lissa de Souza Campos, Ricardo Correa da Silva, Leonardo Almeida Lessa, Marcos Carvalho Brum de Oliveira, Victor Luccas Ramalho Moura, Felipe Dilho Alves, Caio Lopes Junqueira Reis, Bernardo Leal de Oliveira, Jose Eduardo Rodrigues Martins Peres y Peres, Henrique Ay Casa Grande, Ana Camila Costa Esteves, e Rafael Grossi e Fonseca, aos quais somos muito gratos por correções e sugestões. Estas Notas foram escritas durante um intervalo longo de tempo, de sorte que alguns dos seus usuários são hoje colegas professores e fizemos menção a isso na lista acima, quando soubemos. Pedimos desculpas por eventuais omissões.

As Seções 47.A, página 2744, e 25.2.4.1, página 1385, foram originalmente escritas por Daniel Augusto Cortez. A Seção 43.9, página 2485, foi originalmente escrita por André M. Timpanaro, Fleury J. Oliveira e Paulo H. Reimberg. A eles dedicamos agradecimentos especiais.

João Carlos Alves Barata

São Paulo, 4 de abril de 2024

Departamento de Física Matemática do IFUSP

Universidade de São Paulo

Bons Mots

"All my life, I have worked as a scientist looking for situations where a little elegant mathematics can help us to understand nature. I found problems that I could solve with a teaspoonful of elegant mathematics, in physics and engineering and astronomy and biology. I never worried whether the problems were important or unimportant. So long as the mathematics was beautiful, I was happy".
Freeman J. Dyson (1923–2020), in "Playing with Numbers", published in "One Hundred Reasons to be a Scientist", Copyright 2004 by the Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics (ICTP).

"O comportamento de um físico em relação à Matemática é similar a de um ladrão inteligente em relação ao código penal: ele estuda apenas o suficiente para evitar punições".

I. M. Gelfand (1913–2009).

"The greatest enemy of knowledge is not ignorance, it is the illusion of knowledge".
Daniel J. Boorstin (1914–2004), também atribuido a Stephen W. Hawking (1942–2018).

"A mente não é um vaso a ser repleto, mas uma tocha a ser acesa".

Plutarco (46?–120).

"Mathematical proofs really aren't there to convince you that something is true – they're there to show you why it is true".
Andrew M. Gleason (1921–2008).

"It can be said with complete confidence that any scientist of any age who wants to make important discoveries must study important problems. Dull or piffling problems yield duff of piffling answers. It is not enough that a problem should be 'interesting' - almost any problem is interesting if it is studied in sufficient depth. ... No, the problem must be such that it matters what the answer is - whether to science generally or to mankind".
Peter Brian Medawar (1915–1987), 'Advice to a Young Scientist' (1979).

"The public has a distorted view of science, because children are taught in school that science is a collection of firmly established truths. In fact, science is not a collection of truths. It is a continuing exploration of mysteries".
Freeman Dyson (1923–2020), in *How We Know*, The New York Review of Books, March 10, 2011.

"When a theoretical physicist can not solve a problem he goes for the next more difficult one".
Sir Michael Francis Atiyah (1929–2019).

"Mathematics is not a deductive science – that's a cliche. When you try to prove a theorem, you don't just list the hypotheses, and then start to reason. What you do is trial and error, experimentation, guesswork".

Paul R. Halmos, in [208].

"The source of all great mathematics is the special case, the concrete example. It is frequent in mathematics that every instance of a concept of seemingly great generality is in essence the same as a small and concrete special case".

Paul R. Halmos, in [208].

"Mathematics is a subarea of Applied Mathematics".

Peter Lax (1926–).

"Mathematics is a part of physics. Physics is an experimental science, a part of natural science. Mathematics is the part of physics where experiments are cheap".
Vladimir I. Arnold (1937–2010). In "On teaching mathematics". Address at the discussion on teaching of mathematics in Palais de Découverte in Paris on 7 March 1997.

"In science, self-satisfaction is death. Personal self-satisfaction is the death of the scientist. Collective self-satisfaction is the death of the research. It is restlessness, anxiety, dissatisfaction, agony of mind that nourish science".
Jacques Lucien Monod (1910–1976), in New Scientist, 1976.

