Capítulo 1
Noções Conjuntivistas Básicas

Sumário

ESTE capítulo introdutório pretende (re)apresentar ao leitor uma série de noções abrangendo rudimentos da Teoria dos Conjuntos. O objetivo não é um tratamento extensivo dos diversos assuntos aqui expostos. Trata-se quase de um guia de consulta onde são apresentadas, quando possível junto a exemplos simples, várias noções e definições básicas que utilizaremos. O estudante não deve necessariamente ler este capítulo de forma sistemática e sequencial, mas deve retornar a ele sempre que necessário. Para o estudante interessado em uma exposição introdutória da Teoria dos Conjuntos recomendamos [204] e também [353], assim como [378], [497], [148] e [484]. Para ume exposição sobre os fundamentos da Lógica, recomendamos [105]. Para uma fascinante exposição das questões e problemas pertinentes aos fundamentos lógicos da Matemática, recomendamos [428]. Este capítulo extrai elementos de todos eles, em uma ordem e apresentação próprias.

1.1 Conjuntos, Relações e Funções

Esta seção é dedicada à apresentação de noções fundamentais à toda a Matemática, como a de conjunto, relações e funções, e a discutir diversos aspectos das mesmas.

A Matemática, assim como as Ciências a ela associadas, é ancorada em uma série de postulados, denominados "*axiomas*"[1], premissas fundamentais assumidas como verdadeiras, porém não demonstráveis a partir de outras dessas premissas. Segundo o pensamento racionalista, a existência de axiomas deriva de "princípios inatos da consciência" mas, segundo o pensamento empirista, de "generalizações de observações empíricas". De qualquer forma, uma vez aceitas certas premissas, todos os demais resultados válidos são obtidos das mesmas sob a regência de derivações lógicas, também de acordo com princípios lógicos tacitamente aceitos.

Nestas Notas evitaremos completamente entrar nas questões mais finas de Lógica, mas discutiremos um pouco a respeito dos postulados, ou axiomas, sobre os quais a Teoria de Conjuntos, fundamental à toda a Matemática, se baseiam. Nossas pretensões são modestas, mas incluem despertar o interesse do estudante nesses temas fundamentais, fascinantes e profundos.

A combinação de axiomas e regras de dedução lógica é por vezes dita ser um *sistema axiomático*. Tais sistemas são muito antigos na Matemática, um dos primeiros sendo, talvez, a formulação da Geometria Plana por Euclides de Alexandria[2], apresentada em seu livro "*Os Elementos*" [144], datado do século IV A.C. e que serviu de livro-texto de Geometria ao menos até o final do século XIX (por mais de dois milênios, portanto!). Várias outras áreas da Matemática, mesmo dentre as mais recentes, se formularam em termos de sistemas axiomáticos e remetemos o leitor interessado a textos sobre História da Matemática, como [71], [489], [46] e [424].

1.1.1 Rudimentos da Teoria dos Conjuntos

• **Alguma discussão preliminar**

Na linguagem comum, os vocábulos "conjunto", "coleção", "reunião", "agrupamento", e ainda outros, são sinônimos empregados para designar um coletivo de objetos dotados de certas propriedades de interesse em comum. O *Dicionário Houaiss* [247], por exemplo, dentre várias acepções, define "conjunto" como "certa quantidade de elementos vista como um todo". O mesmo dicionário define "coleção" como um "conjunto ou reunião de objetos", o que esbarra no caráter tautológico dessas noções.

Em contraste, a noção matemática de conjunto procura precisar, para uso em argumentos lógicos, a noção intuitiva de coleção de objetos, empregada na linguagem comum. Cabe notar que inexiste uma definição precisa da noção de conjunto empregada na Matemática, assim como a de pertinência de um objeto a um conjunto. Ambas as noções são tidas como "primitivas" e devem ser tacitamente subentendidas em cada contexto em que são empregáveis. Assim, na linguagem empregada na Matemática cabe apenas delinear a noção de conjunto em termos de propriedades que os mesmos satisfaçam.

No que segue nesta seção, empregaremos a palavra "coleção" para designar a noção de um coletivo ou reunião de objetos tal como usada na linguagem comum, reservando a palavra "conjunto" para o sentido matemático, que delinearemos.

A vantagem de tratar de conjuntos consiste no fato de se poder fazer afirmações válidas e significativas para um coletivo de objetos, e não limitadas a objetos individuais. Por exemplo, é possível demonstrar que o conjunto dos números primos não é finito (Teorema de Euclides, Proposição 8.1, página 428), ou que não há uma função bijetora entre os números racionais e os reais, ou que o espectro de operadores autoadjuntos em um espaço de Hilbert é um subconjunto da reta real $\mathbb{R}$. O estudante iniciante não precisa saber já o que essas coisas significam mas, à medida em que adquire experiência, perceberá que boa parte da Matemática trata de questões de natureza conjuntivista.

No sentido matemático, conjuntos são caracterizados (melhor dizendo, delineados) por certas propriedades e por certas operações com eles definidas que procurem capturar construções guiadas pela lide intuitiva realizada em coleções de coisas.

Cabe notar que nem toda coleção de objetos corresponde a um conjunto no sentido matemático. Adiante procuraremos distinguir conjuntos e classes (próprias), outra noção ligada à noção intuitiva de coleção, mas que não precisa satisfazer certas propriedades impostas em conjuntos[3].

Como o estudante há de perceber, certas questões que podem ser colocadas no estudo matemático de conjuntos

[1] Palavra que no Grego Clássico significa "considerado válido", assim como "requerido".
[2] Euclides de Alexandria (ci. 325 A.C. – ci. 265 A.C.).
[3] Nossa abordagem, aqui, será ingênua, pois em certos esquemas axiomáticos da Teoria dos Conjuntos, como a de Zermelo-Fraenkel, a noção de classe sequer é definida.

esbarram em questões de Linguagem e Semântica, como também em questões de natureza lógica e mesmo folosófica [105]. Evitaremos tocar em tais questões, procurando uma abordagem "impressionista", mas que possa levar o estudante curioso a aprofundar-se nessas difíceis questões. Devemos dizer, porém, que é questionável o quanto essas questões são realmente relevantes nas Ciências Naturais e mesmo na maioria das áreas da Matemática usual. Pessoas de inclinação mais filosoficamente fundamentalista podem, porém, sentir a necessidade de tais aprofundamentos e a elas recomendamos os textos supralistados como referência inicial. Como diz Paul Halmos[4] no prefácio de [204], *"A tarefa do estudante ao aprender a teoria dos conjuntos é embeber a si próprio em generalidades não familiares mas essencialmente pouco profundas até que elas se tornem tão familiares que possam ser usadas quase sem esforço consciente. Em outras palavras, a teoria geral dos conjuntos é realmente matéria bastante trivial, mas se você quiser ser um matemático, você precisa um pouco dela, e aqui está; leia-a, absorva-a e esqueça-a".*

• **Georg Cantor**

A obra matemática de George Cantor[5] concentra-se no período entre 1874 e 1891 e não é um exagero afirmar que ela mudou o panorama da Matemática ou, ao menos, deu início a um processo de análise dos seus fundamentos com profundas consequências para os desenvolvimentos posteriores. O nome de Cantor será repetidamente mencionado no presente capítulo. De forma muito resumida, suas maiores contribuições foram dar início ao desenvolvimento da Teoria dos Conjuntos, introduzir da noção de cardinalidade de conjuntos – noção equivalente ao de número de elementos de conjuntos, mas também válida para conjuntos não finitos – assim como definir a noção de conjuntos bem ordenados, ideias sobre as quais falaremos. Adicionalmente, introduziu as noções de números transfinitos, de números ordinais e cardinais[6].

Com essas contribuições foi possível pela primeira vez explorar e classificar de forma matematicamente consistente a noção de "infinito", que ocupou parte do pensamento filosófico e matemático ao menos desde os pré-socráticos, como Anaximandro[7] e Zenão[8].

A vida de Cantor possui também qualidades dramáticas, narradas em suas diversas biografias[9]. Em vida, enfrentou duras críticas às suas ideias, especialmente por parte de matemáticos como Kronecker[10] e Poincaré[11], mas também de filósofos e mesmo de teólogos, a despeito de sua profunda crença religiosa (Cantor aparentemente chegava a afirmar receber suas ideias diretamente de deus). Após sua aposentadoria em 1913 passou pela Primeira Guerra Mundial em extrema pobreza. Adicionalmente, enfrentou em parte de sua vida adulta problemas de depressão que o levaram a passar seus dois anos finais em um sanatório.

Aos poucos, porém, suas ideias foram ganhando chão e encontraram apoio em nomes como Dedekind[12] e (especialmente) Hilbert[13], assim como Zermelo[14], Russell[15], Hadamard[16] e muitos outros.

O fato para nós relevante é que desde o início do século XX há uma crença generalizada que toda a Matemática assenta-se sobre a Teoria dos Conjuntos, lançada por Cantor e desenvolvida por outros nomes. Uma célebre exclamação de Hilbert expressa esse pensamento: *"Do paraíso que Cantor criou para nós ninguém deverá ser capaz de nos expulsar"*[17].

• **Rudimentos de Lógica**

Um Cálculo Proposicional, ou Cálculo de Predicados, é um sistema lógico de pensamento no qual afirmações sobre

[4]Paul Richard Halmos (1916-2006).
[5]Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845–1918).
[6]Uma curiosidade: Cantor foi um dos primeiros adeptos da ideia que a obra atribuida a William Shakespeare (1564–1616) fora, na realidade, escrita por Francis Bacon (1561–1626), tendo escrito e palestrado a respeito.
[7]Anaximandro (ci. a.C. 610 – ci. 546 a.C.).
[8]Zenão de Eleia (ci. 490/485 a.C. – ci. 430 a.C.).
[9]Vide, *e.g.*, o capítulo dedicado a Cantor em [46], ou ainda [45], [114] ou, o um tanto controverso, [523].
[10]Leopold Kronecker (1823–1891).
[11]Jules Henri Poincaré (1854–1912).
[12]Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831-1916).
[13]David Hilbert (1862–1943).
[14]Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo (1871-1953).
[15]Bertrand Arthur William Russell, 3º Conde Russell (1872–1970).
[16]Jacques Salomon Hadamard (1865–1963).
[17] *"Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen, soll uns niemand vertreiben können"*. Vide página 170 de: David Hilbert, "Über das Unendliche". Math. Ann. **95**, 161-190 (1926). https://doi.org/10.1007/BF01206605. De uma conferência em honra a Weierstrass proferida em 4 de junho de 1925 na Sociedade Matemática da Westphalia, em Münster. Para uma versão em língua inglesa, vide [219].
Uma versão em Francês do mesmo artigo, com a citação "Du paradis que Cantor a créé pour nous, personne ne doit pouvoir nous chasser", pode ser encontrada à página 100 de: David Hilbert, "Sur l'infini", Acta Math. **48** (1-2): 91-122 (1926). DOI: 10.1007/BF02629757.

um determinado conjunto de objetos posto em discussão (*"universo do discurso"*) podem ser declaradas verdadeiras ou falsas.

Em termos um pouco mais precisos, um *predicado*, em sentido lógico, é uma função P que associa a um objeto x um elemento do conjunto $\{0,\ 1\}$, com $P(x) = 0$ significando que a afirmação sobre x é falsa e $P(x) = 1$ significando que a afirmação sobre x é verdadeira. No jargão empregado em Lógica, uma função que assume valores apenas no conjunto $\{0,\ 1\}$ é dita ser uma *função Booleana* e o conjunto $\{0,\ 1\}$ é denominado *domínio Booleano*. Os possíveis valores de P são denominados *valores-verdade* e a atribuição de 0 a "falso" e de 1 a "verdadeiro" é uma convenção histórica.

A possibilidade de se atribuir valores a uma afirmação é dita ser uma *valoração* (lógica). Na *Lógica Proposicional* (ou *Cálculo Proposicional*) é implicitamente assumido que uma valoração pode ser atribuida a qualquer afirmação feita sobre a coleção de objetos dos quais se fala, o chamado "universo do discurso".

Vale notar que nem todo sistema de pensamento admite que as valorações de declarações sejam apenas "verdadeiro" ou "falso". Por exemplo, podemos assumir que o domínio Booleano não é $\{0,\ 1\}$, mas o intervalo $[0,\ 1]$ ou um subconjunto deste com mais de dois elementos e a dualidade verdadeiro/falso é substituida pelo que se denomina *grau de veracidade* de uma afirmação. Tal é o caso nas chamadas *Lógicas Multivaloradas* (ou *Lógicas Plurivalentes*). Um exemplo de Lógica Trivalorada sendo aquela em que os valores-verdade são "verdadeiro", "falso" e "não sei" (ou "não é possível saber")[18]. Na chamada *Lógica Difusa* (*"Fuzzy Logic"*) a função Booleana P, um predicado, é substituida por uma distribuição de probabilidades em algum domínio Booleano. Lógicas não difusas são por vezes denominadas *Lógicas Nítidas*.

Como discutimos na nossa abordagem da Seção 1.1.1.1, página 47, predicados podem ser utilizados para definir conjuntos: $\{x|P(x) = 1\}$, ou simplesmente $\{x|P(x)\}$, designa o conjunto dos elementos x para os quais $P(x)$ é verdadeiro. Por exemplo, se estamos falando de números naturais ("universo do discurso") e $P(x) = 1$ se $x < 7$ e $P(x) = 0$ de outra forma, então $\{x \in \mathbb{N}|P(x)\} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$. A possibilidade de definir conjuntos dessa forma é garantida pelo chamado *Axioma da Especificação*, discutido à página 49.

Predicados são constituídos de assim chamados *quantificadores*, sobre as variáveis a que se aplicam, como *"existe"* ($\exists$), *"não existe"* ($\nexists$), *"para todo"* ($\forall$), *"para algum"* ($\vee$, símbolo em desuso), *"verdadeiro"* ($\top$), *"falso* ($\perp$) etc. Há também os conectivos lógicos, como *"e"* ($\wedge$), *"ou"* ($\vee$), *"então* ($\rightarrow$), *"implica"* ($\Rightarrow$), *"portanto"* ($\therefore$), *"se e somente se"* ($\Leftrightarrow$), *"igual"* ($=$), *"não igual"* ($\neq$) etc. Para todos eles há símbolos matemáticos bem conhecidos. Partes independentes de predicados ("átomos") podem ser separadas por parênteses, cuja principal função é evitar ambiguidades. Por exemplo, nos números naturais, $P(x) = (x < 10) \wedge (x > 5)$ significa x é menor que 10 e maior que 5 e, obviamente, $\{x \in \mathbb{N}|P(x)\} = \{6,\ 7,\ 8,\ 9\}$.

1.1.1.1 Conjuntos e os Axiomas que os Delineiam

Partiremos do pressuposto de serem familiares as noções básicas envolvendo conjuntos, como a noção de conjunto vazio $\emptyset$, a noção de pertinência $x \in C$, de união de dois conjuntos $A \cup B$ e de intersecção de dois conjuntos $A \cap B$. Devemos, porém, sem a pretensão de aprofundar o assunto, apresentar alguma discussão sobre essa base familiar. Esses desenvolvimentos constituem o que se denomina *Teoria "Ingênua" dos Conjuntos*, delineada por Cantor no século XIX e que foi desenvolvida e aperfeiçoada por muitos outros nomes, evoluindo para tornar-se a base sobre a qual toda a Matemática se assenta.

A noção de conjunto originalmente delineada por Cantor e contemporâneos é denominada "ingênua" pois nela foram descobertos paradoxos (mais precisamente, antinomias[19]), notadamente por Russell, que levaram a reformulações do esquema geral da Teoria dos Conjuntos. Há notadamente duas dessas formulações que são relevantes, a de Zermelo-Fraenkel[20] (ZF) e a de von Neumann[21]-Bernays[22]-Gödel[23] (NBG). Sobre a última pouco falaremos de específico aqui e remetemos os interessados à literatura supralistada. Os axiomas que apresentaremos são comuns à formulação de

[18] Em discursos sobre loterias, afirmações como "ganhei na loteria na semana passada" podem ser verdadeiras ou falsas, mas o valor-verdade da senteça "ganhei na loteria na próxima semana" é: "não sei".

[19] Os vocábulos "*paradoxo*" e "*antinomia*" são por vezes tratados como sinônimos, embora alguns tomem antinomias como tipos particulares de paradoxos. Um paradoxo é entendido como uma afirmação contrária a opiniões comuns, ou admitidas como válidas, enquanto que uma antinomia resulta de uma contradição entre proposições racionalmente deduzidas e logicamente defensáveis. Assim, antinomias referem-se a conflitos lógicos de ideias, enquanto que paradoxos referem-se a conflitos com o senso comum. Claro está que antinomias podem provocar paradoxos e não é errado referir-se a antinomias como paradoxos. Em outros termos, um paradoxo é algo que reside no mundo exterior e contradiz teorias conhecidas e entendimento anterior. Uma antinomia é uma contradição no nosso próprio sistema de conhecimento, da nossa própria razão. Nesses sentidos cremos ser correto falar no "paradoxo dos gêmeos" na Teoria da Relatividade, mas na "antinomia de Russell", na Matemática e na Lógica.

[20] Adolf Abraham Halevi Fraenkel (1891-1965).

[21] John von Neumann, nascido Neumann János Lajos (1903-1957), von Neumann também adotou o nome Johann von Neumann.

[22] Paul Isaac Bernays (1888-1977).

[23] Kurt Friedrich Gödel (1906-1978).

Zermelo-Fraenkel.

Ingenuamente, um conjunto é uma coleção de objetos, o que se apresenta como uma expressão tautológica. Essa base conceitual, porém, pode ser melhor delineada para uso em Matemática se entendermos como conjuntos certas coleções de objetos sobre os quais certas operações podem ser definidas conduzindo a novos conjuntos. Apontamos para o fato de existirem também coleções de objetos, denominadas *classes* para os quais essas operações não são supostas.

A noção principal sobre a qual assenta-se a noção de conjunto (ou de classe) é a noção de pertinência, uma noção "primitiva", ou seja, não previamente definida, mas cujo significado é subentendido em cada contexto. Se um elemento x pertence a um conjunto (ou classe) A, denotamos isso por $x \in A$. Um conjunto é, assim, composto por objetos que a ele pertencem e por eles é especificado.

Fazemos notar que uma coleção pode ser especificada de duas formas: por *extensão*, listando os objetos que lhe pertencem, por exemplo, a coleção composta pelas letras a, b e k, que denotamos por $\{a, \ b, \ k\}$, ou por *intensão* (ou *especificação*), descrevendo a propriedade definidora da coleção, por exemplo, a coleção de todos os serem humanos nascidos na cidade de São Paulo, que podemos escrever simbolicamente como $\big\{x \text{ é um ser humano} \mid x \text{ nasceu em São Paulo}\big\}$. Essas duas maneiras de expressar conjuntos de coisas são empregadas em Matemática. Note-se que uma definição por extensão nem sempre é possível. Não podemos, por exemplo, listar todos os números primos, por haver infinitos deles[24], mas podemos especificar o conjunto dos primos escrevendo $\big\{p \in \mathbb{N}, \ p > 1 | \ p \text{ não é divisível por } q \in \mathbb{N} \text{ com } 1 < q < p\big\}$[25][26]. Da mesma forma, toda a definição por extensão pode ser igualada a uma por especificação, ainda que isso possa ocorrer de maneira trivial. Por exemplo, a coleção composta pelas letras a, b e k também pode ser descrita da seguinte forma: $\big\{x \text{ é uma letra} | \ x = a, \text{ ou } x = b, \text{ ou } x = k\big\}$. Definições por especificação, se adequadamente feitas, podem ser mais úteis, por destacarem propriedades coletivas a serem satisfeita por seus membros, sem a necessidade de listá-los.

Passemos agora à introdução gradual dos axiomas da Teoria dos Conjuntos.

• O Axioma da Extensão

Um dos postulados básicos sobre conjuntos é o chamado *Axioma da Extensão*: dois conjuntos A e B são iguais se e somente se possuem os mesmos elementos. Isso significa dizer que se $x \in A$, então $x \in B$ e, vice-versa, se $x \in B$, então $x \in A$.

Chamamos a atenção do leitor para o fato de que o Axioma da Extensão assim formulado é derivado da noção primitiva de pertinência, mas não pode ser logicamente obtido dela, tendo assim de ser aceito como postulado, ou seja, como axioma[27].

Dizemos que um conjunto A é um subconjunto de um conjunto B se todo elemento de A é um elemento de B. Em símbolos, isso é denotado por $A \subset B$ (lê-se "A está contido em B") ou $B \supset A$ (lê-se "B contém A"). Se $A \subset B$ e $B \subset A$, então o Axioma da Extensão afirma que $A = B$.

Uma forma de descrever conjuntos é listando seus elementos. Assim, quando dizemos, por exemplo, que um conjunto A é da forma $A = \{a, \ b\}$ afirmamos que A possui dois elementos (supostamente distintos): a e b. Uma outra consequência elementar, mas relevante, do Axioma da Extensão é que podemos nos dispensar de listar elementos repetidos nessa forma de expressar conjuntos. Assim, se $a \neq b$ são dois objetos distintos os conjuntos $\{a, \ a, \ b\}$ e $\{a, \ b\}$ são o <u>mesmo</u> conjunto, ou seja, $\{a, \ a, \ b\} = \{a, \ b\}$. De fato, os elementos de $\{a, \ a, \ b\}$ são a e b, enquanto que os elementos de $\{a, \ b\}$ também são a e b. Assim, pelo Axioma da Extensão, $\{a, \ a, \ b\} = \{a, \ b\}$. É possível tratar de coleções de objetos que levam em conta a multiplicidade de ocorrência de seus elementos, mas aí estamos lidando com outros objetos matemáticos que não conjuntos. Vide, por exemplo, a definição das chamadas "uniões disjuntas" à página 57.

Todos os demais axiomas da Teoria dos Conjuntos especificam como podemos construir conjuntos a partir de outros conjuntos dados. Quando lidamos com coleções de objetos para as quais algumas dessas construções não se aplicam, reservamos a palavra *classe* para designá-las. Veremos exemplos.

[24] Teorema de Euclides, Proposição 8.1, página 428.

[25] Dizemos que $p \in \mathbb{N}_0$ é divisível por $q \in \mathbb{N}$ se $p/q \in \mathbb{N}_0$. Simbolicamente isso é representado por $q|p$: lê-se, "q divide p".

[26] O número 1 não é incluído entre os primos. Um possível motivo é discutido em comentário na nota-de-rodapé 4, página 430.

[27] Um axioma ou postulado é um proposição que não é demonstrada e é aceita por consenso. A partir da aceitação de certos axiomas, outras afirmações verdadeiras podem ser logicamente demonstradas. Dessa forma, a aceitação de axiomas delimita um conjunto de afirmações verdadeiras que podem ser deles extraídos através de regras aceitas de inferência lógica, que permitam deduzir novas afirmações a partir de outras. É de se notar que podem, dessa forma, ocorrer dois fenômenos não necessariamente excludentes: a existência de afirmações contraditórias inferidas a partir de um conjunto consensual de axiomas ou a existência de verdades que não podem ser demonstradas a partir dos axiomas aceitos. De forma implícita não suporemos que tais fenômenos ocorram em nossos estudos, mas é uma importante tarefa da Lógica demonstrar sua presença ou sua ausência.

• O Axioma da Especificação

Um desses axiomas é o chamado *Axioma da Especificação*, ou *Axioma da Abstração*, ou também por outros nomes. Para esclarecê-lo, precisamos delinear a noção de *sentença*, o que faremos de uma forma deliberadamente vaga e imprecisa, remetendo o leitor aos textos supracitados para uma apresentação mais completa[28]. Uma sentença é uma declaração sobre objetos de uma coleção que possa ser verdadeira ou falsa. Por exemplo, se W é uma coleção de bolas, uma possível sentença é a afirmação que uma particular bola é de cor vermelha. Assim, uma possível sentença S em W é a afirmação "$S(x)$ é verdadeira", com x sendo um elemento de W, o que expressa o fato de x ser uma bola da cor vermelha.

O chamado Axioma da Especificação pode ser assim expresso: se A é um conjunto e S é uma sentença em A, então existe um conjunto B composto pelos objetos x de A para os quais $S(x)$ é verdadeira. A notação mais comummente empregada para denotar o conjunto B assim definido é $B = \big\{x \in A|\ S(x) \text{ é verdadeira}\big\}$. Por vezes expressaremos isso da forma $B = \big\{x \in A:\ S(x) \text{ é verdadeira}\big\}$, substituindo o símbolo "|" por ":".

De qualquer forma, dada uma sentença S em um conjunto A o conjunto $B = \big\{x \in A|\ S(x) \text{ é verdadeira}\big\}$ é um subconjunto de A, conforme nossa definição de subconjunto.

Notamos, *en passant*, que é comum, por simplicidade e economia, omitir-se a declaração "é verdadeira" sobre uma sentença. Assim, ao invés de escrever-se $B = \big\{x \in A|\ S(x) \text{ é verdadeira}\big\}$ pode-se escrever apenas $B = \big\{x \in A|\ S(x)\big\}$, ficando subentendida a declaração "é verdadeira" para $S(x)$.

É relevante neste ponto frisar que uma sentença S em um dado conjunto deve ser *consensualmente* apenas verdadeira ou falsa. Por exemplo, se A é um conjunto de pessoas e $S(x)$ é a afirmação que a pessoa x é popular, não temos uma sentença, pois não há consenso sobre o que significa uma pessoa ser popular. O mesmo para "bela" ou "feia" ou "positiva" etc. Em tais casos a sentença é dita mal definida ou ambígua e ela não define um conjunto.

O Axioma da Especificação é muito importante mas, se tratado ingenuamente, encerra armadilhas como as que serão expostas adiante, por exemplo, na discussão da chamada *Antinomia (ou Paradoxo) de Russell* (página 52) e na discussão em torno do *Axioma da Regularidade* (página 55). As existências destes levaram diversos lógicos e matemáticos a propor revisões no esquema axiomático da Teoria dos Conjuntos. Tais problemas também levaram à distinção entre conjuntos e classes (próprias), como discutimos à página 53.

• Gottlob Frege

O Axioma da Especificação deriva de ideias do influente Lógico, Matemático e Filósofo Gottlob Frege[29], que acreditava que toda especificação de uma coleção de objetos por uma sentença logicamente constituída permite definir um conjunto. As ideias matemáticas de Frege foram publicadas na referência [163][30], mas pouco antes da publicação do volume II dessa obra, em 1903, Frege foi informado por Russell[31] da existência da antinomia que leva seu nome, e que discutiremos adiante (página 52).

Em um episódio famoso, Frege acrescentou ao texto o seguinte comentário, de tocante honestidade: *"Dificilmente algo mais infeliz pode acontecer a um escritor científico do que ter um dos alicerces de seu edifício abalado após a conclusão do trabalho. Essa foi a posição em que fui colocado por uma carta do Sr. Bertrand Russell, justamente quando a impressão deste volume estava chegando ao fim"*. Abalado, Frege sugeriu algumas medidas para remediar o problema mas, em verdade, a tentativa de solucioná-lo acabou engendrando muitos desenvolvimentos importantes a serem sugeridos e implementados por seus sucessores.

A grande contribuição de Frege à Lógica e à Matemática reside na criação de um sistema (por ele denominado "conceitografia") de representação simbólica para expressar formalmente a estrutura de enunciados lógicos e suas relações, e a implementação do assim chamado *cálculo dos predicados*, possibilitando a manipulação de regras de dedução formal. Tais contribuições, originalmente pouco conhecidas, mas posteriormente grandemente difundidas, especialmente por Russell, são hoje lugar-comum na Matemática e na Lógica, estendendo sua influência também às Ciências Naturais e à Ciência da Computação.

Em [428], Russell atribui a Frege a primeira definição do conceito de número, no volume I de [163]. *"Conquanto esse livro seja bem pequeno, não seja difícil, e seja da mais alta importância, quase não atraiu atenção alguma e a definição de número que contém permaneceu praticamente desconhecida até que foi redescoberta por este autor em 1901"*. B. Russell,

[28] A área da Lógica que trata desses questões é o Cálculo de Predicados de Primeira Espécie, com igualdade. Vide, *e.g.*, [148], [353], [497] ou [484].

[29] Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848-1925).

[30] Vide também [164] ou [165]. Trata-se, porém, de um livro distinto de [163]. Vide também [219].

[31] Para a correspondência entre ambos, vide [219].

em [428].

• **O conjunto vazio**

Dado um conjunto A, o Axioma da Especificação permite-nos considerar o conjunto $\{x \in A| \; x \neq x\}$. É evidente que esse conjunto não possui elementos (a sentença $x \neq x$ nunca pode ser verdadeira) e é dito ser o *conjunto vazio*. O Axioma da Especificação indica que todo conjunto possui um conjunto vazio e o Axioma da Extensão implica que todos os conjuntos vazios são iguais. O conjunto vazio é costumeiramente denotado por $\emptyset$.

• **O Axioma do Emparelhamento**

O próximo axioma que listamos indica mais uma forma de construir conjuntos. *Axioma do Emparelhamento*: se A e B são conjuntos (não necessariamente distintos), então existe um conjunto C que contém ambos como elementos, ou seja, existe um conjunto C tal que $A \in C$ e $B \in C$.

Uma consequência desse postulado é a existência de um conjunto que possui *apenas* A e B como elementos. Seja C um conjunto que contém A e B e considere-se em C a sentença $S(x)$ definida por "$x = A$ ou $x = B$" para os elementos x de C. Então, o subconjunto de C especificado por $\{x \in C| \; S(x)$ é verdadeira$\}$ existe pelo Axioma da Especificação e contém apenas A e B como elementos. Esse conjunto é frequentemente denotado por $\{A, \; B\}$.

Caso $A = B$, o conjunto $\{A, \; A\}$ assim constituído coincide com o conjunto $\{A\}$ e é entendido como um conjunto dotado de um único elemento, A. Procuremos esclarecer isso. Conforme definimos, se C é um conjunto que contém A como elemento, então $\{A, \; A\} = \{x \in C| \;$ "$x = A$ ou $x = A$" é verdadeira$\}$. Naturalmente, isso reduz-se a $\{x \in C| \;$ "$x = A$" é verdadeira$\}$. Esse conjunto, porém, coincide com $\{A\}$.

Conjuntos dotados de um único elemento são denominados *conjuntos unitários*.

Há de se distinguir, portanto, os conjuntos $\emptyset$ e $\{\emptyset\}$. O primeiro não possui elementos enquanto que o segundo possui elementos, a saber, o conjunto $\emptyset$. Analogamente, há de se distinguir os conjuntos $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\big\{\{\emptyset\}\big\}$, $\Big\{\big\{\{\emptyset\}\big\}\Big\}$ etc.

• **O Axioma das Uniões**

Chegamos agora a mais um importante axioma da Teoria dos Conjuntos, o qual representa uma importante propriedade assumida pela noção de conjunto e que, como veremos, não é satisfeita por todas as coleções de objetos, o chamado *Axioma das Uniões*.

O Axioma das Uniões tenta capturar a ideia intuitiva de que, dada uma coleção *arbitrária* de conjuntos, podemos constituir um novo conjunto juntando todos os elementos de cada um dos conjuntos dessa coleção. A palavra "arbitrária", aqui, é de grande importância pela maior abrangência que permite na construção de conjuntos.

O Axioma das Uniões pode ser assim enunciado: dada uma coleção $\mathscr{C}$ de conjuntos existe um conjunto, denominado união dos elementos da coleção $\mathscr{C}$, que contém todos os elementos com a propriedade de pertencerem a ao menos um conjunto de $\mathscr{C}$. De forma simbólica a união dos elementos da coleção $\mathscr{C}$ é o conjunto $\{x| \; x \in A$ para algum $A \in \mathscr{C}\}$.

Um ponto a ser enfatizado é que o Axioma das Uniões afirma que uniões arbitrárias de coleções de conjuntos são também conjuntos. Essa é uma declaração específica sobre a natureza da noção de conjunto que distingue esses de meras coleções de objetos.

A união dos conjuntos que compõem $\mathscr{C}$ pode ser denotada de diversas formas: $\bigcup \mathscr{C}$, $\bigcup\{A, \; A \in \mathscr{C}\}$ ou $\displaystyle\bigcup_{A \in \mathcal{C}} A$ e doravante empregaremos cada uma delas, a depender da conveniência.

E. 1.1 *Exercício de [204].* Seguindo as definições acima, prove os seguintes fatos elementares: para dois conjuntos A, B e C valem:

$$A \cup \emptyset = A\,, \tag{1.1}$$

$$A \cup B = B \cup A \quad \text{(comutatividade)}\,, \tag{1.2}$$

$$A \cup \big(B \cup C\big) = \big(A \cup B\big) \cup C \quad \text{(associatividade)}\,, \tag{1.3}$$

$$A \cup A = A \quad \text{(idempotência)}\,, \tag{1.4}$$

$$A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B\,. \tag{1.5}$$

Como veremos adiante, essas propriedades podem ser generalizadas para coleções arbitrárias de conjuntos. ✠

Mais adiante apresentaremos também a noção de intersecção de conjuntos e de coleções de conjuntos e suas propriedades. Por exemplo, se A e B são conjuntos, $A \cap B$ é a coleção de elementos de $A \cup B$ que pertencem a A e a B. Por se tratarem de elementos de um conjunto (de $A \cup B$) que satisfazem uma sentença (a de pertencerem a A e a B), o Axioma da Especificação garante a existência de $A \cap B$ como conjunto.

Finalizamos com uma observação elementar e que será empregada: todo conjunto pode ser escrito como união dos conjuntos unitários compostos por seus elementos. Mais claramente, para todo conjunto A vale $A = \bigcup_{x \in A}\{x\}$. A demonstração é simples. Se $y \in \bigcup_{x \in A}\{x\}$, então existe um $x_0 \in A$ tal que $y \in \{x_0\}$. Assim, $y = x_0 \in A$. Como isso vale para todo $y \in \bigcup_{x \in A}\{x\}$, concluímos que $\bigcup_{x \in A}\{x\} \subset A$. Por outro lado, se $y \in A$, então $\{y\}$ é um conjunto unitário contido em A. Portanto, $y \in \bigcup_{x \in A}\{x\}$, estabelecendo que $A \subset \bigcup_{x \in A}\{x\}$ e, portanto, que $A = \bigcup_{x \in A}\{x\}$.

• O Axioma das Potências

O importante *Axioma das Potências* consiste na afirmação de que a coleção de todos os subconjuntos de um conjunto dado é também um conjunto. Em outras palavras, se X é um conjunto, então existe um outro conjunto, denotado por $\mathbb{P}(X)$ e denominado *conjunto das partes de* X, ou *conjunto potência de* X, cujos elementos são precisamente os subconjuntos de X. Assim, $A \in \mathbb{P}(X) \Leftrightarrow A \subset X$. Para dirimir dúvidas, vale notar que $\emptyset \in \mathbb{P}(X)$, assim como $X \in \mathbb{P}(X)$.

O Axioma das Potências garante, assim, a existência de mais um tipo de conjunto: aquele composto pelos subconjuntos de um conjunto dado. Trata-se legitimamente de um axioma, pois essa afirmação não pode ser derivada de outras proposições mais simples sobre conjuntos.

No caso de um conjunto finito X dotado de n elementos[32], é um exercício combinatório simples mostrar que $\mathbb{P}(X)$ possui 2^n elementos. Essa é a justificativa para o uso da palavra "potência" na denominação de $\mathbb{P}(X)$ como "conjunto potência" de X.

• Conjuntos finitos

Todos possuímos uma noção intuitiva da noção de *conjunto finito*. Apenas a título de curiosidade, vamos mostrar que é possível dar a essa noção um sentido preciso exclusivamente dentro da Teoria dos Conjuntos, sem evocar-se a noção de número natural.

Definição. Seja X um conjunto e seja $\mathcal{F} \subset \mathbb{P}(X)$ uma coleção de subconjuntos não vazios de X. Dizemos que $A \in \mathcal{F}$ é um elemento mínimo de $\mathcal{F}$ se para todo $B \in \mathcal{F}$ com $B \subset A$ vale $B = A$. ♠

Definição. Seja X um conjunto e seja $\mathcal{F} \subset \mathbb{P}(X)$ uma coleção de subconjuntos não vazios de X. Dizemos que $A \in \mathcal{F}$ é um elemento máximo de $\mathcal{F}$ se para todo $B \in \mathcal{F}$ com $B \supset A$ vale $B = A$. ♠

Definição. Um conjunto X é finito se e somente se toda coleção de subconjuntos não vazios de X possui um elemento mínimo. ♠

Apresentemos dois exemplos banais que ilustram as ideias.

Exemplo 1.1 Tomemos $X = (0, 1) \subset \mathbb{R}$ e $\mathcal{F} = \big\{(0, a),\ 0 < a \leq 1/2\big\}$. Essa coleção de subconjuntos não vazios de X não possui um elemento mínimo, pois se para algum $0 < a_0 < 1/2$ o conjunto $A = (0, a_0) \in \mathcal{F}$ fosse um elemento mínimo de $\mathcal{F}$ a condição $B \subset A$ pode ser satisfeita para $B \in \mathcal{F}$ da forma $B = (0, a_1)$ com $0 < a_1 < a_0$ e, portanto, não vale $B = A$. Logo, existe uma coleção de subconjuntos não vazios de X que não possui elementos mínimos e, portanto, X não é finito. ♦

Exemplo 1.2 Sejam a e b duas letras distintas do alfabeto e seja $X = \{a, b\}$. As possíveis coleções $\mathcal{F}$ de subconjuntos não vazios de X são: $\mathcal{F} = \big\{\{a\}\big\}$, $\mathcal{F} = \big\{\{b\}\big\}$, $\mathcal{F} = \big\{\{a, b\}\big\}$, $\mathcal{F} = \big\{\{a\}, \{b\}\big\}$, $\mathcal{F} = \big\{\{a\}, \{a, b\}\big\}$, $\mathcal{F} = \big\{\{b\}, \{a, b\}\big\}$ e $\mathcal{F} = \big\{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}\big\}$. Como é fácil constatar, cada um possui ao menos um elemento mínimo, estabelecendo que X é finito. ♦

[32] Estritamente falando, as noções de "conjunto finito com n elementos", ou mesmo de número natural, como n, ainda não foram definidas no presente nível de discussão, mas aqui desejamos apenas justificar uma nomenclatura corrente com base em fatos intuitivamente bem conhecidos.

Há diversas outras definições equivalentes da noção de conjunto finito, a apresentada acima sendo devida a Tarski[33] e é caracterizada por seu minimalismo. Outra definição, mais próxima da "intuição", requer a introdução da noção de cardinalidade, o que faremos mais adiante (Seção 1.1.3, página 81).

