
Universidade de São Paulo

Instituto de Física

Departamento de Física Matemática

4 de abril de 2024

Notas de Aula

João Carlos Alves Barata

Versão de 4 de abril de 2024

Estas notas, ou sua versão mais recente, podem ser encontradas no seguinte endereço WWW:

http://denebola.if.usp.br/~jbarata/Notas_de_aula

Lista de Capítulos

I	Capítulos Introdutórios	43
1	Noções Conjuntivistas Básicas	44
2	Estruturas Algébricas Básicas	109
3	Formas Lineares e Normas em Espaços Vetoriais	260
II	Tópicos de Análise Real e Complexa	301
4	Recordações de Cálculo Vetorial em Três Dimensões	302
5	Conjuntos Convexos e Funções Convexas	315
6	Funções Geratrizes. Produtórias Complexas. Algumas Identidades Combinatórias	353
7	A Função Gama de Euler	385
8	Um Mínimo Sobre A Função Zeta de Riemann	427
9	Transformações de Möbius	456
III	Tópicos de Álgebra Linear	504
10	Tópicos de Álgebra Linear. I	505
11	Tópicos de Álgebra Linear. II	628
IV	Equações Diferenciais	672
12	Equações Diferenciais Ordinárias. Uma Introdução	673
13	Alguns Métodos de Resolução de Equações Diferenciais Ordinárias	704
14	Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias Lineares	720
15	Soluções de Equações Diferenciais Ordinárias Lineares no Plano Complexo	800
16	Propriedades de Algumas Funções Especiais	863
17	Completeza de Algumas Famílias de Funções	934
18	Rudimentos da Teoria das Equações a Derivadas Parciais	949

19 Introdução ao Problema de Sturm-Liouville	1026
20 Alguns Resultados sobre Equações Integrais	1070
V Grupos	1088
21 Grupos. Alguns Exemplos	1089
22 Grupos de Lie e Álgebras de Lie. Uma Breve Introdução	1238
23 Uma Breve Introdução à Teoria das Representações de Grupos	1268
VI Topologia Geral, Teoria da Medida e Integração	1302
24 Espaços Métricos	1303
25 O Teorema do Ponto Fixo de Banach e Algumas de Suas Consequências	1368
26 A Métrica de Hilbert e o Teorema de Perron-Frobenius	1399
27 Espaços Topológicos e Espaços Mensuráveis. Definições e Propriedades Básicas	1418
28 Medidas	1445
29 A Medida de Lebesgue e a Medida de Hausdorff	1473
30 Continuidade e Convergência em Espaços Topológicos	1504
31 Elementos da Teoria da Integração	1522
32 Alguns Tópicos Especiais em Topologia e Análise	1585
VII Geometria Diferencial e Topologia Diferencial	1676
33 Variedades	1677
34 Noções Geométricas em Variedades	1746
35 Formas Diferenciais	1849
36 Capítulo Suplementar: Rudimentos da Geometria de Curvas e Superfícies em \mathbb{R}^3	1881
VIII Análise Funcional I. Séries e Transformadas de Fourier. Distribuições	1935
37 Aproximação de Funções. Aproximações Polinomiais e Séries de Fourier	1936
38 Introdução às Distribuições e às Transformadas de Fourier	2006
IX Análise Funcional II. Espaços de Hilbert e Teoria de Operadores	2120
39 Noções Básicas Sobre Espaços de Hilbert	2121
40 Operadores Lineares Limitados em Espaços de Banach e de Hilbert	2167

41 Operadores Lineares Não-Limitados em Espaços de Hilbert	2363
42 O Limite Indutivo de Álgebras	2404
X Aplicações e Usos em Física	2413
43 Equações Diferenciais. Problemas Seleccionados de Interesse Físico	2414
44 Rudimentos da Teoria do Potencial	2540
45 Notas Sobre Mecânica Clássica. I	2553
46 Notas Sobre Mecânica Clássica. II. Problemas e Aplicações	2662
47 Spinors e o Grupo de Lorentz	2736
48 Operadores e a Física Quântica	2751
Bibliografia	2803
Índice Remissivo	2824