"Não existe nenhuma categoria da Ciência à qual se possa dar o nome de Ciência Aplicada. O que existe são a Ciência e as aplicações da Ciência, intimamente ligadas, como frutos à árvore que os gerou".
Louis Pasteur (1822–1895), in "Pourquoi la France n'a pas trouvé d'hommes supérieurs au moment du péril", Revue Scientifique (Paris, 1871).

"Disse Kant[1]*:* 'Eu afirmo que em cada Ciência Natural específica pode-se atingir somente tanto Conhecimento verdadeiro quanto nela houver de Matemática'. *De fato, somente dominamos uma teoria das ciências naturais quando expomos seu núcleo matemático e o desvendamos completamente".*
David Hilbert (1862–1943) em "Naturerkennen und Logik", palestra apresentada em setembro de 1930, em Königsberg, em Congresso da Associação Alemã de Cientistas Naturais e Médicos.

"Não podemos nos permitir acreditar naqueles que em nossos dias, com cenho filosófico e em tom de superiodidade, profetizam a decadência cultural e apologizam o Ignorabimus. *Para nós não existe o* Ignorabimus *e, em minha opinião, também não para as Ciências Naturais. Em lugar do tolo* Ignorabimus *nosso lema é 'Nós devemos saber, nós iremos saber'".*

David Hilbert. ibidem.

"A geometry implies the heterogeneity of locus, namely that there is a locus of the Other. Regarding this locus of the Other, of one sex as Other, as absolute Other, what do the most recent developments in topology allow us to posit? I will posit here the term compactness. Nothing is more compact than a fault, assuming that the intersection of everything that is enclosed therein is accepted as existing over an infinite number of sets, the result being that the intersection implies this infinite number. That is the very definition of compactness".
Jacques Lacan (1901–1981), em *Le Séminaire Jacques Lacan*, Livre XX: Encore, 1972–1973. Texto organizado por Jacques-Alain Miller. Paris: Éditions du Seuil. Traduzido e citado por Alan Sokal e Paul Bricmont in *Intellectual Impostures*.

Para a definição de compacidade, vide Seção 32.3, página 1609.

"Um pesquisador não 'crê', ele simplesmente pesquisa. [...] Por deformação profissional, talvez. Em todo caso, como se fosse um jogo".
Georges Dumézil (1898–1986), filólogo, em entrevista a Laurence Gilbert, do "Le Point", 1983.

"There is no such thing as a unique scientific vision, any more than there is a unique poetic vision. Science is a mosaic of partial and conflicting visions".

Freeman J. Dyson (1923–2020), [132], cap. I.

* ** *** ** *

"Unprovided with original learning, unformed in the habits of thinking, unskilled in the arts of composition, I resolved to write a book".
Edward Gibbon (1737–1794).

"Talvez eu não tenha tido êxito em fazer as coisas difíceis tornarem-se fáceis, mas pelo menos eu nunca fiz um assunto fácil tornar-se difícil".
F. G. Tricomi (1897–1978).

"... E costumava dizer que nenhum livro é tão ruim a ponto de nada conter de valor...".
Plínio, o Novo (61–114), a respeito de seu tio, Plínio, o Velho (23–79).

"Would I had phrases that are not known, utterances that are strange, in new language that has not been used, free from repetition, not an utterance that has grown stale, which men of old have spoken".
Khakheperresenb (ci. 1900 AC), escriba egípcio. Citado em "The Burden of the Past and the English Poet" de Walter Jackson Bate.

"Tudo que deveria ter sido dito já o foi, mas como ninguém ouvia, tudo tem de ser dito novamente".
André Paul Guillaume Gide (1869–1951).

"Uma obra nunca é terminada, ela é apenas abandonada".

Atribuido a Paul Valéry (1871–1945).

[1]Immanuel Kant (1724–1804).

Como Ler Este Livro

"Reading made Don Quixote a gentleman. Believing what he read made him mad".

George Bernard Shaw (1856–1950).

