

Notas em Computação Quântica

Ricardo Alvarenga

2024

Sumário

1	Álgebra Linear	1
1.1	Vetores	1
1.1.1	Vetores com duas dimensões - \mathbf{R}^2	1
1.1.2	Vetores com três dimensões - \mathbf{R}^3	2
1.1.3	Vetores com n dimensões - \mathbf{R}^n	2
1.1.4	Como colocar um vetor no plano $\mathbf{R}^3(x, y, z)$	2
1.1.5	Tipos de Vetores	2
1.1.6	Igualdade de Vetores	3
1.1.7	Soma de Vetores	3
1.1.8	Subtração de Vetores	4
1.1.9	Multiplicação de Dois Vetores (Produto Escalar)	4
1.1.10	Multiplicação por um Escalar	4
1.1.11	Módulo/Norma (Norm) de um Vetor	5
1.1.12	Ângulo entre dois Vetores (Ângulo Θ de dois Vetores)	5
1.1.13	Vetores Colineares	5
1.1.14	Ortogonalidade de Dois Vetores	5
1.1.15	Vetores Perpendiculares	6

Lista de Figuras

1	Vetores \mathbf{u} e \mathbf{v}	1
2	Vetores em \mathbf{R}^2	1
3	Vetores em \mathbf{R}^3	2
4	Vetor em \mathbf{R}^3	3
5	Subtração de Vetores	4

1 Álgebra Linear

1.1 Vetores

Vetores são seguimentos orientados (início em $0, 0$) que estão sempre no plano cartesiano. Vetores são usados para representar grandezas escalares (massa, pressão, etc.) e grandezas físicas vetoriais (velocidade, força e deslocamento).

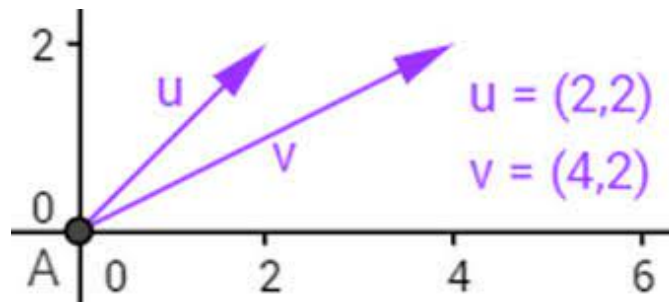


Figura 1: Exemplos de Vetores, u e v

1.1.1 Vetores com duas dimensões - \mathbf{R}^2

x, y podem assumir qualquer valor *Real*.