Capítulos e Seções

Índice

Prefácio	30
Bons Mots	32
Como Ler Este Livro	34
Notação e Advertências	35
Por Que Precisamos de Demonstrações?	38
I Capítulos Introdutórios	43
1 Noções Conjuntivistas Básicas	44
1.1 Conjuntos, Relações e Funções	44
1.1.1 Rudimentos da Teoria dos Conjuntos	45
1.1.1.1 Conjuntos e os Axiomas que os Delineiam	47
1.1.1.2 Mais Definições e Alguma Notação. Pares Ordenados	56
1.1.2 Relações e Funções	58
1.1.2.1 Operações Básicas com Famílias de Conjuntos	60
1.1.2.2 Funções Características de Conjuntos	61
1.1.2.3 A Diferença Simétrica de Dois Conjuntos	62
1.1.2.4 Propriedades Conjuntivistas Elementares de Funções	64
1.1.2.5 Um Interlúdio. O Teorema de Ponto Fixo de Knaster-Tarski	66
1.1.2.6 Produtos Cartesianos Gerais	67
1.1.2.7 Relações de Incompatibilidade (ou de Compatibilidade)	69
1.1.2.8 Relações de Equivalência	69
1.1.2.9 Relações de Ordem	74
1.1.3 Cardinalidade	81
1.1.3.1 Os Teoremas de Schröder-Bernstein e de Cantor	82
1.1.3.2 Números Naturais	85
1.1.3.3 Conjuntos Enumeráveis e Conjuntos Contáveis	89
1.1.4 Ínfimos e Supremos de Famílias de Conjuntos	94
1.2 Sistemas de Conjuntos	96
1.2.1 Semianéis de Conjuntos	97
1.2.2 Anéis de Conjuntos	98
1.2.3 Álgebras de Conjuntos	99
1.2.4 σ -Anéis de Conjuntos	100
1.2.5 σ -Álgebras de Conjuntos	101
1.2.6 Sistemas Monótonos de Conjuntos	102
1.2.7 Topologias	105
1.2.8 Filtros e Ultrafiltros	106
2 Estruturas Algébricas Básicas	109
2.1 Estruturas Algébricas Básicas	110
2.1.1 Álgebras Universais	112
2.1.2 Reticulados e Álgebras Booleanas	114
2.1.2.1 Álgebras Booleanas	118
2.1.2.2 Reticulados Ortocomplementados e Ortomodulares	121
2.1.3 Semigrupos, Monóides e Grupos	122

2.1.3.1	\mathbb{R}_{0+} Estendido	125
2.1.3.2	Os Grupos \mathbb{Z}_n . O Grupo do Círculo	126
2.1.3.3	Subgrupos	129
2.1.4	Corpos	131
2.1.5	Espaços Vetoriais	134
2.1.6	Anéis, Módulos e Álgebras	137
2.1.6.1	Anéis	137
2.1.6.2	Módulos	138
2.1.6.3	Álgebras	138
2.1.7	Exemplos Especiais de Álgebras	141
2.1.7.1	Álgebras de Lie	142
2.1.7.2	Álgebras de Poisson	144
2.1.7.3	Álgebras de Jordan	144
2.1.7.4	Álgebras de Grassmann	145
2.1.7.5	Álgebras de Clifford	146
2.1.8	Mais sobre Anéis	149
2.1.9	Ações e Representações	151
2.1.9.1	Ações de Grupos	151
2.1.9.2	Representações de Grupos e de Álgebras	156
2.1.10	Morfismos, Homomorfismos, Epimorfismos, Isomorfismos, Monomorfismos, Endomorfismos e Automorfismos	157
2.1.11	Induzindo Estruturas Algébricas	159
2.2	Grupos. Estruturas e Construções Básicas	163
2.2.1	Cosets	163
2.2.1.1	O Teorema de Lagrange	165
2.2.2	Subgrupos Normais e o Grupo Quociente	167
2.2.2.1	Alguns Teoremas Sobre Isomorfismos e Homomorfismos de Grupos	170
2.2.2.2	O Centro de um Grupo. Centralizadores e Normalizadores	173
2.2.2.3	O Centro de Alguns Grupos de Interesse	174
2.2.3	Grupos Gerados por Conjuntos. Grupos Gerados por Relações	178
2.2.4	O Produto Direto e o Produto Semidireto de Grupos. O Produto Tensorial de Grupos Abelianos	179
2.2.4.1	O Produto Direto (ou Soma Direta) de Grupos	179
2.2.4.2	O Produto Semidireto de Grupos	180
2.2.4.3	Produtos Tensoriais de Grupos Abelianos	184
2.2.5	O Produto Livre de Grupos. Amálgamas	190
2.3	Espaços Vetoriais. Estruturas e Construções Básicas	192
2.3.1	Bases Algébricas de um Espaço Vetorial	193
2.3.2	O Dual Algébrico de um Espaço Vetorial	197
2.3.3	Subespaços e Espaços Quocientes	204
2.3.4	Somas Diretas de Espaços Vetoriais	205
2.3.4.1	Formas Multilineares	206
2.3.5	Produtos Tensoriais de Espaços Vetoriais	208
2.3.5.1	Produtos Tensoriais, Duais Algébricos e Formas Multilineares	215
2.3.6	Produtos Tensoriais de um Espaço Vetorial com seu Dual	219
2.3.6.1	Tensores Associados a Formas Bilineares Simétricas Não Degeneradas. Métricas	219
2.3.7	Produtos Tensoriais de um mesmo Espaço Vetorial. Os Espaços Simétrico e Antissimétrico	224
2.3.8	O Produto Tensorial de Módulos. Derivações	226
2.4	Anéis e Álgebras. Estruturas e Construções Básicas	228
2.4.1	Ideais em Anéis e Álgebras Associativas	228