O leitor deste livro não deve possuir o temor de que o mesmo deva (nem a expectativa de que o mesmo possa) ser lido linearmente, ou seja, na sequência numérica crescente dos capítulos e seções. Ele não foi concebido dessa forma e tal concepção não seria exequível devido à variedade de assuntos, às diferenças de nível de abordagem e à complexidade das conexões entre os diferentes temas. O *Conhecimento* não é um conjunto totalmente ordenado pela relação de complexidade conceitual ou pela relação de motivação (para a definição da noção de ordem total em conjuntos, vide página 76).

Fizemos um esforço para tornar autosuficientes as diversas seções e os diversos capítulos, incluindo sempre que possível, por vezes de forma repetida, todas as definições localmente necessárias. Como é natural, porém, nem sempre é possível manter essa linha de organização, de modo que ocorrem também muitas referências cruzadas entre seções e capítulos.

Os diversos capítulos não foram escritos em ordem crescente de complexidade. Por vezes, a motivação para um determinado tema é apresentada em um capítulo anterior, mas por vezes essa motivação surge em um capítulo posterior. Nos capítulos sobre equações diferenciais, por exemplo, a discussão de aplicações em Física é postergada para o Capítulo 43, página 2415, e o leitor interessado na motivação para certos tratamentos pode sem perdas consultar esse capítulo antes ou durante o estudo de capítulos que lhe antecedem.

Um problema semelhante ocorre com temas ligados à Topologia e à Análise. Os capítulos dedicados a esses assuntos servem a capítulos que lhes sucedem, mas também, em parte, a capítulos que lhes antecedem. Cabe ao leitor perceber suas necessidades formativas, avançando ou retrocedendo na leitura conforme lhe aprouver. A consulta ao Índice Remissivo (página 2824) ou à lista de Capítulos e Seções que compõem o texto (página 6) deve ser de valia para tal.

Notação e Advertências

Para facilitar a consulta e a leitura, listamos aqui sem muitos comentários um pouco da notação que empregaremos nestas Notas.

- Se z é um número complexo denotaremos seu complexo conjugado por $\overline{z}$. A notação z^* (mais comum em textos de Física) pode ocorrer mais raramente.
- O símbolo $A := B$ ou $B =: A$ denota que A é definido pela expressão B. O símbolo $A \equiv B$ indica que A e B são duas notações distintas para o mesmo objeto.
- Sejam A e B conjuntos. Se A é um subconjunto de B, denotamos esse fato por $A \subset B$ ou por $B \supset A$. Por $A \subsetneq B$ ou $B \supsetneq A$ denotamos o fato de A ser um subconjunto próprio de B, ou seja, $A \subset B$, mas $A \neq B$.
- Se $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$ são vetores reais com n componentes (ou seja, elementos de $\mathbb{R}^n$), então
$$\langle x, y \rangle_{\mathbb{R}} := x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$
define o chamado *produto escalar usual em* $\mathbb{R}^n$.
- Se $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$ são vetores complexos com n componentes (ou seja, elementos de $\mathbb{C}^n$), então
$$\langle x, y \rangle_{\mathbb{C}} := \overline{x_1} y_1 + \cdots + \overline{x_n} y_n$$
define o chamado *produto escalar usual em* $\mathbb{C}^n$.
- Se $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$ são vetores complexos com n componentes (ou seja, elementos de $\mathbb{C}^n$), então
$$\boldsymbol{\beta}(x, y) := x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$
define a chamada *forma bilinear usual em* $\mathbb{C}^n$.
- $\mathrm{Mat}(\mathbb{R}, m, n)$ ou $\mathrm{Mat}(m, n, \mathbb{R})$ designa o conjunto de todas as matrizes reais $m \times n$ (m linhas e n colunas). Analogamente, $\mathrm{Mat}(\mathbb{C}, m, n)$ ou $\mathrm{Mat}(m, n, \mathbb{C})$ designa o conjunto de todas as matrizes complexas $m \times n$. O conjunto de todas as matrizes quadradas $n \times n$ com entradas reais (complexas) será denotado simplesmente por $\mathrm{Mat}(\mathbb{R}, n)$ (por $\mathrm{Mat}(\mathbb{C}, n)$).
- Se A é um elemento de $\mathrm{Mat}(\mathbb{R}, n)$ ou de $\mathrm{Mat}(\mathbb{C}, n)$, então A^T designa a matriz transposta de A, ou seja, a matriz cujos elementos de matriz ij são $\left(A^T\right)_{ij} = A_{ji}$.
- Se A é um operador linear em um espaço vetorial complexo (com um certo produto escalar), seu adjunto é denotado por A^*. Em textos de Física é mais comum denotá-lo por $A^\dagger$, mas não usaremos isso aqui.