Utilizando a definição acima, é fácil ver (faça-o!) que o conjunto vazio é finito, assim como os conjuntos unitários. Um resultado um tanto evidente, mas que requer demonstração é a seguinte afirmação:

Lema 1.1 *Subconjuntos de conjuntos finitos são também finitos.* □

Prova. Seja X um conjunto finito e $Y \subset X$. Seja $\mathcal{G}$ uma coleção de subconjuntos não vazios de Y. Como $Y \subset X$, é evidente que $\mathcal{G}$ é também uma coleção de subconjuntos não vazios de X. Pela hipótese de X ser um conjunto finito, segue que $\mathcal{G}$ possui um elemento mínimo. Como essa afirmação é válida para qualquer coleção de subconjuntos não vazios de Y, concluímos que Y é finito. ■

A afirmação que segue é também relevante. Sua demonstração, porém, é um tanto elaborada e remetemos o leitor interessado à referência [497], onde pode ser encontrada juntamente com diversos resultados sobre o tema da finitude de conjuntos.

Lema 1.2 *A união de dois conjuntos finitos é também um conjunto finito.* □

• **Dificuldades: antinomia de Russell e similares. Exemplos de coleções que não são conjuntos**

Vamos agora exibir alguns exemplos de coleções de objetos que não compõem conjuntos. Há ainda outros que podem ser encontrados na literatura supracitada. A origem de certos problemas com a Teoria dos Conjuntos, tal como exposta até aqui, reside na generalidade assumida no enunciado do Axioma da Especificação: praticamente qualquer sentença S pode ser nele empregada, desde que aplicável aos objetos considerados, produzindo respostas verdadeiras ou falsas. Assim, é possível tomar como conjunto uma coleção A definida por propriedades como $A \in A$ ou $A \notin A$, ou seja, uma coleção que contenha ou não a si mesmo como elemento[34]. A antinomia de Russell, descrita abaixo, mostra uma das consequências dramáticas que essa suposição ingênua pode ter.

- **A Antinomia de Russell**[35]. Vamos a um relevante exemplo de uma coleção de objetos que não é um conjunto, iniciando com uma definição: um conjunto R é dito ser um *conjunto de Russell* se não contém a si mesmo como elemento (ou seja, se $R \notin R$).

  Seja $\mathscr{R}$ a coleção de todos os conjuntos de Russell e vamos supor que $\mathscr{R}$ seja um conjunto.

  Coloquemos a questão de se $\mathscr{R}$ é também um conjunto de Russell. Se $\mathscr{R}$ não é um conjunto de Russell, então, pela definição de conjunto de Russell, devemos ter $\mathscr{R} \in \mathscr{R}$. Porém, como $\mathscr{R}$ é o conjunto de todos os conjuntos de Russell, o fato de valer $\mathscr{R} \in \mathscr{R}$ significa que $\mathscr{R}$ é um conjunto de Russell. Vemos assim que se $\mathscr{R}$ não é um conjunto de Russell, então $\mathscr{R}$ é um conjunto de Russell.

  Paralelamente, se $\mathscr{R}$ é um conjunto de Russell, vale $\mathscr{R} \notin \mathscr{R}$, o que corresponde a afirmar que $\mathscr{R}$ não pertence à coleção dos conjuntos de Russell e, portanto, não é um conjunto de Russell. Vemos assim que se $\mathscr{R}$ é um conjunto de Russell, então $\mathscr{R}$ não é um conjunto de Russell.

  Resumindo, demonstramos que $\mathscr{R}$ é um conjunto de Russell se e somente se $\mathscr{R}$ não é um conjunto de Russell. Como estamos diante de uma contradição, somos forçados a admitir que uma das hipóteses é falsa e essa é a hipótese de $\mathscr{R}$ ser um conjunto.

- A coleção de todos os conjuntos, denotemo-la por Ω, também não pode ser um conjunto, o que pode ser argumentado da seguinte forma. Se Ω é um conjunto, então o Axioma da Especificação permitiria definir em Ω um outro conjunto, a saber, a coleção dos conjuntos de Russell: $\mathscr{R} := \{R \in \Omega \,|\, R \notin R\}$. Vimos, porém, que $\mathscr{R}$ não pode ser

[33] Alfred Tarski (1901–1983). O trabalho original é A. Tarski, "Sur les ensembles finis", Fundamenta Matematicae, **6**, pp. 45-95 (1924).

[34] A humanidade, por exemplo, é a coleção de todos os seres humanos mas, não sendo ela mesma um ser humano, não pertence a si mesma.

[35] Historiadores apontam que essa antinomia foi descoberta por Russell em maio ou junho de 1901 e anunciada em carta a Frege, de 1902 (para a correspondência entre ambos, vide [219]). Essa antinomia, porém, fora independentemente descoberta por Zermelo em 1899, que não a publicou, limitando-se a comunicá-la verbalmente a colegas da Universidade de Göttingen, como Hilbert e Husserl (Edmund Gustav Albrecht Husserl (1859–1938)). Aparentemente, o próprio Cantor já era conhecedor da mesma, também desde o final da década de 1890. Vide o comentário após a demonstração do Teorema de Cantor, Teorema 1.4, página 84.

um conjunto e, portanto, a coleção Ω também não pode ser um conjunto, pois subconjuntos de um conjunto são também conjuntos.

- Seja U a coleção de todos os conjuntos unitários (conjuntos que possuem exatamente um elemento). Se U for um conjunto, então, pelo axioma da união, $\bigcup U$ (a união de todos os elementos de U) é um conjunto. Assim, pelo axioma da potência, $\mathbb{P}\big(\bigcup U\big)$ é igualmente um conjunto.

  Provemos que $\mathbb{P}\big(\bigcup U\big)$ é a coleção de todos os conjunto, Ω. Observemos que se A é um conjunto, ou seja, $A \in \Omega$, então, como já demonstramos, $A = \bigcup_{x\in A}\{x\}$, o que significa que $A \in \mathbb{P}\big(\bigcup U\big)$ por ser um subconjunto de $\bigcup U$, ou seja, por ser uma união de conjuntos unitários. Como isso vale para todo $A \in \Omega$, concluímos que $\Omega \subset \mathbb{P}\big(\bigcup U\big)$. Por outro lado, $\mathbb{P}\big(\bigcup U\big) \subset \Omega$, pois $\mathbb{P}\big(\bigcup U\big)$ é uma coleção de conjuntos. Assim, $\mathbb{P}\big(\bigcup U\big) = \Omega$.

  Assim, o conjunto $\mathbb{P}\big(\bigcup U\big)$ coincide com a coleção Ω de todos os conjuntos e, portanto, pelo que vimos acima, não pode ser um conjunto. A contradição é resolvida anulando-se a hipótese de que U é um conjunto.

- Há uma outra argumentação que faz uso das noções de função e cardinalidade, introduzidas adiante (Seção 1.1.3, página 81). Afirmamos primeiramente que se X é um conjunto então nenhuma função $f : \mathbb{P}(X) \to X$ pode ser injetora, ou seja, sempre existirão $A, B \subset X$, com $A \neq B$, $f(A) = f(B)$. De fato, se f pudesse ser injetora, valeria[36] $|\mathbb{P}(X)| \leq |X|$, mas como $|X| < \mathbb{P}(X)$ (Teorema de Cantor, Teorema 1.4, página 84), teríamos $|\mathbb{P}(X)| < |\mathbb{P}(X)|$, o que é impossível, provando a afirmação. Seja agora U a coleção de todos os conjuntos unitários e suponhamos que U seja um conjunto. Defina-se $f : \mathbb{P}(U) \to U$ por $f(A) = \{A\}$ para cada $A \subset U$. Entretanto, se A e B são elementos distintos de $\mathbb{P}(U)$ (ou seja, subconjuntos distintos de U), teremos $f(A) \neq f(B)$, pois $\{A\} \neq \{B\}$, já que a igualdade $\{A\} = \{B\}$ implicaria $A = B$, pelo Axioma da Extensão. Assim, concluímos que f é injetora, contrariando a afirmação anterior. Isso só pode ser resolvido rejeitando-se a suposição de U ser um conjunto.

  Apresentamos essa última argumentação por ela manifestar a principal dificuldade em fazer com que certas coleções sejam conjuntos: elas podem ter uma cardinalidade "grande" demais. Infelizmente, não iremos nos estender nesse ponto e remetemos o leitor interessado à literatura supracitada.

- Por definição, um grupo é um conjunto[37], mas a coleção de todos os grupos não pode ser um conjunto. Se considerarmos apenas a coleção dos grupos triviais, os quais possuem apenas um elemento, já não formaríamos um conjunto, pela argumentação acima.

- A mesma argumentação se aplica a coleções de outras estruturas algébricas, como semigrupos, anéis, espaços vetoriais, álgebras etc.

• Classes, classes próprias

Um outro vocábulo frequentemente empregado na lide matemática com coleções de objetos é "*classe*". No início dos estudos da noção de conjunto, no século XIX até o começo do século XX, as palavras "classe" e "conjunto" eram sinônimos. A descoberta da antinomia de Russell, descrita acima, e de outras antinomias da Teoria "Ingênua" dos Conjuntos, levou a uma distinção no emprego de ambas as palavras, mas hoje a definição da noção de "classe" depende fortemente do esquema axiomático adotado na Teoria dos Conjuntos, diferindo na versão "Ingênua", na versão de Zermelo-Fraenkel e na de von Neumann-Bernays-Gödel.

Aqui, tentaremos apenas delinear, um tanto informalmente, uma definição de classe que resulta útil na maioria dos usos matemáticos. Se $S(x)$ é uma sentença construída de forma logicamente correta sobre um objeto x (*i.e.*, podendo ser inequivocamente verdadeira ou falsa e de forma não ambígua ou contraditória), então uma classe é a coleção de todos os objetos para os quais $S(x)$ é verdadeira. Em símbolos, $\{x |\, S(x) \text{ é verdadeira}\}$.

Observe-se que uma classe não é necessariamente um conjunto. Por exemplo, se $S(x)$ é a afirmação "x é um conjunto" ou a afirmação "x é um conjunto unitário", vimos em nossa discussão à página 52 que a coleção $\{x |\, S(x) \text{ é verdadeira}\}$ não define nesses casos um conjunto, por não satisfazer outras propriedades assumidas de conjuntos.

Classes podem ou não ser conjuntos. Quando não o são, elas são frequentemente denominadas *classes próprias* ou *classes legítimas*. Assim, em um dado esquema axiomático, classes próprias não satisfazem todos os Axiomas assumidos por conjuntos. Nesse sentido a coleção de todos os conjuntos ou de todos os conjuntos unitários são classes próprias.

[36] Aqui, $|A|$ denota a cardinalidade de um conjunto A.
[37] Para a definição de grupo, vide Seção 2.1.3, página 122.

Classes que são conjuntos são por vezes denominadas *classes pequenas*, uma nomenclatura também existente na Teoria das Categorias.

A palavra "classe" é frequentemente empregada na linguagem matemática ("classe de equivalência", por exemplo), mas é preciso um certo cuidado com seu uso de modo a evitar contradições comuns à Teoria "Ingênua" dos Conjuntos. Por exemplo, classes geralmente não podem ser elementos de conjuntos.

• Exorcizando a Antinomia de Russell da Teoria "Ingênua" dos Conjuntos

A Antinomia, ou Paradoxo, de Russell exposta acima revela uma contradição na formulação "ingênua" de Cantor da Teoria dos Conjuntos. Ela pode ser resolvida aceitando-se simplesmente que certas coleções não podem ser conjuntos, mas é mais conveniente especificarmos *a priori*, ou seja, axiomaticamente, quais regras de construção podem ser empregadas na produção de conjuntos, de sorte a evitar a antinomia exposta por Russell.

O problema básico que conduz à Antinomia de Russell é a generalidade do Axioma da Extensão que adotamos até aqui, que permitiu afirmar que, para qualquer predicado P, a coleção de todos os objetos para os quais P é verdadeiro é um conjunto. Em outras palavras, a origem da antinomia de Russell está na suposição que $\{x : P(x) \text{ é verdadeiro}\}$ compõe um conjunto[38].

A solução adotada no esquema axiomático de Zermelo-Fraenkel consiste em restringir o Axioma da Extensão de sorte a permitir apenas afirmar o seguinte: para todo conjunto X e para todo predicado P definido em X a coleção $\{x \in X : P(x) \text{ é verdadeiro}\}$ é um conjunto.

Como se vê, essa restrição limita a aplicação do Axioma da Extensão a coleções que sejam previamente reconhecidas como conjuntos. O leitor pode inspecionar que com essa restrição a Antinomia de Russell não mais se constitui.

O esquema axiomático de Zermelo-Fraenkel inclui essa e outras prescrições destinadas a evitar antonimias e contradições na Teoria dos Conjuntos e é presentemente considerado um dos substitutos adequados à teoria "ingênua" originalmente proposta por Cantor. No esquema de Zermelo-Fraenkel, devido às restrições que o mesmo apresenta ao Axioma da Extensão, a noção de classe não possui *status* ou definição formal, sendo usada apenas informalmente.

• A Antinomia de Russell no Cálculo Predicados

A Antinomia, ou Paradoxo, de Russell pode ser exorcizada da Teoria dos Conjuntos (ou seja, da Matemática) por axiomatização, ou seja, mais especificamente, por uma restrição mais adequada ao Axioma da Extensão, tal como discutido acima. Tal é, afinal, possível pois ao delinearmos a noção de conjunto, temos a liberdade de adotar o que melhor nos aprouver. Como a Matemática é fundeada na noção de conjunto, essa situação manifesta-se como satisfatória para a Matemática.

Sucede, porém, que a antinomia de Russell manifesta-se também em um nível ainda mais fundamental, a saber, no chamado Cálculo de Predicados, um tema mais ligado à Lógica.

Um predicado é meramente uma afirmação sobre um objeto, que pode ser verdadeira ou falsa. Ao contrário das regras delineadoras da noção de conjunto, empregamos predicados abundantemente em toda a nossa linguagem e, portanto, predicados possuem um nível lógico mais fundamental.

O problema surge quando consideramos predicados sobre predicados. Para tal, comecemos com uma definição: um predicado P a respeito de predicados é dito ser *autoverdadeiro* se $P(P)$ for verdadeiro, ou seja, se faz uma afirmação verdadeira sobre si mesmo.

Citemos alguns exemplos elementares. Consideremos o predicado $Q_0(x)$ que afirma "x é um predicado". Aqui, $Q_0(Q_0)$ é a afirmação "*'é um predicado'* é um predicado", o que é verdadeiro. Seja também o predicado $Q_1(x)$ que afirma "x é composto por palavras". Nesse caso, $Q_1(Q_1)$ é a afirmação "*'é composto por palavras'* é composto por palavras", o que é verdadeiro. Outro exemplo oposto é $Q_2(x)$ sendo a afirmação "x é um elefante". Teríamos que $Q_2(Q_2)$ sendo a afirmação "*'é um elefante'* é um elefante", o que não é verdade. Assim, Q_0 e Q_1 são autoverdadeiros, mas Q_2 não é.

Consideremos agora o predicado $P(x)$ que é verdadeiro se x for um predicado que não é autoverdadeiro. Será $P(P)$ verdadeiro ou falso? Se $P(P)$ for verdadeiro, então P não é autoverdadeiro, o que informa que $P(P)$ é falso. Reciprocamente, se $P(P)$ é falso, então P é autoverdadeiro, o que significa que $P(P)$ é verdadeiro. Aí está a versão da Antinomia de Russell para predicações: $P(P)$ é verdadeiro se e somente se for falso.

Até onde alcança o limitado entendimento do autor destas Notas, não parece haver resolução para essa antinomia

[38] Especificamente, empregamos na exposição da antonomia de Russell a suposição que $\{x : x \notin x\}$ é um conjunto.

que não envolva uma aguda restrição ao emprego de predicados, objetos, porém, de emprego fundamental na Lógica e mesmo na Linguagem.

Uma curiosidade é que essa versão da Antinomia de Russell foi a primeira informada por Russell em sua já mencionada carta a Frege, de 1902, sendo que a versão referente a conjuntos, ou classes, foi mencionada porteriormente naquela carta, como ilustração do problema.

Para uma discussão do assunto, vide [323].

• O Axioma da Regularidade

O *Axioma da Regularidade*, também denominado *Axioma da Fundação*, foi introduzido para eliminar a possibilidade de existirem conjuntos que contém a si mesmo como elementos, ou seja, de existirem conjuntos A com a propriedade $A \in A$ (autopertinência direta) ou, com um pouco mais de generalidade, de existirem conjuntos $A_1, \ldots, A_n$ satisfazendo cadeias cíclicas de relações de pertinência como $A_1 \in A_2 \in \cdots \in A_n \in A_1$ (autopertinência indireta).

Uma possibilidade ingênua seríamos considerar a coleção de todos os conjuntos que contêm mais de um elemento. Se uma tal coleção fosse um conjunto teria de conter a si mesmo (pois há mais de um conjunto com um único elemento).

De fato, é contraintuitivo que possa haver A com $A \in A$. Uma tentativa seria (tomando aqui a e b como objetos distintos),

$$A = \{a, b, A\} = \big\{a, b, \{a, b, A\}\big\} = \Big\{a, b, \big\{a, b, \{a, b, A\}\big\}\Big\} = \bigg\{a, b, \Big\{a, b, \big\{a, b, \{a, b, \cdots\}\big\}\Big\}\bigg\} \text{ etc.},$$

o que conduz a uma relação recursiva mal definida dentro das estruturas elementares que a Teoria dos Conjuntos pretende elaborar. Já uma condição como $A_1 \in A_2 \in \cdots \in A_n \in A_1$ é igualmente problemática, pois, se válida fosse, seria uma forma disfarçada de ter-se um conjunto "inserido" dentro de si mesmo, como seria (no caso $n = 2$) se $A_2 = \{b, A_1\}$ e $A_1 = \{a, A_2\}$, para o qual vale $A_1 \in A_2$ e $A_2 \in A_1$, mas em cujo caso teríamos $A_1 = \big\{a, \{b, A_1\}\big\}$. Note-se que aqui não vale $A_1 \in A_1$, mas a especificação de A_1 também requereria um processo de recursão.

Para evitar essas possibilidades, Mirimanoff[39], em 1917[40], von Neumann, em 1925[41] e 1929[42], e Zermelo, em 1930[43], houveram por bem acrescentar um axioma que veda esse tipo de construção, o qual pode ser formulado de forma simplificada da seguinte maneira: se um conjunto A não é vazio, então ele possui um elemento B que não tem elementos em comum com A, ou seja, satisfaz $A \cap B = \emptyset$.

Mostremos que o Axioma da Regularidade implica a inexistência de conjuntos não vazios satisfazendo $C \in C$.

Lema 1.3 *Assumindo-se o Axioma da Regularidade, formulado acima, nenhum conjunto pode satisfazer $C \in C$.* □

Prova. Para o conjunto vazio a afirmação é óbvia, pois não pode valer $\emptyset \in \emptyset$, dado que $\emptyset$ não possui elementos.

Admitamos por contradição que exista um conjunto não vazio C com $C \in C$. Nesse caso, valeria $C \in \{C\} \cap C$, pois temos simultaneamente $C \in \{C\}$ (o que é incontroverso) e $C \in C$ (por hipótese). Por outro lado, o Axioma da Regularidade, formulado acima, afirma que o conjunto $A = \{C\}$ possui um elemento B que é disjunto de A, ou seja, $B \cap \{C\} = \emptyset$. Sucede, porém, que o único elemento de A é C e, portanto, o Axioma da Regularidade requer que $C \cap \{C\} = \emptyset$, contradizendo $C \in \{C\} \cap C$ e a hipótese de C ser não vazio. ■

Mostremos que o Axioma da Regularidade implica a inexistência de conjuntos satisfazendo $C_1 \in C_2$ e $C_2 \in C_1$. Ficará claro que a mesma demonstração implica a inexistência de cadeias cíclicas de pertinência como $C_1 \in C_2 \in \cdots \in C_n \in C_1$.

Lema 1.4 *Assumindo-se o Axioma da Regularidade, formulado acima, dois conjuntos C_1 e C_2 não podem satisfazer $C_1 \in C_2$ e $C_2 \in C_1$.* □

[39] Dmitry Semionovitch Mirimanoff (1861–1945).

[40] D. Mirimanoff, "Les antinomies de Russell et de Burali-Forti et le probleme fondamental de la theorie des ensembles", L'Enseignement Mathématique, **19**: 37-52 (1917).

[41] J. von Neumann, "Eine Axiomatisierung der Mengenlehre", Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, **154**: 219-240 (1925). Encontrável em [219].

[42] J. von Neumann, "Über eine Widerspruchfreiheitsfrage in der axiomatischen Mengenlehre", Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, **160**: 227-241 (1929),

[43] Ernst Zermelo, "Über Grenzzahlen und Mengenbereiche. Neue Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre.", Fundamenta Mathematicae, **16**: 2947 (1930).

Prova. Novamente podemos excluir o caso em que C_1 e/ou C_2 são vazios. Por contradição, admitamos que valha $C_1 \in C_2$ e $C_2 \in C_1$. Podemos excluir o caso $C_1 = C_2$, pois ele recairia no Lema 1.3. Então, valerá $C_1 \in \{C_1, C_2\}$ (o que é incontroverso) e $C_1 \in C_2$ (por hipótese). Disso concluímos que $C_1 \in \{C_1, C_2\} \cap C_2$. Analogamente, podemos estabelecer que $C_2 \in \{C_1, C_2\} \cap C_1$.

Agora, o Axioma da Regularidade afirma que para $A = \{C_1, C_2\}$ existe um elemento B com $B \cap A = \emptyset$. Os possíveis elementos de A são C_1 ou C_2. Então, valerá $C_1 \cap \{C_1, C_2\} = \emptyset$ ou $C_2 \cap \{C_1, C_2\} = \emptyset$. Cada uma dessas afirmações contradiz uma das afirmações anteriormente provadas que $C_1 \in \{C_1, C_2\} \cap C_2$ e que $C_2 \in \{C_1, C_2\} \cap C_1$ com C_1 e C_2 não vazios. ■

O Axioma da Regularidade existe para evitar que conjuntos possam satisfazer condições como $A \in A$, que conduzem a definições recorrentes de conjuntos. Devemos informar o leitor, porém, que esse axioma, assim como outros daqueles anteriormente delineados, se omitido, conduz a outros esquemas axiomáticos para a Teoria dos Conjuntos e, como consequência, para toda a Matemática. Conjuntos caracterizados pela ausência do Axioma da Regularidade são denominados *hiperconjuntos*, ou *conjuntos não fundeados*. Essas Teorias dos Conjuntos "exóticas" podem ser honestamente estudadas, e o são, mas nem sempre conduzindo a resultados consonantes com nossa intuição. No entanto, elas encontram emprego na Ciência de Computação e mesmo na Filosofia.

⋈⋈

Encerramos aqui, provisoriamente, nosso passeio panorâmico pelos fundamentos da Teoria dos Conjuntos, deixando de lado diversos outros axiomas incluídos em tratamentos mais pormenorizados, como o *Axioma da Substituição*, ou a discussão mais detalhada de esquemas axiomáticos como o de Zermelo-Fraenkel (ZF) e o de von Neumann-Bernays-Gödel (NBG). Mais adiante, porém, à página 67, apresentarmos mais um axioma de grande importância, o chamado *Axioma da Escolha*, o qual é fundamental, por exemplo, para a definição de produtos Cartesianos arbitrários de conjuntos.

Nossas pretensões com essa apresentação panorâmica da Teoria dos Conjuntos foram modestas, mas incluem despertar o interesse do estudante nesses temas fundamentais, fascinantes e profundos, porém, por vezes intrincados.

No que segue, no corrente capítulo, apresentaremos diversas outras noções relevantes à lide com a noção de conjunto, sendo que iremos gradualmente omitir referências aos Axiomas que fundeiam a Teoria dos Conjuntos.

1.1.1.2 Mais Definições e Alguma Notação. Pares Ordenados

Se X é um conjunto e $A, B \subset X$, denotamos por $A \setminus B$ a chamada diferença entre os conjuntos A e B, a saber

$$A \setminus B := \Big\{ x \in X \text{ tal que } x \in A \text{ mas } x \notin B \Big\} . \tag{1.6}$$

Por vezes usa-se a notação $A - B$ para $A \setminus B$. Para $A \subset X$ denota-se por A^c o chamado *complemento de A em relação a X*: $A^c := X \setminus A$. Note-se que ao usar-se o símbolo A^c deve estar subentendido qual o conjunto X ao qual o complemento se refere. É fácil ver que se $A, B \subset X$, então $A \setminus B = B^c \cap A$. Vale também $(A^c)^c = A$ e

$$A \cap B = A \setminus B^c = B \setminus A^c \tag{1.7}$$

para todos $A, B \subset X$. Igualmente, tem-se

$$A \cap B = A \setminus \big(B^c \cap A \big) . \tag{1.8}$$

$$A \cap B = A \setminus \big(A \setminus B \big) , \tag{1.9}$$

$$A \setminus B = (A \cup B) \setminus B , \tag{1.10}$$

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup B , \tag{1.11}$$

também para todos $A, B \subset X$. Verifique!

Dizemos que um conjunto B é um *subconjunto próprio* de A se $B \subset A$ e se $A \setminus B \neq \emptyset$, ou seja, se todo elemento de B for elemento de A mas houver elementos em A que não pertencem a B. Se B é um subconjunto próprio de A dizemos que B está contido propriamente em A, ou que A contém B propriamente. Por vezes denota-se o fato de B ser um subconjunto próprio de A por $B \subsetneqq A$ ou por $A \supsetneqq B$.

Se A e B são conjuntos e $A \cap B = \emptyset$, então $A \cup B$ é dita ser uma *união disjunta* de A e B.

Se X é um conjunto denota-se por $\mathbb{P}(X)$ a coleção de todos os subconjuntos de X. $\mathbb{P}(X)$ é por vezes chamado de *conjunto das partes de* X. Por convenção adota-se sempre que $\emptyset \in \mathbb{P}(X)$. Assim, dizer que $A \subset X$ equivale a dizer $A \in \mathbb{P}(X)$.

E. 1.2 *Exercício* . Seja X um conjunto não vazio e sejam A, B e C subconjuntos de X. Mostre que $A \setminus C = B \setminus C$ se e somente se $A \cup C = B \cup C$. *Sugestão*: use (1.10)-(1.11), página 56. ✠

• Pares ordenados

Um conceito básico em Matemática é o de *par ordenado*. O conceito de par ordenado (a, b) formado por dois elementos genéricos $a, b \in X$ é intuitivo. Pela intuição, entende-se como par ordenado uma lista de dois elementos sendo que um deles assume a posição de "primeiro" elemento da lista (no caso, a) e o outro a de "segundo" (no caso, b). Formalmente define-se (a, b) como sendo o conjunto $\big\{\{a\}, \{a, b\}\big\}$. Esta definição formal corresponde à intuição pois no conjunto $\big\{\{a\}, \{a, b\}\big\}$ há uma clara distinção entre o papel de a e de b. Apesar de existir a definição formal acima, recomenda-se ao estudante fiar-se inicialmente na intuição por trás do conceito. A definição acima é devida a Kuratowski[44].

A definição de Kuratowski, acima, garante a validade de uma propriedade fundamental, denominada *propriedade característica de pares ordenados*, a saber, a propriedade que $(a, b) = (c, d)$ se e somente se $a = c$ e $b = d$.

Prova da propriedade característica de pares ordenados. Necessitamos apenas provar a afirmação que se $(a, b) = (c, d)$, então $a = c$ e $b = d$, pois a recíproca é evidente.

Consideremos primeiramente o caso em que $a = b$. Nesse caso, o par ordenado $(a, b) = (a, a)$ é dado por $\big\{\{a\}, \{a, a\}\big\} = \big\{\{a\}, \{a\}\big\} = \big\{\{a\}\big\}$. Assim, a afirmação que $(a, b) = (c, d)$ significa nesse caso que $\big\{\{a\}\big\} = \big\{\{c\}, \{c, d\}\big\}$. Pelo Axioma da Extensão isso significa que $\{c\} = \{c, d\} = \{a\}$. Evocando novamente o Axioma da Extensão isso implica $c = a$ e $d = c$, completando a prova nesse caso.

Podemos agora supor que $a \neq b$ e que $c \neq b$. Essa última relação é consequência da análise anterior, pois se tivéssemos $(c, d) = (a, b)$ e $c = b$, as linhas acima implicariam $c = d = a = b$, uma contradição com a hipótese que $a \neq b$. Vamos supor, assim, que $a \neq b$ e que $c \neq b$. A condição $(a, b) = (c, d)$ significa

$$\big\{\{a\}, \{a, b\}\big\} = \big\{\{c\}, \{c, d\}\big\} . \tag{1.12}$$

Pelo Axioma da Extensão isso implica $\{a\} = \{c\}$ ou $\{a\} = \{c, d\}$. Esse segundo caso é impossível, pois $\{a\}$ é um conjunto unitário, mas $\{c, d\}$ não é. Assim, concluímos que $\{a\} = \{c\}$, o que conduz a $a = c$. Com isso, (1.12) fica $\big\{\{a\}, \{a, b\}\big\} = \big\{\{a\}, \{a, d\}\big\}$. Novamente evocando o Axioma da Extensão, extraímos disso que $\{a, b\} = \{a, d\}$ o que, novamente, conduz a $b = d$, concluindo a prova. ■

Chamamos a atenção do estudante para a existência de outras definições para a noção de par ordenado. Uma definição "alternativa" para (a, b) é $\big\{a, \{a, b\}\big\}$. Essa definição[45] também satisfaz a propriedade característica de pares ordenados, mas sua demonstração requer o uso do esquema axiomático (não "ingênuo") de Zermelo-Fraenkel para a teoria dos conjuntos[46].

• O Produto Cartesiano de dois conjuntos

Observe-se que dado $a \in A$ e $b \in B$, temos, evidentemente, $\{a\} \in \mathbb{P}(A \cup B)$ e também $\{a, b\} \in \mathbb{P}(A \cup B)$. Assim, $\big\{\{a\}, \{a, b\}\big\}$ é um subconjunto de $\mathbb{P}(A \cup B)$, o que equivale a dizer que $(a, b) \equiv \big\{\{a\}, \{a, b\}\big\} \in \mathbb{P}\Big(\mathbb{P}(A \cup B)\Big)$. Dessa forma, o Axioma da Extensão e o Axioma da Especificação permitem-nos definir o conjunto de todos os pares ordenados

[44] Kazimierz Kuratowski (1896–1980). O trabalho original de Kuratowski sobre o tema é "Sur la notion de l'ordre dans la Théorie des Ensembles". Fundamenta Mathematicae. **2**, 161–171 (1921).

[45] Essa foi, em verdade, a primeira definição da noção de par ordenado e é devida a Norbert Wiener (1894–1964), em trabalho de 1914: "A simplification in the logic of relations". Proc. Camb. Phil. Soc. **13:** 387-390. (1912-14). Encontrável em [219].

[46] A saber, a demonstração requer o assim chamado *Axioma de Regularidade*, exposto à página 55.

de A e B como um subconjunto de $\mathbb{P}\Big(\mathbb{P}(A \cup B)\Big)$. Dados dois conjuntos A e B definimos por $A \times B \subset \mathbb{P}\Big(\mathbb{P}(A \cup B)\Big)$ o conjunto de todos os pares ordenados (a, b) com $a \in A$ e $b \in B$:

$$A \times B := \Big\{\{\{a\}, \{a, b\}\} \text{ para algum } a \in A \text{ e algum } b \in B\Big\} . \tag{1.13}$$

O conjunto $A \times B$ é denominado *Produto Cartesiano*[47] de A e B. Note que, em geral, $A \times B \neq B \times A$ (por quê?).

Mais adiante (página 68) apresentaremos generalizações das noções acima.

1.1.2 Relações e Funções

O conceito de *relação* é fundamental na Matemática e nesta seção descreveremos algumas relações de maior importância, como as funções, as relações de equivalência e as relações de ordem.

• **Relações**

Sejam A e B conjuntos e seja o produto Cartesiano $A \times B$. Um subconjunto de $A \times B$ é dito ser uma *relação binária*, ou simplesmente *relação* entre A e B.

Exemplo. Seja A o conjunto de homens vivos e B o conjunto de mulheres vivas e seja $R \subset A \times B$ o conjunto $R := \{(a, b), a \text{ é irmão de } b\}$. R representa uma relação (de irmandade) entre homens e mulheres.

Outros exemplos virão abaixo.

Dada uma relação $G \subset A \times B$ entre conjuntos A e B há duas noções importantes associadas: a de *domínio da relação* e a de *imagem da relação*. Define-se por domínio de G o conjunto

$$\mathrm{Dom}(G) := \Big\{a \in A \text{ tal que } (a, b) \in G \text{ para algum } b \in B\Big\} . \tag{1.14}$$

Define-se por imagem de G o conjunto

$$\mathrm{Im}(G) := \Big\{b \in B \text{ tal que } (a, b) \in G \text{ para algum } a \in A\Big\} . \tag{1.15}$$

Note-se que $\mathrm{Dom}(G) \subset A$ e que $\mathrm{Im}(G) \subset B$.

• **Funções**

Este é talvez o mais importante exemplo de relação. Sejam A e B conjuntos e F uma relação entre A e B. Então, a relação F é dita ser uma *função* de A em B se $\mathrm{Dom}(F) = A$ e se $(a, b) \in F$ e $(a, b') \in F$ só for possível caso $b = b'$. Em outras palavras, a cada elemento a de A a função associa um e apenas um elemento b de B que faz o papel de segundo elemento do par ordenado (a, b). Este segundo elemento associado pela função F ao elemento a, é mais conveniente denotá-lo por $F(a)$. Assim, uma função é o conjunto de pares $\{(a, F(a)) \in A \times B, a \in A\}$. Frequentemente denotamos uma função F de A em B por $F : A \to B$.

O conjunto B onde a imagem de $F : A \to B$ se localiza é denominado o *contradomínio* ou *codomínio* da função F.

• **Aplicações, mapeamentos, mapas, funcionais, operadores, operações, produtos etc.**

Muito frequentemente usam-se as palavras *aplicação*, *mapeamento*, *mapa*, *funcional*, *operador*, *operação*, *produto*, *transformação*, *forma*, e talvez ainda outras, para designar certos tipos de funções entre conjuntos. Essa abundância de palavras causa frequentemente confusão e mesmo perplexidade em estudantes recém iniciados mas, em essência, todos esses objetos são funções, no sentido abstrato que definimos acima.

O que difere seu uso é por vezes a tradição de certas áreas e os tipos de conjuntos que as funções têm como domínio e imagem. A palavra "função", propriamente, é mais frequentemente empregada quando se trata de funções numéricas, por exemplo de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$. A palavra "funcional"[48] é frequentemente empregada quando se trata de funções que levam vetores ou funções numéricas em números. Um exemplo de funcional é a função que leva funções reais contínuas

[47] Assim chamado em honra a René Descartes (1596–1650). O adjetivo *Cartesiano* provem da latinização de seu nome como *Cartesius*.
[48] A palavra "funcional" foi empregada pela primeira vez na Matemática por Jacques Salomon Hadamard (1865–1963).

f nas suas integrais no intervalo $[0,\ 1]$: $f \mapsto \int_0^1 f(x)dx$. A palavra "operador" tipicamente designa funções lineares entre espaços vetoriais (como, por exemplo, as matrizes, que são funções lineares entre espaços vetoriais de dimensão finita). "Produtos" ou "operações" frequentemente designam funções de $C \times C$ em C, para um conjunto C não vazio qualquer, ou seja, funções de duas variáveis em um conjunto C, assumindo valores no próprio conjunto C. A palavra "forma" por vezes designa certas funções bilineares de $V \times V$ em $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, sendo V um espaço vetorial. As palavras "aplicação", "mapa" e "mapeamento" são frequentemente empregadas para designar funções em áreas como Topologia, Geometria Diferencial ou Sistemas Dinâmicos.

Certas palavras são empregadas para designar certas funções com propriedades especiais. Um "homeomorfismo", por exemplo, é uma função bijetora entre dois espaços topológicos que seja contínua e cuja inversa seja também contínua. Um "difeomorfismo" é um homeomorfismo entre duas variedades diferenciáveis que seja infinitamente diferenciável. Há ainda vários outros "morfismos", como discutido na Seção 2.1.10, à página 157.

Em verdade, é conveniente dispormos por vezes de uma certa variedade de palavras diferentes simplesmente para evitarmos o emprego monótono e descolorido da palavra "função". Com um pouco de ironia, lembremos por fim a definição circular de Edward Teller: *"An intelectual is someone who thinks the same things and uses the same words as other intelectuals"*.

• Funções sobrejetoras, injetoras e bijetoras

Uma função $F:\ A \to B$ é dita ser uma *função sobrejetora* se $\mathrm{Im}(F) = B$, ou seja, se sua imagem coincide com seu contradomínio.

Uma função $F:\ A \to B$ é dita ser uma *função injetora*, ou uma *função injetiva*, se a cada $b \in \mathrm{Im}(F)$ existir um e somente um elemento $a \in \mathrm{Dom}(F)$ tal que $(a,\ b) \in F$.

Uma função que for sobrejetora e injetora é dita ser uma *função bijetora*, ou uma *função bijetiva*.

Seja uma função bijetora $F \subset A \times B$. Então, a relação $F^{-1} \subset B \times A$ dada por

$$F^{-1} \ = \ \Big\{(b,\ a) \text{ tal que } (a,\ b) \in F\Big\}$$

é, em verdade, uma função, denominada *função inversa de F*. É claro que $(F^{-1})^{-1} = F$.

• Imagens e pré-imagens de funções

Seja $f : X \to Y$ uma função. Se $A \subset X$, definimos

$$f(A) \ := \ \Big\{y \in Y| \ \ y = f(x) \text{ para algum } x \in A\Big\} .$$

Se $B \subset Y$, definimos

$$f^{-1}(B) \ := \ \Big\{x \in X| \ \ f(x) \in B\Big\} .$$

$f(A)$ é dita ser a *imagem de A por f* e $f^{-1}(B)$ é dita ser a *pré-imagem de B por f*.

O uso do símbolo f^{-1} para designar pré-imagem $f^{-1}(B)$ de um conjunto B é uma escolha muito infeliz (mas universalmente aceita), pois pode causar confusão com a noção de função inversa de f (que pode nem mesmo estar definida). O estudante deve estar atento.

