

# Notas em Computação Quântica

Ricardo Alvarenga

2024

# Sumário

|          |   |          |
|----------|---|----------|
| <b>1</b> | <b>Álgebra Linear</b>   | <b>1</b> |
| 1.1      | Vetores . . . . .   | 1        |
| 1.1.1    | Vetores com duas dimensões - $\mathbf{R}^2$ . . . . .                 | 1        |
| 1.1.2    | Vetores com três dimensões - $\mathbf{R}^3$ . . . . .                 | 2        |
| 1.1.3    | Vetores com $n$ dimensões - $\mathbf{R}^n$ . . . . .                  | 2        |
| 1.1.4    | Como colocar um vetor no plano $\mathbf{R}^3(x, y, z)$ . . . . .      | 2        |
| 1.1.5    | Tipos de Vetores . . . . .  | 2        |
| 1.1.6    | Igualdade de Vetores . . . . .  | 3        |
| 1.1.7    | Soma de Vetores . . . . .   | 3        |
| 1.1.8    | Subtração de Vetores . . . . .  | 4        |
| 1.1.9    | Multiplicação de Dois Vetores (Produto Escalar) . . . . .             | 4        |
| 1.1.10   | Multiplicação por um Escalar . . . . .                                | 4        |
| 1.1.11   | Módulo/Norma (Norm) de um Vetor . . . . .                             | 5        |
| 1.1.12   | Ângulo entre dois Vetores (Ângulo $\Theta$ de dois Vetores) . . . . . | 5        |
| 1.1.13   | Vetores Colineares . . . . .  | 5        |
| 1.1.14   | Ortogonalidade de Dois Vetores . . . . .                              | 5        |

## Lista de Figuras

|   |   |   |
|---|---|---|
| 1 | Vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ . . . . . | 1 |
| 2 | Vetores em $\mathbf{R}^2$ . . . . .           | 1 |
| 3 | Vetores em $\mathbf{R}^3$ . . . . .           | 2 |
| 4 | Vetor em $\mathbf{R}^3$ . . . . .             | 3 |
| 5 | Subtração de Vetores . . . . .                | 4 |

# 1 Álgebra Linear

## 1.1 Vetores

Vetores são seguimentos orientados (início em  $0, 0$ ) que estão sempre no plano cartesiano. Vetores são usados para representar grandezas escalares (massa, pressão, etc.) e grandezas físicas vetoriais (velocidade, força e deslocamento).

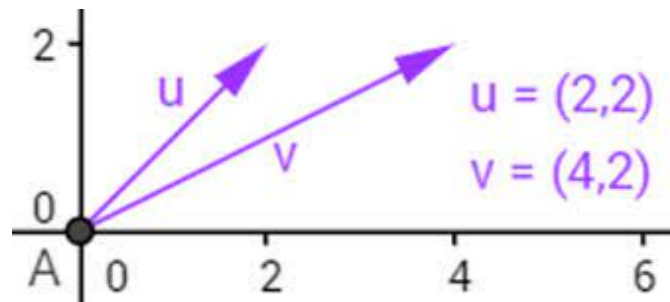


Figura 1: Exemplos de Vetores,  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$

### 1.1.1 Vetores com duas dimensões - $\mathbf{R}^2$

$x, y$  podem assumir qualquer valor *Real*.