  Assim, se $A \in \mathrm{Mat}(\mathbb{C}, n)$, então A^* será a adjunta de A (em relação ao produto escalar usual, acima). O elemento de matriz ij de A^* será $(A^*)_{ij} = \overline{A_{ji}}$.
- Denotaremos o operador identidade agindo em um espaço vetorial (a matriz identidade, agindo em um espaço vetorial de dimensão finita) pelo símbolo $\mathbb{1}$. Esse símbolo também representará a unidade de uma álgebra.
- Designaremos um produto escalar entre dois vetores u e v sempre por $\langle u, v \rangle$ e nunca por (u, v), para não causar confusão com a notação para par ordenado. Outra notação possível é aquela empregada frequentemente em textos de Mecânica Quântica: $\langle u \,|\, v \rangle$, mas faremos raramente uso da mesma.
- Ainda sobre produtos escalares, seguiremos sempre a convenção dos textos de Física: um produto escalar em um espaço vetorial sobre os complexos é linear em relação ao segundo argumento e antilinear em relação ao primeiro. Assim, se α e β são números complexos, teremos $\langle \alpha u, \beta v \rangle = \overline{\alpha} \beta \langle u, v \rangle$. Textos de Matemática adotam por vezes a convenção oposta (ou mesmo ambas!).
- Sobre o emprego das palavras *função*, *aplicação*, *mapeamento*, *mapa*, *funcional*, *operador*, *operação*, *produto* e *forma*, que por vezes causam perplexidade em estudantes, remetemos ao comentário à página 58.

- Dado um conjunto $X \neq \emptyset$, denota-se por $\mathbb{P}(X)$ a coleção de todos os subconjuntos de X. $\mathbb{P}(X)$ é denominado o *conjunto das partes de X*.
- A topologia usual da reta real $\mathbb{R}$ será denotada aqui por $\tau_{\mathbb{R}}$.
- A σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}$ será (quase sempre) denotada aqui por $\mathcal{M}[\tau_{\mathbb{R}}]$.
- A σ-álgebra dos subconjuntos de $\mathbb{R}$ mensuráveis por Lebesgue será (quase sempre) denotada aqui por $\mathcal{M}_{\mu_L}$.
- Por $\mathbb{N}$ denotamos o conjunto dos números naturais: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Por $\mathbb{N}_0$ denotamos o conjunto dos números naturais, incluindo o zero: $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. O leitor deve ser advertido, porém, que essa convenção não é universal. O padrão ISO 31-11 (dedicado a sinais e símbolos matemáticos) recomenda a convenção $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ e $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$. O leitor deve ter cuidado, portanto, ao comparar textos diferentes.
- Para $x \in \mathbb{R}$, o símbolo $\lfloor x \rfloor$ designa o maior inteiro menor ou igual a x. O símbolo $\lceil x \rceil$ designa o menor inteiro maior ou igual a x.

  Em particular, para $n \in \mathbb{Z}$ valem

  $$\lfloor n/2 \rfloor = \begin{cases} n/2 , & n \text{ par} , \\ (n-1)/2 , & n \text{ ímpar} , \end{cases} \qquad \lceil n/2 \rceil = \begin{cases} n/2 , & n \text{ par} , \\ (n+1)/2 , & n \text{ ímpar} . \end{cases}$$