2.4.1.1	Ideais em Anéis	228
2.4.1.2	Ideais em Álgebras Associativas	232
2.5	Espaços de Fock, Álgebras Tensoriais e Álgebras Exteriores	235
2.5.1	Álgebras Tensoriais	236
2.5.2	Álgebras Exteriores	237
2.6	Tópicos Especiais	240
2.6.1	O Grupo de Grothendieck	240
2.6.2	Grupóides	242
2.6.3	Quatérnios, Números Complexos e outros Amigos	243
2.6.3.1	Álgebras Comutativas e Associativas em \mathbb{R}^2 . A Álgebra dos Complexos	244
2.6.3.2	A Álgebra dos Números Complexos Hiperbólicos	246
2.6.3.3	Álgebras em \mathbb{R}^3 . A Álgebra do Produto Vetorial	248
2.6.3.4	Quatérnios	248
	APÊNDICES	255
2.A	Prova de (2.184)	255
2.B	Ação de $SL(2, \mathbb{C})$ e o Grupo de Lorentz em $3 + 1$ dimensões	255
3	Formas Lineares e Normas em Espaços Vetoriais	260
3.1	Formas Lineares, Sesquilineares e Produtos Escalares em Espaços Vetoriais	260
3.1.1	Formas Multilineares	260
3.1.2	Formas Sesquilineares e as Desigualdades de Cauchy-Schwarz e Minkowski	266
3.1.3	Produtos Escalares	269
3.1.4	Formas Quadráticas em Espaços Vetoriais Reais	271
3.1.5	Exemplos	271
3.2	Normas em Espaços Vetoriais	273
3.2.0.1	O Lema da Simetria	281
3.3	Ortogonalidade, Conjuntos Ortonormais e o Procedimento de Gram-Schmidt	282
3.4	Formas Bilineares e Sesquilineares e Produtos Escalares em Espaços de Dimensão Finita	284
3.5	Estruturas Complexas sobre Espaços Vetoriais Reais	287
	APÊNDICES	295
3.A	Equivalência de Normas em Espaços Vetoriais de Dimensão Finita	295
3.B	Prova do Teorema de Fréchet, von Neumann e Jordan	296
3.C	A Identidade de Polarização para Formas Trilineares Simétricas	299
II	Tópicos de Análise Real e Complexa	301
4	Recordações de Cálculo Vetorial em Três Dimensões	302
4.1	Alguns Operadores Diferenciais de Interesse	302
4.2	Teoremas Clássicos sobre Integrais de Volume e de Superfície	306
4.3	O Laplaciano em Sistemas de Coordenadas Gerais	308
4.4	Coordenadas Esféricas em n Dimensões	310
5	Conjuntos Convexos e Funções Convexas	315
5.1	Conjuntos Convexos. Noções Básicas	315
5.1.1	Operações que Preservam Convexidade	317
5.1.2	Um Exemplo. Células e Diagramas de Voronoy	319
5.2	Funções Convexas e Côncavas em Espaços Vetoriais Reais	323
5.2.1	Funções Convexas em Espaços Vetoriais Normados e sua Continuidade	326
5.2.2	Funções Côncavas e Convexas de uma Variável	327