Com as definições acima é fácil provar serem verdadeiras as seguintes afirmações:

- Para uma função $f : X \to Y$ geral, valem

  $$f\big(f^{-1}(B)\big) \ \subset \ B \qquad \text{e} \qquad f^{-1}\big(f(A)\big) \ \supset \ A \tag{1.16}$$

  para todos $A \subset X$, $B \subset Y$.

- Se $f : X \to Y$ for sobrejetora, valem

  $$f\big(f^{-1}(B)\big) \ = \ B \qquad \text{e} \qquad f^{-1}\big(f(A)\big) \ \supset \ A \tag{1.17}$$

  para todos $A \subset X$, $B \subset Y$.

- Se $f : X \to Y$ for injetora, valem
$$f\big(f^{-1}(B)\big) \subset B \qquad \text{e} \qquad f^{-1}\big(f(A)\big) = A \tag{1.18}$$
para todos $A \subset X$, $B \subset Y$.
- Se $f : X \to Y$ for bijetora, valem
$$f\big(f^{-1}(B)\big) = B \qquad \text{e} \qquad f^{-1}\big(f(A)\big) = A \tag{1.19}$$
para todos $A \subset X$, $B \subset Y$.

E. 1.3 *Exercício importante.* Demonstre as afirmações acima. ✠

1.1.2.1 Operações Básicas com Famílias de Conjuntos

• Famílias de conjuntos

Seja X um conjunto não vazio. Informalmente, uma coleção $\mathcal{F}$ não vazia de subconjuntos distintos de X é por vezes dita ser uma *família de conjuntos*. Há uma maneira mais precisa de definir essa noção. Seja I um conjunto não vazio cujos elementos denominaremos *índices*. Se X é um conjunto não vazio, uma família indexada por pelo conjunto I vem a ser uma função injetora $f : I \to \mathbb{P}(X)$. Se $\lambda \in I$ é um índice, frequentemente designaremos sua imagem pela função f simplesmente por $A_\lambda \in \mathbb{P}(X)$. É também válido dizer-se que a família $\mathcal{F}$ de conjuntos vem a ser a imagem da função f e dizemos que $\mathcal{F}$ é *indexada* pelos índices de I.

Uma indexação de uma coleção $\mathcal{F}$ não vazia de subconjuntos de X sempre existe: podemos tomar $I = \mathcal{F}$ e f a função identidade.

• Operações básicas com famílias de conjuntos

Sejam X e I conjuntos arbitrários não vazios e seja associado a cada $\alpha \in I$ um subconjunto A_α de X. O conjunto I será frequentemente denominado conjunto ou família de índices. Vamos introduzir alguma notação a ser usada em todas estas Notas. Definimos:
$$\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha := \Big\{x \in X \text{ tal que } x \in A_\alpha \text{ para algum } \alpha \in I\Big\}, \tag{1.20}$$
e
$$\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha := \Big\{x \in X \text{ tal que } x \in A_\alpha \text{ para todo } \alpha \in I\Big\}. \tag{1.21}$$

As definições acima implicam as importantes propriedades descritas na proposição que segue, cuja demonstração deixamos como exercício.

Proposição 1.1 *Sejam $B \subset X$, X não vazio, e $\{A_\alpha \subset X,\ \alpha \in I\}$ uma coleção arbitrária de subconjuntos de X. Então, valem as seguintes relações:*
$$B \setminus \left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha\in I}(B \setminus A_\alpha), \qquad B \setminus \left(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in I}(B \setminus A_\alpha), \tag{1.22}$$
$$\left(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right) \setminus B = \bigcap_{\alpha\in I}(A_\alpha \setminus B), \qquad \left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right) \setminus B = \bigcup_{\alpha\in I}(A_\alpha \setminus B), \tag{1.23}$$
$$B \cup \left(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha\in I}(B \cup A_\alpha), \qquad B \cap \left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in I}(B \cap A_\alpha), \tag{1.24}$$
$$B \cup \left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in I}(B \cup A_\alpha), \qquad B \cap \left(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha\in I}(B \cap A_\alpha). \tag{1.25}$$

As relações, (1.22) implicam

$$\left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha\in I}(A_\alpha)^c , \qquad \left(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha\in I}(A_\alpha)^c . \tag{1.26}$$

Essas últimas relações são conhecidas como regras de De Morgan[49]. □

• **Partições de conjuntos**

Uma noção que usaremos repetidas vezes é a de *partição de um conjunto.* Seja X um conjunto não vazio e seja $\mathcal{P} = \{P_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$ uma coleção de subconjuntos de X (que indexamos por um conjunto de índices Λ). Dizemos que $\mathcal{P}$ é uma *partição* de X se

a) $P_\lambda \cap P_{\lambda'} = \emptyset$ sempre que $\lambda \neq \lambda'$.

b) $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda = X$.

É evidente que uma coleção $\mathcal{P}$ de subconjuntos de X é uma partição de X se e somente se cada $x \in X$ pertence a um e somente um conjunto P_λ. Se $\mathcal{P}$ é uma partição de X dizemos, um tanto pictoricamente, que $\mathcal{P}$ *particiona* X. Cada elemento P_λ é dito ser uma *componente da partição* $\mathcal{P}$ de X.

Uma questão combinatória importante é saber quantas partições possui um conjunto finito. Ela é resolvida na Seção 6.1.4, página 362, que discute os chamados *números de Bell*[50].

1.1.2.2 Funções Características de Conjuntos

Seja X um conjunto não vazio e $A \subset X$. Definimos a *função característica*[51] de A por

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A , \\ 0, & \text{se } x \notin A . \end{cases} \tag{1.27}$$

Segue dessa definição que $\chi_\emptyset$ é a função identicamente nula.

Funções características de conjuntos são muito úteis e têm o dom de simplificar algumas demonstrações de identidades envolvendo conjuntos, como, por exemplo, veremos na prova da Proposição 1.2, página 63, e em diversos outros lugares destas Notas. A razão disso reside no fato que uma função f definida em X cuja imagem está contida no conjunto $\{0,\ 1\}$, identifica <u>univocamente</u> um conjunto $A \subset X$, a saber, $A = \{x \in X \,|\, f(x) = 1\}$ e, portanto $f = \chi_A$ para esse A.

Vamos agora listar propriedades úteis de funções características. É evidente que para todo $A \subset X$ vale $(\chi_A)^2 = \chi_A$ (idempotência). Uma outra propriedade útil é

$$\chi_{A\cap B} = \chi_A\chi_B . \tag{1.28}$$

Isso decorre do fato que $\chi_A(x)\chi_B(x) = 1$ se e somente se $x \in A$ e $x \in B$, ou seja, se e somente se $x \in A \cap B$, sendo nula se $x \notin A \cap B$.

Se C e D forem conjuntos <u>disjuntos</u>, então

$$\chi_{C\cup D} = \chi_C + \chi_D , \tag{1.29}$$

o que pode ser verificado pelo mesmo tipo de argumento.

Isso tem uma consequência também relevante. Se $A,\ B \subset X$ são dois conjuntos quaisquer, então $A = (A\setminus B)\cup(A\cap B)$. Os conjuntos $A = A \setminus B$ e $A \cap B$ são disjuntos e, portanto, por (1.29) $\chi_A = \chi_{A\setminus B} + \chi_{A\cap B}$, donde se extrai

$$\chi_{A\setminus B} = \chi_A - \chi_{A\cap B} \overset{(1.28)}{=} \chi_A\big(1 - \chi_B\big) . \tag{1.30}$$

[49] Augustus De Morgan (1806–1871).
[50] Eric Temple Bell (1883–1960).
[51] Também denominada *função indicatriz* ou *função indicadora*.

Se A e B não forem disjuntos teremos $A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$, uma união de três conjuntos disjuntos $A \setminus B$, $A \cap B$ e $B \setminus A$. Logo,

$$\chi_{A \cup B} = \chi_{A \setminus B} + \chi_{A \cap B} + \chi_{B \setminus A} \stackrel{(1.28) \text{ e } (1.30)}{=} \chi_A\big(1 - \chi_B\big) + \chi_A \chi_B + \chi_B\big(1 - \chi_A\big)$$

e, portanto,

$$\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \chi_B , \tag{1.31}$$

o que generaliza (1.29), válida apenas para conjuntos disjuntos.

1.1.2.3 A Diferença Simétrica de Dois Conjuntos

A operação de diferença simétrica de dois conjuntos, que definiremos adiante, tem propriedades especiais (por exemplo, como veremos, é uma operação de grupo) e tem diversos usos que encontraremos em outras áreas, como na Seção 28.6, página 1467.

• **A diferença simétrica de dois conjuntos**

Por $A \triangle B$ denota-se a chamada *diferença simétrica* entre dois conjuntos A e B:

$$A \triangle B := (A \cup B) \setminus (A \cap B) . \tag{1.32}$$

Segue dessa definição que

$$A \triangle \emptyset = A \quad \text{e} \tag{1.33}$$

$$A \triangle A = A \setminus A = \emptyset . \tag{1.34}$$

A função característica de $A \triangle B$ pode ser determinada com uso das relações (1.27)-(1.31):

$$\chi_{A \triangle B} = \chi_{(A \cup B) \setminus (A \cap B)} \stackrel{(1.30)}{=} \chi_{A \cup B}\big(1 - \chi_{A \cap B}\big) \stackrel{(1.31) \text{ e } (1.28)}{=} \big(\chi_A + \chi_B - \chi_A \chi_B\big)\big(1 - \chi_A \chi_B\big)$$

e, portanto,

$$\chi_{A \triangle B} = \chi_A + \chi_B - 2\chi_A \chi_B . \tag{1.35}$$

E. 1.4 *Exercício*. Mostre que (1.35) permite escrever

$$\chi_{A \triangle B} = \big(\chi_A - \chi_B\big)^2 . \tag{1.36}$$

Obtenha disso que

$$\chi_{A \triangle B} = \big|\chi_A - \chi_B\big| . \tag{1.37}$$

Use em ambos os casos a idempotência das funções características. ✠

E. 1.5 *Exercício*. Se A e B são conjuntos, mostre que

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) , \tag{1.38}$$

$$A \cap B = (A \cup B) \setminus (A \triangle B) = \Big(A \cup B\Big) \setminus \Big((A \setminus B) \cup (B \setminus A)\Big) , \tag{1.39}$$

$$A \cup B = (A \triangle B) \cup (A \cap B) = (A \triangle B) \triangle (A \cap B) , \tag{1.40}$$

$$A \setminus B = A \triangle (A \cap B) . \tag{1.41}$$

Sugestão: use diretamente as propriedades listadas na Proposição 1.1, página 60, ou use as relações (1.27)-(1.31) e (1.35). Por exemplo, como $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ é a união de dois conjuntos disjuntos, tem-se

$$\chi_{(A \setminus B) \cup (B \setminus A)} \stackrel{(1.29)}{=} \chi_{(A \setminus B)} + \chi_{(B \setminus A)} \stackrel{(1.30)}{=} \chi_A\big(1 - \chi_B\big) + \chi_B\big(1 - \chi_A\big) = \chi_A + \chi_B - 2\chi_A \chi_B \stackrel{(1.35)}{=} \chi_{A \triangle B} ,$$

o que por sua vez implica $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A \triangle B$, que é a relação (1.38). ✠

A proposição a seguir é particularmente importante:

Proposição 1.2 *A diferença simétrica é comutativa: se A e B são conjuntos, vale*

$$A\triangle B \;=\; B\triangle A \qquad (\text{“comutatividade”}). \tag{1.42}$$

Se A, B e C são conjuntos, então a diferença simétrica é associativa:

$$(A\triangle B)\triangle C \;=\; A\triangle(B\triangle C) \qquad (\text{“associatividade”}). \tag{1.43}$$

□

Prova. A comutatividade segue trivialmente da definição (1.32), usando os fatos que $A\cap B = B\cap A$ e $A\cup B = B\cup A$. Para a associatividade um pouco mais de trabalho é necessário, mas ele é muito facilitado pelas relações (1.27)-(1.31) e (1.35). Usando (1.35), temos

$$\begin{aligned}\chi_{(A\triangle B)\triangle C} &= \chi_{A\triangle B} + \chi_C - 2\chi_{A\triangle B}\chi_C \\ &= \chi_A + \chi_B - 2\chi_A\chi_B + \chi_C - 2\big(\chi_A + \chi_B - 2\chi_A\chi_B\big)\chi_C\end{aligned}$$

e com isso,

$$\chi_{(A\triangle B)\triangle C} \;=\; \chi_A + \chi_B + \chi_C - 2\big(\chi_A\chi_B + \chi_A\chi_C + \chi_B\chi_C\big) + 4\chi_A\chi_B\chi_C \;. \tag{1.44}$$

O fato notável é que o lado direito de (1.44) é invariante pelas mudanças cíclicas $A \to B \to C \to A$. Disso seque de forma evidente que $\chi_{(A\triangle B)\triangle C} = \chi_{(B\triangle C)\triangle A} = \chi_{A\triangle(B\triangle C)}$, a última igualdade decorrendo da comutativide da operação $\triangle$. Isso completa a demonstração, pois a igualdade dessas funções características implica $(A\triangle B)\triangle C = A\triangle(B\triangle C)$. ■

Nota para um estudante mais avançado. Seja X um conjunto não vazio. Então, $\mathbb{P}(X)$ é um grupo com a operação $\triangle$. A associatividade é garantida por (1.43), o elemento neutro sendo $\emptyset$ (devido a (1.33)) e cada $A \in \mathbb{P}(A)$ tem a si mesmo como inversa (devido a (1.34)). A relação de comutatividade (1.42) indica que esse grupo é Abeliano. Um grupo onde cada elemento tem a si mesmo como inversa é dito ser um *grupo Booleano*[52]. ♣

Da associatividade (1.43) e das propriedades (1.33) e (1.34), segue que $(A\triangle B)\triangle B = A\triangle(B\triangle B) = A\triangle\emptyset = A$. Logo, novamente usando a associatividade,

$$A\triangle C \;=\; (A\triangle B)\triangle(B\triangle C)\;, \tag{1.45}$$

para quaisquer conjuntos A, B e C. Outra forma de se ver isso usando a associatividade é

$$(A\triangle B)\triangle(B\triangle C) \;=\; A\triangle(B\triangle B)\triangle C \;=\; A\triangle\emptyset\triangle C \;=\; A\triangle C\;.$$

A propriedade (1.45) é denominada *propriedade triangular da diferença simétrica de conjuntos*. A razão desse nome reside no fato de podermos com essa propriedade constituir uma pseudométrica em σ-álgebras que possuam uma medida finita. Trataremos disso na Seção 28.6, página 1467.

E. 1.6 *Exercício*. Se A e B são subconjuntos de um conjunto X e $A^c = X\setminus A$ e $A^c = X\setminus A$, mostre que $A\triangle B = A^c\triangle B^c$. *Sugestão 1.* Use (1.38) e o fato que $A\setminus B = A\cap B^c$ e, portanto, $A^c\setminus B^c = B\cap A^c = B\setminus A$, do que segue que $B^c\setminus A^c = A\setminus B$. *Sugestão 2.* Alternativamente, use (1.35) e o fato que $\chi_{A^c} = 1-\chi_A$ e $\chi_{B^c} = 1-\chi_B$. ✠

Listemos, por fim, propriedades de distributividade da diferença simétrica:

Proposição 1.3 *A operação de intersecção é distributiva para a diferença simétrica:*

$$A\cap(B\triangle C) \;=\; (A\cap B)\triangle(A\cap C)\;. \tag{1.46}$$

A operação de união não é distributiva, em geral, para a diferença simétrica, mas vale

$$\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)\triangle\left(\bigcup_{\mu\in\Lambda} B_\mu\right) \;\subset\; \bigcup_{\lambda\in\Lambda}(A_\lambda\triangle B_\lambda)\;. \tag{1.47}$$

[52] George Boole (1815–1864).

Acima, Λ é uma família arbitrária de índices. Assim, para quaisquer conjuntos A, B, C e D,

$$(A\cup B)\triangle(C\cup D) \;\subset\; (A\triangle C)\cup(B\triangle D) \tag{1.48}$$

que é um caso particular de (1.47). □

Prova. A função característica do conjunto do lado esquerdo de (1.46) é

$$\chi_A\,\chi_{B\triangle C} \overset{(1.35)}{=} \chi_A\big(\chi_B+\chi_C-2\chi_B\chi_C\big)\ . \tag{1.49}$$

A função característica do conjunto do lado direito de (1.46) é, usando novamente (1.35),

$$\chi_{A\cap B}+\chi_{A\cap C}-2\chi_{A\cap B}\chi_{A\cap C} \;=\; \chi_A\chi_B+\chi_A\chi_C-2\chi_A\chi_B\chi_C\ ,$$

onde usamos que $(\chi_A)^2=\chi_A$. Comparando isso a (1.49), constatamos a igualdade, provando (1.46).

Para provar (1.47), observemos que

$$\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\right)\cup\left(\bigcup_{\mu\in\Lambda}B_\mu\right) \;=\; \bigcup_{\lambda\in\Lambda}(A_\lambda\cup B_\lambda)\ .$$

pois o lado direito contém todos os elementos que pertencem a ao menos um A_λ ou a ao menos um B_λ, e o mesmo é válido para o lado esquerdo.

Porém,

$$\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\right)\cap\left(\bigcup_{\mu\in\Lambda}B_\mu\right) \;=\; \bigcup_{\lambda\in\Lambda}\bigcup_{\mu\in\Lambda}A_\lambda\cap B_\mu \;\supset\; \bigcup_{\lambda\in\Lambda}(A_\lambda\cap B_\lambda)\ .$$

(Para ilustrar isso, tome $A_1=[0,\ 1]$, $A_2=[-1,0]$, $B_1=\{-1\}$ e $B_2=\{1\}$. Temos $(A_1\cup A_2)\cap(B_1\cup B_2)=[-1,\ 1]\cap\{-1,\ -1\}=\{-1,\ 1\}$, mas $(A_1\cap B_1)\cup(A_2\cap B_2)=\emptyset$. Portanto, $(A_1\cup A_2)\cap(B_1\cup B_2)\supset(A_1\cap B_1)\cup(A_2\cap B_2)$).

Assim,

$$\begin{aligned}
\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\right)\triangle\left(\bigcup_{\mu\in\Lambda}B_\mu\right) \quad &\subset\quad \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(A_\lambda\cup B_\lambda)\right)\setminus\left(\bigcup_{\mu\in\Lambda}(A_\mu\cap B_\mu)\right)\\
&\overset{*}{\subset}\quad \bigcup_{\lambda\in\Lambda}(A_\lambda\cup B_\lambda)\setminus(A_\lambda\cap B_\lambda)\\
&=\quad \bigcup_{\lambda\in\Lambda}(A_\lambda\triangle B_\lambda)\ ,
\end{aligned}$$

completando a prova.

(Novamente, a inclusão indicada em $*$ pode ser ilustrada com $A_1=[0,\ 1]$, $A_2=[-1,0]$, $B_1=\{-1\}$ e $B_2=\{1\}$. Temos $(A_1\cup A_2)\setminus(B_1\cup B_2)=(-1,\ 1)$, mas $(A_1\setminus B_1)\cup(A_2\setminus B_2)=A_1\cup A_2=[-1,\ 1]$). ■

1.1.2.4 Propriedades Conjuntivistas Elementares de Funções

As seguintes proposições são importantes e frequentemente usadas:

Proposição 1.4 *Seja $f:X\to Y$ uma função e seja Λ um conjunto de índices. Se $A_\lambda\subset X$ para todo $\lambda\in\Lambda$, então*

$$f\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\right) \;=\; \bigcup_{\lambda\in\Lambda}f(A_\lambda)\ , \tag{1.50}$$

mas

$$f\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \subset \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda) . \tag{1.51}$$

Se $B_\lambda \subset Y$ *para todo* $\lambda \in \Lambda$, *então*

$$f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(B_\lambda) , \tag{1.52}$$

e

$$f^{-1}\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(B_\lambda) . \tag{1.53}$$

□

A demonstração é elementar e é deixada como um importante exercício.

Em (1.51) não se pode provar a igualdade entre $f\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)$ e $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda)$ e a razão é a seguinte: se $y \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda)$, então $y \in f(A_\lambda)$ para todo $\lambda \in \Lambda$. Assim, em cada A_λ existe um x_λ com $y = f(x_\lambda)$. Mas pode ocorrer que em $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ não exista nenhum elemento x com $y = f(x)$. O seguinte exemplo ilustra isso. Seja $f(x) = x^2$ definida em $[-1, 1]$. Tomemos $A_1 = [-1, 0]$, $A_2 = [0, 1]$. Então, $f(A_1) = [0, 1]$ e $f(A_2) = [0, 1]$. Portanto, $f(A_1) \cap f(A_2) = [0, 1]$. Porém, $f(A_1 \cap A_2) = f(\{0\}) = \{0\}$. Apesar disso, vale o seguinte:

Proposição 1.5 *Se* $f : X \to Y$ *é* <u>*injetora*</u> *então, se* $A_\lambda \subset X$ *para todo* $\lambda \in \Lambda$, *vale*

$$f\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda) . \tag{1.54}$$

□

A demonstração é elementar e é deixada como exercício.

Em relação às operações de complemento e diferença de conjuntos temos o seguinte:

Proposição 1.6 *Se* $f : X \to Y$ *é uma função e* $B, C \subset Y$, *então*

$$f^{-1}\big(B^c\big) = \big(f^{-1}(B)\big)^c \qquad e \qquad f^{-1}(B \setminus C) = f^{-1}(B) \setminus f^{-1}(C) .$$

Aqui, $B^c = Y \setminus B$. *Fora isso, se* $f : X \to Y$ *é uma função* <u>*injetora e sobrejetora*</u> *e* $A, B \subset X$, *então*

$$f\big(A^c\big) = \big(f(A)\big)^c \qquad e \qquad f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B) .$$

Aqui, $A^c = X \setminus A$. □

A demonstração é elementar e é deixada como exercício.

• <u>A união disjunta de uma família arbitrária de conjuntos</u>

Sejam, como acima, um conjunto I, não vazio, e A_i, $i \in I$, conjuntos indexados por elementos de I. Os conjuntos A_i podem eventualmente possuir elementos comuns, ou seja, pode haver elementos x que comparecem em vários conjuntos A_i. Porém, quando formamos a união usual dos conjuntos A_i, ou seja, $\bigcup_{i\in I} A_i$, cada elemento x comparece apenas uma vez, mesmo que pertença a vários A_i's. Por vezes estamos interessados em formar um outro tipo de união de conjuntos onde essa possível multiplicidade de cada elemento x possa ser levada em conta. A definição abaixo é, para tal, das mais adequadas.

Definimos a *união disjunta* da família de conjuntos A_i como sendo o conjunto, denotado por $\bigsqcup\limits_{i\in I} A_i$, dado pela união de todos os pares ordenados (a, i) com $i \in I$, $a \in A_i$, ou seja,

$$\bigsqcup_{i\in I} A_i := \bigcup_{i\in I} \bigcup_{a\in A_i} (a, i) . \tag{1.55}$$

Uniões disjuntas desempenham um papel em várias áreas da Matemática. Na Geometria Diferencial, por exemplo, o chamado fibrado tangente de uma variedade diferenciável é definido como a união disjunta dos espaços tangentes à variedade.

Alertamos o estudante que a expressão "união disjunta" é também empregada em textos matemáticos no sentido de união de conjuntos disjuntos dois a dois. Vide página 57.

• Extensões de funções

Seja $F : A \to B$ uma função e suponha que A seja subconjunto de um conjunto A' e que B seja subconjunto de um outro conjunto B'. Uma função $G : A' \to B'$ é dita ser uma *extensão* de F se F e G coincidirem na parte comum de seus domínios, que vem a ser o conjunto A, ou seja, se $G(a) = F(a)$ para todo $a \in A$.

Se lembrarmos que uma função $F : A \to B$ é um subconjunto de $A \times B$ e que uma função $G : A' \to B'$ é um subconjunto de $A' \times B'$ e se notarmos que $A \times B \subset A' \times B'$ caso $A \subset A'$ e $B \subset B'$, então uma definição alternativa de extensão de funções seria a seguinte: uma função G é uma extensão de uma função F se $F \subset G$, ambas entendidas como subconjuntos de $A' \times B'$.

E. 1.7 *Exercício*. Verifique a equivalência dessas duas definições do conceito de extensão de funções. ✣

Se G é uma extensão de F dizemos também que F é estendida por G.

O conceito de extensão de funções é frequentemente empregado na teoria das funções de variáveis complexas e na teoria dos operadores lineares em espaços de Hilbert.

Chamamos a atenção do leitor iniciante para o fato que uma função pode ter muitas extensões distintas. Por exemplo, seja $F : [0,\ 1] \to [0,\ 1]$ definida por $F(x) = x^2$. Então, tanto a função $G_1 : [-1,\ 1] \to [0,\ 1]$, dada por $G_1(x) = x^2$, quanto a função $G_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $G_2(x) = x^2$, são extensões de F. O mesmo vale para a função $G_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$G_3(x) \ := \ \begin{cases} x^3 \ , & \text{para } x < 0 \ , \\ x^2 \ , & \text{para } x \in [0,\ 1] \ , \\ \cos(x) \ , & \text{para } x > 1 \ . \end{cases}$$

(Note que $G_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $G_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ não são sobrejetoras).

• Restrições de funções

Seja $F : A \to B$ uma função e considere $A_0 \subset A$. Denotamos por $F\restriction_{A_0}$ a restrição de F a A_0: $F\restriction_{A_0} := \{(a,\ F(a)),\ a \in A_0\} \subset A_0 \times B$. É evidente que F é uma extensão de $F\restriction_{A_0}$.

• O gráfico de uma função

Uma maneira de refrasear os comentários acima emprega a noção de *gráfico de uma função*. Definimos o gráfico de uma função $F : A \to B$, denotado por $\Gamma(F)$, como sendo o subconjunto de $A \times B$ definido por

$$\Gamma(F) \ := \ \big\{\big(a,\ F(a)\big),\ a \in A\big\} \ .$$

Se A_1 e A_2 são dois subconjuntos de algum conjunto X (por exemplo, de $X = A_1 \cup A_2$) e $F_1 : A_1 \to B$ e $F_2 : A_2 \to B$ são duas funções, então F_2 é uma extensão de F_1 se e somente se $\Gamma(F_1) \subset \Gamma(F_2)$ como subconjuntos de $X \times B$.

E. 1.8 *Exercício*. Demonstre a validade dessa afirmação. ✣

1.1.2.5 Um Interlúdio. O Teorema de Ponto Fixo de Knaster-Tarski

Se Y for um conjunto não vazio e $f : Y \to Y$ for uma função de Y em si mesmo, dizemos que $y_0 \in Y$ é um *ponto fixo* de f se $f(y_0) = y_0$.

Na Matemática, assim como na Física e na Engenharia, muitos resultados importantes podem ser apresentados como afirmações sobre a existência de pontos fixos. Teoremas que garantam sua existência (e, eventualmente, a unicidade) para certos conjuntos A e certas funções $f : A \to A$ são denominados *Teoremas de Ponto Fixo*. Um exemplo dos mais importantes é o Teorema do Ponto Fixo de Banach, ao qual é dedicado o Capítulo 25, página 1368, juntamente com aplicações à Teoria das Equações Diferenciais, à Teoria das Equações Integrais e à Teoria dos Espaços de Banach.

Apresentaremos aqui um elegante Teorema de Ponto Fixo atribuído a Knaster[53] e a Tarski, datado de 1928[54], que é notável pela simplicidade de suas hipóteses e pela elegância de sua demonstração. Uma extensão para reticulados foi obtida por Tarski em 1955[55], mas não trataremos dela aqui.

Teorema 1.1 (Teorema de Ponto Fixo de Knaster-Tarski) *Seja X um conjunto e $F : \mathbb{P}(X) \to \mathbb{P}(X)$ uma função satisfazendo $F(A) \subset F(B)$ sempre que $A, B \in \mathbb{P}(X)$ satisfizerem $A \subset B$. Então, F possui um ponto fixo, ou seja, existe $C \in \mathbb{P}(X)$ tal que $F(C) = C$. Esse ponto fixo não é necessariamente único.* □

Prova. Defina-se $\mathcal{A} \subset \mathbb{P}(X)$ por

$$\mathcal{A} := \Big\{A \in \mathbb{P}(X) \big| \, F(A) \subset A\Big\} .$$

Observe-se que $\mathcal{A}$ não é vazia, pois $X \in \mathcal{A}$, já que F mapeia subconjuntos de X (incluindo X) em X. Defina-se $C := \cap\mathcal{A}$, ou seja,

$$C := \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A .$$

Note-se que pode valer $C = \emptyset$, mas isso não é um problema, sendo apenas relevante que $C \in \mathbb{P}(X)$, o que é evidente.

Afirmamos que $F(C) = C$. Para todo $A \in \mathcal{A}$ vale, evidentemente, $C \subset A$. Assim, pelas hipóteses, $F(C) \subset F(A) \subset A$, a última relação decorrendo do fato que $A \in \mathcal{A}$. Assim, concluímos que $F(C) \subset A$ para todo $A \in \mathcal{A}$ e, portanto,

$$F(C) \subset \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A \equiv C ,$$

o que significa que $C \in \mathcal{A}$.

Dessa relação $F(C) \subset C$ decorre, novamente pelas hipóteses sobre F, que $F\big(F(C)\big) \subset F(C)$. Isso, porém, significa que $F(C) \in \mathcal{A}$. Pela definição de C, isso implica que, $C \subset F(C)$.

Assim, provamos que $F(C) \subset C$ e $C \subset F(C)$, o que implica $F(C) = C$. ■

O Teorema de Ponto Fixo de Knaster-Tarski pode ser usado (vide *e.g.*, [353]) para provar o Teorema de Schröder-Berstein, Teorema 1.3, página 82, ainda que usemos uma estratégia ligeiramente diferente em nossa demonstração. O Teorema de Ponto Fixo de Knaster-Tarski possui também aplicações à Teoria dos Jogos e, devido a isso, muitos esforços têm sido feitos no desenvolvimento de algoritmos eficientes que permitam identificar os pontos fixos em casos de interesse.

1.1.2.6 Produtos Cartesianos Gerais

Vamos agora generalizar a noção de produto Cartesiano e, para tal, precisamos primeiramente de um axioma da teoria dos conjuntos que nos afirme que o objeto que procuramos de fato existe.

• **O Axioma da Escolha**

Toda a Matemática é assentada sobre uma série de postulados a respeito da noção de conjunto. Esses postulados, que são também frequentemente denominados *axiomas*, são afirmações tacitamente aceitas como verdadeiras a partir das quais outras afirmações podem ser deduzidas. Há diversos de tais axiomas na Teoria dos Conjuntos, como apresentamos na Seção 1.1.1, página 45 (vide também, *e.g.*, [497], [204], [484] ou [353]). Aqui discutiremos mais um, de grande importância, o chamado Axioma da Escolha. Para um texto abrangente sobre o tema, recomendamos [263].

O *Axioma da Escolha* consiste na seguinte afirmativa:

Seja A_s, $s \in I$, uma família de conjuntos não vazios, onde I é um conjunto arbitrário (não vazio) de índices. Então, podemos construir um conjunto A tomando ("escolhendo") um elemento a_s de cada conjunto A_s. Em termos mais técnicos, o axioma diz que há funções $F : I \to \bigcup_{s \in I} A_s$ tais que $F(s) \in A_s$ para todo $s \in I$.

[53] Bronislaw Knaster (1893-1980).
[54] B. Knaster and A. Tarski . "Un théorème sur les fonctions d'ensembles". Ann. Soc. Polon. Math. **6**: 133-134 (1928).
[55] Alfred Tarski. "A lattice-theoretical fixpoint theorem and its applications". Pacific Journal of Mathematics. **5**:2: 285-309 (1955).

Como discutiremos, o Axioma da Escolha afirma que o produto Cartesiano $\bigtimes_{s\in I} A_s$ é não vazio.

A primeira vista esse axioma parece constituir-se de uma obviedade. Sucede, porém, que, sobretudo pelo fato de o conjunto I de índices ser arbitrário (podendo ser até um conjunto infinito e não contável), a afirmativa que o mesmo contém não pode ser derivada de princípios mais básicos. O axioma faz uma afirmação de existência (de uma função como a F, ou de um conjunto como A formado por elementos escolhidos de cada A_s) que, geralmente, não pode ser demonstrada construtivamente, ou seja, por exibição explícita de uma tal função F ou de um conjunto A.

Faremos uso explícito do Axioma da Escolha adiante quando exibirmos exemplos de conjuntos não mensuráveis. O Axioma da Escolha foi originalmente formulado por Zermelo[56] em 1904 como parte da sua demonstração do chamado *Principio do Bom-Ordenamento*, Teorema 1.2, página 79. Vide [204] e, para os artigos originais, [219].

Uma típica situação na qual se faz uso do Axioma da Escolha ocorre quando são dados um conjunto X e uma relação de equivalência E em X e constrói-se um conjunto $A \subset X$ tomando-se um representante de cada classe de equivalência de X por E.

Nem sempre é possível exibir explicitamente os elementos de A, mas assumimos (via Axioma da Escolha) que um tal conjunto existe. Para ter-se em mente um caso onde uma tal situação ocorre, tome-se o exemplo dado em (1.57), página 70 e construa-se um conjunto tomando um elemento de cada classe de equivalência lá descrita. Tal conjunto desempenha um papel na teoria da medida. Vide Capítulo 28, página 1445, em particular a Seção 28.1.

• O produto Cartesiano de uma família arbitrária de conjuntos

Já discutimos à página 57 o conceito de produto Cartesiano $A \times B$ de dois conjuntos A e B (vide (1.13)) e, com ele, introduzimos a noção de função. De posse dessa noção podemos, com vistas a uma generalização, apresentar uma outra visão do conceito de produto Cartesiano de dois conjuntos, a saber, podemos dizer que $A \times B$ é o conjunto de todas as funções $f : \{1, 2\} \to A \cup B$ tais que $f(1) \in A$ e $f(2) \in B$. A ideia é dizer que cada par ordenado (a, b) com $a \in A$ e $b \in B$ é uma função onde o primeiro membro do par é a imagem de 1 (por ser o primeiro) e o segundo a imagem de 2 (por ser o segundo). Essa ideia permite definir produtos Cartesianos de um número finito n de conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ denotado por $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ como sendo o conjunto de todas as funções $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \bigcup_{j=1}^{n} A_j$ satisfazendo $f(j) \in A_j$ para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$. A função f tem, por assim dizer, o papel de ordenar os elementos de $\bigcup_{j=1}^{n} A_j$ tomando-se sucessivamente um elemento de cada A_i por vez. O produto Cartesiano $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ é assim entendido como o conjunto formado por todas as ênuplas ordenadas $(a_1, \ldots, a_n)$ com $a_i \in A_i$.

Essa ideia pode ser generalizada ainda mais. Sejam I um conjunto não vazio (não necessariamente finito ou enumerável) e A_i, $i \in I$, conjuntos não vazios indexados por elementos de I. Definimos então o produto Cartesiano da família de conjuntos $\{A_i, i \in I\}$, denotado por $\prod_{i\in I} A_i$, como sendo o conjunto de todas as funções $f : I \to \bigcup_{j\in I} A_j$ tais que $f(x) \in A_x$ para todo $x \in I$. O Axioma da Escolha (página 67) consiste na afirmação (ou melhor dizendo, na suposição, já que se trata de um axioma) que $\bigtimes_{i\in I} A_i$ é não vazio. Em símbolos

$$\bigtimes_{i\in I} A_i := \left\{ f : I \to \bigcup_{j\in I} A_j \;\middle|\; f(x) \in A_x \text{ para todo } x \in I \right\} .$$

Se por ventura todos os conjuntos A_i forem idênticos então denota-se o produto Cartesiano acima por A^I. Assim, A^I denota o conjunto de todas as funções de I em A.

Desta forma $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e $\mathbb{N}^{\{1, 2\}}$ são duas notações distintas para o mesmo objeto, que também é denotado simplesmente por $\mathbb{N}^2$, como se sabe. Genericamente $\mathbb{N}^d$ designa $\mathbb{N}^{\{1,\ldots,d\}}$ para $d \in \mathbb{N}$, $d > 0$.

Ainda sobre a notação, o produto Cartesiano $\bigtimes_{i\in I} A_i$ é também denotado por $\prod_{i\in I} A_i$. Um elemento de $\prod_{i\in I} A_i$ ou

[56] Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo (1871–1953).

$\bigtimes_{i\in I} A_i$ será denotado por $\bigtimes_{i\in I} (a_i)$. Assim, se $I = \{1, \ldots, n\}$ teremos

$$\prod_{i\in I} A_i = \bigtimes_{i\in I} A_i = A_1 \times \cdots \times A_n \qquad \text{e} \qquad \bigtimes_{i\in I} (a_i) = \big(a_1, \ldots, a_n\big) .$$

• **Comentário sobre a associatividade do produto Cartesiano**

Dados três conjuntos A_1, A_2 e A_3 podemos, empregando as definições acima, definir os produtos Cartesianos $\mathcal{A}_1 \equiv A_1 \times \Big(A_2 \times A_3\Big)$, $\mathcal{A}_2 \equiv \Big(A_1 \times A_2\Big) \times A_3$ e $\mathcal{A}_3 \equiv A_1 \times A_2 \times A_3$. Em princípio $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ e $\mathcal{A}_3$ são três objetos matemáticos distintos. Existem, no entanto, mapeamentos canônicos bijetivos entre eles (encontre-os!) e, por essa razão, a distinção entre $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ e $\mathcal{A}_3$ é frequentemente ignorada. Dessa forma, com um certo abuso de linguagem, o produto Cartesiano é por vezes tomado como sendo associativo, ainda que, estritamente falando, não o seja.

1.1.2.7 Relações de Incompatibilidade (ou de Compatibilidade)

Seja P um conjunto não vazio. Uma relação $I \subset P \times P$ que satisfaça

1. *Reflexividade:* para todo $\gamma \in P$ vale $(\gamma, \gamma) \in I$.
2. *Simetria:* se γ e γ' são tais que $(\gamma, \gamma') \in I$, então $(\gamma', \gamma) \in I$,

é dita ser uma *relação de incompatibilidade*, ou ainda uma *relação de comensurabilidade*. Em certas áreas relações de compatibilidade são denominadas *relação de compatibilidade*, uma aparente contradição de termos[57]. Encontraremos essa nomenclatura, por exemplo, em nossos estudos de variedades diferenciáveis ao lidarmos com relações de compatibilidade entre cartas locais de coordenadas à página 1685. Em áreas como a Ciência da Computação relações de incompatibilidade são também denominadas *relações de dependência*. Relações de incompatibilidade são importantes na Mecânica Estatística, especialmente no estudo das chamadas *expansões de polímeros e de "clusters"*.