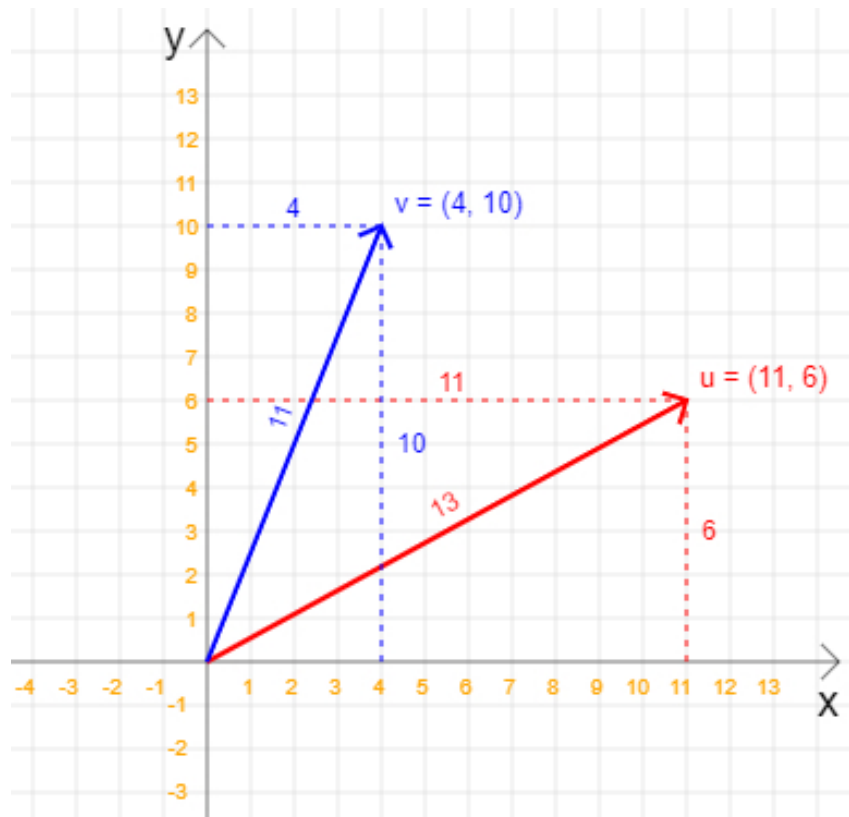


Figura 2: Vetores em $\mathbf{R}^2(x, y)$

1.1.2 Vetores com três dimensões - \mathbf{R}^3

x, y, z podem assumir qualquer valor *Real*.

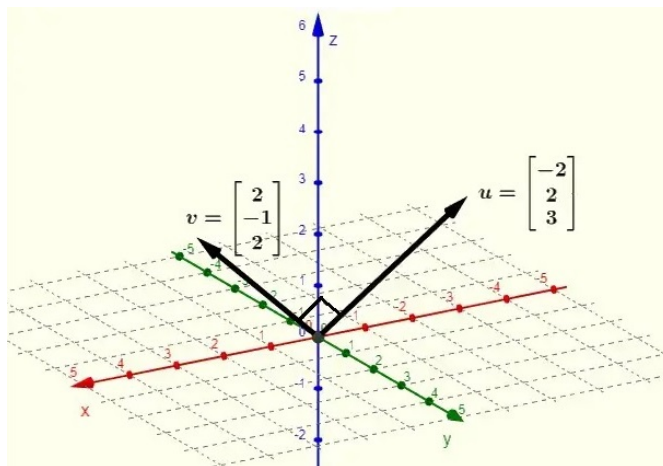


Figura 3: Vetores em $\mathbf{R}^3(x, y, z)$

1.1.3 Vetores com n dimensões - \mathbf{R}^n

Os vetores com n dimensões são de difícil (ou impossível) representação gráfica.

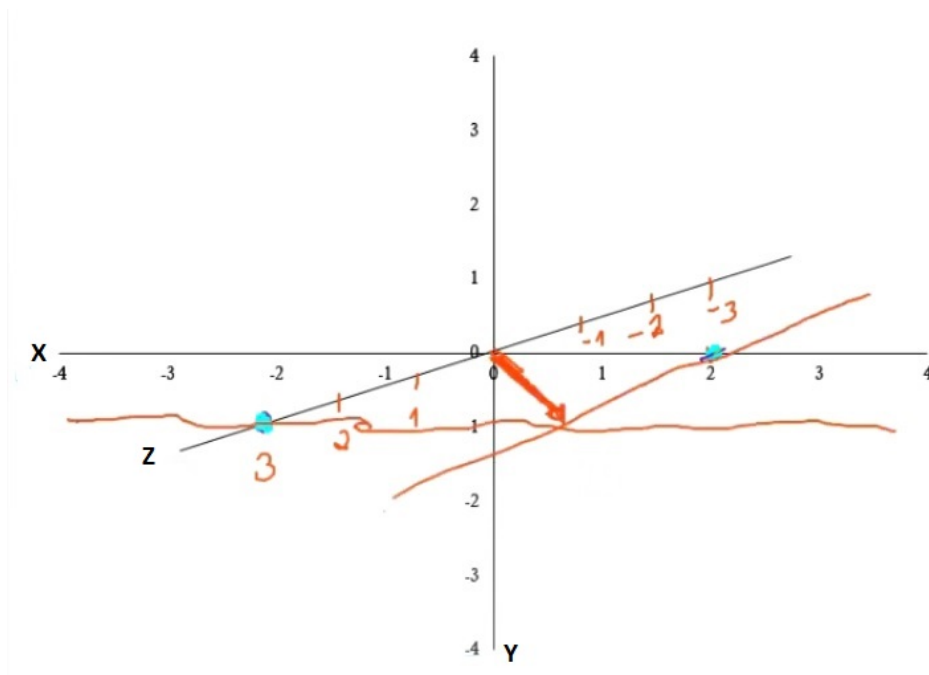
Um vetor \mathbf{R}^4 é indicado da seguinte forma: $\mathbf{R}^4(x, y, z, w)$

1.1.4 Como colocar um vetor no plano $\mathbf{R}^3(x, y, z)$

Veja na figura 4 o vetor $u = (2, 4, 3)$.