5.2.3	Funções Convexas de Várias Variáveis	340
5.3	Algumas Consequências da Convexidade e da Concavidade	344
5.3.1	A Desigualdade de Jensen	344
5.3.2	A Primeira Desigualdade de Young	345
5.3.3	Médias Geométricas, Aritméticas e Desigualdades Correlatas	346
5.3.3.1	A Desigualdade de Minkowski	350
5.4	Exercícios Adicionais	352
6	Funções Geratrizes. Produtórias Complexas. Algumas Identidades Combinatórias	353
6.1	Funções Geratrizes	353
6.1.1	Algumas Identidades Combinatórias	355
6.1.2	Números de Fibonacci	358
6.1.3	Números de Bernoulli	360
6.1.4	Números de Bell	362
6.2	Notas Sobre Convergência de Produtórias	366
6.2.1	Uma Dedução Elementar do Produto de Wallis	367
6.3	A Fórmula de Inversão de Möbius. As Fórmulas de Viète	369
6.3.1	As Fórmulas de Viète	370
6.3.1.1	Uma Aplicação. Localizando Zeros de Certos Polinômios	371
6.3.1.2	As Desigualdades de Samuelson e Algumas Generalizações	374
6.3.1.3	As Identidades de Girard-Newton	378
6.4	Exercícios Adicionais	383
7	A Função Gama de Euler	385
7.1	Introdução e Motivação	385
7.2	A Função Gama. Definição e Primeiras Propriedades	387
7.3	Outras Representações para a Função Gama	392
7.4	A Função Beta e Propriedades Adicionais da Função Gama	396
7.4.1	A Fórmula de Reflexão de Euler	397
7.4.2	A Fórmula de Duplicação de Legendre	401
7.5	Teoremas Sobre a Unicidade da Função Gama e Outros Resultados	402
7.5.1	O Teorema de Bohr-Mollerup	402
7.5.2	Fórmulas de Duplicação e Unicidade	403
7.5.3	O Teorema de Wielandt e Algumas de Suas Consequências	405
7.5.3.1	A Fórmula de Multiplicação de Gauss da Função Gama	406
7.5.4	A Função Gama de Euler e Equações Diferenciais. O Teorema de Hölder	408
7.6	A Aproximação de Stirling e suas Correções	409
7.6.1	A Aproximação de Stirling para Fatoriais e suas Correções. A Série de Gudermann	411
7.6.2	A Aproximação de Stirling para a Função Gama e suas Correções. A Série de Gudermann	417
7.7	Exercícios Adicionais	421
8	Um Mínimo Sobre A Função Zeta de Riemann	427
8.1	Origens. Propriedades Básicas de Números Primos	427
8.2	Definição da Função ζ de Riemann em \mathbb{C}	432
8.3	A Fórmula de Produto de Euler e Outras Relações Envolvendo ζ	433
8.4	Primeiras Relações de ζ com a Função Gama de Euler	438
8.5	Os Valores de ζ nos Inteiros	442
8.5.1	Um Interlúdio. A Fórmula $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots = -1/12$ (!) e Alguns de Seus Amigos	444
8.6	A Relação Funcional de Riemann	448

8.6.1	Uma Demonstração da Relação Funcional de Riemann	450
8.7	Exercícios Adicionais	452
	APÊNDICES	453
8.A	Prova do Teorema Fundamental da Aritmética	453
9	Transformações de Möbius	456
9.1	Transformações de Möbius. Definição e Propriedades Elementares	456
9.2	O Teorema Fundamental das Transformações de Möbius	462
9.3	Transformações de Möbius sobre Retas e Círculos	465
9.4	Transformações de Möbius e Razões Anarmônicas	467
9.4.1	Razões Anarmônicas em \mathbb{R}^n e Transformações Lineares	471
9.4.2	Razões Anarmônicas no Plano Complexo e Transformações de Möbius	471
9.5	Transformações de Möbius e Automorfismos do Disco Unitário	475
9.5.1	O Teorema do Módulo Máximo	475
9.5.1.1	A Majoração de Cauchy e Algumas de suas Consequências	476
9.5.1.2	O Módulo de uma Função Analítica. O Teorema do Módulo Máximo	478
9.5.1.3	O Lema de Schwarz e Algumas Consequências	480
9.5.2	Transformações de Möbius e Automorfismos do Disco Unitário	483
9.5.3	O Lema de Schwarz-Pick	489
9.5.3.1	Duas Métricas Invariantes em D_1 . Revisitando o Lema de Schwarz-Pick	491
9.6	A Derivada de Schwarz	495
	APÊNDICES	500
9.A	Demonstração Alternativa da Proposição 9.8	500
9.B	Prova do Teorema 9.12	500