Para uma dada relação de incompatibilidade I denotamos por $\gamma \not\sim_I \gamma'$ caso $(\gamma, \gamma') \in I$ e dizemos que γ e γ' são *I-incompatíveis*. Se uma dada relação I é subentendida, denotamos simplesmente $\gamma \not\sim \gamma'$ caso $(\gamma, \gamma') \in I$ e dizemos simplesmente que γ e γ' são *incompatíveis*.

Exemplo 1.3 Seja $\mathcal{X}$ um conjunto não vazio e $P = \mathbb{P}(\mathcal{X}) \setminus \{\emptyset\}$, a coleção de todos os subconjuntos não vazios de $\mathcal{X}$. Uma relação de incompatibilidade em P é definida por $I = \big\{(A, B) \in P \times P, \ A \cap B \neq \emptyset\big\}$. Obviamente, $A \not\sim_I B \Leftrightarrow A \cap B \neq \emptyset$. Verifique! ♦

1.1.2.8 Relações de Equivalência

Um tipo muito importante de relação são as chamadas *relações de equivalência*. Elas ocorrem em um sem-número de construções matemáticas importantes, como veremos em vários exemplos deste texto. A noção de relação de equivalência é muito antiga na Matemática, sendo até mesmo encontrada (não sob esse nome) nos *Elementos* de Euclides[58].

Algumas construções que apresentaremos, como a de conjuntos quociente e a de colagem de conjuntos, são muito empregadas na Teoria de Grupos, na Topologia Algébrica e na Geometria Diferencial.

• **Relações de equivalência parciais**

Uma relação $E \subset A \times A$ é dita ser uma *relação de equivalência parcial* em um conjunto não vazio A se os seguintes quesitos forem satisfeitos:

1. *Simetria*: $(a, b) \in E$ implica $(b, a) \in E$.

[57] Na linguagem comum, as palavras compatibilidade e incompatibilidade são antônimos, mas enquanto relações, são caracterizadas pelas mesmas propriedades e usar uma ou outra depende apenas do sentido positivo ou negativo que se deseja imprimir à relação. Ilustremos isso com um exemplo. Se duas pessoas possuem uma aspiração comum, podemos tanto dizer que essas pessoas são compatíveis quanto incompatíveis. Diremos que são compatíveis se a aspiração comum puder ser satisfeita de modo não conflituoso (por exemplo, se for a aspiração pela vitória de um mesmo time de futebol), mas diremos que são incompatíveis se a aspiração comum só puder ser satisfeita de modo conflituoso (por exemplo, se for a aspiração por uma vaga de emprego única em uma empresa).

[58] Euclides de Alexandria (ci. 325 A.C, ci. 265 A.C.).

2. *Transitividade*: se $(a,\ b) \in E$ e $(b,\ c) \in E$, então $(a,\ c) \in E$.

Muito mais importante é a noção de *relação de equivalência*.

• Relações de equivalência

Uma relação $E \subset A \times A$ é dita ser uma *relação de equivalência* em um conjunto não vazio A se os seguintes quesitos forem satisfeitos:

1. *Reflexividade*: $(a,\ a) \in E$ para todo $a \in A$.
2. *Simetria*: $(a,\ b) \in E$ implica $(b,\ a) \in E$.
3. *Transitividade*: se $(a,\ b) \in E$ e $(b,\ c) \in E$, então $(a,\ c) \in E$.

Note-se que, pela propriedade de reflexividade, valem para uma relação de equivalência $E \subset A \times A$ que $\mathrm{Dom}(E) = A$ e que $\mathrm{Im}(E) = A$.

Se o par $(a,\ b)$ pertence a uma relação de equivalência E então a e b são ditos serem *equivalentes segundo* E. Quase sempre usa-se a notação $a \overset{E}{\sim} b$, ou $a \sim_E b$ para indicar que dois elementos são equivalentes segundo uma relação de equivalência E dada. Quanto é subentendido qual a relação de equivalência em questão escrevemos simplesmente $a \sim b$. Com essa última notação, as propriedades definidoras de uma relação de equivalência dadas acima podem ser reescritas da seguinte forma:

1. *Reflexividade*: $a \sim a$ para todo $a \in A$.
2. *Simetria*: $a \sim b$ implica $b \sim a$.
3. *Transitividade*: se $a \sim b$ e $b \sim c$, então $a \sim c$.

Muitos exemplos de relações de equivalência serão encontrados nestas Notas. Contentemo-nos por ora com três exemplos elementares, o terceiro, sendo, porém, muito relevante:

E. 1.9 *Exercício*. Seja o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ e seja a relação $W \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definida por

$$W := \Big\{(x,\ y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ tal que } y - x \in \mathbb{Z}\Big\} , \tag{1.56}$$

onde $\mathbb{Z}$ é o conjunto dos números inteiros. Prove que W é uma relação de equivalência em $\mathbb{R}$. ✠

E. 1.10 *Exercício*. Seja o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ e seja a relação $W \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definida por

$$W := \Big\{(x,\ y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ tal que } y - x \in \mathbb{Q}\Big\} , \tag{1.57}$$

onde $\mathbb{Q}$ é o conjunto dos números racionais. Prove que W é uma relação de equivalência em $\mathbb{R}$. ✠

E. 1.11 *Exercício*. Seja V um espaço vetorial e seja W um subespaço de V. Seja a relação $\mathcal{V} \subset V \times V$ definida por

$$\mathcal{V} := \Big\{(x,\ y) \in V \times V \text{ tal que } y - x \in W\Big\} . \tag{1.58}$$

Prove que $\mathcal{V}$ é uma relação de equivalência em V.

Esse exemplo é importante, pois com ele podemos definir a noção de espaço quociente de um espaço vetorial por um subespaço, uma importante noção que é apresentada na Seção 2.3.3, página 204. ✠

E. 1.12 *Exercício*. O Exercício E. 1.10 pode ser visto como um caso particular do Exercício E. 1.11 se identificarmos adequadamente os espaços V e U. Como? *Sugestão:* considere $V = \mathbb{R}$ como espaço vetorial sobre o corpo dos racionais. ✠

Seja $E \subset A\times A$ (com A não vazio) uma relação de equivalência parcial. Afirmamos que E é uma relação de equivalência se e somente se $\mathrm{Dom}(E) = A$. Se E é uma relação de equivalência, então $\mathrm{Dom}(E) = A$ (como já comentamos) e E uma relação de equivalência parcial (evidentemente). Suponhamos agora que E seja uma relação de equivalência parcial e que $\mathrm{Dom}(E) = A$. Seja $x \in A$, arbitrário. Então, como $\mathrm{Dom}(E) = A$, existe algum $y \in A$ tal que $(x,\ y) \in E$. Pela simetria, tem-se também $(y,\ x) \in E$. Pela transitividade, $(x,\ y) \in E$ e $(y,\ x) \in E$ implicam $(x,\ x) \in E$, provando a propriedade de reflexividade e provando que E é uma relação de equivalência.

O exercício que segue mostra um exemplo de relação de equivalência parcial que não é uma relação de equivalência.

E. 1.13 *Exercício*. Seja $A = \{\alpha,\ \beta,\ \gamma\}$ um conjunto composto por três elementos distintos. Considere a relação dada por $E = \big\{(\beta,\ \gamma),\ (\gamma,\ \beta),\ (\beta,\ \beta),\ (\gamma,\ \gamma)\big\}$. Constate que E é uma relação de equivalência parcial (valem a simetria e a transitividade), mas que E não é uma relação de equivalência, pois não vale a relação de reflexividade, já que $(\alpha,\ \alpha) \notin E$. Note que $\mathrm{Dom}(E) = \{\beta,\ \gamma\} \neq A$. ✠

• Classes de equivalência

Seja A um conjunto e $E \subset A \times A$ uma relação de equivalência em A. Para cada $a \in A$ podemos definir o conjunto

$$E(a) \ := \ \{a' \in A \text{ tal que } (a,\ a') \in E\} \ . \tag{1.59}$$

Esse conjunto é chamado de *classe de equivalência* de a (pela relação de equivalência E). Na literatura, encontra-se também frequentemente a notação $[a]$ para denotar a classe de equivalência do elemento a.

E. 1.14 *Exercício*. Seja A um conjunto e $E \subset A \times A$ é uma relação de equivalência em A. Suponha que $a,\ b \in A$ e que $a \sim b$ segundo E. Prove que $E(a) = E(b)$. ✠

E. 1.15 *Exercício importante*. Prove que se A é um conjunto e $E \subset A \times A$ é uma relação de equivalência em A, então A é a união disjunta de classes de equivalência de seus elementos. ✠

• As relações de equivalência minimal e maximal

Se X é um conjunto não vazio há sempre ao menos duas relações de equivalência em X, a saber, a *relação de equivalência minimal* $E_{\mathsf{min}} := \big\{(x,\ x),\ x \in X\big\}$ e a *relação de equivalência maximal* $E_{\mathsf{max}} := \big\{(x,\ y),\ x,\ y \in X\big\} = X\times X$. É evidente que toda relação em X está contida em E_{max}.

E. 1.16 *Exercício*. Constate que E_{min} e E_{max} são, de fato, relações de equivalência e justifique as afirmações que E_{min} é a menor relação de equivalência possível em X e que E_{max} é a maior relação de equivalência possível em X. ✠

• Intersecções de relações de equivalência são relações de equivalência

Seja X um conjunto não vazio e seja $\{E_\lambda \subset X \times X,\ \lambda \in \Lambda\}$ uma coleção de relações de equivalência em X (aqui, Λ é um conjunto não vazio arbitrário de índices). Afirmamos que $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda \subset X \times X$ é também uma relação de equivalência em X. De fato, para todo $a \in X$ tem-se $(a,\ a) \in E_\lambda$ para cada $\lambda \in \Lambda$. Logo $(a,\ a) \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$ (reflexividade de $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$). Analogamente, se $(a,\ b) \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$, tem-se que $(a,\ b) \in E_\lambda$ para todo $\lambda \in \Lambda$. Logo, $(b,\ a) \in E_\lambda$ para todo $\lambda \in \Lambda$, provando que $(b,\ a) \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$ (simetria de $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$). Por fim, se $(a,\ b) \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$ e $(b,\ c) \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$, valem para todo $\lambda \in \Lambda$ que $(a,\ b) \in E_\lambda$ e $(b,\ c) \in E_\lambda$, implicando que $(a,\ c) \in E_\lambda$ para todo $\lambda \in \Lambda$, ou seja, que $(a,\ c) \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$ (transitividade de $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$). Isso estabeleceu que $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$ é uma relação de equivalência em X. Trata-se da menor relação de equivalência que contém todas as relações de equivalência E_λ.

É evidente pelas linhas acima que também vale a seguinte afirmação: se $\{E_\lambda \subset X \times X,\ \lambda \in \Lambda\}$ é uma coleção de relações de equivalência parciais em X, então $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$ é uma relação de equivalência parcial em X.

• Relação de equivalência gerada

Se X é um conjunto não vazio e seja $R \subset X \times X$ é uma relação não vazia qualquer em R. Denotamos por E_R a menor relação de equivalência que contém R, ou seja, E_R é a intersecção de todas as relações de equivalência que contém a relação R. Note-se que R está sempre contida em ao menos uma relação de equivalência, a saber, na relação de equivalência maximal E_{max}, definida acima. A relação de equivalência E_R é dita ser a *relação de equivalência gerada* *pela relação R.*

E. 1.17 *Exercício*. Seja X não vazio e sejam x e y dois elementos distintos de X. Seja $R = \{(x,\ y)\}$ uma relação em X. Mostre que a relação de equivalência gerada por essa relação é $E_R = \{(x,\ y)\} \cup \{(y,\ x)\} \cup \{(z,\ z),\ z \in X\}$. ✠

E. 1.18 *Exercício*. Seja X não vazio e sejam x, y e z três elementos distintos de X. Determine a relação de equivalência gerada pela relação $\{(x,\ y),\ (y,\ z)\}$. Faça o mesmo para o caso de n pontos distintos $x_1,\ \ldots,\ x_n$ de X. ✠

• Conjunto quociente e função quociente

Se A é um conjunto não vazio e $\sim$ é uma relação de equivalência em A, denotamos por $A/\sim$ a coleção das classes de equivalência de A por $\sim$. A coleção $A/\sim$ é por vezes dita ser o *quociente de A pela relação de equivalência* $\sim$. O Exercício E. 1.15 informa-nos que $A/\sim$ é uma partição de A (segundo a definição de *partição* encontrada à página 61).

Se A é um conjunto não vazio e $\sim$ é uma relação de equivalência em A, a função $\pi : A \to A/\sim$ definida por $\pi(a) = [a]$ é denominada *aplicação quociente*, ou *função quociente*. A aplicação quociente é, evidentemente, sobrejetora.

• Relações de equivalência induzidas por partições

Seja X um conjunto não vazio. Uma coleção $\mathcal{P}$ de subconjuntos não vazios disjuntos de X cuja união seja X é dita ser uma *partição* de X (vide página 61). Se $\mathcal{P}$ é uma partição de X podemos definir uma relação de equivalência em X, que denotamos por $\sim_{\mathcal{P}}$, dizendo, para $x,\ y \in X$, que $x \sim_{\mathcal{P}} y$ se e somente se existir $A \in \mathcal{P}$ tal que $x \in A$ e $y \in A$. Essa relação de equivalência é dita ser a *relação de equivalência induzida pela partição* $\mathcal{P}$.

E. 1.19 *Exercício*. Prove que isso, de fato, define uma relação de equivalência em X. Prove que as classes de equivalência por essa relação são precisamente os elementos de $\mathcal{P}$. ✠

E. 1.20 *Exercício*. Justifique por que é verdadeira a afirmação que uma relação de equivalência em X é univocamente determinada pelas suas classes de equivalência e a afirmação que toda relação de equivalência em X é induzida por alguma partição de X. ✠

• Relações de equivalência induzidas por funções

Sejam X e Y conjuntos não vazios e seja $f : X \to Y$ uma função de X assumindo valores em Y. A função f define uma relação de equivalência em X, denotada por $\sim_f$ e denominada *relação de equivalência induzida por f*, da seguinte forma: se $x,\ y \in X$ dizemos que $x \sim_f y$ se e somente se $f(x) = f(y)$.

E. 1.21 *Exercício*. Prove que isso, de fato, define uma relação de equivalência em X. ✠

E. 1.22 *Exercício elementar*. Seja A um conjunto não vazio e seja $\sim$ uma relação de equivalência em A. Mostre que $A/\sim = A/\sim_\pi$, onde π é a função quociente associada a $\sim$. Justifique por que é correto afirmar que toda relação de equivalência é induzida por alguma função e que toda função é uma função quociente de alguma relação de equivalência. ✠

• Obtendo relações de equivalência a partir de relações de equivalência parciais

Seja X um conjunto não vazio e seja P uma relação de equivalência parcial em X com $\mathrm{Dom}(P) \subsetneq X$ (um subconjunto próprio de X). Podemos associar a P uma relação de equivalência $\tilde{P}$ tomando $\tilde{P} := P \cup D$, onde D é o conjunto “diagonal” $D := \{(x,\ x),\ x \in X\}$. A relação $\tilde{P}$ é simétrica (o que é evidente, pois P e D o são) e, como veremos, transitiva. Como, por construção, tem-se $\mathrm{Dom}(\tilde{P}) = X$, segue que $\tilde{P}$ é uma relação de equivalência.

Demonstra-se que $\tilde{P}$ é transitiva da seguinte forma. Sejam $(x,\ y) \in \tilde{P}$ e $(y,\ z) \in \tilde{P}$. Se $(x,\ y) \in D$, então $x = y$ e portanto, $(x,\ z) = (y,\ z) \in \tilde{P}$. Se $(y,\ z) \in D$ o raciocínio é idêntico. Resta apenas considerar o caso em que $(x,\ y) \in P \setminus \tilde{P}$ e $(y,\ z) \in P \setminus \tilde{P}$, mas nesse caso $(x,\ z) \in P \subset \tilde{P}$, pois P é uma relação de equivalência parcial.

A relação $\tilde{P}$ e é dita ser a *relação de equivalência induzida pela relação de equivalência parcial P*.

E. 1.23 *Exercício*. A relação $\tilde{P}$ é a menor relação de equivalência que contém a relação de equivalência parcial P, ou seja, é a relação de equivalência gerada pela relação de equivalência parcial P. Justifique essa afirmação! ✠

• Obtendo relações de equivalência a partir de relações simétricas

Uma relação simétrica também pode ser estendida a uma relação de equivalência. Se X é um conjunto não vazio, uma relação $S \subset X \times X$ é dita ser uma *relação simétrica* se $(a,\ b) \in S$ implica $(b,\ a) \in S$.

Seja X um conjunto não vazio e seja S uma relação simétrica em X com $\mathrm{Dom}(S) = X$. Podemos associar a S uma relação de equivalência $\sim_S$ da seguinte forma: declaramos que $x \sim_S y$ se e somente se existir um conjunto finito $\big\{x \equiv x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1},\ x_n \equiv y\big\} \subset X$, para algum $n \geq 2$, tal que $(x_k,\ x_{k+1}) \in S$ para todo $k = 1,\ \ldots,\ n-1$.

Verifiquemos que se trata, de fato, de uma relação de equivalência em X. Como $\mathrm{Dom}(S) = X$, existe para todo $x \in X$ um elemento $y \in X$ com $(x,\ y) \in S$. Logo, o conjunto $\{x \equiv x_1,\ y \equiv x_2,\ x \equiv x_3\}$ satisfaz $(x_k,\ x_{k+1}) \in S$ para todo $k = 1,\ 2$. Isso prova que $x \sim_S x$ para todo $x \in X$ (reflexividade de $\sim_S$). Se $x \sim_S y$, então existe $\big\{x \equiv x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1},\ x_n \equiv y\big\} \subset X$, $n \geq 2$, tal que $(x_k,\ x_{k+1}) \in S$ para todo $k = 1,\ \ldots,\ n-1$. Se considerarmos o conjunto $\{y_1,\ \ldots,\ y_n\}$ onde $y_k = x_{n-k+1}$, é evidente que $y_1 = y$, $y_n = x$ e $(y_k,\ y_{k+1}) \in S$ $k = 1,\ \ldots,\ n-1$, provando que $y \sim_S x$ (simetria de $\sim_S$). Por fim, sejam $x,\ y,\ z \in X$ tais que $x \sim_S y$ e $y \sim_S z$. Então, existem conjuntos finitos $\big\{x \equiv x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1},\ x_n \equiv y\big\} \subset X$ e $\big\{y \equiv x_n,\ x_{n+1},\ \ldots,\ x_{n+m-1},\ x_{n+m} \equiv z\big\} \subset X$ tais que $(x_k,\ x_{k+1}) \in S$ para todo $k = 1,\ \ldots,\ n-1$ e para todo $k = n,\ \ldots,\ n+m-1$. Naturalmente, o conjunto $\big\{x \equiv x_1,\ x_{n+1},\ \ldots,\ x_{n+m-2},\ x_{n+m} \equiv z\big\} \subset X$ satisfaz $(x_k,\ x_{k+1}) \in S$ para todo $k = 1,\ \ldots,\ n+m-1$, estabelecendo que $x \sim_S z$ (transitividade de $\sim_S$).

A relação $\sim_S$ e é dita ser a *relação de equivalência induzida pela relação simétrica S*.

E. 1.24 *Exercício*. A relação $\sim_S$ é a menor relação de equivalência que contém a relação simétrica S, ou seja, é a relação de equivalência gerada pela relação simétrica S. Justifique essa afirmação! ✠

E. 1.25 *Exercício*. Seja $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 1$, definido por $\mathbb{S}^n = \big\{(x_1,\ \ldots,\ x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \big|\ x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\big\}$ (a esfera unitária em $\mathbb{R}^{n+1}$). Defina-se em $\mathbb{S}^n$ a seguinte relação: $S = \{(x,\ -x),\ x \in \mathbb{S}^n\}$, ou seja, para $x,\ y \in \mathbb{S}^n$ temos $(x,\ y) \in S$ se e somente se $y = -x$. Constate que S é uma relação simétrica e com $\mathrm{Dom}(S) = \mathbb{S}^n$. Constate que S não é reflexiva e constate também que S não é uma relação de equivalência parcial, pois não é transitiva! Mostre que $\mathbb{S}^n/\sim_S$, o conjunto quociente de $\mathbb{S}^n$ pela relação de equivalência induzida por S, é dada por $\mathbb{S}^n/\sim_S = \{x,\ -x,\ x \in \mathbb{S}^n\}$, ou seja, $[x] = \{x,\ -x\}$ para todo $x \in \mathbb{S}^n$. $\mathbb{S}^n/\sim_S$ é denominado *espaço real projetivo*, e é também denotado por $\mathbb{RP}^n$. ✠

• Colagem de dois conjuntos por uma função

Algumas das noções que acima apresentamos conduzem a uma construção muito empregada na Topologia Algébrica e na Geometria Diferencial, a saber, a chamada *colagem de conjuntos por uma função*. Neste ponto não trataremos de aspectos topológicos, deixando essas questões para alhures.

Sejam X e Y dois conjuntos não vazios e disjuntos[59] e seja $A \subset X$ (A também suposto não vazio). Seja $f : A \to Y$ uma função e considere-se a união disjunta $X \cup Y$. Com o uso de f podemos definir uma relação R_f em $X \cup Y$ da seguinte forma: $R_f := \big\{(a,\ f(a)),\ a \in A\big\}$. É evidente que $R_f \subset (X \cup Y) \times (X \cup Y)$ e, portanto, R_f é uma relação em $X \cup Y$. Denotemos por E_f a relação de equivalência em $X \cup Y$ gerada por R_f. É fácil ver que

$$E_f \ = \ \Big\{\big(a,\ f(a)\big),\ a \in A\Big\} \cup \Big\{\big(f(a),\ a\big),\ a \in A\Big\} \cup \Big\{(a,\ a'),\ a,\ a' \in A \text{ com } f(a) = f(a')\Big\} \cup \Big\{(b,\ b),\ b \in X \cup Y\Big\} .$$

E. 1.26 *Exercício*. Verifique! ✠

Definimos a *colagem de X com Y por meio da função f*, denotada por $X \cup_f Y$ ou por $X \sqcup_f Y$, como sendo o espaço quociente de $X \cup Y$ pela relação de equivalência E_f: $X \cup_f Y := \big(X \cup Y\big)/E_f$.

A ideia intuitiva é que $X \cup_f Y$ é obtida juntando-se X e Y mas identificando-se os pontos a e $f(a)$ para todo $a \in A$. Se imaginarmos X e Y como superfícies, é como se colássemos X a Y nos conjuntos $A \subset X$ e $f(A) \subset Y$ de forma que cada ponto $a \in A$ é colado ao ponto $f(a)$. Note-se que se a e a' são pontos de A tais que $f(a) = f(a')$, então por esse processo de colagem a e a' acabam colados um com o outro e com o ponto $f(a)$.

Exemplo 1.4 Sejam $X = [0,\ 2\pi]$, $Y = \mathbb{R}$, $A = \{0,\ 2\pi\} \subset X$ e seja $f : A \to \mathbb{R}$ definida por $f(0) = 0$ e $f(2\pi) = 0$ (sendo,

[59] Se X e Y não forem disjuntos a construção que segue deve ser feita substituindo-se a união $X \cup Y$ pela união disjunta $X \sqcup Y$. Para a definição de união disjunta, vide página 65.

portanto $f(A) = \{0\} \subset \mathbb{R}$). A Figura 1.1, página 74, ilustra a construção da colagem $X \cup_f Y$ nesse caso: X é transformado em um círculo com os pontos 0 e 2π identificados entre si e esse círculo é colado nesse ponto ao ponto $0 \in \mathbb{R}$ da reta real. ♦

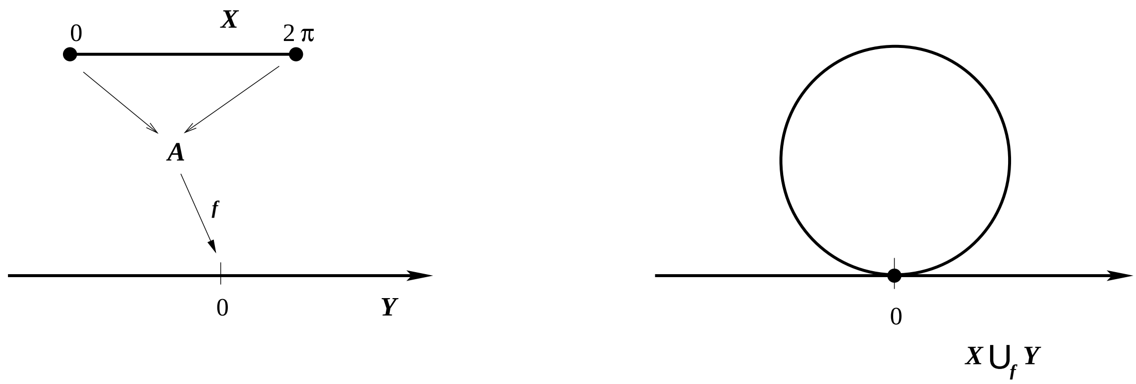

Figura 1.1: Ilustração gráfica da colagem de $X = [0,\ 2\pi]$ com $Y = \mathbb{R}$, para $A = \{0,\ 2\pi\} \subset X$, por meio da função $f : A \to Y$ dada por $f(0) = f(2\pi) = 0$, produzindo $X \cup_f Y$. A separação de X e Y no lado esquerdo indica que estamos considerando uma união disjunta de ambos pois, estritamente falando, ambos não são disjuntos: $X \subset Y$.

1.1.2.9 Relações de Ordem

Também muito importantes são as chamadas relações de ordem, as quais existem em diversas formas.

• **Pré-ordenamento**

Seja X um conjunto não vazio. Uma relação $R \subset X \times X$ é dita ser uma *relação de pré-ordenamento* em X, ou uma *relação de quase-ordem* em X, ou simplesmente uma *pré-ordem* em X, se as seguintes condições forem satisfeitas:

1. *Reflexividade*: para todo $a \in X$ tem-se que $(a,\ a) \in R$.
2. *Transitividade*: se $(a,\ b) \in R$ e $(b,\ c) \in R$, então $(a,\ c) \in R$.

Exemplos serão apresentados logo adiante.

Se X possui uma pré-ordem R, X é dito ser um *conjunto pré-ordenado*, ou um *conjunto quase-ordenado*, por R.

É costume, dada uma relação de pré-ordenamento R qualquer, indicar que $(a,\ b) \in R$ por meio da notação $a \prec_R b$, ou, de forma mais simplificada, por meio da notação $a \prec b$. Usando o símbolo $\prec$ as condições definidoras de uma relação de pré-ordem se escrevem como

1. *Reflexividade*: para todo $a \in X$ tem-se que $a \prec a$.
2. *Transitividade*: se $a \prec b$ e $b \prec c$, então $a \prec c$.

Também denota-se a relação $a \prec b$ por $b \succ a$. Relações de pré-ordem são importantes na definição do conceito de *conjunto dirigido*, que será desenvolvida logo abaixo. A noção de conjunto dirigido, por sua vez, é importante na definição da noção de *rede*, de importância na Topologia Geral (vide Seção 30.3, página 1507).

• **Relação de ordem parcial**

Seja X um conjunto não vazio. Uma relação $R \subset X \times X$ é dita ser uma *relação de ordem parcial* em X, ou simplesmente uma *relação de ordem* em X, se as seguintes condições forem satisfeitas:

1. *Reflexividade*: para todo $a \in X$ vale que $(a,\ a) \in R$.
2. *Transitividade*: se $(a,\ b) \in R$ e $(b,\ c) \in R$, então $(a,\ c) \in R$.

3. *Antissimetria*: Se $(a, b) \in R$ e $(b, a) \in R$, então forçosamente $a = b$.

Exemplos serão apresentados logo adiante.

Se X possui uma ordem parcial R, X é dito ser um *conjunto parcialmente ordenado* por R. Em textos matemáticos em língua inglesa, conjuntos parcialmente ordenados são frequentemente denominados *posets* (de "partially ordered sets"). A noção de conjunto parcialmente ordenado foi introduzida por Hausdorff[60]. Como se percebe, uma relação de ordem parcial é uma relação de pré-ordem dotada ainda da propriedade de antissimetria. Mais adiante veremos exemplos de relações de pré-ordenamento que não são relações de ordem parcial. Veremos também na Proposição, 1.7, página 75, adiante, que é sempre possível construir um conjunto parcialmente ordenado a partir de um conjunto pré-ordenado.

Exemplo de uma relação de ordem parcial. Seja X um conjunto e $\mathbb{P}(X)$ a coleção de todos os subconjuntos de X. Podemos estabelecer em $\mathbb{P}(X)$ uma relação R do seguinte tipo: para $A, B \subset X$ tem-se $(A, B) \in R$ se $A \subset B$. Como exercício deixamos ao estudante mostrar que esta é uma relação de ordem parcial de acordo com a definição acima. Este exemplo ilustra também por que chamar tal relação de ordem de "parcial". A razão é que nem todo par (A, B) é elemento de R pois, para dois conjuntos A e B arbitrários, nem sempre vale que $A \subset B$ ou que $B \subset A$ (tal é o caso, por exemplo, se $A \cap B = \emptyset$).

Em função da analogia a relação de ordem usual dos números reais é costume, dada uma relação de ordem R qualquer, indicar que $(a, b) \in R$ por meio da notação $a \preceq_R b$ ou, de forma mais simplificada, por meio da notação $a \preceq b$. Por vezes, o símbolo $\leq$ é também usado, mas tentaremos empregá-lo apenas para denotar a relação de ordem usual entre números reais. Usando o símbolo $\preceq$ as condições definidoras de uma relação de ordem se escrevem como

1. *Reflexividade*: para todo $a \in X$ tem-se que $a \preceq a$.
2. *Transitividade*: se $a \preceq b$ e $b \preceq c$, então $a \preceq c$.
3. *Antissimetria*: se $a \preceq b$ e $b \preceq a$, então forçosamente $a = b$.

Também denota-se a relação $a \preceq b$ por $b \succeq a$.

• Obtendo conjuntos ordenados parcialmente de conjuntos pré-ordenados

Como observamos acima, todo conjunto parcialmente ordenado é pré-ordenado. A proposição que segue mostra que de todo conjunto pré-ordenado é possível construir um conjunto parcialmente ordenado.

Proposição 1.7 *Seja X um conjunto não vazio dotado de uma relação de pré-ordenamento $\prec$. Então, podemos definir uma relação de equivalência em X declarando que $x \sim y$ se $x \prec y$ **e** $y \prec x$, onde x e y pertencem a X. Seja $\mathcal{X}$ a coleção de classes de equivalência de X por essa relação de equivalência. Então, $\mathcal{X}$ é parcialmente ordenado pela relação de ordem parcial $\preceq$ definida da seguinte forma: $[x] \preceq [y]$ se $x \prec y$, onde $[z]$ denota a classe de equivalência à qual pertence um elemento $z \in X$.* □

Prova. Primeiramente, provemos a afirmação que $\sim$, definida no enunciado, estabelece uma relação de equivalência em X. Que $x \sim x$ para todo $x \in X$ é evidente pela propriedade de reflexividade do pré-ordenamento $\prec$. Que $y \sim x$ caso $x \sim y$ é evidente pela definição. Por fim, se $x \sim y$ e $y \sim z$, então valem *1)* $x \prec y$; *2)* $y \prec x$; *3)* $y \prec z$; *4)* $z \prec y$. Pela propriedade de transitividade do pré-ordenamento $\prec$, *1* e *3* implicam $x \prec z$ e *2* e *4* implicam $z \prec x$, estabelecendo que $x \sim z$.

Com a relação de equivalência acima, X quebra-se em classes de equivalência. Denotemos por $\mathcal{X}$ a coleção dessas classes e denotemos por $[x]$ a classe a qual pertence $x \in X$. Conforme o enunciado, podemos estabelecer em $\mathcal{X}$ uma relação de ordem parcial $\preceq$ declarando que $[x] \preceq [y]$ se $x \prec y$. Provemos essa afirmação. Primeiramente, notemos que $\preceq$ está realmente definida nas classes, ou seja, independe dos representantes tomados nas mesmas. De fato, se $x' \sim x$ e $[x] \preceq [y]$, então $x' \prec x$ e $x \prec y$. Pela propriedade de transitividade do pré-ordenamento $\prec$ segue que $x' \prec y$. Analogamente, se $y' \sim y$ e $[x] \preceq [y]$, então $x \prec y$ e $y \prec y'$. Pela propriedade de transitividade do pré-ordenamento $\prec$ segue que $x \prec y'$, donde conclui-se que $[x'] \preceq [y']$.

Provemos agora que $\preceq$ é realmente uma ordem parcial. Que $[x] \preceq [x]$ para todo $x \in X$ (e, portanto, para todo elemento de $\mathcal{X}$) é evidente pela propriedade de reflexividade do pré-ordenamento $\prec$. Se $[x] \preceq [y]$ e $[y] \preceq [z]$, então $x \prec y$

[60] Felix Hausdorff (1868–1942). Hausdorff foi um dos matemáticos mais influentes do Séc. XX. Foi um dos criadores da Topologia e da moderna Teoria dos Conjuntos. Perseguido pelo nacional-socialismo, suicidou-se em 1942 para evitar ser enviado a um campo de concentração.

e $y \prec z$. Pela propriedade de transitividade do pré-ordenamento $\prec$, segue que $x \prec z$, estabelecendo que $[x] \preceq [z]$. Por fim, se $[x] \preceq [y]$ e $[y] \preceq [x]$, então $x \prec y$ e $y \prec x$. Logo, $x \sim y$ e, consequentemente, $[x] = [y]$. ■

• Relação de ordem total

Outro conceito importante é o de relação de ordem total. Uma ordem parcial R em um conjunto X é dita ser uma *relação de ordem total* se para todo $a, \ b \in X$ tem-se que $(a, \ b) \in R$ ou que $(b, \ a) \in R$. Se X possui uma relação de ordem total R, então X é dito ser *totalmente ordenado* ou *linearmente ordenado*. Assim, se X é um conjunto dotado de uma relação de ordem parcial, dizemos que um subconjunto $A \subset X$ é linearmente ordenado se $a \preceq b$ ou $b \preceq a$ para todo $a, \ b \in A$.

• Exemplos

Exemplo. Seja $\mathbb{R}$ o conjunto de números reais e a relação de ordem $(x, \ y) \in R$ se $x - y$ for um número negativo ou nulo (ou seja, se $x \leq y$). Mostre que essa é uma relação de ordem total em $\mathbb{R}$.

Contraexemplo. Seja $\mathcal{C}$ um conjunto não vazio qualquer. Então, $\mathbb{P}(\mathcal{C})$ é ordenado pela inclusão de conjuntos: $A \preceq B$ se e somente se $A \subset B$. Porém $\mathbb{P}(\mathcal{C})$ não é linearmente ordenado pois se $A \cap B = \emptyset$ não podemos dizer que $A \preceq B$ nem que $B \preceq A$.

E. 1.27 *Exercício*. Você consegue construir uma relação de ordem em $\mathbb{R}^2$ ou em $\mathbb{R}^3$? E uma relação de ordem total? ✠

Exemplo. Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{X}$ dois conjuntos não vazios. Podemos definir uma pré-ordem no produto Cartesiano $\mathbb{P}(\mathcal{A}) \times \mathcal{X}$ da seguinte forma: para dois pares $(A, \ x)$ e $(B, \ y)$ com $A, \ B \subset \mathcal{A}$ e $x, \ y \in \mathcal{X}$ dizemos que $(A, \ x) \prec (B, \ y)$ se $A \subset B$. É fácil verificar que essa é uma relação de pré-ordem, mas não é uma ordem parcial, pois se $(A, \ x) \prec (B, \ y)$ e $(B, \ y) \prec (A, \ x)$ tem-se que $A = B$, mas não necessariamente que $x = y$ (exceto no caso trivial em que $\mathcal{X}$ possui um único elemento).

• Mais exemplos

Seja o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$. Podemos estabelecer em $\mathbb{N}$ a relação de ordem usual onde dizemos que $x \leq y$ se $x - y$ for um número negativo ou nulo. Esta relação é uma relação de ordem total. O leitor não deve pensar que essa é a única relação de ordem total existente em $\mathbb{N}$. Um outro exemplo é o seguinte.

Vamos estabelecer uma relação de ordem em $\mathbb{N}$ que denotaremos pelo símbolo $\preceq_{p-i}$. Sejam $a, \ b \in \mathbb{N}$. Se a e b forem pares dizemos que $a \preceq_{p-i} b$ se $a \leq b$. Se a e b forem ímpares dizemos que $a \preceq_{p-i} b$ se $a \leq b$. Se a é par e b é ímpar, então dizemos sempre que $a \preceq_{p-i} b$.

E. 1.28 *Exercício*. Mostre que a relação $\preceq_{p-i}$ estabelece uma relação de ordem total em $\mathbb{N}$. ✠

Um exemplo análogo pode ser construído em $\mathbb{R}$. Vamos estabelecer uma relação de ordem em $\mathbb{R}$ que denotaremos pelo símbolo $\preceq_{r-i}$. Sejam $x, \ y \in \mathbb{R}$. Se x e y forem racionais dizemos que $x \preceq_{r-i} y$ se $x \leq y$. Se x e y forem irracionais dizemos que $x \preceq_{r-i} y$ se $x \leq y$. Se x é racional e y é irracional, então dizemos sempre que $x \preceq_{r-i} y$.

E. 1.29 *Exercício*. Mostre que a relação $\preceq_{r-i}$ estabelece uma relação de ordem total em $\mathbb{R}$. ✠

• Ordem lexicográfica

É possível estabelecer uma relação de ordem total em $\mathbb{R}^2$ da seguinte forma: dizemos que $(x_1, \ x_2) \prec_L (y_1, \ y_2)$ se *1.* $x_1 < y_1$, ou se *2.* $x_1 = y_1$ e $x_2 < y_2$. Essa relação de ordem é denominada *relação de ordem lexicográfica* de $\mathbb{R}^2$.

Essa definição pode ser facilmente generalizada. Seja X um conjunto totalmente ordenado por uma relação de ordem total $\preceq_X$. Então, X^n pode ser totalmente ordenado dizendo-se $(x_1, \ \ldots, \ x_n) \prec_L (y_1, \ \ldots, \ y_n)$ se $x_1 \prec y_1$ ou se houver um $j \in \{2, \ \ldots, \ n\}$, tal que $x_i = y_i$ para todo $i < j$ e $x_j \prec_X y_j$.