- O símbolo $\square$ indica o fim de um enunciado. O símbolo $\blacksquare$ indica o fim de uma demonstração. O símbolo ✢ indica o fim do enunciado de um exercício. O símbolo ⌑ indica o fim do enunciado de um exemplo. O símbolo ♣ indica o fim de uma observação, nota ou comentário. O símbolo ♠ indica o fim de uma definição.
- $\mathcal{B}(X)$ designa o conjunto de operadores limitados agindo em um espaço de Banach X. $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ designa o conjunto de operadores limitados agindo em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$.
- $C(L)$ designa o conjunto de todas as funções contínuas (reais ou complexas, dependendo do caso), definidas em L (na topologia que se estiver considerando em L).
- $\mathfrak{B}(L)$ designa a coleção de todos os conjuntos Borelianos de L (em relação à topologia que se estiver considerando em L). $B_l(L)$ designa a coleção de todas as funções Borelianas (reais ou complexas, dependendo do caso), definidas em L.
- O domínio de um operador T (agindo em um espaço de Banach ou de Hilbert) será denotado por $D(T)$ ou por $\text{Dom}(T)$. A imagem ("range") de T será denotada por $R(T)$ ou por $\text{Ran}(T)$ ou, mais raramente, por $\text{Im}(T)$, mas essa última notação pode causar confusão com a da parte imaginária de um número complexo ou mesmo com a da parte imaginária de um operador agindo em um espaço de Hilbert: $\text{Im}(T) := \frac{1}{2i}(T - T^*)$.
- A noção de *propriedade válida quase em toda parte* é definida na página 1451.

• Intervalos

Ainda não introduzimos os números reais nem a relação de ordem entre eles mas, como essas noções são conhecidas, vamos colocar aqui uma palavra sobre a nomenclatura usada para descrever intervalos da reta real. Para $a < b \in \mathbb{R}$ o conjunto

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}, \text{ com } a < x < b\}$$

é dito ser um intervalo aberto. Para $a \leq b \in \mathbb{R}$ o conjunto

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, \text{ com } a \leq x \leq b\}$$

é dito ser um intervalo fechado. Para $a < b \in \mathbb{R}$ os conjuntos

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R}, \text{ com } a \leq x < b\}$$

e

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R}, \text{ com } a < x \leq b\}$$

são ditos ser intervalos semiabertos (ou semifechados).

É importante dizer que a nomenclatura "aberto" ou "fechado" acima é usada independentemente da topologia usada em $\mathbb{R}$ (a noção de topologia será introduzida adiante).

Salvo menção em contrário, empregaremos por vezes as notações

$$\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R},\ x > 0\} = (0,\ \infty)$$

e

$$\mathbb{R}_{0+} := \{x \in \mathbb{R},\ x \geq 0\} = [0,\ \infty) .$$

- **Delta de Krönecker**

De i e j pertencem a um conjunto contável C, definimos o chamado *delta de Krönecker* por

$$\delta_{ij} \equiv \delta^{ij} \equiv \delta_i^j \equiv \delta_j^i := \begin{cases} 1 , & \text{se } i = j , \\ 0 , & \text{se } i \neq j . \end{cases}$$

para todos $i,\ j \in C$. As diferentes notações δ_{ij}, δ^{ij}, δ_i^j e δ_j^i ocorrem, por exemplo, na Geometria Diferencial e na Teoria da Relatividade.

- **A esfera unitária**

Para $n \in \mathbb{N}_0$, denotaremos por $\mathbb{S}^n$ a chamada *esfera unitária* em $\mathbb{R}^{n+1}$: o lugar geométrico de todos os pontos de $\mathbb{R}^{n+1}$ situados a uma distância Euclidiana igual a 1 da origem:

$$\mathbb{S}^n := \left\{ \left(y^1,\ \ldots,\ y^{n+1}\right) \in \mathbb{R}^{n+1} \middle| \ \sqrt{(y^1)^2 + \cdots + (y^{n+1})^2} = 1 \right\} .$$

Note-se que $\mathbb{S}^0 = \{-1,\ 1\}$.

- **Classes C^k**

Por $C(\mathbb{R})$ denotaremos a coleção de todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que sejam contínuas. Por $C_0(\mathbb{R})$ denotaremos a coleção de todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que sejam contínuas e de suporte compacto.