III Tópicos de Álgebra Linear 504

10	Tópicos de Álgebra Linear. I	505
10.1	Propriedades Básicas de Determinantes e Inversas de Matrizes	506
10.2	Noções Básicas sobre o Espectro de uma Matriz	516
10.2.1	Autovalores e Polinômios Característicos de Matrizes	517
10.2.2	Autovetores	520
10.2.3	O Traço de uma Matriz	522
10.2.3.1	Algumas Relações entre Determinantes e Traços de Matrizes	524
10.2.4	Localização dos Autovalores. Os Discos de Gershgorin	525
10.3	Polinômios de Matrizes	528
10.3.1	O Teorema de Hamilton-Cayley	530
10.3.1.1	O Teorema da Aplicação Espectral para Matrizes	534
10.4	Matrizes Diagonalizáveis e o Teorema Espectral	535
10.4.1	Diagonalização Simultânea de Matrizes	547
10.5	Matrizes Autoadjuntas, Normais e Unitárias	550
10.5.1	Matrizes Positivas	556
10.5.1.1	Matrizes Pseudoautoadjuntas e Quaseautoadjuntas	558
10.5.2	O Teorema de Inércia de Sylvester. Superfícies Quadráticas	560
10.5.3	Um Resultado Sobre Localização do Espectro de Matrizes Autoadjuntas	565
10.6	Matrizes Triangulares	567
10.7	O Teorema de Decomposição de Jordan e a Forma Canônica de Matrizes	568
10.7.1	Resultados Preparatórios	569

10.7.2	O Teorema da Decomposição de Jordan	573
10.7.3	Matrizes Nilpotentes e sua Representação Canônica	576
10.7.4	A Forma Canônica de Matrizes	580
10.7.5	Mais Alguns Resultados Sobre Matrizes Nilpotentes	582
10.8	Algumas Representações Especiais de Matrizes	584
10.8.1	A Decomposição Polar de Matrizes	584
10.8.2	A Decomposição em Valores Singulares	586
10.8.2.1	Uma Aplicação: a Decomposição de Schmidt	589
10.8.2.2	A Noção de Traço Parcial de Matrizes	591
10.8.2.3	Purificação	593
10.8.3	O Teorema da Triangularização de Schur	594
10.8.4	A Decomposição QR e a Decomposição de Iwasawa (“KAN”)	596
10.8.5	Diagonalização em Blocos de Matrizes Antissimétricas Reais	598
10.8.5.1	Resultado Principal. Enunciado e Demonstração	599
10.8.6	O Teorema de Williamson	605
10.9	A Pseudoinversa de Moore-Penrose	606
10.9.1	Outras Propriedades da Pseudoinversa de Moore-Penrose	609
10.9.1.1	A Regularização de Tikhonov. Existência	611
10.9.1.2	A Pseudoinversa de Moore-Penrose e o Teorema Espectral	614
10.9.2	A Pseudoinversa de Moore-Penrose e Problemas de Optimização Linear	615
10.9.3	Existência e Decomposição em Valores Singulares	616
10.10	Produtos Tensoriais de Matrizes	617
10.11	Propriedades Especiais de Determinantes	619
10.11.1	Expansão do Polinômio Característico	619
10.11.2	A Desigualdade de Hadamard	620
10.12	Exercícios Adicionais	623
11	Tópicos de Álgebra Linear. II	628
11.1	Uma Topologia Métrica em $\text{Mat}(\mathbb{C}, n)$	629
11.2	Exponenciais, Logaritmos e Funções Analíticas de Matrizes	632
11.2.1	Exponencial de Matrizes Como Limite de Potências	639
11.2.2	A Exponenciação de Matrizes e os Grupos $\text{GL}(\mathbb{C}, n)$ e $\text{GL}(\mathbb{R}, n)$	642
11.3	A Fórmula de Lie-Trotter e a Fórmula do Comutador	645
11.4	Aplicações Lineares em $\text{Mat}(\mathbb{C}, n)$	648
11.4.1	Alguns Fatos Gerais sobre Aplicações Lineares em $\text{Mat}(\mathbb{C}, n)$	648
11.4.2	Alguns Exemplos Específicos de Aplicações Lineares em $\text{Mat}(\mathbb{C}, n)$	653
11.5	A Fórmula de Baker, Campbell e Hausdorff	658
11.6	A Fórmula de Duhamel e Algumas de suas Consequências	663
11.7	Continuidade do Determinante	667
11.8	Exercícios Adicionais	669
IV	Equações Diferenciais	672
12	Equações Diferenciais Ordinárias. Uma Introdução	673
12.1	Definição e Alguns Exemplos	674
12.1.1	Equações Diferenciais Ordinárias Lineares	676
12.1.2	Equações Ordinárias de Segunda Ordem. Exemplos de Interesse	680
12.2	Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias	682
12.3	Discussão sobre Problemas de Valor Inicial	687