Seja X um conjunto totalmente ordenado por uma relação de ordem total $\preceq_X$ e seja $\mathcal{X} = \bigcup_{n=1}^{\infty} X^n$. Podemos estabelecer em $\mathcal{X}$ uma ordem total $\preceq_{\mathcal{X}}$, também denominada lexicográfica, da seguinte maneira. Sejam $m, \ n \in \mathbb{N}$ e $p = \min\{m, \ n\}$. Então, dizemos $(x_1, \ \ldots, \ x_m) \preceq_{\mathcal{X}} (y_1, \ \ldots, \ y_n)$ se $(x_1, \ \ldots, \ x_p) \preceq_L (y_1, \ \ldots, \ y_p)$ no sentido dado no parágrafo anterior, ou se $(x_1, \ \ldots, \ x_p) = (y_1, \ \ldots, \ y_p)$, mas $m < n$.

E. 1.30 *Exercício*. Por que essas relações de ordem são denominadas "lexicográficas"? Pense na maneira como palavras (de tamanho arbitrário!) são ordenadas em um dicionário. ✠

Podemos ainda estender a definição de ordem lexicográfica. Seja X um conjunto totalmente ordenado por uma relação de ordem total $\preceq_X$ e seja Y um conjunto totalmente ordenado por uma relação de ordem total $\preceq_Y$. Então, X^Y pode ser parcialmente ordenado dizendo-se $X^Y \ni x \preceq_L y \in X^Y$ se houver um $j \in Y$, tal que $x(i) = y(i)$ para todo $i \preceq_Y j$ e $x(j) \preceq_X y(j)$.

Exemplo. Sejam f, g, duas funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Dizemos que $f \preceq_L g$ se existir $y \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = g(x)$ para todo $x < y$ mas $f(y) \leq g(y)$. Lembrando que o conjunto de todas as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ é $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, vê-se que essa definição coincide com a dada acima.

• Conjuntos dirigidos

Um conjunto I é dito ser um *conjunto dirigido* ("directed set") se for dotado de uma relação de pré-ordenamento, que denotaremos por "$\prec$", e se for dotado da seguinte propriedade: para quaisquer dois elementos a e b de I existe pelo menos um terceiro elemento $c \in I$ tal que $a \prec c$ e $b \prec c$.

Exemplo. Seja X um conjunto não vazio. Temos em $\mathbb{P}(X)$ uma relação de ordem parcial (de inclusão) dizendo que $A \preceq B$ se $A \subseteq B$. Essa relação de ordem faz de $\mathbb{P}(X)$ um conjunto dirigido, pois para quaisquer A e $B \subset X$ tem-se, naturalmente, $A \subset A \cup B$ e $B \subset A \cup B$.

Exemplo. Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathfrak{X}$ dois conjuntos não vazios e seja em $\mathbb{P}(\mathcal{A}) \times \mathfrak{X}$ a relação de pré-ordenamento $(A,\ x) \prec (B,\ y)$ se $A \subset B$. O conjunto $\mathbb{P}(\mathcal{A}) \times \mathfrak{X}$ é dirigido por esse pré-ordenamento, pois se $(A,\ x)$ e $(B,\ y) \in \mathbb{P}(\mathcal{A}) \times \mathfrak{X}$, então $(A,\ x) \prec (A \cup B,\ z)$ e $(B,\ z) \prec (A \cup B,\ z)$ para qualquer $z \in \mathfrak{X}$.

Exemplo. Todo conjunto dotado de uma relação de ordem total é um conjunto dirigido em relação a essa relação de ordem. Justifique!

Exemplo. $\mathbb{R}$ é um conjunto dirigido com a relação de ordem usual.

Exemplo. $\mathbb{R}$ é um conjunto dirigido com a relação de ordem $\preceq_{r-i}$ definida acima.

E. 1.31 *Exercício*. Seja o conjunto $\mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, \ldots$, e seja I o conjunto de todos os abertos limitados de $\mathbb{R}^n$ (um conjunto é *limitado* se for subconjunto de alguma bola aberta de raio finito centrada na origem). Mostre que I é um conjunto dirigido pela relação de ordem de inclusão: $A \preceq B$ se $A \subset B$. Note que essa relação de ordem não é uma relação de ordem total. ✠

Exemplo. Causalidade de Einstein. Seja $\mathbb{M}^4$ o espaço-tempo quadridimensional de Minkowski e sejam $E_0 = (t_0,\ x_0,\ y_0,\ z_0)$ e $E_1 = (t_1,\ x_1,\ y_1,\ z_1)$ dois eventos em $\mathbb{M}^4$. Dizemos que o evento E_0 precede causalmente o evento E_1, (em notação simbólica $E_0 \succeq_{Einstein} E_1$), se $t_0 \leq t_1$ e se

$$c^2(t_1 - t_0)^2 - (x_1 - x_0)^2 - (y_1 - y_0)^2 - (z_1 - z_0)^2 \ \geq\ 0\ ,$$

onde c é a velocidade da luz.

E. 1.32 *Exercício*. Mostre que $\succeq_{Einstein}$ é uma relação de ordem em $\mathbb{M}^4$ e que $\mathbb{M}^4$ é um conjunto dirigido por essa relação. ✠

Contraexemplo. Seja X um conjunto não vazio e seja $I = \mathbb{P}(X) \setminus \{X\}$, ou seja, I é a coleção de todos os subconjuntos de X, exceto o próprio X. Podemos ter em I uma relação de ordem (de inclusão) dizendo que $A \preceq B$ se $A \subseteq B$. Notemos, porém, que I não é um conjunto dirigido pois para $A \in I$, $A \neq \emptyset$ temos $X \setminus A \in I$ mas não existe em I nenhum conjunto que contenha A e $X \setminus A$ simultaneamente como subconjuntos.

Contraexemplo. Este contraexemplo é um pouco menos elementar que o anterior. Em $\mathbb{R}^2$ considere-se o cone V_0 com ápice na origem $(0,\ 0)$, apontando na direção vertical e com ângulo de abertura $\alpha \in (0,\ \pi)$. Assim,

$$V_0 \ :=\ \big\{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tais que } y > 0 \text{ e } |x/y| \leq \tan(\alpha/2)\big\} \bigcup \{(0,\ 0)\}\ .$$

Para $z \in \mathbb{R}^2$ defina-se também $V_z := V_0 + z$, ou seja, V_z é o cone V_0 transladado de z. Assim, V_z é o cone com ápice em $z \in \mathbb{R}^2$, apontando na direção vertical e com ângulo de abertura $\alpha \in (0,\ \pi)$. Vide Figura 1.2, página 78. Considere-se $W = V_{(-1,\ 0)} \cup V_{(1,\ 0)}$. Podemos definir uma relação de ordem parcial em W da seguinte forma: para $x,\ y \in W$ dizemos que $y \preceq x$ se $y \in V_x$. Com isso, vemos que W não é um conjunto dirigido, pois para pontos p e q como indicados na Figura 1.2, página 78, não existe $r \in W$ tal que $p \preceq r$ e $q \preceq r$, ou seja, tais que $p \in V_r$ e $q \in V_r$.

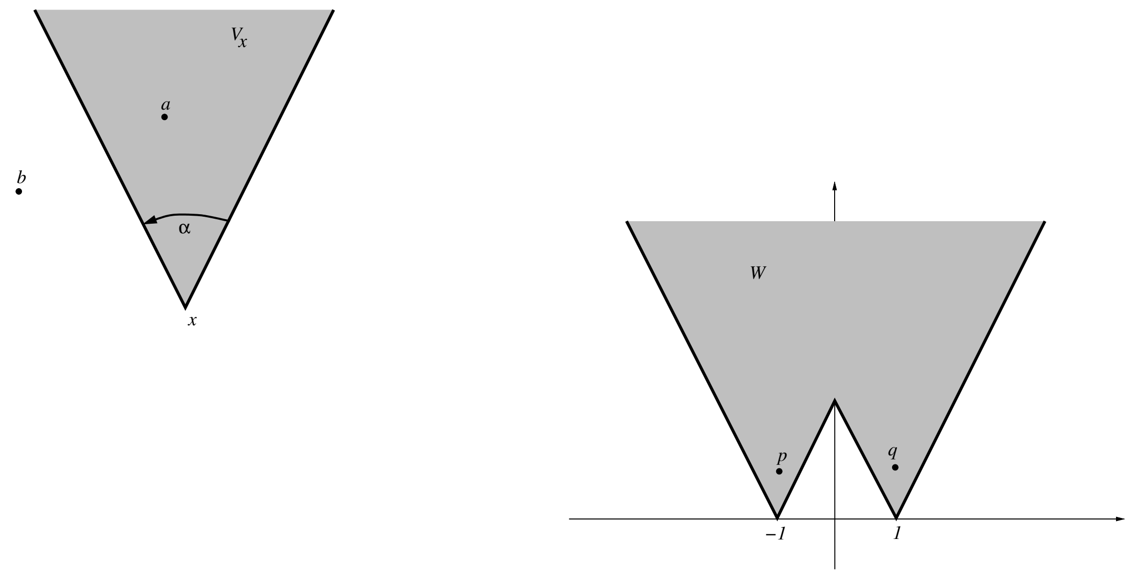

Figura 1.2: À esquerda: o cone V_x, com $x \in \mathbb{R}^2$. Para os pontos a e b indicados, valem $a \preceq x$ e $b \not\preceq x$, pois $a \in V_x$, mas $b \notin V_x$. À direita: a região $W = V_{(-1,\,0)} \cup V_{(1,\,0)}$. Os pontos p e q pertencem a W e não existe $r \in W$ tal que $p \preceq r$ e $q \preceq r$, pois não há nenhum cone V_r com, $r \in W$, tal que $p \in V_r$ e $q \in V_r$. Isso mostra que W não é um conjunto dirigido pela relação de ordem parcial $\preceq$.

• Redes e sequências

Seja I um conjunto dirigido com respeito à uma relação de pré-ordenamento $\prec$. Se M é um conjunto não vazio, uma função $f : I \to M$ é denominada uma *rede em M baseada no conjunto dirigido I com respeito a* $\prec$ ou, simplesmente, uma *rede* em M.

Uma *sequência* em M é uma rede baseada em $\mathbb{N}$, que é um conjunto dirigido com respeito à ordem usual dos naturais, ou seja, é uma função $f : \mathbb{N} \to M$.

A noção de rede é importante, por exemplo, no estudo de funções contínuas em espaços topológicos gerais e na definição da noção de convergência (vide Capítulo 30, página 1504).

Se $f : \mathbb{N} \to M$ é uma sequência em M, os elementos $f(n)$ de sua imagem são frequentemente denotados por uma notação com índices: f_n. É também comum denotar-se a própria sequência por $\{f_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ ou por $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, que, estritamente falando, representam a imagem de f em M.

• Máximos e mínimos

Se X é um conjunto dotado de uma relação de ordem parcial (que denotamos por $\preceq$) diz-se que um elemento $z \in X$ é um *máximo* de X se $x \preceq z$ para todo $x \in X$. Se z e z' são máximos de X então, por hipótese, valem ambas as relações $z \preceq z'$ e $z' \preceq z$, o que implica $z = z'$. Assim, se X possuir um máximo ele é único, e é denotado por $\max(X)$.

Se $A \subset X$, a relação de ordem parcial em X induz uma relação de ordem parcial em A. Com essa relação, podemos definir $\max(A)$, se existir, como o elemento de A tal que $a \preceq \max(A)$ para todo $a \in A$. Note que, por definição, $\max(A) \in A$.

Analogamente, um elemento a é dito ser um *mínimo* de X se $a \preceq x$ para todo $x \in X$. Se a e a' são mínimos de X então, por hipótese, valem ambas as relações $a \preceq a'$ e $a' \preceq a$, o que implica $a = a'$. Assim, se X possuir um mínimo ele é único, e é denotado por $\min(X)$.

• Elementos maximais e minimais

Seja X um conjunto dotado de uma relação de ordem parcial (que denotamos por $\preceq$).

Um elemento $z \in X$ é dito ser um *elemento maximal* se não existir $x \in X$, $x \neq z$ tal que $z \preceq x$.

Um elemento $a \in X$ é dito ser um *elemento minimal* se não existir $x \in X$, $x \neq a$ tal que $x \preceq a$.

Os elementos maximais e minimais de um conjunto parcialmente ordenado X, se existirem, não são necessariamente únicos, como mostra o seguinte exemplo.

E. 1.33 *Exercício-Exemplo*. Considere no plano $\mathbb{R}^2$ o quadrado fechado $Q = [0, 1] \times [0, 1]$, ou seja, os elementos de Q são pares ordenados $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ com $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 1$. Estabelecemos em Q uma relação de ordem (parcial!) da seguinte forma: $(x, y) \preceq (x', y')$ se $x = x'$ e se $y \leq y'$. Em palavras, $(x, y) \preceq (x', y')$ se ambos os pontos estiverem em uma mesma linha vertical, mas (x, y) estiver mais baixo que (x', y'). Cheque que isso é, de fato, uma relação de ordem, mas que não é uma ordem total, pois não se pode comparar pontos que estão em linhas verticais diferentes.

Com essa definição convença-se que todos os elementos da forma $(x, 1)$ são maximais. Porém, se x for diferente de x', não se pode nem dizer que $(x, 1) \preceq (x', 1)$ nem que $(x', 1) \preceq (x, 1)$. Igualmente, convença-se que todos os elementos da forma $(x, 0)$ são minimais.

Note também que para a existência de elementos maximais é importante que Q contenha pontos na aresta de cima e (com coordenada $y = 1$), analogamente, para a existência de elementos minimais é importante que Q contenha pontos aresta de baixo (com coordenada $y = 0$). Por exemplo, se você definir a mesma relação de ordem no quadrado aberto $(0, 1) \times (0, 1)$ não há mais elementos maximais ou minimais. ✠

Se um conjunto não vazio e parcialmente ordenado X possuir um único elemento maximal, este elemento é denominado o *maior elemento* de X. Reciprocamente, se um conjunto não vazio e parcialmente ordenado X possuir um único elemento minimal, este elemento é denominado o *menor elemento* de X.

• Conjuntos bem-ordenados

Um conjunto X dotado de uma relação de ordem parcial $\preceq$ é dito ser um *conjunto bem-ordenado* se todo subconjunto A não vazio de X tem um elemento mínimo em A.

E. 1.34 *Exercício*. Mostre que todo conjunto bem-ordenado segundo uma relação parcial de ordem é também totalmente ordenado segundo a mesma relação. ✠

E. 1.35 *Exercício*. A recíproca não é, entretanto, verdadeira. Mostre que $\mathbb{R}$ é totalmente ordenado pela relação usual de ordem entre números reais, mas não é um conjunto bem-ordenado. ✠

E. 1.36 *Exercício*. Mostre que o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ é bem-ordenado. ✠

A importância de conjuntos bem-ordenados é que a eles se aplica uma generalização do bem conhecido método de indução matemática, muito empregado em demonstrações de teoremas, denominada *princípio de indução transfinita*. O estudante interessado encontrará em [204] uma excelente referência introdutória. Nesta mesma referência o estudante interessado encontrará uma demonstração do seguinte resultado fundamental, devido a Zermelo[61]:

Teorema 1.2 (Teorema do Bom-Ordenamento) *Se X é um conjunto não vazio, então é possível encontrar uma relação de ordem $\preceq$ em X tal que X é bem-ordenado por essa relação.* □

Incidentalmente, o Teorema 1.2 junto com a afirmação do Exercício E. 1.34 informam que todo conjunto não vazio possui ao menos uma relação de ordem total.

• Majorantes e minorantes

Seja X um conjunto dotado de uma ordem parcial denotada por $\preceq$ e seja $A \subset X$. Se existe $t \in X$ tal que $a \preceq t$ para todo $a \in A$ dizemos que t é um *majorante* de A, ou um *limitante superior*[62] de A.

Analogamente, se existe $h \in X$ tal que $h \preceq a$ para todo $a \in A$ dizemos que h é um *minorante* de A ou um *limitante inferior*[63] de A.

• Conjuntos limitados

Seja X um conjunto dotado de uma ordem parcial denotada por $\preceq$. Um conjunto $A \subset X$ que tenha pelo menos um

[61] Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo (1871–1953).
[62] A expressão "limite superior" é também usada na literatura, mas deve ser evitada para não causar confusão com a noção de limite.
[63] A expressão "limite inferior" é também usada na literatura, mas deve ser evitada para não causar confusão com a noção de limite.

majorante é dito ser um *conjunto limitado superiormente*. Um conjunto $A \subset X$ que tenha pelo menos um minorante é dito ser um *conjunto limitado inferiormente*.

• Ínfimo e supremo

Seja X um conjunto dotado de uma ordem parcial denotada por $\preceq$ e seja $A \subset X$.

O mínimo do conjunto de majorantes de A, se existir, é dito ser o *supremo* de A e é indicado por $\sup(A)$. Note que o supremo de A, se existir, é único, por ser o mínimo de um conjunto. Assim, $s \in X$ é dito ser o supremo de A se for um majorante de A e se $s \preceq t$ para todo t que seja majorante de A. Note que o supremo de um conjunto $A \subset X$ não é necessariamente um elemento de A, ao contrário do que ocorre com o máximo de A (caso exista).

O máximo do conjunto dos minorantes de A, se existir, é dito ser o *ínfimo* de A e é indicado por $\inf(A)$. Note que o ínfimo de A, se existir, é único, por ser o máximo de um conjunto. Assim, i é o ínfimo de A se for um minorante de A e se $h \preceq i$ para todo h que seja minorante de A. Note que o ínfimo de um conjunto $A \subset X$ não é necessariamente um elemento de A, ao contrário do que ocorre com o mínimo de A (caso exista).

É interessante notar o seguinte. Dado um conjunto X dotado de uma ordem parcial poderíamos nos perguntar se todo subconjunto limitado superiormente de X possui um supremo ou, analogamente, se todo subconjunto de X limitado inferiormente possui um ínfimo. A validade ou não dessas propriedades depende de X e da relação de ordem em questão. Por exemplo, para $X = \mathbb{Q}$, o conjunto dos racionais com a relação de ordem usual, verifica-se que a propriedade não é valida. Tomemos $A = \{x \in \mathbb{Q}, \ x^2 < 2\}$. Claramente esse conjunto é limitado inferior e superiormente mas não possui nem supremo nem ínfimo (por quê?). Para $X = \mathbb{N}$ e $X \in \mathbb{R}$ (com as relações de ordem usuais) a propriedade é, porém, válida.

E. 1.37 *Exercício*. Tome $X = \mathbb{R}$ com a relação de ordem usual. Mostre que $\inf((-1, \ 1)) = -1$ e que $\sup((-1, \ 1)) = 1$. Note que -1 e 1 não são elementos de $(-1, \ 1)$. ✠

E. 1.38 *Exercício*. Suponha que A e B sejam dois subconjuntos de um conjunto X dotado de uma ordem total e que $\inf(A)$ e $\inf(B)$ existam. Mostre, então, que

$$\inf(A \cup B) \ = \ \min\big\{\inf(A), \ \inf(B)\big\} \ .$$

✠

E. 1.39 *Exercício*. Suponha que A e B sejam dois subconjuntos de um conjunto X dotado de uma ordem total e que $\sup(A)$ e $\sup(B)$ existam. Mostre, então, que

$$\sup(A \cup B) \ = \ \max\big\{\sup(A), \ \sup(B)\big\} \ .$$

✠

• O Lema de Zorn

Uma das afirmativas fundamentais de toda a Matemática usual é o seguinte resultado, conhecido como *Lema de Zorn*, em homenagem a um dos seus formuladores[64]:

Lema 1.5 (Lema de Kuratowski-Zorn) *Seja X um conjunto não vazio e $\preceq$ uma relação de ordem parcial em X. Suponha que todo subconjunto linearmente ordenado de X tenha pelo menos um majorante em X. Então, todo subconjunto linearmente ordenado de X tem algum majorante em X que é também um elemento maximal de X. Implicitamente isso está dizendo que, sob as hipóteses, X possui ao menos um elemento maximal.* □

Para uma demonstração do Lema de Zorn, vide, por exemplo, [204].

E. 1.40 *Exercício*. Verifique que se $X = [0, \ 1]$ é ordenado pela relação de ordem usual todo subconjunto de X tem um majorante em X e que 1 é um desses possíveis majorantes. Verifique que 1 é um elemento maximal de X. ✠

[64]Max August Zorn (1906–1993). Em verdade, o Lema de Zorn foi primeiramente descoberto por Kazimierz Kuratowski (1896–1980). O trabalho de Kuratowski data de 1922 e o de Zorn de 1935.

E. 1.41 *Exercício*. Verifique que se $X = [0, 1)$ é linearmente ordenado pela relação de ordem usual e nem todo subconjunto de X tem um majorante em X (tente, por exemplo, subconjuntos do tipo $[a, 1)$ com $0 \leq a < 1$). Verifique que X não tem um elemento maximal. ✠

E. 1.42 *Exercício*. Cheque se as hipóteses do Lema de Zorn são satisfeitas ou não nos quadrados abertos e fechados do Exemplo E. 1.33, página 79. ✠

O Lema de Zorn é "equivalente" ao chamado Axioma da Escolha (vide página 67), ou seja, admitir um como verdadeiro leva a demonstrar a validade do segundo. Essa equivalência não será provada aqui (vide, por exemplo, [204]). Toda a Matemática usual é fundada na aceitação de um ou de outro como verdadeiro e, em princípio, uma nova Matemática pode ser construída (com resultados distintos dos da Matemática usual) se esses dois axiomas forem substituídos por um terceiro inequivalente. A relevância de tais Matemáticas em Física é uma questão em aberto.

1.1.3 Cardinalidade

Nesta seção seguimos parcialmente a apresentação de [497].

• A noção de cardinalidade de conjuntos

A noção de *cardinalidade* foi introduzida por Cantor, provavelmente entre 1874 e 1878, e é uma das grandes ideias da Matemática, permitindo classificar e ordenar grandezas infinitas de uma forma não alcançada até então. Passemos a descrevê-la.

Seja $\mathcal{K}$ uma coleção de conjuntos. Dados dois conjuntos A e B da coleção $\mathcal{K}$, dizemos que A e B são equivalentes (ou *equipolentes*, ou *equinumerosos*, ou ainda *equipotentes*) se houver uma função bijetora de A sobre B, ou seja, se houver uma função com domínio igual a A e imagem igual a B tal que a cada elemento $b \in B$ existe um único elemento $a \in A$ com $f(a) = b$. Se A é equivalente a B no sentido acima, denotamos isso simbolicamente escrevendo $A \sim_c B$, onde o índice c representa "cardinalidade".

Abaixo e em outros lugares destas Notas usaremos também a simbologia $|A| = |B|$ para representar $A \sim_c B$. Essa notação será esclarecida adiante.

O Exercício a seguir contém resultados importantes sobre essa noção.

E. 1.43 *Exercício fácil.* Se A, B e C são conjuntos, mostre que: 1º $A \sim_c A$ (reflexividade); 2º Se $A \sim_c B$, então $B \sim_c A$ (simetria); 3º Se $A \sim_c B$ e $B \sim_c C$, então $A \sim_c C$ (transitividade).

Na notação alternativa, se A, B e C são conjuntos, valem: 1º $|A| = |A|$ (reflexividade); 2º Se $|A| = |B|$, então $|B| = |A|$ (simetria); 3º Se $|A| = |B|$ e $|B| = |C|$, então $|A| = |C|$ (transitividade).

✠

Esses fatos indicam que "$\sim_c$" é uma relação de equivalência em uma coleção $\mathcal{K}$ de conjuntos. No entanto, algum cuidado deve ser tomado em se falar de "classes de equivalência" por essa relação de equivalência, pois pode acontecer de essas serem classes próprias, e não conjuntos. É o que ocorre, por exemplo, se $\mathcal{K}$ for a classe de todos os conjuntos.

Para dois conjuntos que são equivalentes no sentido acima diz-se também que os mesmos têm a mesma *cardinalidade*. Ou seja, dois conjuntos têm a mesma cardinalidade se e somente se houver uma função bijetora entre eles.

Um conjunto finito A é dito ter n elementos (para um número natural n) se for equivalente ao conjunto $\{1, \ldots, n\}$. Essa definição, porém, presume uma definição prévia de número natural, o que apresentaremos em seguida.

Para um conjunto finito A, denotamos por $|A|$ o número de elementos de A. Para conjuntos finitos, isso permite esclarecer a notação $|A| = |B|$ para indicar que $A \sim_c B$, pois dois conjuntos finitos só são equivalentes se possuírem o mesmo número de elementos. No caso de conjuntos não finitos também usamos, por analogia com o caso finito, a notação $|A| = |B|$ para indicar que $A \sim_c B$. Assim, no caso de um conjunto não finito A, o símbolo $|A|$ pode ser entendido como representando sua *cardinalidade* e esta pode ser entendida como representando o "número" de elementos de um conjunto, mesmo não sendo um conjunto finito.

E. 1.44 *Exercício*. Seja A um conjunto finito com n elementos. Mostre que $\mathbb{P}(A)$ tem 2^n elementos. Assim, vale $\big|\mathbb{P}(A)\big| = 2^{|A|}$. ✠

Para dois conjuntos A e B escrevemos $A \preceq_c B$ se existir $C \subset B$ com $A \sim_c C$. Em palavras, $A \preceq_c B$ se houver uma função bijetora de A em um subconjunto de B, ou seja, se houver uma função injetora $f : A \to B$. Note-se que uma tal f não é necessariamente sobrejetora.

Há também aqui uma sugestiva notação alternativa frequentemente empregada. Se $A \preceq_c B$, escrevemos $|A| \leq |B|$. Assim, se $A \preceq_c B$ podemos dizer que a cardinalidade de A é menor ou igual à de B.

O Exercício a seguir contém resultados importantes sobre essa noção.

E. 1.45 *Exercício fácil.* Se A, B e C são conjuntos, mostre que:

1º Se $A \sim_c B$, então $A \preceq_c B$ e $B \preceq_c A$ (use a simetria da relação "$\sim_c$").
Na notação alternativa, se $|A| = |B|$, então $|A| \leq |B|$ e $|B| \leq |A|$.
Sugestão: use a simetria da relação "$\sim_c$".

2º Se $A \subset B$, então $A \preceq_c B$.
Na notação alternativa, se $A \subset B$, então $|A| \leq |B|$.
Sugestão: use a função identidade em A.

3º Se $A \preceq_c B$ e $B \preceq_c C$, então $A \preceq_c C$.
Na notação alternativa, se $|A| \leq |B|$ e $|B| \leq |C|$ então $|A| \leq |C|$.

4º Se $A \sim_c B$, então $\mathbb{P}(A) \sim_c \mathbb{P}(B)$.
Na notação alternativa, se $|A| = |B|$, então $\big|\mathbb{P}(A)\big| = \big|\mathbb{P}(B)\big|$.

O estudante há de perceber a similaridade entre as três primeiras propriedades acima listadas e as de uma relação de ordem parcial. A demonstração da 4ª propriedade é muito simples. ✠

Introduzamos mais uma definição relevante. Escrevemos $A \prec_c B$ se for verdade que $A \preceq_c B$ mas for falso que $B \preceq_c A$. Na notação alternativa isso se expressa da seguinte forma: dizemos que $|A| < |B|$ se valer $|A| \leq |B|$ mas for falso que $|B| \leq |A|$. Dessa forma, podemos expressar se a cardinalidade de um conjunto é estritamente menor que a de outro. Essa noção é também relevante na formulação do Teorema de Cantor, Teorema 1.4, página 84.

1.1.3.1 Os Teoremas de Schröder-Bernstein e de Cantor

Antes de tratarmos de uns poucos exemplos elementares que fixam as várias ideias e definições acima (vide página 84), apresentemos um resultado fundamental.

• **O Teorema de Schröder-Bernstein**

O importante Teorema de Schröder[65]-Bernstein[66], a seguir, estabelece a recíproca do item 1º do Exercício E. 1.45. Ele é também conhecido como *Teorema de Cantor-Schröder-Bernstein*, pois sua validade foi sugerida, porém, não demonstrada, por Cantor. Vide nota histórica à página 83.

Teorema 1.3 (Teorema de Schröder-Bernstein) *Sejam A e B dois conjuntos. Se $f : A \to B$ e $g : B \to A$ forem duas funções injetoras, então existe uma função bijetora $h : A \to B$.*

Portanto, valem $A \preceq_c B$ e $B \preceq_c A$ se e somente se $A \sim_c B$.

Na notação alternativa, tem-se $|A| \leq |B|$ e $|B| \leq |A|$ se e somente se $|A| = |B|$. □

A demonstração que apresentamos é, aparentemente, devida a Banach[67]. Há diversas outras demonstrações desse teorema. Vide, *e.g.*, [353], [204] ou [497]. A demonstração da referência [353] é similar, mas evoca o Teorema de Ponto Fixo de Tarski.

Prova do Teorema 1.3. Vamos definir recursivamente duas famílias de conjuntos, $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ e $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$, começando por

[65] Friedrich Wilhelm Karl Ernst Schröder (1841–1902).
[66] Felix Bernstein (1878–1956).
[67] Stefan Banach (1892–1945).

$A_0 \equiv A$ e $B_0 \equiv B$ e, para $n \in \mathbb{N}_0$,

$$B_{n+1} \equiv f(A_n) \text{ e} \tag{1.60}$$

$$A_{n+1} \equiv A \setminus g\big(B \setminus B_{n+1}\big) . \tag{1.61}$$

Observe-se agora que $B_1 = f(A_0) = f(A) \subset B = B_0$ e que $A_1 = A \setminus g\big(B \setminus B_1\big) \subset A = A_0$. Assim, $B_1 \subset B_0$ e $A_1 \subset A_0$. O próximo passo é provar por indução que $B_{n+1} \subset B_n$ e $A_{n+1} \subset A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Se ambas as relações valerem para $n = N \in \mathbb{N}_0$, teremos

$$B_{N+2} = f(A_{N+1}) \subset f(A_N) = B_{N+1}$$

e

$$A_{N+2} = A \setminus g\big(B \setminus B_{N+2}\big) \subset A \setminus g\big(B \setminus B_{N+1}\big) = A_{N+1} .$$

Aqui usamos que $g\big(B \setminus B_{N+2}\big) \supset g\big(B \setminus B_{N+1}\big)$ pois provamos na linha anterior que $B_{N+2} \subset B_{N+1}$. Isso demonstrou por indução que $B_{n+1} \subset B_n$ e $A_{n+1} \subset A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

Definamos agora

$$\underline{A} := \bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} A_n \qquad \text{e} \qquad \underline{B} := \bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} B_n .$$

Claro está que $\underline{A} \subset A_0 = A$ e $\underline{B} \subset B_0 = B$ e que $\underline{A}$ e $\underline{B}$ não são vazios, pois $B_{n+1} \subset B_n$ e $A_{n+1} \subset A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

Definamos agora $f_0 := f \restriction_{\underline{A}}$, a restrição de f a $\underline{A}$, e $g_0 := g \restriction_{B\setminus\underline{B}}$, a restrição de g a $B \setminus \underline{B}$. Estabeleceremos as seguintes afirmações:

I. f_0 é uma bijeção de $\underline{A}$ em $\underline{B}$.

II. g_0 é uma bijeção de $B \setminus \underline{B}$ em $A \setminus \underline{A}$.

Até aqui não evocamos a hipótese de f e g serem injetivas. Isso virá agora.

Prova de I. Se $a \in \underline{A}$, temos que $a \in A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Logo, $f(a) \in B_{n+1}$, também para todo $n \in \mathbb{N}_0$ e como $B_{n+1} \subset B_0$, concluímos também que $f(a) \in B_n$, também para todo $n \in \mathbb{N}_0$ e portanto, $f(a) \in \underline{B}$. Assim, a imagem de f_0 está em $\underline{B}$.

Tomemos $b \in \underline{B}$, arbitrário. Então, $b \in B_{n+1} = f(A_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}_0$ existirá um $a_n \in A_n \subset A$ com $f(a_n) = b$. Como f é injetora, concluímos que todos os a_n's devem ser iguais a um certo elemento $a \in A$, assim, $a_n = a$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Logo, $a \in A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$ e, portanto, $a \in \underline{A}$ e $f_0(a) = f(a) = b$. Como b foi escolhido como um elemento arbitrário de $\underline{B}$, concluímos que f_0 é sobrejetora como função de $\underline{A}$ em $\underline{B}$ e, por ser injetora (pois f é injetora), $f_0 : \underline{A} \to \underline{B}$ é bijetora, concluindo a demonstração de **I**.

Prova de II. Seja $b \in B \setminus \underline{B}$, arbitrário. Então, existe ao menos um $n_0 \in \mathbb{N}_0$ tal que $b \notin B_{n_0+1}$, ou seja, $b \in B \setminus B_{n_0+1}$. Assim, $g(b) \in g\big(B \setminus B_{n_0+1}\big)$ e, portanto, $g(b) \notin A_{n_0+1}$, pela definição dos conjuntos A_n em (1.61). Logo, $g(b) \notin \underline{A}$, ou seja, $g(b) \in A \setminus \underline{A}$. Isso estabeleceu que a imagem de g_0 está em $A \setminus \underline{A}$.

Tomemos agora $a \in A \setminus \underline{A}$ arbitrário. Como $a \notin \underline{A}$, temos que $a \notin A_{m_0+1}$ para ao menos um $m_0 \in \mathbb{N}_0$. Pela definição (1.61), isso significa que $a \in g\big(B \setminus B_{m_0+1}\big)$, ou seja, existe, para ao menos um $m_0 \in \mathbb{N}_0$ um elemento $b \in B \setminus B_{m_0+1}$ tal que $g(b) = a$. Naturalmente, um tal b é um elemento de $B \setminus \underline{B}$ e é único, devido à injetividade de g. Assim, g_0 mapeia sobrejetivamente $B \setminus \underline{B}$ em $A \setminus \underline{A}$ e, sendo também injetiva (pois g o é), $g_0 : \big(B \setminus \underline{B}\big) \to \big(A \setminus \underline{A}\big)$ é bijetora, concluindo a demonstração de **II**.

Para completar a demonstração do Teorema 1.3 precisamos exibir uma função bijetora $h : A \to B$. Ela é dada por

$$h(a) := \begin{cases} f_0(a), & \text{para } a \in \underline{A} , \\ g_0^{-1}(a), & \text{para } a \in A \setminus \underline{A} . \end{cases}$$

É evidente por **I** e **II** que trata-se de uma função bijetora de A em B. ■

Nota histórica. Cantor sugeriu a validade do Teorema 1.3 em 1887, sem demonstrá-lo. Diversas provas desse teorema, supondo ou não o Axioma da Escolha (a demonstração que apresentamos não requer esse axioma), foram obtidas por Dedekind, Schröder e Bernstein entre 1887 e 1898. A prova de Dedekind, de 1887, não foi publicada, mas sua existência foi descoberta por Zermelo em 1908. ♣

• **Alguns exemplos a se ter em mente**

É muito importante notar que para conjuntos não finitos podemos ter $|A| = |B|$ mesmo quando A é um subconjunto próprio de B. Um exemplo a se ter em mente é o caso em que $B = \mathbb{N}_0$, o conjunto dos números naturais, e A é o conjunto dos números naturais pares. A função $f : A \to B$ dada por $f(p) = p/2$, com p sendo um número par, é bijetora, como facilmente se vê. Outra bijeção pode ser encontrada entre $\mathbb{N}_0$ e o conjunto de números quadrados $\{0,\ 1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ \ldots\}$. Podemos, assim, dizer informalmente que há tantos números naturais quanto números pares ou números quadrados.

Nota histórica. Essa observação fora feita por Galilei[68] em 1638, no seu último livro *"Discurso sobre as Duas Novas Ciências"* [175], mas pareceu-lhe absurdo que uma parte pudesse igualar-se, nesse sentido, ao todo. Em [175], Galilei escreve: *"Não pode ser negado que há tantos quadrados quanto há números, porque cada número é uma raiz quadrada de algum quadrado:* $1 \leftrightarrow 1$, $2 \leftrightarrow 4$, $3 \leftrightarrow 9$, $4 \leftrightarrow 16$ *e assim por diante"*. Adiciona, porém, o seguinte comentário: *"Inferimos que a totalidade dos números é infinita, assim como o número de quadrados. O número de quadrados não é menor do que a totalidade de todos os números, nem o último maior do que o anterior. Finalmente, portanto, os atributos 'igual', 'maior' e 'menor' não se aplicam a quantidades infinitas, mas apenas a quantidades finitas"*. Como se vê, Galilei esteve muito perto de antecipar as ideias de Cantor. ♣

O intervalo $(-1,\ 1) \subset \mathbb{R}$ é também equivalente a $\mathbb{R}$, uma possível função bijetora $f : \mathbb{R} \to (-1,\ 1)$ sendo a função $\tanh(x)$. Assim, $\big|(-1,\ 1)\big| = |\mathbb{R}|$.

O intervalo $(-1,\ 1)$ é equivalente ao intervalo $[-1,\ 1]$, o que pode ser mostrado de diversas formas. Apresentamos uma prova evocando o Teorema de Schröder-Berstein, Teorema 1.3, página 82. A função identidade $f : (-1,\ 1) \to [-1,\ 1]$ dada por $f(x) = x$ é claramente injetora. Ao mesmo tempo, a função $g : [-1,\ 1] \to (-1,\ 1)$ dada por $g(x) = x/2$ é também claramente injetora. Assim, o Teorema de Schröder-Berstein nos informa que $\big|(-1,\ 1)\big| = \big|[-1,\ 1]\big|$. Analogamente, prova-se que $\big|[-1,\ 1)\big| = \big|(-1,\ 1]\big| = \big|(-1,\ 1)\big|$. É também evidente disso tudo que para $a < b$, tem-se

$$\big|[a,\ b)\big| \ = \ \big|(a,\ b]\big| \ = \ \big|[a,\ b]\big| \ = \ \big|(a,\ b)\big| \ = \ |\mathbb{R}| \ . \tag{1.62}$$

E. 1.46 *Exercício*. Complete os detalhes, se achar necessário. ✠

Mais adiante (Teorema 1.5, página 90) mostraremos que o conjunto dos números racionais tem a mesma cardinalidade de $\mathbb{N}_0$, ou seja, $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}_0|$. Vale, porém, que $|\mathbb{Q}| < |\mathbb{R}|$ pois, devido ao item 2º do Exercício E. 1.45, temos $|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{R}|$, mas não é verdade que $|\mathbb{R}| \leq |\mathbb{Q}|$, pois não há uma função bijetora entre $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ (Teorema 1.6, página 90). Nesse sentido é legítimo afirmar que a infinitude do conjunto de números racionais é estritamente menor que a infinitude do conjunto dos números reais.