1.1.5 Tipos de Vetores

- Vetor Nulo: Todos valores iguais a zero. Ex: $v = (0, 0, 0)$
- Vetor simétrico ou oposto: Ocorre quando dois vetores são opostos e contêm o mesmo módulo e mesma direção. Ex: $v = (x, y), -v = (-x, -y)$
- Vetor unitário: Possui módulo (tamanho) igual a 1. $|v| = 1$
- Vetores colineares ou paralelos: Ocorrem quando dois vetores tiverem a mesma direção, na mesma reta ou retas paralelas.
- Vetores coplanares: Quando dois vetores fazem parte de um mesmo plano.

Figura 4: Vetor em \mathbf{R}^3

1.1.6 Igualdade de Vetores

Dois vetores serão iguais se:

- $x_1 = x_2$
- $y_1 = y_2$
- $z_1 = z_2$ vetores em R^3
- $w_1 = w_2$ vetores em R^4

$u = (3, x + 4)$ $v = (3, 8)$ se $x = 4$ os vetores serão iguais.

Sejam: $u = (x - 1, 3)$, $v = (3, 2y - 1)$. Determine o valor de x e y para que $u = v$.

$x = 4$, $y = 2$

1.1.7 Soma de Vetores

Para realizar a soma de dois vetores temos que efetuar a soma de cada elemento com seu correspondente.

Exemplo:

$$u = (2, 3), v = (5, 6)$$

$$u + v = (7, 9)$$

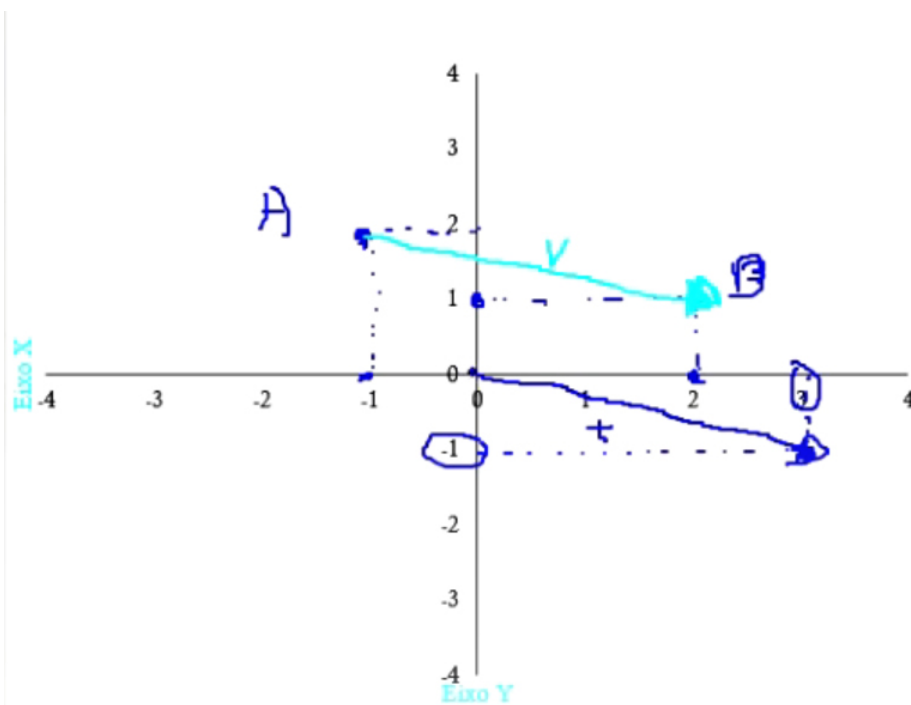


Figura 5: Subtração de Vetores

1.1.8 Subtração de Vetores

$A = (-1, 2)$ $B = (2, 1)$. $v = \overrightarrow{AB}$ o vetor está "perdido" no plano cartesiano. Para corrigir isso, realizamos a subtração:

$B - A = (2, 1) - (-1, 2) = (3, -1)$. Que resulta no vetor $t = (3, -1)$, conforme figura 5.