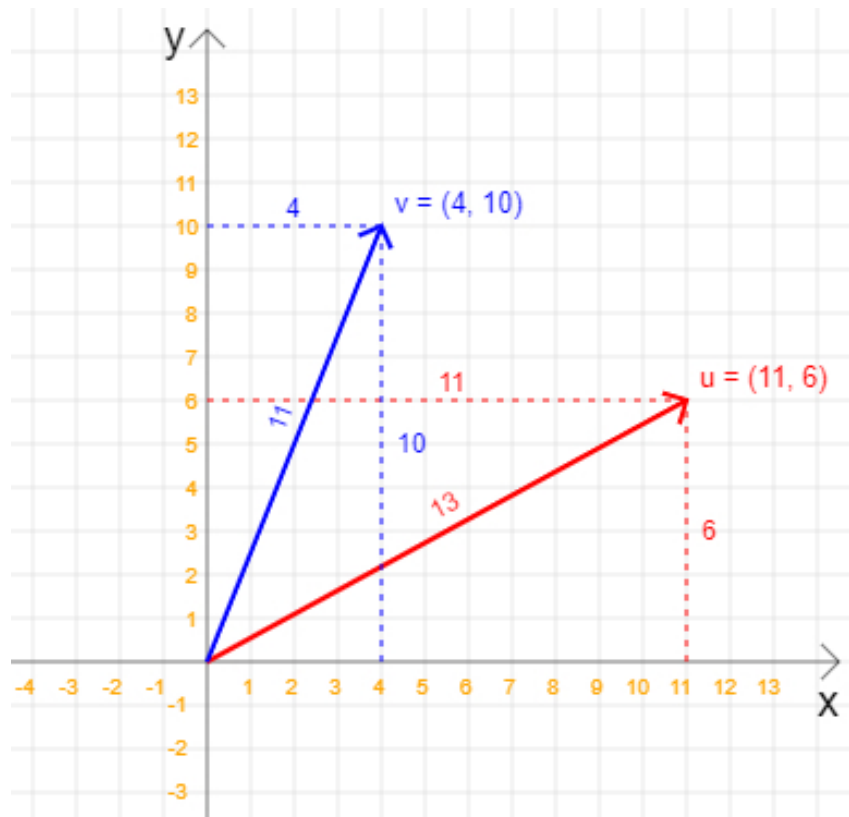


Figura 2: Vetores em  $\mathbf{R}^2(x, y)$

### 1.1.2 Vetores com três dimensões - $\mathbf{R}^3$

$x, y, z$  podem assumir qualquer valor *Real*.

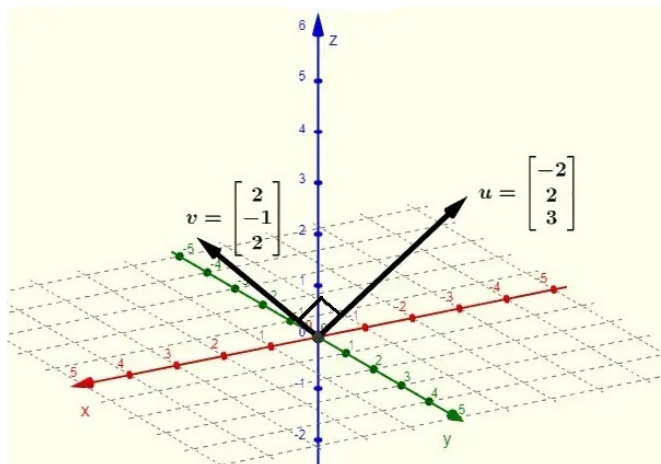


Figura 3: Vetores em  $\mathbf{R}^3(x, y, z)$

### 1.1.3 Vetores com $n$ dimensões - $\mathbf{R}^n$

Os vetores com  $n$  dimensões são de difícil (ou impossível) representação gráfica.

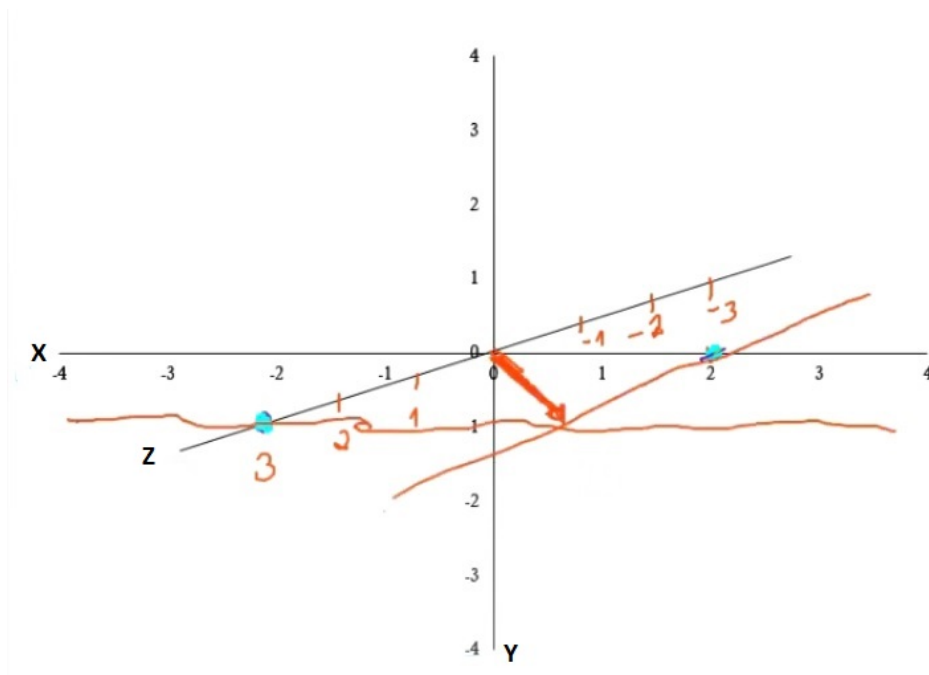
Um vetor  $\mathbf{R}^4$  é indicado da seguinte forma:  $\mathbf{R}^4(x, y, z, w)$

### 1.1.4 Como colocar um vetor no plano $\mathbf{R}^3(x, y, z)$

Veja na figura 4 o vetor  $u = (2, 4, 3)$ .