12.3.1	Problemas de Valor Inicial. Patologias e Exemplos a se Ter em Mente	688
12.3.2	Teoremas de Existência e Unicidade de Soluções	691
12.3.3	Soluções Globais	693
12.3.4	Dependência Contínua de Condições Iniciais e de Parâmetros	695
12.4	Linearização de EDO's e Estabilidade	695
12.5	Equações Periódicas e o Teorema de Floquet	699
13	Alguns Métodos de Resolução de Equações Diferenciais Ordinárias	704
13.1	Solução de Equações Ordinárias Lineares de Primeira Ordem	704
13.2	As Equações de Bernoulli e de Riccati	705
13.3	Integração de Equações Separáveis	707
13.4	O Método de Variação de Constantes	708
13.5	O Método de Substituição de Prüfer	709
13.6	O Método de Inversão	711
13.7	Solução de Equações Exatas e o Método dos Fatores Integrantes	712
13.8	Soluções das Equações de D'Alembert-Lagrange e Clairaut	716
14	Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias Lineares	720
14.1	Introdução	721
14.2	Unicidade e Existência de Soluções	721
14.2.1	Unicidade	721
14.2.2	Existência. A Série de Dyson	724
14.2.3	Propriedades de $D(t, s)$	728
14.3	Equações com Coeficientes Constantes	731
14.3.1	Alguns Exemplos e Aplicações	733
14.4	Perturbações de Sistemas Lineares	737
14.5	Mais sobre a Série de Dyson. Produtos de Tempo Ordenado	741
14.6	Sistemas de Equações Diferenciais Lineares no Plano Complexo	743
14.6.1	O Caso Analítico	744
14.6.2	Resolução por Séries de Potências	749
14.6.3	Sistemas com Pontos Singulares. Monodromia	750
14.6.4	Sistemas com Pontos Singulares Simples	759
14.7	Sistemas Provenientes de EDOs de Ordem m	762
14.7.1	Pontos Singulares Simples em EDO's de Ordem m	764
14.7.2	Singularidades no Infinito	768
14.7.3	Alguns Exemplos de Interesse	769
14.8	Equações Fuchsianas. Símbolos de Riemann	774
14.8.1	Equações Fuchsianas de Primeira Ordem	775
14.8.2	Equações Fuchsianas de Segunda Ordem	778
14.8.3	A Equação de Riemann-Papperitz. Símbolos de Riemann	786
14.8.3.1	Transformações de Simetria dos Símbolos de Riemann	789
14.8.3.2	Equações Fuchsianas com três pontos singulares e a equação hipergeométrica	792
14.9	Exercícios Adicionais	795
15	Soluções de Equações Diferenciais Ordinárias Lineares no Plano Complexo	800
15.1	Soluções em Séries de Potências para Equações Regulares	801
15.1.1	A Equação do Oscilador Harmônico Simples	802
15.1.2	A Equação de Legendre	803
15.1.3	A Equação de Hermite	806

15.1.4	A Equação de Airy	808
15.1.5	A Equação de Tchebychev	810
15.1.6	O Caso de Equações Regulares Gerais	813
15.2	Solução de Equações Singulares Regulares. O Método de Frobenius	815
15.2.1	Equações Singulares Regulares. O Caso Geral	818
15.2.2	A Equação de Euler Revisitada	825
15.2.3	A Equação de Bessel	827
15.2.4	Equações Relacionadas à de Bessel. A Equação de Bessel Esférica	837
15.2.5	Equações Relacionadas à de Bessel. A Equação de Bessel Modificada	839
15.2.6	A Equação de Laguerre	840
15.2.7	A Equação Hipergeométrica	842
15.2.8	A Equação Hipergeométrica Confluente	845
15.3	Algumas Equações Associadas	848
15.3.1	A Equação de Legendre Associada	848
15.3.2	A Equação de Laguerre Associada	850
15.4	Exercícios Adicionais	852
	APÊNDICES	854
15.A	Prova da Proposição 15.1. Justificando os Polinômios de Legendre	854
15.B	Polinômios de Legendre: Provando (15.14)	855
15.C	Justificando os Polinômios de Hermite	857
15.D	Polinômios de Hermite: Provando (15.20)	858
15.E	Porque λ deve ser um Inteiro Positivo na Equação de Laguerre	859
15.F	Polinômios de Tchebychev: Obtendo (15.39) a Partir de (15.36)–(15.38)	861
16	Propriedades de Algumas Funções Especiais	863
16.1	Discussão Preliminar	863
16.1.1	Relações de Ortogonalidade	864
16.1.1.1	Condições de Contorno e a Origem das Relações de Ortogonalidade	869
16.1.2	Fórmulas de Rodrigues	873
16.2	Propriedades de Algumas Funções Especiais	875
16.2.1	Propriedades dos Polinômios de Legendre	875
16.2.2	Propriedades dos Polinômios de Legendre Associados	879
16.2.2.1	As Funções Harmônicas Esféricas	885
16.2.2.2	Fórmula de Adição de Funções Harmônicas Esféricas	887
16.2.3	Propriedades dos Polinômios de Hermite	891
16.2.3.1	As Funções de Hermite	894
16.2.4	Propriedades dos Polinômios de Tchebychev	898
16.2.5	Propriedades dos Polinômios de Laguerre	898
16.2.6	Propriedades dos Polinômios de Laguerre Associados	902
16.2.7	Algumas Propriedades das Funções de Bessel	905
16.2.7.1	Propriedades de Zeros das Funções de Bessel	915
16.2.7.2	Relações de Ortogonalidade das Funções de Bessel no Intervalo $[0, 1]$	917
16.2.7.3	Comentário sobre a equação de Bessel no intervalo $J = [0, \infty)$	923
16.2.7.4	A Expansão de Schlömilch	923
16.2.8	Propriedades das Funções de Bessel Esféricas	927
16.2.8.1	Relações de Ortogonalidade Para as Funções de Bessel Esféricas no Intervalo $[0, 1]$	929
16.3	Exercícios Adicionais	931
	APÊNDICES	932
16.A	Provando (16.54) a Força Bruta	932