Outro exemplo: Dois vetores $u = (-1, 3)$ e $v = (10, 20)$, a subtração $u - v$ resulta em $(-11, -17)$.

Sejam u e v vetores no $\mathbf{R}^n[1]$: $u = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ e $v = (b_1, b_2, \dots, b_n)$

$u - v = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, \dots, a_n - b_n)$.

1.1.9 Multiplicação de Dois Vetores (Produto Escalar)

Assim como na soma e subtração de vetores, podemos multiplicar vetores. O nome correto deste tipo de operação é *Produto Escalar*.

Sejam u e v vetores no \mathbf{R}^n : $u = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ e $v = (b_1, b_2, \dots, b_n)$

$u * v = (a_1 * a_2 + b_1 * b_2, \dots, a_n * b_n)$.

Exemplo: $u = (1, 2)$, $v = (5, 3)$ Então: $u * v = (1, 2, 3, 4) * (5, 3, 1, 4) = (5 + 6 + 3 + 16) = 30$

1.1.10 Multiplicação por um Escalar

Multiplicação por um escalar é multiplicar um número por um vetor.

Sejam: $t = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e um número a

Temos: $at = a(x_1, x_2, \dots, x_n) = (a * x_1, a * x_2, \dots, a * x_n)$

Exemplo:

$$u = (4, 5) \text{ e } a = 2, au = 2(4, 5) = (8, 10)$$

1.1.11 Módulo/Norma (Norm) de um Vetor

A norma ou módulo de um vetor é o comprimento desse vetor, que pode ser calculado por meio da distância de seu ponto final até a origem.

A norma de u é denotada por $\|u\|$.

Considerando o vetor $u = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, calculamos sua norma, ou módulo, da seguinte forma[1, 2]: $\|u\| = \sqrt{u * u} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$

$$\text{Exemplo: } v = (5, 6), \|v\| = \sqrt{v * v} = \sqrt{(5, 6) * (5, 6)} = \sqrt{61}$$

ou de forma direta:

$$\|v\| = \sqrt{(5^2 + 6^2)} = \sqrt{61}$$

Se $\|u\| = 1$, temos um vetor unitário.

1.1.12 Ângulo entre dois Vetores (Ângulo Θ de dois Vetores)

Considerando dois vetores que partem do mesmo ponto, o ângulo entre eles é representado por Θ . O ângulo Θ é dado por:

$$\cos \Theta = \frac{u * v}{\|u\| * \|v\|}$$

Exemplo:

Sendo os vetores $u = (2, 2)$ e $v = (0, -2)$, encontre o ângulo Θ :

$$\cos \Theta = \frac{u * v}{\|u\| * \|v\|} = \frac{-4}{\sqrt{(8)} * 2} = \frac{-2}{\sqrt{8}} = \frac{-2}{\sqrt{2} * \sqrt{4}} = \frac{-2}{\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} * \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2} = 135^\circ$$

1.1.13 Vetores Colineares

Dois vetores são colineares (paralelos), quando:

$$v = (x_1, y_1) \text{ e } t = (x_2, y_2)$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = a$$

Exemplo: Verifique se u e v são colineares, sendo $u = (-3, 2)$ e $v = (6, -4)$

$$\frac{-3}{6} = -\frac{1}{2} \text{ e } \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2} \text{ então: } a = -\frac{1}{2}$$

1.1.14 Ortogonalidade de Dois Vetores

Considerando dois vetores coplanares (em R^2), eles serão ortogonais se o Θ , entre eles, for 90° .

Matematicamente: $u * v = 0$

Exemplo: Verifique se os vetores $u = (1, 2)$ e $v = (-2, 1)$, são ortogonais:

$$u * v = (1 * -2 + 2 * 1) = (-2 + 2) = 0$$

1.1.15 Vetores Perpendiculares

Dois vetores, em R^n com $n \geq 3$, são perpendiculares entre si, se o seu produto escalar for igual a zero.

Referências

- [1] Seymour Lipschutz. *Álgebra linear* - 2^a Edição. McGraw-Hill, 1972.
- [2] Howard Anton and Chris Rorres. *Álgebra Linear com Aplicações* - 10^a Edição. Bookman Editora, 2012.