A possibilidade assim disposta de classificar e ordenar grandezas infinitas, como a cardinalidade de um conjunto, é uma das maiores contribuições de Cantor à Matemática. Apresentamos a seguir outra dessas contribuições, o chamado *Teorema de Cantor*.

• **O Teorema de Cantor**

Sabemos que se um conjunto finito A tem n elementos, o conjunto $\mathbb{P}(A)$ terá 2^n elementos. Assim, sempre vale (mesmo para o conjunto vazio) que o número de elementos de um conjunto finito é estritamente menor que o número de seus subconjuntos: $|A| < \big|\mathbb{P}(A)\big|$. O notável Teorema de Cantor, que apresentamos a seguir, mostra que essa afirmação permanece válida para conjuntos não finitos.

Teorema 1.4 (Teorema de Cantor) *Se A é um conjunto, então $A \prec_c \mathbb{P}(A)$, ou seja, $|A| < \big|\mathbb{P}(A)\big|$.* □

Prova. A função $f : A \to \mathbb{P}(A)$ que a cada $x \in A$ associa $\{x\} \in \mathbb{P}(A)$ é, naturalmente, injetiva, ainda que não sobrejetiva. Isso estabelece que $A \preceq_c \mathbb{P}(A)$.

Vamos agora supor que $A \sim_c \mathbb{P}(A)$. Então, deve existir uma função bijetora $g : A \to \mathbb{P}(A)$. Seja $B \in \mathbb{P}(A)$ definido por

$$B \ := \ \big\{y \in A|\ y \notin g(y)\big\} \ .$$

Como g é bijetora, existe $x \in A$ tal que $g(x) = B$. Podemos colocar a questão se vale $x \in g(x)$. Se sim, teremos $x \in B$, o que, pela definição de B, implica $x \notin g(x)$. Por outro lado, se $x \notin g(x)$, então $x \in B = g(x)$. Assim, $x \in g(x)$ se e

[68] Galileo di Vincenzo Bonaiuti de' Galilei (1564–1642).

somente se $x \notin g(x)$, um absurdo que nos força a abandonar a hipótese de que $A \sim_c \mathbb{P}(A)$. Como já vimos que $A \preceq_c \mathbb{P}(A)$, o Teorema de de Schröder-Bernstein, Teorema 1.3, página 82, implica que não pode ser verdade que $\mathbb{P}(A) \preceq_c A$. Logo. $A \prec_c \mathbb{P}(A)$. ■

Comentário. O estudante há de notar a similaridade entre a prova do Teorema de Cantor e a descrição da Antinomia de Russell, da página 52. Porém, o Teorema de Cantor (de 1891[69]) antecede a Antinomia de Russell (de 1902) o que fez alguns afirmarem que Cantor já conhecia aquela antinomia. ♣

O Teorema de Cantor, Teorema 1.4, permite-nos inferir a existência de distintos graus de infinitude de conjuntos, na verdade de infinitos deles. Se A não é um conjunto finito a afirmação que $|A| < \big|\mathbb{P}(A)\big|$ mostra que $\mathbb{P}(A)$ é, informalmente falando, ainda "maior" em termos de sua cardinalidade. Conjuntos ainda maiores podem ser obtidos tomando-se sucessivos conjuntos potência, pois, pelo mesmo Teorema de Cantor, temos $\big|\mathbb{P}(A)\big| < \Big|\mathbb{P}\big(\mathbb{P}(A)\big)\Big|$ e assim por diante. A surpreendente existência dessa hierarquia infinita de cardinalidades, descoberta por Cantor, foi objeto de grande polêmica em seu tempo, envolvendo matemáticos, filósofos e até mesmo teólogos. No entanto, ela tornou-se aos poucos parte integrante da Matemática, conduzindo a vários desenvolvimentos importantes com os chamados *cardinais transfinitos*.

1.1.3.2 Números Naturais

A noção de número natural, como 0, 1, 2, 3 etc., é intuitiva e familiar, mas pode ser colocada em bases mais sólidas dentro do contexto da Teoria dos Conjuntos. Apresentamos essa construção aqui, em parte para exibir o poder e a abrangência dessa Teoria, mas o estudante pode, sem perdas, continuar fiando-se na ideia familiar por trás de tais números até porque, na lide com a Matemática, pouca relevância tem a específica definição adotada para essas entidades básicas.

• Os Axiomas de Peano. O Princípio de Indução Matemática

A (possivelmente primeira) axiomatização do conceito de número natural foi apresentada por Peano[70] em 1889[71] e serve de guia para o que seguirá.

Axiomas de Peano: Existe um conjunto, provisoriamente denotado por $\mathbf{P}$, e cujos elementos são denominados *números naturais*, no qual há um elemento denotado por 0, denominado "*zero*", ou *elemento base*, e uma função bijetora $s : \mathbf{P} \to \mathbf{P} \setminus \{0\}$.

Uma tripla $(\mathbf{P},\ 0,\ s)$ com as propriedades acima designadas é dita ser uma *tripla de Peano*.

Observe-se que nenhuma especificação é feita sobre qual é o elemento 0 e qual é a função s, podendo existir múltiplas possibilidades. Os *Axiomas de Peano* limitam-se a afirmar a existência de uma tripla de Peano, mas nada dizem sobre sua unicidade (vide Exercício E. 1.47, logo abaixo). Logo adiante, porém, apresentaremos uma propriedade universal satisfeita por todas as triplas de Peano. Vide, *e.g.*, [428] ou [497] para referências sobre os Axiomas de Peano.

Para cada $x \in \mathbf{P}$ o elemento $s(x)$ é dito ser o *número sucessor* de x, ou simplesmente o *sucessor* de x. A função s será denominada, neste contexto, *função de sucessão*. O elemento 0 não é o sucessor de nenhum elemento de $\mathbf{P}$. No contexto dessa definição, 1 é o nome[72] dado ao sucessor de 0, 2 é o nome dado ao sucessor de 1, 3 é o nome dado ao sucessor de 2 etc. A ideia subjacente a esses axiomas é identificar os elementos de $\mathbf{P}$ com os números naturais.

E. 1.47 *Exercício*. Constate que $\big(\mathbb{N}_0,\ 0,\ s\big)$ com $\mathbb{N}_0 \equiv \{0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots\}$ e $s(n) = n+1$ é uma tripla de Peano. Esse exemplo contém a ideia motivadora da definição. Outro exemplo de tripla de Peano é $\big(\mathbf{R},\ 1,\ s\big)$, sendo $\mathbf{R} \equiv \big\{1,\ 1/2,\ 1/4,\ 1/8,\ \ldots\big\}$ e $s(x) = x/2$. Verifique! (Neste exercício supomos que noções como a de números naturais e racionais sejam conhecidas informalmente). ✠

Algumas apresentações dos *Axiomas de Peano* incluem o *Axioma, ou Princípio, de Indução Matemática*, de enorme importância, mas preferimos apresentá-lo em separado aqui:

Axioma (ou Princípio) de Indução: Seja $(\mathbf{P},\ 0,\ s)$ uma tripla de Peano e seja S uma sentença definida nos elementos de $\mathbf{P}$ que possua as seguintes propriedades: 1º $S(0)$ é verdadeira e, 2º para cada $x \in \mathbf{P}$ vale a implicação: se $S(x)$ for verdadeira, então $S\big(s(x)\big)$ é também verdadeira. Então, $S(x)$ é verdadeira para todo $x \in \mathbf{P}$.

[69] Georg Cantor, "Über eine elementare Frage der Mannigfaltigskeitslehre", Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, **1:** 75-78, (1891).
[70] Giuseppe Peano (1858–1932).
[71] Giuseppe Peano, "Arithmetices principia, nova methodo exposita" ("Os princípios da Aritmética, expostos por um novo método"), Fratres Bocca, pp. 83-97, Turin (1889). Encontrável em uma versão em língua inglesa em [219].
[72] Esses símbolos devem ser entendidos aqui apenas como sinais gráficos para distinguir os elementos de $\mathbf{P}$.

O Axioma (ou Princípio) de Indução é um instrumento poderoso para a demonstração de teoremas em Matemática e o veremos em ação várias vezes nestas Notas.

Nota histórica. Em sua formulação original, os Axiomas de Peano pressupõem os conceitos de "zero", "número" e "sucessor" como primitivos e pressupõem sobre os mesmos os seguintes postulados: 1º 0 é um número. 2º Se n é um número, o sucessor de n é um número. 3º 0 não é o sucessor de um número. 4º Dois números que tenham o mesmo sucessor são iguais. 5º *Axioma de Indução.* Se uma propriedade é válida para 0 e também para o sucessor de todo número que a possua, então ela é válida para todos os números. Vide [428].

A especificação que "0 não é o sucessor de um número" é característica do conjunto dos naturais $\mathbb{N}_0$. O grupo $\mathbb{Z}_n$, para $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ (vide Seção 2.1.3.2, página 126), pode ser caracterizado de forma similar, mas assumindo-se que 0 é o sucessor de $n-1$. ♣

• Uma propriedade universal

Os Axiomas de Peano garantem a existência de uma tripla de Peano $(\mathbf{P},\ 0,\ s)$, composta por um conjunto $\mathbf{P}$, um elemento $0 \in \mathbf{P}$, denominado "zero", e uma função de sucessão $s : \mathbf{P} \to \mathbf{P} \setminus \{0\}$ que seja bijetora. Eles, porém, não supõem ou garantem a unicidade de tais ingredientes. Com uso do Princípio de Indução é possível, porém, mostrar que quaisquer outras triplas com as mesmas propriedades se equivalem. Mais precisamente, temos:

Proposição 1.8 *Sejam* $(\mathbf{P},\ 0,\ s)$ *e* $(\mathbf{P}^\dagger,\ 0^\dagger,\ s^\dagger)$ *duas triplas de Peano. Então, existe uma bijeção* $B : \mathbf{P} \to \mathbf{P}^\dagger$ *satisfazendo*

$$B(0) \;=\; 0^\dagger \qquad e \qquad B\big(s(x)\big) \;=\; s^\dagger\big(B(x)\big) \tag{1.63}$$

para todo $x \in \mathbf{P}$.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{P} \arrow[r, "s"] \arrow[d, "B"'] & \mathbf{P} \setminus \{0\} \arrow[d, "B"] \\ \mathbf{P}^\dagger \arrow[r, "s^\dagger"] & \mathbf{P}^\dagger \setminus \{0^\dagger\} \end{tikzcd} \tag{1.64}$$

Essas afirmações equivalem a dizer que o diagrama acima é comutativo. □

Prova. A função $B : \mathbf{P} \to \mathbf{P}^\dagger$ é definida indutivamente e começamos impondo $B(0) = 0^\dagger$. Se para dado $x \in \mathbf{P}$ tivermos $B(x)$ fixado, definimos $B\big(s(x)\big)$ por $s^\dagger\big(B(x)\big)$. Assim, pelo princípio de indução, a igualdade $B\big(s(x)\big) = s^\dagger\big(B(x)\big)$ é verdadeira para todo $x \in \mathbf{P}$. Denotemos os elementos de $\mathbf{P}$ por 0, $1 \equiv s(0)$, $2 \equiv s(1)$, $3 \equiv s(2)$ etc., e os $\mathbf{P}^\dagger$ por $0^\dagger$, $1^\dagger \equiv s^\dagger(0^\dagger)$, $2^\dagger \equiv s^\dagger(1^\dagger)$, $3^\dagger \equiv s^\dagger(2^\dagger)$ etc. Claro está que $B(0) = 0^\dagger$, $B(1) = 1^\dagger$, $B(2) = 2^\dagger$ etc., tornando claro que B é bijetora. ■

E. 1.48 *Exercício fácil.* No caso das duas triplas de Peano do Exercício E. 1.47, página 85, a função bijetora $B : \mathbb{N}_0 \to \mathbf{R}$ é dada por $B(n) = 2^{-n}$. Verifique a validade da relação (1.63) nesse caso. ✠

A propriedade apontada na Proposição 1.8 indica uma certa universalidade das triplas satisfazendo os Axiomas de Peano, no sentido de serem todas equivalentes e de forma compatível com as respectivas funções de sucessão, daí ser denominada *propriedade universal*. Nesse sentido, qualquer modelo apresentado para o conjunto $\mathbf{P}$, um elemento 0 e uma função de sucessão s é um "bom" modelo. Passemos à identificação de um deles evocando para tal apenas ingredientes da Teoria dos Conjuntos.

• Modelos conjuntivistas para os Axiomas de Peano

No que segue estaremos empenhados em apresentar algumas ideias sobre como os axiomas de Peano podem ser modelados dentro da Teoria dos Conjuntos. O leitor poderá encontrar discussões lúcidas sobre a definição de números naturais [353] e em [204] e recomendamos também [497]. É interessante notar que essas apresentações diferem entre si.

O ponto básico é encontrar uma definição do que se entende por *número natural*, um problema que ocupou diversos matemáticos no século XIX, como Grassmann[73], Dedekind, Peano, Cantor e Frege. A ideia original, segundo Cantor e Frege, era, informalmente falando, dizer que um conjunto tem <u>um</u> elemento se for equivalente (no sentido acima) a um

[73] Hermann Günther Grassmann (1809-1877).

conjunto com um elemento, que um conjunto tem dois elementos se for equivalente a um conjunto com dois elementos etc. Naturalmente, essa definição é tautológica e requer que se apresente um padrão do que seria um conjunto com um, dois, ou três elementos etc.

Para descrevermos como isso pode ser implementado, apresentemos o conceito de *conjunto sucessor*, ou simplesmente *sucessor*, de um dado conjunto. Se A é um conjunto, definimos seu sucessor, denotado por A', por $A' := A \cup \{A\}$. Notar que $\emptyset' = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$.

Uma ideia, aparentemente introduzida por von Neumann[74], é a de dizer que um conjunto tem um elemento se for equivalente ao conjunto $\emptyset' = \{\emptyset\}$; que um conjunto tem dois elementos se for equivalente ao conjunto $(\emptyset')' = \{\emptyset\} \cup \big\{\{\emptyset\}\big\} = \big\{\emptyset,\ \{\emptyset\}\big\}$; que tem três elementos se for equivalente ao conjunto $\big((\emptyset')'\big)' = \big\{\emptyset,\ \{\emptyset\}\big\} \cup \Big\{\big\{\emptyset,\ \{\emptyset\}\big\}\Big\} = \Big\{\emptyset,\ \{\emptyset\},\ \big\{\emptyset,\ \{\emptyset\}\big\}\Big\}$ e assim por diante (esclareceremos adiante o que entendemos aqui por "assim por diante").

Essa construção permitiria produzir uma *definição* do conceito de número natural: o número "um" é, grosseiramente falando, o nome dado à classe de equivalência formada pelos conjuntos equivalentes ao conjunto $\{\emptyset\}$; o número "dois" é o nome dado à classe de equivalência do conjunto $\big\{\emptyset,\ \{\emptyset\}\big\}$; o número "três" é o nome dado à classe de equivalência do conjunto $\Big\{\emptyset,\ \{\emptyset\},\ \big\{\emptyset,\ \{\emptyset\}\big\}\Big\}$ e assim por diante. Aliás, o número "zero" seria o nome dado à classe de equivalência de $\emptyset$. Com um certo abuso de linguagem, podemos identificar recursivamente

$$
\begin{aligned}
\mathbf{0} &\equiv \emptyset\ , \\
\mathbf{1} &\equiv \mathbf{0}' \ = \ \{\emptyset\} \ = \ \big\{\mathbf{0}\big\}\ , \\
\mathbf{2} &\equiv \mathbf{1}' \ = \ \big\{\emptyset,\ \{\emptyset\}\big\} \ = \ \big\{\mathbf{0},\ \mathbf{1}\big\}\ , \\
\mathbf{3} &\equiv \mathbf{2}' \ = \ \Big\{\emptyset,\ \{\emptyset\},\ \big\{\emptyset,\ \{\emptyset\}\big\}\Big\} \ = \ \big\{\mathbf{0},\ \mathbf{1},\ \mathbf{2}\big\}\ , \\
\mathbf{4} &\equiv \mathbf{3}' \ = \ \bigg\{\emptyset,\ \{\emptyset\},\ \big\{\emptyset,\ \{\emptyset\}\big\},\ \Big\{\emptyset,\ \{\emptyset\},\ \big\{\emptyset,\ \{\emptyset\}\big\}\Big\}\bigg\} \ = \ \big\{\mathbf{0},\ \mathbf{1},\ \mathbf{2},\ \mathbf{3}\big\} \ \text{ etc.}
\end{aligned}
\tag{1.65}
$$

Assim, **0** seria identificado com o conjunto vazio, **1** seria o conjunto sucessor de **0**, **2** seria o conjunto sucessor de **1** etc. Os números naturais seriam, então, segundo essa noção, o conjunto de todas as classes de equivalência construídas dessa forma. Esta definição pressupõe apenas conhecidos conceitos primitivos como os de conjuntos, classes de equivalência e de conjunto vazio.

Um problema com essa construção reside no fato de, em certos esquemas axiomáticos, as classes de equivalência de conjuntos definidas por sua cardinalidade não serem conjuntos, mas classes próprias. Porém, a ideia acima é "moralmente" correta e pode ser remediada, como passamos a discutir.

Primeiramente, garantir que o processo recursivo indicado em (1.65) possa ser conduzido *ad infinitum* é algo que não pode ser feito com os dispositivos apresentados até aqui e faz-se necessário introduzir um novo axioma:

Axioma da Infinidade: Existe um conjunto Ω, que provisoriamente denominamos *conjunto de sucessões*, com as seguintes propriedades: $\emptyset \in \Omega$ e se $x \in \Omega$ então $x' \in \Omega$.

Supor a existência de um conjunto como de sucessões ainda não encerra a questão, pois pode haver muitos de tais conjuntos. Uma possibilidade seria

$$
\begin{aligned}
\Omega_1 \ &= \ \Big\{\emptyset,\ \emptyset',\ (\emptyset')',\ \big((\emptyset')'\big)',\ \cdots\Big\} \\
&= \ \bigg\{\emptyset,\ \{\emptyset\},\ \big\{\emptyset,\ \{\emptyset\}\big\},\ \Big\{\emptyset,\ \{\emptyset\},\ \big\{\emptyset,\ \{\emptyset\}\big\}\Big\},\ \cdots\bigg\}\ ,
\end{aligned}
$$

[74]A referência original é J. von Neumann "Zur Einführung transfiniten Zahlen", Acta Szeged **1**, 199–208 (1923).

mas uma outra seria, tomando-se um conjunto não vazio A,

$$\Omega_A = \Big\{\emptyset,\ A,\ \emptyset',\ A',\ (\emptyset')',\ (A')',\ \big((\emptyset')'\big)',\ \big((A')'\big)',\ \cdots\Big\}$$

$$= \Bigg\{\emptyset,\ A,\ \{\emptyset\},\ \{A,\ \{A\}\},\ \{\emptyset,\ \{\emptyset\}\},\ \Big\{A,\ \{A\},\ \{A,\ \{A\}\}\Big\},\ \Big\{\emptyset,\ \{\emptyset\},\ \{\emptyset,\ \{\emptyset\}\}\Big\},$$

$$\Big\{A,\ \{A\},\ \{A,\ \{A\}\},\ \Big\{A,\ \{A\},\ \{A,\ \{A\}\}\Big\}\Big\},\ \cdots\Bigg\}.$$

Ambos os conjuntos Ω_0 e Ω_A acima são conjuntos de sucessões e satisfazem o *Axioma da Infinidade*, e há certamente outros.

Como podemos destacar o particular conjunto Ω_0 dentre os demais conjuntos de sucessões? Isso pode ser feito com as seguintes observações simples:

1º Se Ω_1 e Ω_2 são dois conjuntos de sucessões, então $\Omega_1 \cap \Omega_2$ também é um conjunto de sucessões. De fato, $\emptyset \in \Omega_2$ e $\emptyset \in \Omega_2$ e se $x \in \Omega_1$ e $x \in \Omega_2$, tem-se $x' \in \Omega_1$ e $x' \in \Omega_2$, o que implica $x' \in \Omega_1 \cap \Omega_2$, provando que $\Omega_1 \cap \Omega_2$ é um conjunto de sucessões.

2º Para cada conjunto de sucessões Ω tem-se $\Omega_0 \subset \Omega$. De fato, se Ω é um conjunto de sucessões, tem-se pela definição $\emptyset \in \Omega$. Logo, $\Omega_0 \cap \Omega$ é não vazio.

Se $x \in \Omega_0 \cap \Omega$, então $x' \in \Omega_0 \cap \Omega$. Cada elemento de Ω_0 que não é o elemento $\emptyset$ é o conjunto sucessor de outro elemento de Ω_0. Se existir $y \in \Omega_0$ com $y \notin \Omega$, teríamos $y \neq \emptyset$ e, portanto, existe $x \in \Omega_0$ com $y = x'$. Há duas possibilidades: a) $x \in \Omega$ e b) $x \notin \Omega$. No caso a) teríamos $x' \in \Omega$, ou seja $y \in \Omega$, uma contradição. Assim, $x \in \Omega_0$ com $x \notin \Omega$. Repetindo o argumento tantas vezes quanto necessário, chegaríamos a $\emptyset \in \Omega_0$ com $\emptyset \notin \Omega$, uma contradição com a hipótese de Ω ser um conjunto de sucessões. Logo $\Omega_0 \subset \Omega$.

3º Ω_0 não possui subconjunto próprio que seja um conjunto de sucessões. Cada elemento de Ω_0 que não é o elemento $\emptyset$ é o conjunto sucessor de outro elemento de Ω_0. Se Ω_0^- for um subconjunto próprio de Ω_0, haverá em Ω_0^- um elemento que não o conjunto sucessor de outro elemento de Ω_0^- (pois esse seria elemento de $\Omega_0 \setminus \Omega_0^-$), contrariando a hipótese de Ω_0^- ser um conjunto de sucessões.

Assim, Ω_0 distingue-se de todos os conjuntos de sucessões no sentido de ser a intersecção de todos eles. O conjunto Ω_0, que renomearemos como $\mathbb{N}_0$, é denominado *conjunto de números naturais* (com o zero) e seus elementos são denominados *números naturais*. Como mencionamos, sua existência é garantida pelo *Axioma da Infinidade*. Deixamos ao leitor a incumbência simples de constatar que o conjunto $\mathbb{N}_0$ satisfaz as propriedades supostas nos *Axiomas de Peano*.

* ** *** **** ***** ****** ******* ******** ********* ********** ...

Fazemos notar que simplesmente apresentar uma definição para a noção de número natural não preenche todas as necessidades matemáticas, pois gostaríamos, também, de definir operações sobre os naturais, como soma, diferença, produto, assim como a noção de números negativos etc. Não é o momento, porém, de fazê-lo e trataremos dessas questões alhures.

Nestas Notas, denotamos o conjunto dos números naturais (incluindo o zero) por $\mathbb{N}_0$. Por $\mathbb{N}$ denotamos o conjunto dos números naturais sem o zero. Assim: $\mathbb{N}_0 = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$ e $\mathbb{N} = \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$. Infelizmente, e por mais incrível que pareça em se tratando de algo tão básico, não há uniformidade quanto a essas notações na literatura matemática.

• A cardinalidade do conjunto $\mathbb{N}$ e de suas potências

Sabemos pelo Axioma da Infinidade que $\mathbb{N}$ não é um conjunto finito. Se denotarmos sua cardinalidade por $|\mathbb{N}|$, então o Teorema de Cantor, Teorema 1.4, página 84 informa-nos que $|\mathbb{N}| < \big|\mathbb{P}(\mathbb{N})\big|$ e que $\big|\mathbb{P}(\mathbb{N})\big| < \Big|\mathbb{P}\big(\mathbb{P}(\mathbb{N})\big)\Big|$ e que $\Big|\mathbb{P}\big(\mathbb{P}(\mathbb{N})\big)\Big| < \Bigg|\mathbb{P}\Big(\mathbb{P}\big(\mathbb{P}(\mathbb{N})\big)\Big)\Bigg|$ etc. Na literatura matemática há uma notação especial para a cardinalidade de $\mathbb{N}$ e das potências de $\mathbb{N}$, usando a letra hebraica $\beth$ (lê-se "bet"):

$$\beth_0 \equiv |\mathbb{N}| , \qquad \beth_1 \equiv \big|\mathbb{P}(\mathbb{N})\big| , \qquad \beth_2 \equiv \Big|\mathbb{P}\big(\mathbb{P}(\mathbb{N})\big)\Big| , \qquad \beth_3 \equiv \bigg|\mathbb{P}\Big(\mathbb{P}\big(\mathbb{P}(\mathbb{N})\big)\Big)\bigg| \quad \text{etc.}$$

Assim, o Teorema de Cantor informa que $\beth_0 < \beth_1 < \beth_2 < \beth_3 < \cdots$.

Vemos dessa forma que o Teorema de Cantor garante que partindo de $\mathbb{N}$ podemos alcançar graus crescentes de infinitude (*i.e.*, de cardinalidade) – em verdade, uma coleção infinita deles – tomando-se potências sucessivas dos conjuntos.

Na literatura, a cardinalidade de $\mathbb{N}$ é também denotada pelo símbolo $\aleph_0$ (lê-se "alef zero") e a cardinalidade dos reais, $|\mathbb{R}|$, é frequentemente denotada por $\mathfrak{c}$. É possível provar (Teorema 1.8, página 92) que $\mathfrak{c} = \big|\mathbb{P}(\mathbb{N})\big| \equiv \beth_1$.

Uma importante conjectura, denominada *hipótese do contínuo*, lançada por Cantor em 1878, consiste na afirmação que não existe nenhum conjunto A com $\aleph_0 < |A| < \mathfrak{c}$, ou seja, não existe conjunto com uma cardinalidade intermediária entre a dos naturais e a dos reais. Uma indicação dessa direção foi apresentada por Hausdorff[75] em 1916[76], quando o mesmo demonstrou que a cardinalidade da σ-álgebra de Borel[77] em $\mathbb{R}$ (um subconjunto de $\mathbb{P}(\mathbb{R})$) é $\mathfrak{c}$. Em uma série de trabalhos entre 1938 e 1964, Gödel[78] e Cohen[79] provaram que essa conjectura é *indemonstrável* dentro do esquema axiomático de Zermelo-Fraenkel com o axioma da escolha (ZFC) para a Teoria dos Conjuntos, devendo, portanto ser aceita (ou não) como axioma independente, com o sistema resultante sendo consistente se e somente se ZFC o for.

1.1.3.3 Conjuntos Enumeráveis e Conjuntos Contáveis

Um conjunto A é dito ser *enumerável* se tiver a cardinalidade do conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$, ou seja, se existir uma função bijetora $f : \mathbb{N} \to A$ cujo domínio é $\mathbb{N}$ e cuja imagem é todo A. Conjuntos enumeráveis não são finitos. Um conjunto A é dito ser *contável* se for finito ou se for enumerável. Advertimos o estudante para o fato de que alguns autores usam a palavra enumerável mesmo para conjuntos finitos. Evitaremos fazê-lo aqui, agarrando-nos às definições acima.

Vamos agora provar alguns teoremas fundamentais sobre conjuntos contáveis cuja importância, apesar da aparente simplicidade dos enunciados, não pode ser subestimada pois seu alcance estende-se por toda a Matemática, em particular, por muito do que veremos adiante.

Precisamos da seguinte proposição:

Proposição 1.9 *Um conjunto é contável se e somente se for equivalente a um subconjunto de* $\mathbb{N}$. □

Prova. Por definição todo conjunto contável A (finito ou não) é equivalente a algum subconjunto de $\mathbb{N}$ (no pior dos casos ao próprio $\mathbb{N}$). Provemos, então, a recíproca. Seja A equivalente a um subconjunto K de $\mathbb{N}$. Se K for finito, A também o será e, portanto, será contável. Suponhamos, então, que K não é finito. Vamos construir uma função bijetora $F : \mathbb{N} \to K$. A mesma é definida da seguinte forma

$$\begin{aligned} F(1) &= \min K , \\ F(n) &= \min\Big\{K \setminus \big\{F(1),\ F(2),\ \ldots, F(n-1)\big\}\Big\} , \quad \text{para } n = 2,\ 3,\ \ldots . \end{aligned}$$

É fácil ver que F é bijetora e que sua imagem é K (faça isso). Assim, K é enumerável e, portanto, A também o é. ■

Esta proposição tem uma consequência simples:

Proposição 1.10 *Se A é um conjunto contável e $B \subset A$, então B é contável.* □

[75] Felix Hausdorff (1868–1942).
[76] Felix Hausdoff. "Die Mächtigkeit der Borelschen Mengen". Math. Ann. **77**: 430-437 (1916).
[77] Félix Édouard Justin Émile Borel (1871–1956). A noção de σ-álgebra de Bore é apresentada à página 1427. Vide também Seção 29.1.1, página 1476.
[78] Kurt Friedrich Gödel (1906-1978).
[79] Paul Joseph Cohen (1934-2007).

Prova. Se A é contável e $B \subset A$, então B é equivalente a um subconjunto de $\mathbb{N}$ e, portanto, pela proposição anterior, B é contável. ■

Chegamos a um importante resultado:

Proposição 1.11 *O produto Cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável.* □

Prova. Seja a função $G : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $G(a,\ b) = 2^a 3^b$. A imagem dessa função é um subconjunto próprio de $\mathbb{N}$ mas essa função é bijetora: a cada elemento z de sua imagem há um e somente um par $(a,\ b)$ de números naturais tais que $2^a 3^b = z$ (por quê?). Assim, fica provado pela Proposição 1.9 que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é contável. Como $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ não é finito (por quê?), é um conjunto enumerável. ■

A Proposição 1.11 tem uma consequência de grande importância:

Teorema 1.5 *O conjunto $\mathbb{Q}_+$ dos números racionais positivos é um conjunto enumerável.* ■

Prova. Todo racional positivo é da forma p/q, onde p e $q \in \mathbb{N}$ são irredutíveis ou primos entre si (ou seja, não há “cancelamentos” que permitam escrever $p/q = a/b$ com $a < p$ e $b < q$). Assim, há uma correspondência um-a-um entre $\mathbb{Q}_+$ e o subconjunto de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ formado por todos os pares $(p,\ q)$ onde p e q são primos entre si. Como $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é contável, a Proposição 1.10 diz, então, que $\mathbb{Q}_+$ é também contável e, em verdade, enumerável, por não ser finito. ■

E. 1.49 *Exercício*. Prove que o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ e o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ são conjuntos enumeráveis. ✠

Um fato também importante é que há conjuntos de números que não são conjuntos contáveis. O exemplo mais relevante é o dos números reais[80].

Teorema 1.6 *O conjunto dos números reais não é contável.* ■

Uma segunda prova dessa afirmação é apresentada no Teorema 1.8, página 92.

Prova do Teorema 1.6. Para provar isso basta mostrar que há um subconjunto de $\mathbb{R}$ que não é contável. Considere o conjunto U de todos os números reais do intervalo $[0,\ 1)$ tais que apenas os dígitos 0 ou 1 aparecem em sua representação decimal. Por exemplo, números como $0,001101$ ou $0,1$ ou 0 ou $0,1011$ ou $1/9 = 0,11111\ldots$ são elementos de U. De modo mais preciso, U é o subconjunto do intervalo $[0,\ 1)$ formado por todos os números u que podem ser escritos da forma

$$u \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(u)}{10^n} \ ,$$

onde $d_n(u) \in \{0,\ 1\}$ para todo $n \geq 1$. $d_n(u)$ é o n-ésimo dígito do número u na base decimal. Note que dois elementos u e v de U são iguais se e somente se $d_n(u) = d_n(v)$ para todo n (prove isso!).

Vamos provar que U não é um conjunto contável. Para isso vamos supor o oposto, ou seja, que U é contável e veremos que essa hipótese leva a um absurdo. Vamos supor que haja uma função bijetora $f :\ \mathbb{N} \to U$ cuja imagem é U. Considere o número real a definido por

$$a \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - d_n(f(n))}{10^n} \ .$$

Como $1 - d_n(f(n))$ é igual a 0 ou a 1 (por quê?), segue obviamente que a é um elemento de U.

Entretanto, é fácil ver que a não faz parte da imagem da função f. Para ver isso note que se a fosse um elemento da imagem de f haveria um inteiro m tal que $f(m) = a$. Mas isso significa, então, que o m-ésimo dígito de a seria

[80] A definição (de Cantor) de número real será apresentada na Seção 24.A.1, página 1356. Por ora, basta supormos esse conceito familiar e conhecido de Cursos de Cálculo.

$d_m(a) = d_m(f(m))$. Mas pela definição do próprio a, o seu m-ésimo dígito é $1 - d_m(f(m))$. Assim, teríamos que $d_m(f(m)) = 1 - d_m(f(m))$ o que não é possível.

Concluímos, então, que a é um elemento de U mas não pode ser um elemento da imagem da função f. Isso é uma contradição, pois supomos justamente que a imagem da f era todo o conjunto U. Portanto, U não é contável e, assim, $\mathbb{R}$ também não o é. ■

Nota. É fácil ver que, em verdade, poderíamos substituir a base decimal, usada na representação do conjunto U acima, por qualquer base $b \in \mathbb{N}$ com $b > 2$. Ou seja, se considerarmos o conjunto U_b de todos os reais u do intervalo $[0,\ 1]$ representáveis na base b, $b \in \mathbb{N}$, $b > 2$, da forma

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(u)}{b^n} .$$

onde $d_n(u) \in \{0,\ 1\}$, então, repetindo o que fizemos acima, veríamos que U_b não é contável. Claramente $U = U_{10}$. ♣

Nota. O caso da base binária $b = 2$ foi excluído da última nota pois nele não vale a unicidade da representação dos elementos de U_2 na forma

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(u)}{2^n} ,$$

onde $d_n(u) \in \{0,\ 1\}$. Para ver isso, faça o exercício seguinte. ♣

E. 1.50 *Exercício*. Mostre que na base binária $0, 1$ e $0, 01111111\ldots$ representam o mesmo número, a saber, o número $1/2$. Sugestão: use a fórmula da progressão geométrica infinita para calcular quanto vale $0, 01111111\ldots$. ✢

Nota. Os conjuntos U_b, $b > 2$, são exemplos de uma classe de conjuntos chamados de *conjuntos de Cantor*. Tornaremos a reencontrar tais conjuntos quando falarmos de Teoria da Medida (vide Capítulo 29, especialmente Seção 29.3, página 1482.). ♣

Ainda sobre os números reais, tem-se também o seguinte fato, que para referência futura formulamos como uma proposição.

Proposição 1.12 *$\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2$ têm a mesma cardinalidade.* □

Prova. É suficiente mostrar que $(0,\ 1)$ e $(0,\ 1) \times (0,\ 1)$ têm a mesma cardinalidade, pois a função $x \to (1 + \tanh(x))/2$ é uma bijeção de $\mathbb{R}$ em $(0,\ 1)$. Fixemos para cada $x \in (0,\ 1)$ uma representação decimal $x = 0, d_1 d_2 d_3 \ldots$ com $d_n \in \{0,\ \ldots,\ 9\}$. Seja $F : (0,\ 1) \to (0,\ 1) \times (0,\ 1)$ definida por

$$F(0, d_1 d_2 d_3 d_4 \ldots) := (\ 0, d_1 d_3 d_5 d_7 \ldots,\quad 0, d_2 d_4 d_6 d_8 \ldots\ ) .$$

F é bijetora e $F^{-1} : (0,\ 1) \times (0,\ 1) \to (0,\ 1)$ é dada por

$$F^{-1}((\ 0, a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots,\quad 0, b_1 b_2 b_3 b_4 \ldots\ )) = 0, a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3 a_4 b_4 \ldots .$$

■

Finalizamos com um outro teorema de grande importância:

Teorema 1.7 *Se C_i, $i \in \mathbb{N}$, são conjuntos contáveis, então $C = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_i$ também o é.* □

Prova. Se cada C_i é contável, então para cada $i \in \mathbb{N}$ há uma função bijetora $g_i :\ \mathbb{N} \to C_i$ cuja imagem é C_i. Defina-se então a função $G :\ (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \to C$ dada por $G(a,\ b) = g_a(b)$. Esta função não é, em geral, bijetora, pois podem existir elementos comuns entre conjuntos C_i e C_j com $i \neq j$ e teríamos $g_i(m) = g_j(n)$ para algum n e m. Entretanto, a imagem de G é C.

Considere, então em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ a seguinte relação de equivalência: o par $(a,\ b)$ é equivalente ao par $(c,\ d)$ se e somente se $g_a(b) = g_c(d)$. O conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ pode ser então, como já observamos, escrito como a união disjunta de suas classes de equivalência pela relação acima. Construamos, então, um subconjunto K de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tomando-se um e somente um elemento de cada classe de equivalência escolhido arbitrariamente (usamos aqui o Axioma da Escolha para afirmar que tal construção é possível).

Defina agora a função $H : K \to C$ dada por $H(a, b) = g_a(b)$ para $(a, b) \in K$. Pela própria construção do conjunto K essa função H é bijetora e sua imagem é C. Como K é um subconjunto de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ que é contável, temos que K também o é e, portanto, C é contável. ■

• Os conjuntos $\mathbb{P}(\mathbb{N})$ e $\mathbb{R}$ têm a mesma cardinalidade

Demonstramos aqui mais um resultado sobre a cardinalidade dos reais.

Teorema 1.8 *Vale $\mathbb{P}(\mathbb{N}) \sim_c \mathbb{R}$, ou seja, $\mathbb{P}(\mathbb{N})$ e $\mathbb{R}$ têm a mesma cardinalidade: $\big|\mathbb{P}(\mathbb{N})\big| = |\mathbb{R}|$. Como consequência do Teorema de Cantor, Teorema 1.4, página 84, podemos afirmar que $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$ e, portanto, $\mathbb{R}$ não é um conjunto contável.* □

Prova. Como já observamos (Exercício E. 1.45, página 82), do fato que $\mathbb{Q} \sim_c \mathbb{N}$ segue que $\mathbb{P}(\mathbb{Q}) \sim_c \mathbb{P}(\mathbb{N})$. Para provar que $\big|\mathbb{P}(\mathbb{N})\big| = |\mathbb{R}|$ mostraremos que existe uma função injetora $f : \mathbb{R} \to \mathbb{P}(\mathbb{Q}) \sim_c \mathbb{P}(\mathbb{N})$ e uma função injetora $g : \mathbb{P}(\mathbb{N}) \to [0, 1/2] \sim_c \mathbb{R}$ (vide (1.62), página 84). O Teorema de Schröder-Berstein, Teorema 1.3, página 82, informa-nos, então, que $\big|\mathbb{P}(\mathbb{N})\big| = |\mathbb{R}|$.