### 1.1.5 Tipos de Vetores

- Vetor Nulo: Todos valores iguais a zero. Ex:  $v = (0, 0, 0)$
- Vetor simétrico ou oposto: Ocorre quando dois vetores são opostos e contêm o mesmo módulo e mesma direção. Ex:  $v = (x, y), -v = (-x, -y)$
- Vetor unitário: Possui módulo (tamanho) igual a 1.  $|v| = 1$
- Vetores colineares ou paralelos: Ocorrem quando dois vetores tiverem a mesma direção, na mesma reta ou retas paralelas.
- Vetores coplanares: Quando dois vetores fazem parte de um mesmo plano.

Figura 4: Vetor em  $\mathbf{R}^3$ 

### 1.1.6 Igualdade de Vetores

Dois vetores serão iguais se:

- $x_1 = x_2$
- $y_1 = y_2$
- $z_1 = z_2$  vetores em  $R^3$
- $w_1 = w_2$  vetores em  $R^4$

$u = (3, x + 4)$   $v = (3, 8)$  se  $x = 4$  os vetores serão iguais.

Sejam:  $u = (x - 1, 3)$ ,  $v = (3, 2y - 1)$ . Determine o valor de  $x$  e  $y$  para que  $u = v$ .

$x = 4$ ,  $y = 2$

### 1.1.7 Soma de Vetores

Para realizar a soma de dois vetores temos que efetuar a soma de cada elemento com seu correspondente.

Exemplo:

$$u = (2, 3), v = (5, 6)$$

$$u + v = (7, 9)$$

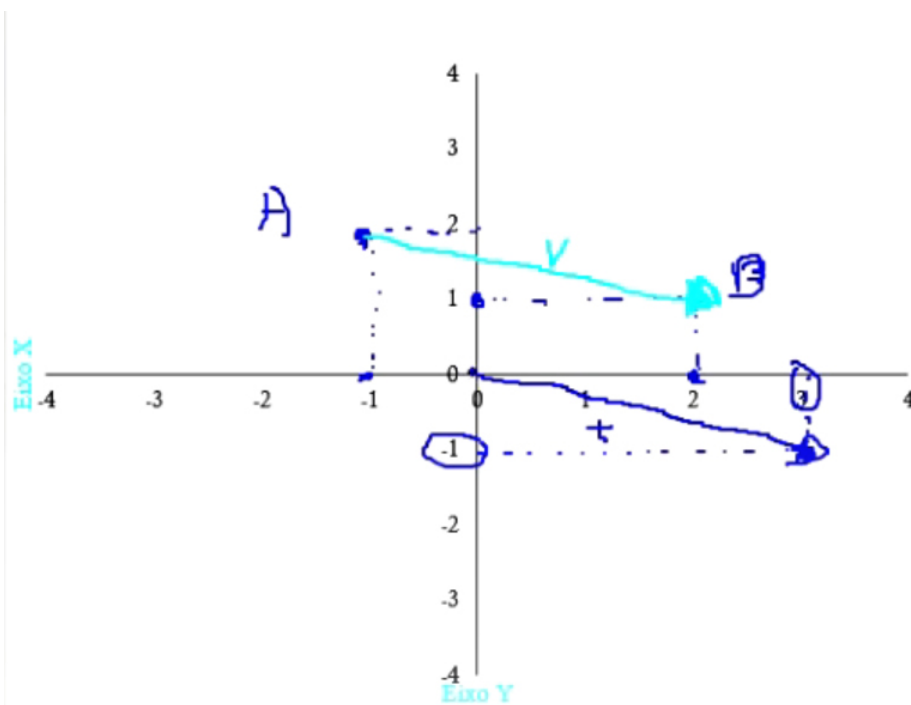


Figura 5: Subtração de Vetores

### 1.1.8 Subtração de Vetores

$A = (-1, 2)$   $B = (2, 1)$ .  $v = \overrightarrow{AB}$  o vetor está "perdido" no plano cartesiano. Para corrigir isso, realizamos a subtração:

$B - A = (2, 1) - (-1, 2) = (3, -1)$ . Que resulta no vetor  $t = (3, -1)$ , conforme figura 5.