Denotamos por $C^1(\mathbb{R})$ a coleção de todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínuas, diferenciáveis e com derivada contínua. Tais funções são ditas *funções continuamente diferenciáveis*, ou de *classe* C^1. Denotamos por $C^k(\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{N}$ a coleção de todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínuas e cujas k primeiras derivadas $f',\ f'',\ \ldots,\ f^{(k)}$ existam e sejam igualmente contínuas. Tais funções são ditas ser de *classe* C^k. Por $C^\infty(\mathbb{R})$ denotamos as funções infinitamente diferenciáveis (as quais serão, ocasionalmente, denominadas *funções suaves*). Por $C_0(\mathbb{R})$ denotaremos a coleção de todas as funções contínuas e de suporte compacto. Por $C_0^\infty(\mathbb{R})$ denotaremos a coleção de todas as funções infinitamente diferenciáveis e de suporte compacto.

As diversas notações acima estendem-se de forma natural a funções definidas em subconjuntos de $\mathbb{R}$, como intervalos abertos ou fechados, compactos ou não. Aqui, o estudante deve tomar certos cuidados. Por exemplo, $C\big((0,\ 1)\big)$ contém, entre outras, funções contínuas que divergem em 0 e/ou em 1, mas $C\big([0,\ 1]\big)$ só contém funções limitadas.

Por Que Precisamos de Demonstrações?

"My friend G. H. Hardy[2], who was professor of pure mathematics, enjoyed this pleasure [in mathematical demonstrations] in a very high degree. He told me once that if he could find a proof that I was going to die in five minutes he would of course be sorry to lose me, but this sorrow would be quite outweighed by pleasure in the proof".
Bertrand Russell (1872–1970).

Segundo os dicionários, *demonstrar*, ou *provar*, significa estabelecer que algo é correto ou verdadeiro por meio de raciocínio lógico e conclusivo, ou seja, livre de exceções ou de contradições. Uma dúvida que estranhamente acomete alguns estudantes iniciantes no estudo mais avançado de Matemática e Física é: por que é necessário demonstrar afirmações e resultados? Na resposta a essa questão podem ser listadas, naturalmente, razões ligadas à honestidade intelectual e mesmo razões ligadas à estética, mas o fato pragmático é que é muito fácil elaborar conjecturas que, à primeira vista, parecem plausíveis, mas que se revelam falaciosas. Apresentamos a seguir uma pequena, mas significativa, lista delas, algumas com relevância histórica.

Desejamos que essa pequena lista faça os estudantes refletir melhor antes de aceitar resultados não demonstrados.

- Considere a seguinte lista de números inteiros positivos[3]:

31	é um número primo,
331	é um número primo,
3331	é um número primo,
33331	é um número primo,
333331	é um número primo,
3333331	é um número primo,
33333331	é um número primo.

Isso parece sugerir um padrão: todo número da forma

$$\underbrace{3\cdots3}_{m\text{ vezes}}1 \text{ para } m \in \mathbb{N} ,$$

seria primo. Sucede, porém, que o número seguinte da lista (que corresponde a $m = 8$), ou seja, 333333331, não é um número primo, pois

$$333333331 \;=\; 17 \times 19.607.843 .$$

- Outro exemplo similar, mas de certa forma oposto, provém da contemplação da seguinte lista de números:

12	não é um número primo,
121	não é um número primo,
1211	não é um número primo,
12111	não é um número primo,
121111	não é um número primo,
1211111	não é um número primo,
12111111	não é um número primo,
121111111	não é um número primo,
1211111111	não é um número primo.

Ela sugere que nenhum número da forma

$$12\underbrace{1\cdots1}_{m\text{ vezes}} , \qquad m \in \mathbb{N} ,$$

[2] Godfrey Harold Hardy (1877–1947).
[3] Todos os números que aqui apresentamos são representados na base decimal.

é primo. Essa conjectura é verdadeira até $m = 135$ (!), porém, ela falha, infelizmente, para $m = 136$, onde o número em questão revelou-se como primo! Esse número é da ordem de 10^{138}! Isso é particularmente notável, pois os números primos vão se tornando mais e mais escassos quando crescem.