17	Completeza de Algumas Famílias de Funções	934
17.1	Completeza de Polinômios Ortogonais em Intervalos Compactos	934
17.2	Completeza dos Polinômios de Hermite	937
17.3	Completeza dos Polinômios Trigonométricos	938
17.4	Completeza das Funções de Bessel e Propriedades de seus Zeros	941
17.4.1	A Equação de Bessel como Problema de Sturm-Liouville	941
17.4.1.1	O Caso $\nu > 0$	942
17.4.1.2	O Caso $\nu > 0$ com $\beta_1 = -\nu\beta_2 \neq 0$	944
17.4.1.3	O Caso $\nu = 0$	945
17.4.2	Conclusões Sobre a Completeza das Funções de Bessel e Propriedades de seus Zeros	947
18	Rudimentos da Teoria das Equações a Derivadas Parciais	949
18.1	Definições, Notações e Alguns Exemplos	950
18.2	Algumas Classificações de Equações a Derivadas Parciais	959
18.2.1	Equações Lineares, Não lineares, Semilineares e Quasilineares	959
18.2.2	Classificação de Equações de Segunda Ordem. Equações Parabólicas, Elípticas e Hiperbólicas	961
18.3	O Método de Separação de Variáveis	964
18.3.1	O Método de Separação de Variáveis. Caso de Equações Lineares	965
18.3.2	O Método de Separação de Variáveis. Caso de Equações Não Lineares	968
18.4	Problemas de Cauchy e Superfícies Características. Definições e Exemplos Básicos	969
18.5	O Método das Características	976
18.5.1	Exemplos de Aplicação do Método das Características	981
18.5.2	Características. Comentários Adicionais	992
18.5.3	Sistemas de Equações Quasilineares de Primeira Ordem	993
18.5.3.1	Generalidades Sobre Problemas de Condição Inicial em Sistemas Quasilineares de Primeira Ordem	998
18.5.3.2	Sistemas Hiperbólicos Semilineares de Primeira Ordem em Duas Variáveis	1001
18.5.3.3	Soluções Ditas Simples de Sistemas Quasilineares, Homogêneos, de Primeira Ordem em Duas Variáveis	1004
18.6	Alguns Teoremas de Unicidade de Soluções de Equações a Derivadas Parciais	1007
18.6.1	Casos Simples. Discussão Preliminar	1007
18.6.2	Unicidade de Solução para as Equações de Laplace e Poisson	1011
18.6.3	Unicidade de Soluções. Generalizações	1013
18.7	Condições de Compatibilidade em Sistemas Sobredeterminados	1020
18.8	Exercícios Adicionais	1025
19	Introdução ao Problema de Sturm-Liouville	1026
19.1	Comentários Iniciais	1027
19.2	O Problema de Sturm	1031
19.2.1	Soluções Fundamentais e Funções de Green	1032
19.2.2	A Função de Green. Resolvendo o Problema de Sturm	1033
19.2.2.1	O Teorema de Green	1036
19.2.2.2	O Problema de Sturm com Condições de Contorno Não Homogêneas	1038
19.3	O Problema de Sturm-Liouville	1039
19.3.1	Propriedades Básicas dos Autovalores e Autofunções de Problemas de Sturm-Liouville	1040
19.3.1.1	A Simplicidade dos Autovalores	1040
19.3.1.2	O Lema de Green	1041
19.3.1.3	Realidade dos Autovalores e Autofunções. Ortogonalidade de Autofunções	1043
19.3.1.4	Propriedades dos Autovalores	1044
19.3.2	A Equação Integral de Fredholm	1048
19.3.3	Uma Aplicação do Problema de Sturm-Liouville	1051