Outro exemplo: Dois vetores  $u = (-1, 3)$  e  $v = (10, 20)$ , a subtração  $u - v$  resulta em  $(-11, -17)$ .

Sejam  $u$  e  $v$  vetores no  $\mathbf{R}^n[1]$ :  $u = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  e  $v = (b_1, b_2, \dots, b_n)$

$u - v = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, \dots, a_n - b_n)$ .

### 1.1.9 Multiplicação de Dois Vetores (Produto Escalar)

Assim como na soma e subtração de vetores, podemos multiplicar vetores. O nome correto deste tipo de operação é *Produto Escalar*.

Sejam  $u$  e  $v$  vetores no  $\mathbf{R}^n$ :  $u = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  e  $v = (b_1, b_2, \dots, b_n)$

$u * v = (a_1 * a_2 + b_1 * b_2, \dots, a_n * b_n)$ .

Exemplo:  $u = (1, 2)$ ,  $v = (5, 3)$  Então:  $u * v = (1, 2, 3, 4) * (5, 3, 1, 4) = (5 + 6 + 3 + 16) = 30$

### 1.1.10 Multiplicação por um Escalar

Multiplicação por um escalar é multiplicar um número por um vetor.

Sejam:  $t = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  e um número  $a$

Temos:  $at = a(x_1, x_2, \dots, x_n) = (a * x_1, a * x_2, \dots, a * x_n)$

Exemplo:

$$u = (4, 5) \text{ e } a = 2, au = 2(4, 5) = (8, 10)$$

### 1.1.11 Módulo/Norma (Norm) de um Vetor

A norma ou módulo de um vetor é o comprimento desse vetor, que pode ser calculado por meio da distância de seu ponto final até a origem.

A norma de  $u$  é denotada por  $\|u\|$ .

Considerando o vetor  $u = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ , calculamos sua norma, ou módulo, da seguinte forma[1, 2]:  $\|u\| = \sqrt{u * u} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$

$$\text{Exemplo: } v = (5, 6), \|v\| = \sqrt{v * v} = \sqrt{(5, 6) * (5, 6)} = \sqrt{61}$$

ou de forma direta:

$$\|v\| = \sqrt{(5^2 + 6^2)} = \sqrt{61}$$

Se  $\|u\| = 1$ , temos um vetor unitário.

### 1.1.12 Ângulo entre dois Vetores (Ângulo $\Theta$ de dois Vetores)

Considerando dois vetores que partem do mesmo ponto, o ângulo entre eles é representado por  $\Theta$ . O ângulo  $\Theta$  é dado por:

$$\cos \Theta = \frac{u * v}{\|u\| * \|v\|}$$

Exemplo:

Sendo os vetores  $u = (2, 2)$  e  $v = (0, -2)$ , encontre o ângulo  $\Theta$ :

$$\cos \Theta = \frac{u * v}{\|u\| * \|v\|} = \frac{-4}{\sqrt{(8)} * 2} = \frac{-2}{\sqrt{8}} = \frac{-2}{\sqrt{2} * \sqrt{4}} = \frac{-2}{\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} * \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2} = 135^\circ$$

### 1.1.13 Vetores Colineares

Dois vetores são colineares (paralelos), quando:

$$v = (x_1, y_1) \text{ e } t = (x_2, y_2)$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = a$$

Exemplo: Verifique se  $u$  e  $v$  são colineares, sendo  $u = (-3, 2)$  e  $v = (6, -4)$

$$\frac{-3}{6} = -\frac{1}{2} \text{ e } \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2} \text{ então: } a = -\frac{1}{2}$$

### 1.1.14 Ortogonalidade de Dois Vetores

Considerando dois vetores coplanares, eles serão ortogonais se o  $\Theta$ , entre eles, for  $90^\circ$ .

Matematicamente:  $u * v = 0$

Exemplo: Verifique se os vetores  $u = (1, 2)$  e  $v = (-2, 1)$ , são ortogonais:

$$u * v = (1 * -2 + 2 * 1) = (-2 + 2) = 0$$



## Referências

- [1] Seymour Lipschutz. *Álgebra linear* - 2<sup>a</sup> Edição. McGraw-Hill, 1972.
- [2] Howard Anton and Chris Rorres. *Álgebra Linear com Aplicações* - 10<sup>a</sup> Edição. Bookman Editora, 2012.