Comentário. Uma observação sobre os dois últimos exemplos. Um leitor experiente pode desconfiar que as conjecturas apresentadas acima não podem ser sempre corretas, se observar que a regularidade em números como $\underbrace{3 \cdots 3}_{m \text{ vezes}} 1$ ou $12 \underbrace{1 \cdots 1}_{m \text{ vezes}}$, ou seja, a repetição sucessiva do dígito 3 ou do dígito 1, só ocorre na representação na base decimal, não existindo em outras bases. O fato de um número ser ou não primo não pode depender da base que é usada em sus representação. ♣

- *Números de Fermat.* Considere-se a sequência $F_n := 2^{2^n} + 1$, com $n = 0, 1, 2, \ldots$. Os números F_n são conhecidos como *números de Fermat*[4]. É fácil constatar que eles são primos para $n = 0, 1, 2, 3, 4$. De fato, $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$, $F_4 = 65.537$, todos primos.

  Isso levou Fermat a conjecturar em 1650 que todo F_n seria primo. Porém, Euler verificou em 1732 que $F_5 = 4.294.967.297 = 641 \times 6.700.417$ e, portanto, F_5 não é primo!

  Como os números F_n crescem muito violentamente com n, a verificação de suas propriedades é extremente difícil, mesmo com os computadores atuais. Até a data presente (2024) os únicos F_n conhecidos por serem primos são justamente os listados acima: F_0, F_1, F_2, F_3 e F_4. Mais de três centenas de números de Fermat puderam ser fatorizados e, portanto, sabe-se que não são primos.

  É uma questão ainda em aberto se há infinitos números primos dentre os números de Fermat.

  E. 0.1 *Exercício*. Resolva essa questão. ✠

- *Números de Eisenstein.* Eisenstein[5] conjecturou que todos os números da sequência 2^2+1, $2^{2^2}+1$, $2^{2^{2^2}}+1$, $2^{2^{2^{2^2}}}+1$, $2^{2^{2^{2^{2^2}}}}+1$ seriam primos. Eles são definidos iterativamente por $E_{n+1} = 2^{E_n - 1} + 1$, $n \in \mathbb{N}$, com $E_1 = 2^2 + 1$. Os três primeiros números dessa lista são 5, 17, 65537, os quais, de fato, são primos.

  Infelizmente, Selfridge[6] verificou em 1953, usando um computador, que $E_4 = 2^{2^{2^{2^2}}} + 1$ não é primo, pois é divisível por 825.753.601. É uma questão ainda em aberto saber se há infinitos números primos na lista proposta por Eisenstein.

  E. 0.2 *Exercício*. Resolva essa questão. ✠

- *Números de Mersenne.* Os *números de Mersenne*[7] são números da forma $M_n := 2^n - 1$, $n \in \mathbb{N}$. Por diversas razões, é uma questão relevante encontrar números primos dentre eles. Uma coisa que facilmente se vê é que se n não é primo, então M_n também não pode ser primo. De fato, se $n = rs$ com r e s naturais e maiores que 1, então é elemenar constatar que

$$M_{rs} = 2^{rs} - 1 = (2^r - 1)\Big(1 + 2^r + 2^{2r} + 2^{3r} + \cdots + 2^{(s-1)r}\Big) .$$

  Verifique! Isso claramente diz que M_{rs} não é primo. Assim, cabe perguntar quais números da forma $M_p = 2^p - 1$ com p primo são eles também primos. Tais números primos são denominados *primos de Mersenne.* Cabe conjecturar, então, se todos os números da forma M_p com p primo são primos de Mersenne. Um primeiro contraexemplo surge com $p = 11$, pois $M_{11} = 2^{11} - 1 = 2047 = 23 \times 89$, que, assim, não é primo.

  É uma questão ainda aberta (2024) saber se há infinitos primos de Mersenne. Essa questão é relevante pois é relativamente simples algoritmicamente gerar números de Mersenne e gerar números primos "grandes" é importante em Criptografia. Atualmente (2024) são conhecidos 51 primos de Mersenne, maior deles sendo $M_{82.589.833}$, que é um número da ordem de $10^{24.862.048}$.