Uma possível função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{P}(\mathbb{Q})$ pode ser definida da seguinte forma: $f(x) = (-\infty, x) \cap \mathbb{Q}$. É elementar demonstrar que trata-se de uma função injetora.

Uma possível função $g : \mathbb{P}(\mathbb{N}) \to [0, 1/2]$ pode ser definida da seguinte forma. Um elemento não vazio de $\mathbb{P}(\mathbb{N})$ é um conjunto $\{a_1, a_2, \ldots\}$, finito ou não, com $a_k \in \mathbb{N}$. Vamos assumir que a sequência a_k seja crescente: $a_k < a_l$ se $k < l$. Associemos a um tal conjunto o número real representado na base trinária por um número cujos dígitos são apenas 0 ou 1, sendo que o k-ésimo dígito 1 aparece na posição a_k:

$$\{a_1, a_2, \ldots\} \longmapsto \sum_{k=1} \frac{1}{3^{a_k}} . \tag{1.66}$$

Para o conjunto vazio $\emptyset \in \mathbb{P}(\mathbb{N})$ associamos o número 0. A soma em (1.66) será finita se $\{a_1, a_2, \ldots\}$ o for e uma série convergente[81] se não o for. O leitor há de perceber que a representação (1.66) é a representação na base trinária de um número do intervalo $[0, 1)$. Por exemplo, para o conjunto $\{2, 5, 7\} \in \mathbb{P}(\mathbb{N})$ a função g associa o número $0,0100101$, em representação trinária.

Ao escolhermos apenas números com dígitos 0 ou 1 na representação em base trinária, evitamos o problema de não unicidade dessa representação. Se esse fato não é familiar ao leitor, mostremos exemplos. Sabemos, usando a bem conhecida fórmula da progressão geométrica de razão 1/3, que na base trinária,

$$0,22222\ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^k} = \frac{2}{3}\frac{1}{1-1/3} = 1 ,$$

mostrando que o número 1 possui duas representações trinária: $1,000\ldots$ ou $0,22222\ldots$. O mesmo tipo de problema, aliás, ocorre em todas as outras bases. Por outro lado, também na base trinária,

$$0,11111\ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{3}\frac{1}{1-1/3} = \frac{1}{2} ,$$

sendo que 1/2 possui apenas a representação trinária $0,11111\ldots$.

Assim, vemos que a função g definida acima é uma função injetora de $\mathbb{P}(\mathbb{N})$ no intervalo $[0, 1/2] \sim_c \mathbb{R}$ (vide (1.62), página 84). Evocando o Teorema de Schröder-Berstein, Teorema 1.3, página 82, concluímos que $|\mathbb{R}| = \big|\mathbb{P}(\mathbb{N})\big|$.

Há uma outra conclusão a ser extraída disso. Com o Teorema de Cantor, Teorema 1.4, página 84, podemos afirmar que $|\mathbb{N}| < \big|\mathbb{P}(\mathbb{N})\big| = |\mathbb{R}|$. Vemos assim que a cardinalidade de $\mathbb{R}$ é maior que a de $\mathbb{N}$ e, portanto, que não há uma bijeção entre os dois conjuntos. Também chegamos a essa conclusão no Teorema 1.6, página 90. ■

[81] Sempre vale $\sum_{k=1} \frac{1}{3^{a_k}} \leq \sum_{k=1} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{2}$, pela fórmula da progressão geométrica de razão 1/3.

• Números reais algébricos e transcendentes

Na reta real diz-se que um número x é um *número algébrico* se x for raiz de um polinômio do tipo

$$P(t) \ = \ a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n \ ,$$

para algum $n \in \mathbb{N}$, onde os coeficientes $a_0, \ldots, a_n$ são números racionais. Um tal polinômio é dito ser um *polinômio racional*.

Todo número racional p/q é também algébrico pois é raiz do polinômio racional $p - qt$. Há também muitos números irracionais que são algébricos. Por exemplo, o número $\sqrt{2}$ é raiz do polinômio racional $-2 + t^2$ e, portanto, é algébrico. Os números reais que não são algébricos são chamados de *números transcendentes*.

E. 1.51 *Exercício*. Prove que o conjunto de todos os números algébricos da reta real é um conjunto enumerável. Use para tal o fato de que os racionais formam um conjunto enumerável. ✠

O exercício anterior pode ser usado para concluir que existem números transcendentes (que não são raiz de nenhum polinômio racional) pois os reais, como sabemos, não são contáveis enquanto, segundo o exercício, os algébricos o são. Deve, portanto, haver uma coleção não contável de números transcendentes na reta real.

Historicamente, a existência de números transcendentes foi estabelecida (por outros argumentos) por Liouville[82] em 1851. Em 1874, Cantor provou a afirmação do exercício acima, mostrando que o conjunto de todos os números algébricos da reta real é um conjunto contável.

E. 1.52 *Exercício*. Seja $\mathbb{A}_0 = \mathbb{Q}$ e $\mathbb{A}_1$ o conjunto dos números algébricos, definidos como o conjunto de todos os zeros reais de polinômios com coeficientes racionais. Definimos $\mathbb{A}_2$ como o conjunto de todos os zeros reais de polinômios com coeficientes em $\mathbb{A}_1$. Sucessivamente, definimos $\mathbb{A}_n$, $n \geq 1$ como o conjunto de todos os zeros reais de polinômios com coeficientes em $\mathbb{A}_{n-1}$. Seja também $\mathbb{A} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{A}_n$. Mostre que todos os $\mathbb{A}_n$ e $\mathbb{A}$ são conjuntos contáveis e, portanto, subconjuntos próprios de $\mathbb{R}$. ✠

• Os números e e π são irracionais e transcendentes

Sabe-se que os números e e π são irracionais e transcendentes.

As provas de que e e e^2 são irracionais foram primeiramente obtidas por Euler[83] em 1737. Uma prova que e é irracional pode ser encontrada nestas Notas à página 1312 ou, por exemplo, em [472] ou [212].

A prova de que π é irracional não é tão simples quanto a de que e é irracional. A demonstração de que π é irracional foi primeiramente obtida por Lambert[84] em 1768 e consistiu em provar que se r é um número racional não nulo, então, nem e^r nem $\tan(r)$ podem ser racionais. Como $\tan(\pi/4) = 1$, que é racional, segue que $\pi/4$ deve ser irracional.

A demonstração de que e é transcendente foi obtida pela primeira vez por Hermite[85] em 1873.

A demonstração de que π é transcendente foi obtida pela primeira vez por Lindemann[86] em 1882.

Um fato de grande interesse é que provar que π é algébrico seria equivalente[87] a resolver o célebre *problema da quadratura do círculo*, que consiste em achar um método por meio do qual, "apenas com régua e compasso" constrói-se um quadrado cuja área é igual a de um círculo de raio 1. Tal seria possível caso houvessem meios de se construir um segmento de reta cujo comprimento seja $\sqrt{\pi}$. Esse problema clássico da geometria Euclidiana ficou em aberto por cerca de dois mil anos (!), tendo sido resolvido negativamente em 1882 por Lindemann quando este provou, justamente, que π não é um número algébrico, concluindo assim a impossibilidade da construção proposta.

Para provas de que e é transcendente vide, por exemplo, [472] ou [212]. Para provas que π é irracional e transcendente e para uma série de outros resultados congêneres, vide [212].

• Produtos Cartesianos e contabilidade

É interessante notar que produtos Cartesianos contáveis de conjuntos contáveis **não** são, geralmente, conjuntos

[82] Joseph Liouville (1809–1882).
[83] Leonhard Euler (1707–1783).
[84] Johann Heinrich Lambert (1728–1777).
[85] Charles Hermite (1822–1901). A prova original da transcendência de e encontra-se em Comptes Rendus, **77**, 18-24 (1873).
[86] Carl Louis Ferdinand von Lindemann (1852–1939). A prova original da transcendência de π encontra-se em Math. Ann. **20**, 213–225 (1882).
[87] Para uma bela discussão sobre isso, vide [110].

contáveis. Considere como exemplo o produto Cartesiano

$$K \ := \ \prod_{i\in\mathbb{N}} \{0,\ 1\} \ = \ \{0,\ 1\}^{\mathbb{N}} \ ,$$

que é denominado *espaço de Cantor*. Podemos mostrar que K não é contável. Cada elemento de K é uma função $d: \ \mathbb{N} \to \{0,\ 1\}$. Podemos assim associar univocamente a cada d o número real

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{10^n}$$

que é um elemento do conjunto $U \subset \mathbb{R}$ definido acima. Por outro lado, todo elemento de U pode ser escrito assim para um único $d \in K$. Assim, K e U têm a mesma cardinalidade e, portanto, K não é contável pois U, como já vimos, não o é.

E. 1.53 *Exercício*. Mostre que todos os conjuntos U_b, definidos acima, com $b > 2$, tem a mesma cardinalidade de K (e, portanto, a mesma cardinalidade entre si). ✠

1.1.4 Ínfimos e Supremos de Famílias de Conjuntos

Seja I um conjunto arbitrário de índices e $\{A_i,\ i \in I\}$ uma coleção de conjuntos indexados por elementos de I. Chama-se por vezes o conjunto $\inf_{i\in I} A_i := \bigcap_{i\in I} A_i$ de ínfimo da coleção $\{A_i,\ i \in I\}$ e o conjunto $\sup_{i\in I} A_i := \bigcup_{i\in I} A_i$ de supremo da coleção $\{A_i,\ i \in I\}$.

Essas noções coincidem com as noções de ínfimo e supremo apresentadas à página 80 se considerarmos em $X = \bigcup_{i\in I} A_i$ a relação de ordem definida pela inclusão de conjuntos: se $A, B \subset X$ dizemos que $A \preceq B$ se $A \subset B$.

E. 1.54 *Exercício*. Mostre isso. ✠

• Limites do ínfimo e limites do supremo de famílias contáveis de conjuntos

Seja $\{A_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ uma coleção contável de subconjuntos de um conjunto não vazio X. Define-se um conjunto chamado de *limite do ínfimo* da coleção, denotado por $\underline{\lim} A_n$, como sendo o conjunto dado por

$$\underline{\lim} A_n \ := \ \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \ .$$

O chamado *limite do supremo* da coleção, denotado por $\overline{\lim} A_n$, é o conjunto definido por

$$\overline{\lim} A_n \ := \ \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \ .$$

Se considerarmos a relação de ordem entre conjuntos definida pela inclusão de conjuntos, é de se notar que a sequência de conjuntos $B_n := \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k,\ n \in \mathbb{N}$, está ordenada de forma crescente (ou seja, $B_n \preceq B_m$ se $n \leq m$) e $\underline{\lim} A_n$ é seu supremo. Analogamente, a sequência de conjuntos $C_n := \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k,\ n \in \mathbb{N}$, está ordenada de forma decrescente (ou seja, $C_n \preceq C_m$ se $n \geq m$) e $\overline{\lim} A_n$ é seu ínfimo.

E. 1.55 *Exercício*. Justifique a seguinte afirmativa: $\underline{\lim} A_n$ é o conjunto de todos os pontos x de X que pertencem a todos os conjuntos A_n exceto a, no máximo, um número finito deles. Dizemos, nesse caso, que x pertence *a quase todos* os A_n's). ✠

E. 1.56 *Exercício*. Justifique a seguinte afirmativa: $\overline{\lim} A_n$ é o conjunto de todos os pontos x de X que pertencem a um número infinito de conjuntos A_n. Dizemos, nesse caso, que x pertence *frequentemente* aos A_n's). ✠

Proposição 1.13 *Seja $\{A_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ uma coleção contável de subconjuntos de um conjunto não vazio X. Então,*

$$\left(\underline{\lim} A_n\right)^c \;=\; \overline{\lim} A_n^c \qquad e \qquad \left(\overline{\lim} A_n\right)^c \;=\; \underline{\lim} A_n^c \;.$$

□

Prova. A prova é uma aplicação imediata das definições e das relações (1.26) da Proposição 1.1, página 60. ■

Proposição 1.14 *Seja $\{A_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ uma coleção contável de subconjuntos de um conjunto não vazio X. Então,*

$$\underline{\lim} A_n \;\subset\; \overline{\lim} A_n \;.$$

□

Prova. A prova é imediata pelos Exercícios E. 1.55 e E. 1.56, pois se $x \in X$ é tal que x pertence a todos os conjuntos A_n exceto a no máximo um número finito deles (isto é, se $x \in \underline{\lim} A_n$), então x pertence a um número infinito de conjuntos A_n (isto é, $x \in \overline{\lim} A_n$).

Uma outra prova mais formal é a seguinte. Tem-se

$$\begin{aligned}
\left(\underline{\lim} A_n\right) \cap \left(\overline{\lim} A_n\right)^c \quad &= \quad \left(\underline{\lim} A_n\right) \cap \left(\underline{\lim} A_n^c\right) \\
&= \quad \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right) \cap \left(\bigcup_{n'=1}^{\infty} \bigcap_{k'=n'}^{\infty} A_{k'}^c\right) \\
&\stackrel{\text{Prop. 1.1}}{=} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{n'=1}^{\infty} \left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right) \cap \left(\bigcap_{k'=n'}^{\infty} A_{k'}^c\right) \;.
\end{aligned}$$

Agora, para cada par n, n' tem-se $\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right) \cap \left(\bigcap_{k'=n'}^{\infty} A_{k'}^c\right) = \emptyset$, pois essa intersecção é um subconjunto de conjuntos como $A_k \cap A_k^c$ com $k \geq n$ e $k \geq n'$ e, evidentemente, $A_k \cap A_k^c = \emptyset$. Assim, $\left(\underline{\lim} A_n\right) \cap \left(\overline{\lim} A_n\right)^c = \emptyset$, o que implica $\underline{\lim} A_n \subset \overline{\lim} A_n$. ■

• Convergência de sequências de conjuntos

Chegamos a uma definição importante: dizemos que uma coleção contável de conjuntos $\{A_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ converge a um conjunto A se

$$\underline{\lim} A_n \;=\; \overline{\lim} A_n \;=\; A.$$

Se uma coleção contável de conjuntos $\{A_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ converge a um conjunto A, então A é dito ser o *limite* de A_n, e escrevemos, como usualmente, $A = \lim_{n\to\infty} A_n$, ou ainda $A_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} A$.

E. 1.57 *Exercício*. Justifique a seguinte afirmativa: $\lim_{n\to\infty} A_n$ só existe se não há pontos $x \in X$ que, simultaneamente, pertençam a infinitos conjuntos A_n e não pertençam a infinitos conjuntos A_n. ✠

Uma sequência A_n de conjuntos é dita ser *crescente*, ou *expansiva*, se $A_n \subset A_{n+1}$ para todo n. Uma sequência A_n de conjuntos é dita ser *decrescente*, ou *contrativa*, se $A_{n+1} \subset A_n$ para todo n.

Proposição 1.15 *Se uma sequência A_n de conjuntos for crescente ou decrescente, então $\lim_{n\to\infty} A_n$ existe. Se A_n é crescente, vale*

$$\lim_{n\to\infty} A_n \;=\; \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \;.$$

Se A_n é decrescente, vale

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k .$$

□

Prova. Seja A_n uma sequência crescente de conjuntos. Então, $\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = A_n$. Logo, $\underline{\lim} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Por outro lado, pelo fato de A_n ser crescente vale também que $\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Logo, $\overline{\lim} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Com isso, estabeleceu-se que $\underline{\lim} A_n = \overline{\lim} A_n$ e, portanto, $\lim_{n\to\infty} A_n$ existe e vale $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$.

A prova para o caso de sequências decrescentes é análoga (faça-a!). ■

Os exercícios que seguem ilustram os conceitos acima.

E. 1.58 *Exercício.* Seja a família contável de subconjuntos de $\mathbb{R}$ dada por $A_n = [0,\ 10]$ se n for par e $A_n = [0,\ 5]$ se n for ímpar. Determine $\underline{\lim} A_n$ e $\overline{\lim} A_n$ e $\lim_{n\to\infty} A_n$ se este existir. ✠

E. 1.59 *Exercício.* Seja a família contável de subconjuntos de $\mathbb{R}$ dada por $A_n = [0,\ 1]$ se n for par e $A_n = [2,\ 3]$ se n for ímpar. Determine $\underline{\lim} A_n$ e $\overline{\lim} A_n$ e $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$, se este existir. ✠

E. 1.60 *Exercício.* Seja a família contável de subconjuntos de $\mathbb{R}$ dada por

$$A_n = \left[-\frac{1}{n},\ 1+\frac{1}{n}\right] ,$$

com $n \in \mathbb{N}$. Determine $\underline{\lim} A_n$, $\overline{\lim} A_n$ e $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$, se este existir. ✠

E. 1.61 *Exercício.* Seja a família contável de subconjuntos de $\mathbb{R}$ dada por

$$A_n = \left[\frac{1}{n+1},\ 1-\frac{1}{n+1}\right] ,$$

com $n \in \mathbb{N}$. Determine $\underline{\lim} A_n$, $\overline{\lim} A_n$ e $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$, se este existir. ✠

E. 1.62 *Exercício.* Crie seus próprios exemplos de famílias contáveis A_n de subconjuntos de $\mathbb{R}$ e estude seus $\underline{\lim} A_n$, $\overline{\lim} A_n$ e $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$, se este existir. ✠

1.2 Sistemas de Conjuntos

Seja X um conjunto não vazio e $\mathbb{P}(X)$ a coleção de todos os seus subconjuntos (incluindo o vazio e o próprio X). Uma subcoleção $\mathfrak{C}$ de conjuntos de X, ou seja, $\mathfrak{C} \subset \mathbb{P}(X)$, é dita ser um *sistema de conjuntos* em X. Dizemos que $\mathfrak{C}$ é fechado por uniões se para todos $A,\ B \in \mathfrak{C}$ valer $A \cup B \in \mathfrak{C}$. Falamos, analogamente, em sistemas de conjuntos fechados por intersecções, diferenças ou diferenças simétricas. Se $\mathfrak{C} \subset \mathbb{P}(X)$ for tal que $A^c \equiv X \setminus A$ for um elemento de $\mathfrak{C}$ sempre que $A \in \mathfrak{C}$, dizemos que $\mathfrak{C}$ é fechado por complementos.

Dado um conjunto não vazio X, há, naturalmente, muitos sistemas de conjuntos em X, mas frequentemente estamos interessados em sistemas que possuam determinadas propriedades específicas, tipicamente a de serem fechados por certas operações, como uniões, diferenças, intersecções etc. No que segue, listaremos os sistemas de conjuntos de maior interesse na literatura: os chamados semianéis de conjuntos, os anéis de conjuntos, as álgebras de conjuntos, os σ-anéis de conjuntos, as σ-álgebras de conjuntos, os sistemas monótonos de conjuntos, as topologias, os filtros e os ultrafiltros.

Seguindo o espírito geral deste capítulo, o propósito aqui é apenas o de listar definições, propriedades e exemplos elementares para futura referência, dado que várias das noções aqui tratadas e suas aplicações serão aprofundadas em capítulos futuros. O estudo de topologias e σ-álgebras, por exemplo, de importância central em Matemática, será aprofundado no Capítulo 27, página 1418, e seguintes.

O emprego de palavras como "anel" e "álgebra" na designação de certos sistemas de conjuntos que encontraremos adiante tem origem histórica em uma analogia observada por Hausdorff[88] entre certas operações envolvendo conjuntos, tais como união e intersecção, e operações algébricas de soma e multiplicação. Apesar disso, os conceitos de anel e álgebra de conjuntos não devem ser confundidos com os conceitos usuais de *anel* e de *álgebra* sobre os quais falaremos na Seção 2.1.6, página 137. A analogia a que nos referimos acima é a de que a operação de união de conjuntos disjuntos pode ser entendida como uma "soma" de conjuntos com um elemento neutro, a saber, o conjunto vazio (pois $A \cup \emptyset = A$ para qualquer conjunto A). O papel de "multiplicação" entre conjuntos seria exercido pela intersecção, onde o conjunto vazio seria o elemento nulo (pois sempre $A \cap \emptyset = \emptyset$). Fazemos notar que essa analogia não possui nenhuma relevância particular e o emprego de palavras como "anel" e "álgebra" no contexto de sistemas de conjuntos é, como ocorre com a maioria dos vocábulos, um resquício fóssil de ideias passadas.

1.2.1 Semianéis de Conjuntos

Seja X um conjunto não vazio. Uma coleção não vazia $\mathfrak{S} \subset \mathbb{P}(X)$ de subconjuntos de X é dita ser um *semianel* em X se possuir as seguintes propriedades:

1. Se A e B pertencem à coleção $\mathfrak{S}$, então $A \cap B$ também pertence à coleção $\mathfrak{S}$.
2. Se A e B pertencem à coleção $\mathfrak{S}$, então existe um $n \in \mathbb{N}$ e uma coleção finita $\{C_a,\ a = 1,\ \ldots,\ n\}$, de elementos <u>disjuntos</u> de $\mathfrak{S}$ tais que $A \setminus B = \bigcup_{a=1}^{n} C_a$.

Vamos a alguns exemplos elementares. O estudante é suposto justificar as afirmações que seguem.

Exemplo 1.5 Sejam α, β e γ três objetos distintos (por exemplo, três letras distintas do alfabeto grego). Seja $X = \{\alpha,\ \beta,\ \gamma\}$ e sejam

$$\mathfrak{S}_1 \ \equiv\ \Big\{\emptyset,\ \{\alpha\},\ \{\beta\},\ \{\gamma\},\ \{\alpha,\ \beta,\ \gamma\}\Big\} \quad \text{e} \quad \mathfrak{S}_2 \ \equiv\ \Big\{\emptyset,\ \{\alpha\},\ \{\beta,\ \gamma\},\ \{\alpha,\ \beta,\ \gamma\}\Big\}\ .$$

Então $\mathfrak{S}_1$ e $\mathfrak{S}_2$ são semianéis em X. ♦

Exemplo 1.6 Seja $X = \mathbb{R}$ e seja $\mathfrak{S}$ a coleção composta pelo vazio e por todos os intervalos semiabertos da forma $[a,\ b) \subset \mathbb{R}$ com $-\infty < a < b < \infty$. Então, $\mathfrak{S}$ é um semianel segundo a definição acima. ♦

Exemplo 1.7 Seja $X = \mathbb{R}$ e seja $\mathfrak{S}$ a coleção composta pelo vazio e por todos os intervalos semiabertos da forma $[a,\ b) \subset \mathbb{R}$ com $-\infty < a < b \leq \infty$. Então, $\mathfrak{S}$ é um semianel segundo a definição acima. ♦

Exemplo 1.8 O análogo dos exemplos acima, substituindo os intervalos da forma $[a,\ b)$ por intervalos da forma $(a,\ b]$. ♦

Exemplo 1.9 Seja $X = \mathbb{R}^n$ e seja $\mathfrak{S}$ a coleção composta pelo vazio e por todos os hipercubos semiabertos da forma $[a_1,\ b_1) \times \cdots \times [a_n,\ b_n) \subset \mathbb{R}^n$ com $-\infty < a_j < b_j < \infty$ para todo $j = 1,\ \ldots,\ n$. Então $\mathfrak{S}$ é um semianel segundo a definição acima. ♦

Exemplo 1.10 O mesmo que o exemplo anterior, permitindo-se aos b_j's serem infinitos. ♦

Exemplo 1.11 O análogo aos dois exemplos anteriores, trocando-se alguns (ou todos) os intervalos $[a_j,\ b_j)$ por intervalos $(a_j,\ b_j]$. ♦

[88] Felix Hausdorff (1868–1942).

1.2.2 Anéis de Conjuntos

Seja X um conjunto não vazio. Uma coleção não vazia $\mathfrak{R} \subset \mathbb{P}(X)$ de subconjuntos de X é dita ser um *anel* em X se possuir as seguintes propriedades:

1. Se A e B pertencem à coleção $\mathfrak{R}$, então $A \cup B$ também pertence à coleção $\mathfrak{R}$.
2. Se A e B pertencem à coleção $\mathfrak{R}$, então $A \setminus B$ também pertence à coleção $\mathfrak{R}$.

É de se observar que, pela definição acima, todo anel contém o conjunto vazio entre seus elementos, pois se $\mathfrak{R}$ é um anel e $A \in \mathfrak{R}$ valerá $\emptyset = A \setminus A \in \mathfrak{R}$.

Exemplo 1.12 Seja X um conjunto não vazio. Então, as coleções de conjuntos $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset,\ X\}$ e $\mathbb{P}(X)$ são três exemplos (um tanto banais) de anéis em X. Justifique! ♦

Todo anel em X é um semianel em X. Provemos essa afirmação. Para quaisquer conjuntos A e B vale $A \cap B = \big(A \cup B\big) \setminus \big((A \setminus B) \cup (B \setminus A)\big)$ (vide (1.39)). Disso é evidente que $A \cap B \in \mathfrak{R}$ caso A e B sejam elementos de $\mathfrak{R}$. Isso estabelece a propriedade 1 da definição de semianel. A propriedade 2 é válida trivialmente, pois se $A,\ B \in \mathfrak{R}$, então $C_1 \equiv A \setminus B$ é um elemento de $\mathfrak{R}$ e, trivialmente, $A \setminus B = C_1 \in \mathfrak{R}$.

A recíproca da afirmação do último parágrafo não é sempre verdadeira: nem todo semianel é um anel, um exemplo sendo dado pelo semianel do Exercício 1.6, acima (justifique!).

A proposição a seguir contém duas propriedades básicas de anéis e também fornece uma possível caracterização alternativa da noção de anel.

Proposição 1.16 *Se X é um conjunto não vazio, então uma coleção $\mathfrak{R} \subset \mathbb{P}(X)$ é um anel em X se e somente se para todos $A,\ B \in \mathfrak{R}$, valerem $A \cap B \in \mathfrak{R}$ e $A \triangle B \in \mathfrak{R}$.* □

Prova. Seja $\mathfrak{R}$ um anel em X e sejam $A,\ B \in \mathfrak{R}$. Como $A \cap B = \big(A \cup B\big) \setminus \big((A \setminus B) \cup (B \setminus A)\big)$ (vide (1.39)) para quaisquer conjuntos A e B, segue que $A \cap B \in \mathfrak{R}$. Analogamente, como $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, também é válida para quaisquer conjuntos A e B (vide 1.38), segue que $A \triangle B \in \mathfrak{R}$.

Vamos agora supor que para todos $A',\ B' \in \mathfrak{R}$, valem $A' \cap B' \in \mathfrak{R}$ e $A' \triangle B' \in \mathfrak{R}$. Por (1.40) vale $A \cup B = \big(A \triangle B\big) \triangle \big(A \cap B\big)$, provando que $A \cup B \in \mathfrak{R}$ caso $A,\ B \in \mathfrak{R}$. Por (1.41), vale $A \setminus B = A \triangle \big(A \cap B\big)$, provando que $A \setminus B \in \mathfrak{R}$ caso $A,\ B \in \mathfrak{R}$. Isso estabeleceu que $\mathfrak{R}$ é um anel em X. ■

Segue diretamente das afirmações acima que um anel é fechado por uniões e intersecções finitas de seus elementos.

• Intersecções de anéis de conjuntos

Como antes, seja X um conjunto não vazio e seja $\{\mathfrak{R}_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$ uma coleção de anéis em X. Aqui, o conjunto de índices Λ que indexa a coleção de anéis pode ser arbitrário, podendo não ser nem finito nem mesmo enumerável. Como cada $\mathfrak{R}_\lambda$ é um subconjunto de $\mathbb{P}(X)$, podemos considerar a intersecção de todas essas coleções de conjuntos: $\displaystyle\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{R}_\lambda \subset \mathbb{P}(X)$. Como todo anel contém o conjunto vazio, é claro que $\displaystyle\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{R}_\lambda$ é não vazio (pois contém ao menos o conjunto vazio). O ponto importante para nós é a seguinte proposição:

Proposição 1.17 *Seja X um conjunto não vazio e seja $\{\mathfrak{R}_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$ uma coleção de anéis em X. Então, $\displaystyle\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{R}_\lambda$ é também um anel em X.* □

Prova. Se $A,\ B$ são elementos de $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{R}_\lambda$, então ambos pertencem a cada anel $\mathfrak{R}_\lambda$. Logo, $A \cup B$ e $A \setminus B$ também pertencem a cada $\mathfrak{R}_\lambda$ e, portanto, a $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{R}_\lambda$. ■

O ponto central da demonstração acima é o fato de um anel ser definido como uma coleção de conjuntos fechada por certas operações de conjuntos, a saber, a união e a diferença. Como é fácil perceber, isso implica que como $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{R}_\lambda$ é não vazio, será também fechado pelas mesmas operações. É de se notar que tal argumentação não se aplica a semianéis: os mesmos não são definidos em termos de uma coleção de conjuntos fechada por certas operações (isso fica claro ao contemplarmos o item 2 da definição de semianel). Com efeito, não é verdade que intersecções de semianéis sempre produzam novamente um semianel! O exemplo a seguir ilustra isso.

Exemplo 1.13 Considere os semianéis $\mathfrak{S}_1$ e $\mathfrak{S}_2$ do Exemplo 1.5, página 97. Tem-se $\mathfrak{S}_1 \cap \mathfrak{S}_2 = \Big\{\emptyset, \ \{\alpha\}, \ \{\alpha, \ \beta, \ \gamma\}\Big\}$, que não é um semianel, pois $\{\alpha, \ \beta, \ \gamma\} \setminus \{\alpha\} = \{\beta, \ \gamma\}$, que não pode ser escrito como união disjunta de elementos de $\mathfrak{S}_1 \cap \mathfrak{S}_2$. ◆

• **O anel gerado por uma coleção de conjuntos**

Como antes, seja X um conjunto não vazio e seja $\mathfrak{C} \subset \mathbb{P}(X)$ uma coleção não vazia de subconjuntos de X. Existe pelo menos um anel em X que contém $\mathfrak{C}$, a saber, $\mathbb{P}(X)$. Portanto, a intersecção de todos os anéis em X que contém $\mathfrak{C}$ é não vazia, sendo também um anel em X (pela Proposição 1.17). Esse anel assim definido é o menor anel em X que contém $\mathfrak{C}$ e é denominado o *anel gerado* em X pela coleção de conjuntos $\mathfrak{C}$, sendo denotado por $\mathfrak{R}[\mathfrak{C}]$.

1.2.3 Álgebras de Conjuntos

Seja X um conjunto não vazio. Uma coleção não vazia $\mathfrak{A} \subset \mathbb{P}(X)$ de subconjuntos de X é dita ser uma *álgebra* em X se possuir as seguintes propriedades:

1. Se A e B pertencem à coleção $\mathfrak{A}$, então $A \cup B$ também pertence à coleção $\mathfrak{A}$.
2. Se $A \in \mathfrak{A}$, então $A^c \equiv X \setminus A$ também pertence à coleção $\mathfrak{A}$.

Se $\mathfrak{A}$ é uma álgebra em X e $A \in \mathfrak{A}$, então $\mathfrak{A} \ni A \cup A^c = X$. Assim, toda álgebra em X contém o próprio conjunto X. Como toda álgebra em X é um anel em X, contém também o conjunto vazio.

A seguinte proposição contém uma caracterização alternativa da noção de álgebra.

Proposição 1.18 *Seja X um conjunto não vazio. Uma coleção não vazia $\mathfrak{A} \subset \mathbb{P}(X)$ de subconjuntos de X é uma álgebra em X se e somente se for um anel em X e se $X \in \mathfrak{A}$.* □

Prova. A propriedade de ser fechado por uniões é comum a anéis e a álgebras. Se $\mathfrak{A}$ é uma álgebra em X e $A, \ B \in \mathfrak{A}$, teremos $A \setminus B = A \cap B^c = (A^c \cup B)^c$. Como $\mathfrak{A}$ é fechada por uniões e complementos, vemos por essa relação que $A \setminus B \in \mathfrak{A}$, provando que $\mathfrak{A}$ é um anel em X.

Reciprocamente, se $\mathfrak{R} \subset \mathbb{P}(X)$ é um anel em X e $X \in \mathfrak{R}$, então para todo $A \in \mathfrak{R}$ vale $\mathfrak{R} \ni X \setminus A \equiv A^c$, provando que $\mathfrak{R}$ é uma álgebra em X. ■

Exemplo 1.14 Seja X um conjunto não vazio. Então, as coleções de conjuntos $\{\emptyset, \ X\}$ e $\mathbb{P}(X)$ são dois exemplos (um tanto banais) de álgebras em X. Justifique! ◆

• **A álgebra gerada por uma coleção de conjuntos**

Como antes, seja X um conjunto não vazio e seja $\{\mathfrak{A}_\lambda, \ \lambda \in \Lambda\}$ uma coleção de álgebras em X. Aqui, o conjunto de índices Λ que indexa a coleção de álgebras pode ser arbitrário, podendo não ser nem finito nem mesmo enumerável. Notamos que a intersecção $\{\mathfrak{A}_\lambda, \ \lambda \in \Lambda\}$ é não vazia, pois, como comentamos, toda álgebra em X contém $\emptyset$ e X. Analogamente ao caso de anéis, vale a seguinte proposição:

Proposição 1.19 *Seja X um conjunto não vazio e seja $\{\mathfrak{A}_\lambda, \ \lambda \in \Lambda\}$ uma coleção de álgebras em X. Então, $\bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{A}_\lambda$ é também uma álgebra em X.* □

Prova. Se $A, \ B$ são elementos de $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{A}_\lambda$, então ambos pertencem a cada álgebra $\mathfrak{A}_\lambda$. Logo, $A \cup B$ e A^c também pertencem a cada $\mathfrak{A}_\lambda$ e, portanto, a $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{A}_\lambda$. ■

Novamente, o ponto central da demonstração acima é o fato de uma álgebra ser definida como uma coleção de conjuntos fechada por certas operações de conjuntos, a saber, a união e o complemento. Como é fácil perceber, isso implica que como $\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\mathfrak{A}_\lambda$ é não vazio, será também fechado pelas mesmas operações.

Como antes, seja X um conjunto não vazio e seja $\mathfrak{C}\subset\mathbb{P}(X)$ uma coleção não vazia de subconjuntos de X. Existe pelo menos uma álgebra em X que contém $\mathfrak{C}$, a saber, $\mathbb{P}(X)$. Portanto, a intersecção de todos as álgebras em X que contém $\mathfrak{C}$ é não vazia, sendo também uma álgebra em X (pela Proposição 1.19). Essa álgebra assim definida é a menor álgebra em X que contém $\mathfrak{C}$ e é denominada a *álgebra gerada* em X pela coleção de conjuntos $\mathfrak{C}$, sendo denotada por $\mathfrak{A}[\mathfrak{C}]$.

1.2.4 σ-Anéis de Conjuntos

Seja X um conjunto não vazio. Uma coleção não vazia $\mathfrak{R}^\sigma\subset\mathbb{P}(X)$ de subconjuntos de X é dita ser um *σ-anel* em X se possuir as seguintes propriedades:

1. $\mathfrak{R}^\sigma$ é um anel em X.
2. Se $\{A_j\in\mathfrak{R}^\sigma,\ j\in\mathbb{N}\}$ for uma coleção enumerável de elementos de $\mathfrak{R}^\sigma$, então $\displaystyle\bigcup_{j\in\mathbb{N}}A_j\in\mathfrak{R}^\sigma$.

Em palavras, podemos afirmar que um σ-anel é um anel que é também fechado por uniões enumeráveis de seus elementos.

Exemplo 1.15 Seja X um conjunto não enumerável e seja $\mathfrak{R}^\sigma$ a coleção de todos os subconjuntos enumeráveis de X. Então, $\mathfrak{R}^\sigma$ é um σ-anel em X. Justifique! ♦

Todo σ-anel $\mathfrak{R}^\sigma$ em X possui o conjunto vazio entre seus elementos (por ser um anel, vide comentário acima), mas não necessariamente contém X. Um σ-anel em X que contenha o próprio X é dito ser uma σ-álgebra em X.

Sobre a nomenclatura, o "σ" do nome "σ-anel" é usado em função da propriedade 2 da definição, que se refere ao fato de σ-anéis serem fechados em relação a operações envolvendo uniões ("σomas") enumeráveis de seus conjuntos. Aqui, o ponto importante é a enumerabilidade e, por isso, é frequente encontrar-se o símbolo σ em outros objetos matemáticos para os quais a enumerabilidade desempenha algum papel (como na noção de σ-álgebra, adiante, e como na topologia denominada σ-fraca, por exemplo).

A seguinte observação simples sobre σ-anéis será útil:

Proposição 1.20 *Se $\mathfrak{R}^\sigma$ é um σ-anel em X e $\{A_n\in\mathfrak{R}^\sigma,\ n\in\mathbb{N}\}$ é uma coleção contável de elementos de $\mathfrak{R}^\sigma$, então $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}A_n\in\mathfrak{R}^\sigma$.* □

Prova. Isso segue facilmente da observação que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}}A_n\;=\;\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\big(A_1\cap A_n\big)\;\overset{(1.9)}{=}\;\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\Big(A_1\setminus\big(A_1\setminus A_n\big)\Big)\;\overset{(1.22)}{=}\;A_1\setminus\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\big(A_1\setminus A_n\big)\right)\;\in\;\mathfrak{R}^\sigma\,,$$

pela definição de σ-anel. ■

• O σ-anel gerado por uma coleção de conjuntos

Como antes, seja X um conjunto não vazio e seja $\{\mathfrak{R}^\sigma_\lambda,\ \lambda\in\Lambda\}$ uma coleção de σ-anéis em X. Aqui, o conjunto de índices Λ que indexa a coleção de σ-anéis pode ser arbitrário, podendo não ser nem finito nem mesmo enumerável. Analogamente ao caso de anéis, vale a seguinte proposição:

Proposição 1.21 *Seja X um conjunto não vazio e seja $\{\mathfrak{R}^\sigma_\lambda,\ \lambda\in\Lambda\}$ uma coleção de σ-anéis em X. Então, $\displaystyle\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\mathfrak{R}^\sigma_\lambda$ é também um σ-anel em X.* □

Prova. Como cada $\mathfrak{R}^\sigma_\lambda$ é um anel, $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} \mathfrak{R}^\sigma_\lambda$ é igualmente um anel, pela Proposição 1.17, página 98. Se $\{A_j, j \in \mathbb{N}\}$ é uma coleção contável de elementos de $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathfrak{R}^\sigma_\lambda$, então cada A_j pertence a cada σ-anel $\mathfrak{R}^\sigma_\lambda$. Logo, $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$ também pertence a cada $\mathfrak{R}^\sigma_\lambda$ e, portanto, a $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathfrak{A}^\sigma_\lambda$. ■

Como antes, seja X um conjunto não vazio e seja $\mathfrak{C} \subset \mathbb{P}(X)$ uma coleção não vazia de subconjuntos de X. Existe pelo menos um σ-anel em X que contém $\mathfrak{C}$, a saber, $\mathbb{P}(X)$. Portanto, a intersecção de todos os σ-anéis em X que contém $\mathfrak{C}$ é não vazia, sendo também um σ-anel em X (pela Proposição 1.21). Esse σ-anel assim definido é o menor σ-anel em X que contém $\mathfrak{C}$ e é denominado o *σ-anel gerado* em X pela coleção de conjuntos $\mathfrak{C}$, sendo denotado por $\mathfrak{R}^\sigma[\mathfrak{C}]$.