  E. 0.3 *Exercício*. Resolva essa questão. ✠

[4] Pierre de Fermat (1607–1665).
[5] Ferdinand Gotthold Max Eisenstein (1823-1852).
[6] John Lewis Selfridge (1927-2010).
[7] Marin Mersenne (1588-1648).

- É fácil verificar que $3^2 + 4^2 = 5^2$ e que $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$. Isso parece sugerir um padrão, mas infelizmente tem-se $3^4 + 4^4 + 5^4 + 6^4 \neq 7^4$.

  Inspirado na possibilidade sugerida pelos dois primeiros casos, Euler[8] lançou em 1769 uma conjectura: se existirem números n naturais $a_1, \ldots, a_n$ tais que para algum $k \in \mathbb{N}$ e algum $b \in \mathbb{N}$ valer

  $$(a_1)^k + \cdots + (a_n)^k \; = \; b^k \, ,$$

  então deve sempre valer que $n \geq k$. Como exemplo, tomemos

  $$30^4 + 120^4 + 272^4 + 315^4 \; = \; 353^4 \, ,$$

  onde $n = k = 4$.

  Um contraexemplo à conjectura de Euler foi encontrado apenas em 1966. Com auxílio de um dos primeiros supercomputadores, L. J. Lander and T. R. Parkin puderam constatar[9] que

  $$27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5 \; = \; 144^5 \, ,$$

  onde $n = 4$ mas $k = 5$ e, portanto, $n < k$.

  Outro contraexemplo com $n = 3$ e $k = 4$ é

  $$2682440^4 + 15365639^4 + 18796760^4 \; = \; 20615673^4 \, ,$$

  encontrado por Elkies[10] junto a infinitos outros contraexemplos[11].

  A conjectura acima foi conhecida como *conjectura de Euler para soma de potências*, e é relacionada à célebre *última conjectura de Fermat*.

Os exemplos de conjecturas falhas, acima, são todos provenientes da Aritmética, mas há também conjecturas plausíveis, e erradas, em outras áreas. Seguem alguns exemplos.

- Considere-se a conjectura que sugere que para todo $n \in \mathbb{N}$ valha

  $$\int_0^\infty \left(\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{x}{k}\right) \right) \frac{\operatorname{sen}(4x)}{x} \, dx \; = \; \frac{\pi}{2} \; \approx \; 1,57079632679\ldots \, .$$

  Essa conjectura está correta para todo n entre 1 e 30. Porém, para $n = 31$ tem-se

  $$\int_0^\infty \left(\prod_{k=1}^{31} \cos\left(\frac{x}{k}\right) \right) \frac{\operatorname{sen}(4x)}{x} \, dx \; = \; 1,57079632533\ldots \; \neq \; \frac{\pi}{2} \, .$$

  Observe que a diferença entre os resultados inicia nos três últimos dígitos, ou seja, é da ordem de 10^{-9}!

- A fórmula

  $$\int_0^\infty \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{sen}\big(x/(2k-1)\big)}{x/(2k-1)} \right) dx \; = \; \frac{\pi}{2}$$

  vale para todo $n = 1, 2, \ldots, 7$. Porém, para $n = 8$ tem-se

  $$\int_0^\infty \left(\prod_{k=1}^{8} \frac{\operatorname{sen}(x/(2k-1))}{x/(2k-1)} \right) dx \; = \; \left(\frac{467.807.924.713.440.738.696.537.864.469}{935.615.849.440.640.907.310.521.750.000} \right) \pi \, .$$

  O fator entre parenteses na última expressão difere de $1/2$ por cerca de $7,35 \times 10^{-12}$.

---

[8]Leonhard Euler (1707–1783).

[9]L. J. Lander and T. T. Parkin, "Counterexample to Euler's conjecture on sums of like powers". Bull. Amer. Math. Soc. **72** (6): 1079 (1966). doi:10.1090/S0002-9904-1966-11654-3.

[10]Noam David Elkies (1966–).

[11]N. Elkies, "On $A^4 + B^4 + C^4 = D^4$". Mathematics of Computation. **51**, 184: 825-835 (1988). doi:10.1090/S0025-5718-1988-0930224-9.

Parte I

Capítulos Introdutórios