1.2.5 σ-Álgebras de Conjuntos

Seja X um conjunto não vazio. Uma coleção não vazia $\mathfrak{A}^\sigma \subset \mathbb{P}(X)$ de subconjuntos de X é dita ser um *σ-álgebra* em X se possuir as seguintes propriedades:

1. $\mathfrak{A}^\sigma$ é um σ-anel em X.
2. $X \in \mathfrak{A}^\sigma$.

Por ser um σ-anel, toda σ-álgebra contém o conjunto vazio entre seus elementos. Toda σ-álgebra em X é uma álgebra em X. De fato, se $\mathfrak{A}^\sigma$ é uma σ-álgebra em X, então $\mathfrak{A}^\sigma$ é um anel em X (por ser um σ-anel em X) e contém X. Logo, pela Proposição 1.18, página 99, $\mathfrak{A}^\sigma$ é uma álgebra em X.

De posse dessas observações, podemos apresentar a definição da noção de σ-álgebra sobre X da seguinte forma. Uma coleção $\mathfrak{A}^\sigma$ de subconjuntos de X, ou seja, $\mathfrak{A}^\sigma \subset \mathbb{P}(X)$, é dita ser uma *$\sigma$-álgebra* em X se os seguintes requisitos forem satisfeitos:

1. $\emptyset \in \mathfrak{A}^\sigma$ e $X \in \mathfrak{A}^\sigma$.
2. Se $A \in \mathfrak{A}^\sigma$, então $A^c \equiv X \setminus A \in \mathfrak{A}^\sigma$.
3. Se $\{A_j \in \mathfrak{A}^\sigma,\ j \in \mathbb{N}\}$ é uma coleção enumerável de elementos de $\mathfrak{A}^\sigma$, então $\bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} A_j$ também é um elemento de $\mathfrak{A}^\sigma$.

Exemplo 1.16 Seja X um conjunto não vazio. Então, as coleções de conjuntos $\{\emptyset,\ X\}$ e $\mathbb{P}(X)$ são dois exemplos (um tanto banais) de σ-álgebras em X. Justifique! ♦

Exemplo 1.17 Seja X um conjunto enumerável e seja $\mathfrak{A}^\sigma$ a coleção de todos os subconjuntos enumeráveis de X. Então, $\mathfrak{A}^\sigma$ é um σ-álgebra em X. Justifique! ♦

A seguinte observação simples sobre σ-álgebras será útil:

Proposição 1.22 *Se $\mathfrak{A}^\sigma$ é uma σ-álgebra em X e $\{A_n \in \mathfrak{A}^\sigma,\ n \in \mathbb{N}\}$ é uma coleção contável de elementos de $\mathfrak{A}^\sigma$, então $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{A}^\sigma$.* □

Prova. Isso segue facilmente da observação que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \stackrel{(1.26)}{=} \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^c\right)^c \in \mathfrak{A}^\sigma ,$$

pela definição de σ-álgebra. ■

• **A σ-álgebra gerada por uma coleção de conjuntos**

Como antes, seja X um conjunto não vazio e seja $\{\mathfrak{A}^\sigma_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$ uma coleção de σ-álgebras em X. Aqui, o conjunto de índices Λ que indexa a coleção de σ-álgebras pode ser arbitrário, podendo não ser nem finito nem mesmo enumerável.

Notamos que a intersecção $\{\mathfrak{A}^\sigma_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$ é não vazia, pois, como comentamos, toda σ-álgebra em X contém $\emptyset$ e X. Analogamente ao caso de anéis, vale a seguinte proposição:

Proposição 1.23 *Seja X um conjunto não vazio e seja $\{\mathfrak{A}^\sigma_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$ uma coleção de σ-álgebras em X. Então, $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} \mathfrak{A}^\sigma_\lambda$ é também uma σ-álgebra em X.* □

Prova. Se $\{A_j, j \in \mathbb{N}\}$ é uma coleção contável de elementos de $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathfrak{A}^\sigma_\lambda$, então cada A_j pertence a cada σ-álgebra $\mathfrak{A}^\sigma_\lambda$. Logo, $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$ também pertence a cada $\mathfrak{A}^\sigma_\lambda$ e, portanto, a $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathfrak{A}^\sigma_\lambda$. Analogamente, se $A \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathfrak{A}^\sigma_\lambda$, então A pertence a cada $\mathfrak{A}^\sigma_\lambda$ e, portanto, A^c também. Logo, $A^c \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathfrak{A}^\sigma_\lambda$. ■

Novamente, o ponto central da demonstração acima é o fato de uma σ-álgebra ser definida como uma coleção de conjuntos fechada por certas operações de conjuntos, a saber, a união e o complemento. Como é fácil perceber, isso implica que como $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathfrak{A}_\lambda$ é não vazio, será também fechado pelas mesmas operações.

Como antes, seja X um conjunto não vazio e seja $\mathfrak{C} \subset \mathbb{P}(X)$ uma coleção não vazia de subconjuntos de X. Existe pelo menos uma σ-álgebra em X que contém $\mathfrak{C}$, a saber, $\mathbb{P}(X)$. Portanto, a intersecção de todas as σ-álgebras em X que contém $\mathfrak{C}$ é não vazia, sendo também uma σ-álgebra em X (pela Proposição 1.23). Essa σ-álgebra assim definida é a menor σ-álgebra em X que contém $\mathfrak{C}$ e é denominada a *σ-álgebra gerada* em X pela coleção de conjuntos $\mathfrak{C}$, sendo denotada por $\mathfrak{A}^\sigma[\mathfrak{C}]$.

* * *

Assim como a noção de topologia, a noção de σ-álgebra desempenha um papel central em Análise, especialmente na Teoria da Medida e Integração e na Teoria das Probabilidades. Por essa razão, seu estudo será aprofundado no Capítulo 27, página 1418, e seguintes.

* ** *

Ao apresentarmos as diversas definições acima observamos repetidamente que certos tipos de sistemas de conjuntos são casos particulares de outros, por exemplo, observamos que todo anel é um semianel, que toda álgebra é um anel etc. O seguinte quadro reúne essas observações de forma autoexplicativa:

$$
\begin{array}{ccccc}
\text{álgebras} & \subset & \text{anéis} & \subset & \text{semianéis} \\
\cup & & \cup & & \\
\sigma\text{-álgebras} & \subset & \sigma\text{-anéis} & &
\end{array} .
$$

1.2.6 Sistemas Monótonos de Conjuntos

Seja X um conjunto não vazio. Uma coleção contável $\{A_n \subset X,\ n \in \mathbb{N}\}$ é dita ser crescente se $A_n \subset A_m$ sempre que $n \leq m$ e, nesse caso, temos

$$\lim_{n\to\infty} A_n \;=\; \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \, .$$

Vide Proposição 1.15, página 95. Analogamente, uma coleção contável $\{A_n \subset X,\ n \in \mathbb{N}\}$ é dita ser decrescente se $A_n \supset A_m$ sempre que $n \leq m$ e, nesse caso, temos

$$\lim_{n\to\infty} A_n \;=\; \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \, .$$

Seja X um conjunto não vazio. Uma coleção não vazia $\mathsf{C} \subset \mathbb{P}(X)$ de subconjuntos de X é dita ser um *sistema monótono crescente* (ou uma *classe monótona crescente*) de subconjuntos de X se para toda coleção contável crescente $\{A_n \in \mathsf{C},\ n \in \mathbb{N}\}$ valer também que $\lim_{n\to\infty} A_n \in \mathsf{C}$, ou seja, valer que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathsf{C}$.

Seja X um conjunto não vazio. Uma coleção não vazia $\mathsf{D} \subset \mathbb{P}(X)$ de subconjuntos de X é dita ser um *sistema monótono decrescente* (ou uma *classe monótona decrescente*) de subconjuntos de X se para toda coleção contável decrescente $\{A_n \in \mathsf{D},\ n \in \mathbb{N}\}$ valer também que $\lim_{n\to\infty} A_n \in \mathsf{D}$, ou seja, valer que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathsf{D}$.

Uma coleção não vazia $\mathsf{M} \subset \mathbb{P}(X)$ é dita ser um *sistema monótono* (ou *classe monótona*) de subconjuntos de X se for simultaneamente um sistema monótono crescente e decrescente.

• O sistema monótono gerado por uma coleção de conjuntos

É elementar constatar que $\mathbb{P}(X)$ é um sistema monótono em X. Com isso, vê-se que toda coleção de subconjuntos de X está contida em um sistema monótono em X (no pior dos casos, em $\mathbb{P}(X)$).

Observemos agora que se $\{\mathsf{M}_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$ é uma coleção de sistemas monótonos em X, então $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathsf{M}_\lambda$ é também um sistema monótono em X. De fato, se $\{A_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ for uma coleção crescente ou decrescente de subconjuntos de X tal que para todo $\lambda \in \Lambda$ vale $\{A_n,\ n \in \mathbb{N}\} \subset \mathsf{M}_\lambda$, então $\lim_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathsf{M}_\lambda$ também para todo $\lambda \in \Lambda$. Ora, isso diz que se $\{A_n,\ n \in \mathbb{N}\} \subset \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathsf{M}_\lambda$, então $\lim_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathsf{M}_\lambda$, estabelecendo a afirmação desejada.

Com as observações dos dois últimos parágrafos podemos constituir a noção de *sistema monótono gerado por uma coleção de conjuntos*: se $\mathcal{A} \subset \mathbb{P}(X)$ é uma coleção de subconjuntos de X, definimos $\mathsf{M}[\mathcal{A}]$, como sendo a intersecção de todos os sistemas monótonos que contém a coleção $\mathcal{A}$. Claro está que $\mathsf{M}[\mathcal{A}]$ é igualmente um sistema monótono, o menor sistema monótono que contém $\mathcal{A}$, denominado o *sistema monótono gerado por* $\mathcal{A}$.

• Relação entre sistemas monótonos, anéis, álgebras, σ-anéis e σ-álgebras

Temos o seguinte resultado:

Proposição 1.24 *Seja X não vazio. Se um anel de conjuntos $\mathfrak{R}$ em X é um sistema monótono em X, então é um σ-anel em X. Se uma álgebra de conjuntos $\mathfrak{A}$ em X é um sistema monótono em X, então é uma σ-álgebra em X.* □

Prova. Seja $\mathfrak{R}$ um anel e $\{A_n \in \mathfrak{R},\ n \in \mathbb{N}\}$ uma coleção enumerável de elementos de $\mathfrak{R}$. Defina-se $B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$, $n \in \mathbb{N}$. Trata-se de uma coleção crescente de elementos de $\mathfrak{R}$. Assim, como $\mathfrak{R}$ é um sistema monótono, $\lim_{n\to\infty} B_n$ é um elemento de $\mathfrak{R}$. Porém, $\lim_{n\to\infty} B_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$. Assim, $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathfrak{R}$, provando que $\mathfrak{R}$ é um σ-anel.

A demostração de que álgebras que sejam sistemas monótonos são σ-álgebras é idêntica. ■

Existem pelo menos tantos sistemas monótonos quanto σ-álgebras ou σ-anéis:

Proposição 1.25 *Seja X não vazio. Se uma coleção de conjuntos $\mathfrak{A} \subset \mathbb{P}(X)$ é um σ-anel ou uma σ-álgebra em X, então $\mathfrak{A}$ é um sistema monótono em X.* □

Prova. É claro pela definição que todo σ-anel em X é um sistema monótono crescente em X e, pela Proposição 1.20, página 100, é também um sistema monótono decrescente em X. É claro pela definição que toda σ-álgebra em X é um sistema monótono crescente em X e, pela Proposição 1.22, página 101, é também um sistema monótono decrescente em X. ■

• O Teorema das Classes Monótonas

O teorema a seguir tem consequências importantes na Teoria da Medida e Integração, especialmente no que concerne a extensões de certas medidas.

Proposição 1.26 (Teorema das Classes Monótonas) Parte I. *Seja X não vazio e $\mathfrak{R}$ um anel em X. Então, vale*

$$\mathfrak{R}^\sigma[\mathfrak{R}] \;=\; \mathsf{M}[\mathfrak{R}]\,, \tag{1.67}$$

ou seja, o σ-anel gerado por um anel $\mathfrak{R}$ coincide com o sistema monótono gerado por $\mathfrak{R}$.

Parte II. *Seja X não vazio e $\mathfrak{A}$ uma álgebra em X. Então, vale*

$$\mathfrak{A}^\sigma[\mathfrak{A}] \;=\; \mathsf{M}[\mathfrak{A}] \;=\; \mathfrak{R}^\sigma[\mathfrak{A}]\,,$$

ou seja, a σ-álgebra gerada por uma álgebra $\mathfrak{A}$ coincide com o sistema monótono gerado por $\mathfrak{A}$ e também com o σ-anel gerado por $\mathfrak{A}$. □

Na demonstração abaixo, seguiremos proximamente a argumentação de [220], acrescentando e elucidando certos detalhes.

Prova da Parte I. Como $\mathfrak{R}^\sigma[\mathfrak{R}]$ é um σ-anel, é um sistema monótono (Proposição 1.25, página 103). Como é um sistema monótono que contém $\mathfrak{R}$, tem-se que $\mathsf{M}[\mathfrak{R}] \subset \mathfrak{R}^\sigma[\mathfrak{R}]$.

Desejamos provar que $\mathsf{M}[\mathfrak{R}]$ é um σ-anel, pois sendo um σ-anel que contém $\mathfrak{R}$, valerá $\mathfrak{R}^\sigma[\mathfrak{R}] \subset \mathsf{M}[\mathfrak{R}]$, pela definição do σ-anel gerado $\mathfrak{R}^\sigma[\mathfrak{R}]$. Pela Proposição 1.24, página 103, é suficiente para tal provar que $\mathsf{M}[\mathfrak{R}]$ é um anel, que é o que faremos no que segue.

Para $Y \subset X$, defina-se o seguinte sistema de conjuntos:

$$\mathfrak{H}(Y) := \left\{ Z \subset X \,\middle|\, Z \setminus Y \in \mathsf{M}[\mathfrak{R}], \;\; Y \setminus Z \in \mathsf{M}[\mathfrak{R}] \;\text{ e }\; Y \cup Z \in \mathsf{M}[\mathfrak{R}] \right\} . \tag{1.68}$$

É evidente pela simetria na definição acima que

$$A \in \mathfrak{H}(B) \Leftrightarrow B \in \mathfrak{H}(A) . \tag{1.69}$$

Afirmamos que $\mathfrak{H}(Y)$ é um sistema monótono para cada $Y \subset X$. Isso é provado após os seguintes passos:

1. Se $\{Z_n \in \mathfrak{H}(Y),\ n \in \mathbb{N}\}$ é uma coleção crescente de elementos de $\mathfrak{H}(Y)$, teremos:

   (a)
   $$\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Z_n \right) \setminus Y \stackrel{(1.23)}{=} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \big(Z_n \setminus Y \big) \;\in\; \mathsf{M}[\mathfrak{R}] , \tag{1.70}$$
   pois $\{Z_n \setminus Y,\ n \in \mathbb{N}\}$ é crescente e cada $Z_n \setminus Y$ é elemento de $\mathsf{M}[\mathfrak{R}]$ (vide a definição de $\mathfrak{H}(Y)$ em (1.68)).

   (b)
   $$Y \setminus \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Z_n \right) \stackrel{(1.22)}{=} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \big(Y \setminus Z_n \big) \;\in\; \mathsf{M}[\mathfrak{R}] , \tag{1.71}$$
   pois $\{Y \setminus Z_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ é decrescente e cada $Y \setminus Z_n$ é elemento de $\mathsf{M}[\mathfrak{R}]$.

   (c)
   $$\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Z_n \right) \cup Y \stackrel{(1.25)}{=} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \big(Z_n \cup Y \big) \;\in\; \mathsf{M}[\mathfrak{R}] , \tag{1.72}$$
   pois $\{Z_n \cup Y,\ n \in \mathbb{N}\}$ é crescente e cada $Z_n \cup Y$ é elemento de $\mathsf{M}[\mathfrak{R}]$.

   As relações de pertinência (1.70)–(1.72) afirmam que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Z_n \in \mathfrak{H}(Y)$, provando que $\mathfrak{H}(Y)$ é um sistema monótono crescente.

2. Se $\{Z_n \in \mathfrak{H}(Y),\ n \in \mathbb{N}\}$ é uma coleção decrescente de elementos de $\mathfrak{H}(Y)$, teremos:

   (a)
   $$\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} Z_n \right) \setminus Y \stackrel{(1.23)}{=} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \big(Z_n \setminus Y \big) \;\in\; \mathsf{M}[\mathfrak{R}] , \tag{1.73}$$
   pois $\{Z_n \setminus Y,\ n \in \mathbb{N}\}$ é decrescente e cada $Z_n \setminus Y$ é elemento de $\mathsf{M}[\mathfrak{R}]$ (vide a definição de $\mathfrak{H}(Y)$ em (1.68)).

   (b)
   $$Y \setminus \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} Z_n \right) \stackrel{(1.22)}{=} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \big(Y \setminus Z_n \big) \;\in\; \mathsf{M}[\mathfrak{R}] , \tag{1.74}$$
   pois $\{Y \setminus Z_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ é crescente e cada $Y \setminus Z_n$ é elemento de $\mathsf{M}[\mathfrak{R}]$.

   (c)
   $$\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} Z_n \right) \cup Y \stackrel{(1.24)}{=} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \big(Z_n \cup Y \big) \;\in\; \mathsf{M}[\mathfrak{R}] , \tag{1.75}$$
   pois $\{Z_n \cup Y,\ n \in \mathbb{N}\}$ é decrescente e cada $Z_n \cup Y$ é elemento de $\mathsf{M}[\mathfrak{R}]$.

As relações de pertinência (1.73)–(1.75) afirmam que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} Z_n \in \mathfrak{H}(Y)$, provando que $\mathfrak{H}(Y)$ é um sistema monótono decrescente.

Isso estabeleceu que se $\{Z_n \in \mathfrak{H}(Y),\ n \in \mathbb{N}\}$ é uma coleção crescente ou decrescente de elementos de $\mathfrak{H}(Y)$ seu limite estará em $\mathfrak{H}(Y)$, o que prova que $\mathfrak{H}(Y)$ é um sistema monótono.

Vamos agora provar que para todo $A' \in \mathfrak{R}$ vale

$$\mathsf{M}[\mathfrak{R}] \subset \mathfrak{H}(A') . \tag{1.76}$$

Se $A',\ B \in \mathfrak{R}$, valem, pela propriedade de anel $A' \setminus B \in \mathfrak{R}$, $B \setminus A' \in \mathfrak{R}$ e $A' \cup B \in \mathfrak{R}$. Logo, $A' \in \mathfrak{H}(B)$ e $B \in \mathfrak{H}(A')$. Como a última relação de pertinência é válida para todo $B \in \mathfrak{R}$, concluímos que

$$\mathfrak{R} \subset \mathfrak{H}(A') .$$

Como $\mathfrak{H}(A')$ é um sistema monótono, deve valer também

$$\mathsf{M}[\mathfrak{R}] \subset \mathfrak{H}(A') ,$$

como queríamos mostrar, pois $\mathsf{M}[\mathfrak{R}]$ é, por definição, o menor sistema monótono que contém $\mathfrak{R}$.

Vamos agora estender esse pequeno resultado e provar que para todo $A \in \mathsf{M}[\mathfrak{R}]$ vale

$$\mathsf{M}[\mathfrak{R}] \subset \mathfrak{H}(A) . \tag{1.77}$$

Se $A \in \mathsf{M}[\mathfrak{R}]$ e $A' \in \mathfrak{R}$, (1.76) garante que $A \in \mathfrak{H}(A')$. Logo, por (1.69), vale também $A' \in \mathfrak{H}(A)$. Como isso é verdadeiro para todo $A' \in \mathfrak{R}$, estabelecemos que

$$\mathfrak{R} \subset \mathfrak{H}(A) .$$

Como $\mathfrak{H}(A)$ é um sistema monótono, isso implica que

$$\mathsf{M}[\mathfrak{R}] \subset \mathfrak{H}(A) ,$$

como queríamos mostrar, pois $\mathsf{M}[\mathfrak{R}]$ é, por definição, o menor sistema monótono que contém $\mathfrak{R}$.

Com isso, podemos finalmente atingir nosso objetivo de provar que $\mathsf{M}[\mathfrak{R}]$ é um anel. Como (1.77) vale para todo $A \in \mathsf{M}[\mathfrak{R}]$, concluímos de (1.77) e da definição de $\mathfrak{H}(A)$ que para todo $B \in \mathsf{M}[\mathfrak{R}]$ valem

$$B \setminus A \in \mathsf{M}[\mathfrak{R}], \quad A \setminus B \in \mathsf{M}[\mathfrak{R}] \ \text{ e } \ A \cup B \in \mathsf{M}[\mathfrak{R}] .$$

Como isso é válido para todos $A,\ B \in \mathsf{M}[\mathfrak{R}]$, concluímos que $\mathsf{M}[\mathfrak{R}]$ é um anel. Isso completou a prova da Parte I.

Prova da Parte II. Pela Proposição 1.18, página 99, $\mathfrak{A}$ é um anel e $X \in \mathfrak{A}$. Como $\mathfrak{A}$ é um anel, a Parte I garante que $\mathsf{M}[\mathfrak{A}] = \mathfrak{R}^\sigma[\mathfrak{A}]$. Observe-se agora que se $X \in \mathfrak{A}$, então $X \in \mathfrak{R}^\sigma[\mathfrak{A}]$. Logo, $\mathfrak{R}^\sigma[\mathfrak{A}]$ é uma σ-álgebra (vide a definição de σ-álgebra à página 101). Isso implica que $\mathfrak{A}^\sigma[\mathfrak{A}] \subset \mathfrak{R}^\sigma[\mathfrak{A}]$, pois $\mathfrak{A}^\sigma[\mathfrak{A}]$ é, por definição, a menor σ-álgebra que contém $\mathfrak{A}$. No entanto, como a σ-álgebra $\mathfrak{A}^\sigma[\mathfrak{A}]$ é, também por definição, um σ-anel, segue igualmente que $\mathfrak{R}^\sigma[\mathfrak{A}] \subset \mathfrak{A}^\sigma[\mathfrak{A}]$, pois $\mathfrak{R}^\sigma[\mathfrak{A}]$ é, por definição, o menor σ-anel que contém $\mathfrak{A}$. Isso provou que $\mathfrak{R}^\sigma[\mathfrak{A}] = \mathfrak{A}^\sigma[\mathfrak{A}]$, completando a demonstração. ■

1.2.7 Topologias

As topologias formam, sem dúvida, o tipo mais importante de sistemas de conjuntos e a elas são dedicados o Capítulo 27, página 1418, e seguintes. Sua relevância estende-se por toda a Matemática. O que segue é um brevíssimo resumo de definições, pois mais desenvolvimentos, exemplos e motivações serão detalhados nos referidos capítulos. Para um texto dedicado à história da Topologia, vide [260].

Uma coleção τ de subconjuntos de X, ou seja, $\tau \subset \mathbb{P}(X)$, é dito ser uma *topologia* em X se os seguintes requisitos forem satisfeitos:

1. $\emptyset \in \tau$ e $X \in \tau$.

2. Se $A \in \tau$ e $B \in \tau$, então $A \cap B \in \tau$.
3. Se I é um conjunto arbitrário de índices e $A_\lambda \in \tau$ para todo $\lambda \in I$ então $\bigcup_{\lambda \in I} A_\lambda$ também é um elemento de τ.

Dois exemplos elementares de topologias em X são as coleções $\{\emptyset,\ X\}$ (a chamada topologia trivial, ou indiscreta) e $\mathbb{P}(X)$, a chamada topologia discreta. Para mais exemplos, vide Capítulo 27, página 1418.

Os elementos de uma topologia τ são denominados *conjuntos τ-abertos*, ou simplesmente *abertos*, e um par $(X,\ \tau)$ composto por X e por uma topologia em X é dito ser um *espaço topológico*. Se um subconjunto $F \subset X$ é tal que $F^c \in \tau$, então F é dito ser um *conjunto fechado*, ou τ-fechado.

• **Conjuntos τ-fechados**

Sejam X um conjunto e τ uma topologia em X. Denotemos por $\mathcal{F}(\tau)$ a coleção de todos os conjuntos τ-fechados de X, ou seja, a coleção de todos os conjuntos F de X tais que F^c é um τ-aberto. A coleção $\mathcal{F}(\tau)$ possui uma série de propriedades especiais:

1. $\emptyset \in \mathcal{F}(\tau)$ e $X \in \mathcal{F}(\tau)$.
2. Se $F \in \mathcal{F}(\tau)$ e $G \in \mathcal{F}(\tau)$, então $F \cup G \in \mathcal{F}(\tau)$.
3. Se I é um conjunto arbitrário de índices e $F_\lambda \in \mathcal{F}(\tau)$ para todo $\lambda \in I$, então $\bigcap_{\lambda \in I} F_\lambda$ também é um elemento de $\mathcal{F}(\tau)$.

• **A topologia gerada por uma coleção de conjuntos**

Também para topologias vale o seguinte resultado, já descrito anteriormente para o caso de anéis, álgebras e σ-álgebras.

Proposição 1.27 *Seja X um conjunto não vazio e seja $\{\tau_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$ uma coleção de topologias em X. Então $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \tau_\lambda$ é também uma topologia em X.* □

A proposição acima encontra-se enunciada e demonstrada como a Proposição 27.1 da página 1424. Uma de suas consequências é a seguinte observação, que fornece o análogo para topologias das noções de anel gerado, de álgebra gerada e de σ-álgebra gerada, das quais falamos acima. Seja $\mathcal{A}$ uma coleção qualquer de subconjuntos de X. Considere a coleção de todas as topologias que contém $\mathcal{A}$ como um subconjunto. Tal coleção não é vazia, pois $\mathcal{A} \subset \mathbb{P}(X)$ e $\mathbb{P}(X)$ é uma topologia. Como vimos na Proposição 1.27, a intersecção de todas essas topologias que contém $\mathcal{A}$ é também uma topologia, a qual denotaremos por $\tau[\mathcal{A}]$. A topologia $\tau[\mathcal{A}]$ é chamada de *topologia gerada por $\mathcal{A}$*.

1.2.8 Filtros e Ultrafiltros

A noção de filtro foi introduzida por H. Cartan[89] em 1937[90] e desempenha um papel relevante em diversas áreas, como, por exemplo, na Topologia (onde é empregada na demonstração do célebre Teorema de Tikhonov[91]) e mesmo na Lógica Matemática.

• **Filtros**

Seja X um conjunto não vazio. Uma coleção $\mathfrak{F} \subset \mathbb{P}(X)$ é dita ser um *filtro* em X se satisfizer as seguintes condições:

1. $\emptyset \notin \mathfrak{F}$ mas $X \in \mathfrak{F}$.
2. Se $A,\ B \in \mathfrak{F}$, então $A \cap B \in \mathfrak{F}$.

[89] Henri Cartan (1904–2008).
[90] H. Cartan, "Théorie des filtres", Comptes Rendus Acad. Paris, **205**, 595–598 (1937), e "Filtres et ultrafiltres", Comptes Rendus Acad. Paris, **205**, 777–779 (1937).
[91] Andrei Nikolaevich Tikhonov (1906–1993).

3. Se $A \in \mathfrak{F}$ e $B \supset A$, então $B \in \mathfrak{F}$.

Note-se que os itens 1 e 2 informam-nos que se $\mathfrak{F}$ é um filtro em X e $A,\ B \in \mathfrak{F}$, então $A \cap B \neq \emptyset$. Dentre os exemplos mais simples de filtros encontram-se os listados nos exercícios que seguem.

E. 1.63 *Exercício*. Seja X um conjunto não vazio e seja $Y \subset X$, também não vazio. Mostre que a coleção $\mathfrak{F}_Y$ de todos os conjuntos de X que contém Y como subconjunto (ou seja, $\mathfrak{F}_Y| := \{A \subset X |\ A \supset Y\}$) é um filtro em X. ✣

E. 1.64 *Exercício*. Seja X um conjunto infinito e $\mathfrak{F}$ a coleção de todos os conjuntos $F \subset X$ tais que $F^c \equiv X \setminus F$ seja finito. Mostre que $\mathfrak{F}$ é um filtro (denominado *filtro de Fréchet*[92]). ✣

• Ultrafiltros

Um *ultrafiltro* em X é um filtro em X que não está contido propriamente em nenhum outro filtro em X. Em muitos sentidos a noção de ultrafiltro é mais relevante que a de filtro.

Como filtros em X são subconjuntos de $\mathbb{P}(X)$, os mesmos podem ser ordenados (parcialmente) por inclusão. Ultrafiltros são, portanto, elementos maximais de $\mathbb{P}(X)$ por esse ordenamento parcial. Dada uma família linearmente ordenada de filtros em X, $\{\mathfrak{F}_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$, é elementar demonstrar que a união de todos os filtros que a compõem, $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathfrak{F}_\lambda$, é igualmente um filtro em X e que contém cada um dos filtros da família em questão. Uma consequência imediata dessa observação e do Lema de Kuratowski-Zorn, Lema 1.5, página 80, é que todo filtro em X está contido em um ultrafiltro em X.

A Proposição 1.28 contém uma afirmação fundamental sobre ultrafiltros: um filtro $\mathfrak{F}$ em X é um ultrafiltro em X se e somente se a seguinte propriedade for válida: para todo $A \subset X$, ou vale que $A \in \mathfrak{F}$ ou que $X \setminus A \in \mathfrak{F}$.

Para sua demonstração faremos uso do lema e corolário seguintes:

Lema 1.6 *Seja X um conjunto não vazio e seja $\mathfrak{F}$ um filtro em X. Suponhamos que exista $A \subset X$ tal que $A \notin \mathfrak{F}$ e tal que $A \cap F \neq \emptyset$ para todo $F \in \mathfrak{F}$. Então, a coleção de conjuntos dada por $\mathfrak{G} := \{B \cap F |\ B \subset X \text{ com } B \supset A \text{ e } F \in \mathfrak{F}\}$ é um filtro em X. Além disso, $\mathfrak{G}$ contém $\mathfrak{F}$ propriamente e contém A, ou seja, valem $\mathfrak{F} \subsetneqq \mathfrak{G}$ e $A \in \mathfrak{G}$.* □

Prova. Seja $\mathfrak{F}$ um filtro em X e seja $A \subset X$ tal que $A \notin \mathfrak{F}$ e tal que $A \cap F \neq \emptyset$ para todo $F \in \mathfrak{F}$.

Seja $\mathfrak{G}$ a coleção de todos os conjuntos da forma $B \cap F$, onde B é um conjunto de X que contém A e F é um elemento de $\mathfrak{F}$, ou seja, $\mathfrak{G} := \{B \cap F |\ B \subset X \text{ com } B \supset A \text{ e } F \in \mathfrak{F}\}$. Afirmamos que $\mathfrak{G}$ é um filtro. Para provar isso, observemos em primeiro lugar que se $B \supset A$ e $F \in \mathfrak{F}$, então $B \cap F \supset A \cap F \neq \emptyset$, o que prova que $\emptyset \notin \mathfrak{G}$. Analogamente, $X \in \mathfrak{G}$, pois $X = X \cap X$, sendo que $X \supset A$ e $X \in \mathfrak{F}$. Em segundo lugar, observemos que se $B \supset A$, $B' \supset A$ e $F,\ F' \in \mathfrak{F}$, teremos que $(B \cap F) \cap (B' \cap F') = (B \cap B') \cap (F \cap F') \in \mathfrak{G}$, pois $B \cap B' \supset A$ e pois $F \cap F' \in \mathfrak{F}$. Em terceiro lugar, se $B \supset A$, $F \in \mathfrak{F}$ e $H \subset X$ é tal que $B \cap F \subset H$, então vale que $H = (B \cup H) \cap (F \cup H)$[93]. Como $B \cup H \supset A$ e $F \cup H \in \mathfrak{F}$ (pois $F \cup H \supset F$), concluímos que $H \in \mathfrak{G}$.

Afirmamos agora que $A \in \mathfrak{G}$. Isso é trivial, pois $A = A \cap X$, sendo que $A \subset A$ e $X \in \mathfrak{F}$. Por fim, afirmamos que $\mathfrak{F}$ é um subconjunto próprio de $\mathfrak{G}$, ou seja, $\mathfrak{F} \subsetneqq \mathfrak{G}$. De fato, se $F \in \mathfrak{F}$, então $F = X \cap F$, sendo que, obviamente, $X \supset A$. Isso provou que $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{G}$, mas recordando que $A \in \mathfrak{G}$ com $A \notin \mathfrak{F}$, estabelecemos que $\mathfrak{F} \subsetneqq \mathfrak{G}$. ■

Corolário 1.1 *Seja X um conjunto não vazio e seja $\mathfrak{U}$ um ultrafiltro em X. Se $A \subset X$ é tal que $A \notin \mathfrak{U}$, então existe $U \in \mathfrak{U}$ tal que $A \cap U = \emptyset$.* □

Prova. Se valesse $A \cap U \neq \emptyset$ para todo $U \in \mathfrak{U}$, poderíamos evocar o Lema 1.6 e construir um filtro em X que contém $\mathfrak{U}$ propriamente, contradizendo a hipótese que $\mathfrak{U}$ é um ultrafiltro. ■

[92] Maurice René Fréchet (1878–1973).

[93] Para ver que $H = (B \cup H) \cap (F \cup H)$ caso $B \cap F \subset H$, note que, por um lado

$$H = H \cup H = (H \cup (H \cap F)) \cup H \supset ((B \cap F) \cup (H \cap F)) \cup H = ((B \cup H) \cap F) \cup H = ((B \cup H) \cap F) \cup ((B \cup H) \cap H) = (B \cup H) \cap (F \cup H)$$

e, por outro lado, $H = H \cap H = (B \cup H) \cap H \subset (B \cup H) \cap (F \cup H)$.

Proposição 1.28 *Seja X um conjunto não vazio e seja $\mathfrak{F}$ um filtro em X. Então, $\mathfrak{F}$ é um ultrafiltro em X se e somente se a seguinte propriedade for válida: para todo $A \subset X$, ou vale que $A \in \mathfrak{F}$ ou que $X \setminus A \in \mathfrak{F}$.* □

Prova. *Parte 1.* Provaremos que se $\mathfrak{F}$ é um ultrafiltro, então para todo $A \subset X$, ou vale que $A \in \mathfrak{F}$ ou que $X \setminus A \in \mathfrak{F}$.

A prova é feita por absurdo. Suponhamos que $A \subset X$ fosse tal que $A \notin \mathfrak{F}$ e que $A^c \equiv X \setminus A \notin \mathfrak{F}$. Pelo Corolário 1.1, existiriam $F_1,\ F_2 \in \mathfrak{F}$ tais que $A \cap F_1 = \emptyset$ e que $A^c \cap F_2 = \emptyset$. Naturalmente, teríamos também $A \cap (F_1 \cap F_2) = \emptyset$ e $A^c \cap (F_1 \cap F_2) = \emptyset$. Logo, valeria

$$\emptyset \ = \ \Big(A \cap (F_1 \cap F_2)\Big) \cup \Big(A^c \cap (F_1 \cap F_2)\Big) \ = \ (A \cup A^c) \cap (F_1 \cap F_2) \ = \ X \cap (F_1 \cap F_2) \ = \ F_1 \cap F_2 \ .$$

Agora, a afirmação que $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ com $F_1,\ F_2 \in \mathfrak{F}$ contradiz a hipótese de que $\mathfrak{F}$ é um filtro, demonstrando, assim, a afirmação desejada.

Parte 2. Provaremos que se $\mathfrak{F}$ é um filtro, e possui a propriedade que $A \subset X$, ou vale que $A \in \mathfrak{F}$ ou que $X \setminus A \in \mathfrak{F}$, então $\mathfrak{F}$ é um ultrafiltro.

Novamente a prova é feita por absurdo. Se um tal $\mathfrak{F}$ não fosse um ultrafiltro, então estaria contido propriamente em um filtro $\mathfrak{U}$. Assim, existe um conjunto $A \subset X$ tal que $A \in \mathfrak{U}$, mas com $A \notin \mathfrak{F}$ (pois $\mathfrak{F} \subsetneq \mathfrak{U}$). Pela hipótese, como $A \notin \mathfrak{F}$, deve valer que $A^c \in \mathfrak{F}$ e, portanto, que $A^c \in \mathfrak{U}$, pois $\mathfrak{F}$ é um subconjunto de $\mathfrak{U}$. Assim, estabelecemos que $A \in \mathfrak{U}$ e $A^c \in \mathfrak{U}$, o que é absurdo, pois como $\mathfrak{U}$ é um filtro, deve valer que $\emptyset = A \cap A^c \in \mathfrak{U}$, contradizendo o postulado de que um filtro não contém o conjunto vazio. Logo, $\mathfrak{F}$ não pode estar contido propriamente em um filtro, ou seja, $\mathfrak{F}$ é um ultrafiltro. ■

A Proposição 1.28 permite-nos apresentar um exemplo elementar de ultrafiltro.

Exemplo 1.18 Sejam X não vazio e $x \in X$. Seja $\mathfrak{U}_x = \{U \subset X |\ x \in U\} = \{U \subset X |\ U \supset \{x\}\}$. Pelo Exercício E. 1.63, página 107, $\mathfrak{U}_x$ é um filtro. Agora, dado $A \subset X$, ou tem-se que $x \in A$ ou que $x \in A^c$, ou seja, ou vale que $A \in \mathfrak{U}_x$ ou que $A^c \in \mathfrak{U}_x$. Pela Proposição 1.28, segue que $\mathfrak{U}_x$ é um ultrafiltro. ♦