19.3.4	Métodos Variacionais de Determinação de Autovalores	1054
19.4	Comentários Finais	1056
19.4.1	Um Problema de Sturm-Liouville Singular	1056
19.5	Exercícios Adicionais	1059
	APÊNDICES	1062
19.A	Prova do Teorema 19.1. Existência e Unicidade	1062
19.B	Prova da Proposição 19.2	1063
19.C	Comentário Sobre o Determinante Wronskiano	1064
19.D	Demonstração do Teorema 19.3	1065
19.D.1	Prova da Desigualdade (19.D.17)	1068
19.E	Uma Relação Útil	1069
20	Alguns Resultados sobre Equações Integrais	1070
20.1	Descrição	1070
20.2	O Método dos Determinantes de Fredholm	1072
20.2.1	A Equação Integral de Fredholm Linear Não Homogênea	1072
20.2.2	A Equação Integral de Fredholm Linear Homogênea	1076
20.3	A Equação Integral de Schlömilch	1077
20.4	Exercícios Adicionais	1080
	APÊNDICES	1081
20.A	Obtendo os Determinantes de Fredholm	1081
V	Grupos	1088
21	Grupos. Alguns Exemplos	1089
21.1	O Grupo de Permutações	1090
21.2	O Grupo de Permutações de n Elementos	1091
21.2.1	Ciclos, Transposições e Transposições Elementares	1092
21.2.1.1	O Sinal, ou Paridade, de uma Permutação. O Símbolo de Levi-Civita	1095
21.3	Alguns Grupos Matriciais	1097
21.3.1	Grupos Lineares e Grupos Lineares Especiais	1097
21.3.1.1	Grupos Lineares Projetivos	1100
21.3.2	O Grupo de Borel e o Grupo de Heisenberg	1102
21.3.2.1	O Grupo de Heisenberg	1102
21.3.3	Grupos Associados a Formas Bilineares e Sesquilineares	1109
21.3.3.1	Os Grupos Ortogonais	1113
21.3.3.2	Os Grupos Unitários	1115
21.3.3.3	Os Grupos Simpléticos	1116
21.4	Os Grupos $SO(2)$, $SO(3)$, $SU(2)$ e $SL(2, \mathbb{C})$	1124
21.4.1	Os Grupos $SO(2)$, $O(2)$, $SO(1, 1)$ e $O(1, 1)$	1124
21.4.2	O Grupo $SO(3)$	1128
21.4.2.1	Mais Propriedades das Matrizes de $SO(3)$	1136
21.4.2.2	$SO(3)$ e os Ângulos de Euler	1139
21.4.2.3	A Parametrização de Cayley de $SO(3)$ (e de $SO(n)$)	1144
21.4.3	O Grupo $O(3)$	1147
21.4.4	O Grupo $SU(2)$	1151
21.4.5	A Relação Entre $SO(3)$ e $SU(2)$	1156
21.4.6	O Grupo $SL(2, \mathbb{C})$	1160

21.5	Generalidades Sobre os Grupos $SU(n)$ e $SO(n)$	1162
21.5.1	Os Grupos $SU(n)$	1162
21.5.1.1	Um Pouco Sobre o Grupo $SU(3)$	1164
21.5.2	Os Grupos $SO(n)$	1166
21.6	O Grupo Afim e o Grupo Euclidiano	1170
21.7	O Grupo de Lorentz em $3 + 1$ -Dimensões	1174
21.7.1	O Espaço-Tempo, a Noção de Intervalo e a Estrutura Causal	1174
21.7.2	A Invariância do Intervalo	1180
21.7.3	O Grupo de Lorentz	1183
21.7.4	Alguns Subgrupos do Grupo de Lorentz	1184
21.7.5	Alguns Fatos Sobre a Estrutura do Grupo de Lorentz	1187
21.7.6	Os Geradores Infinitesimais do Grupo de Lorentz	1191
21.7.6.1	Fórmula de Rodrigues para <i>Boosts</i> de Lorentz	1197
21.7.7	O Grupo de Galilei	1199
21.7.7.1	Comparação Entre os Grupos de Galilei e Lorentz. Contrações	1201
21.8	O Grupo de Poincaré	1204
21.9	Mais Sobre Grupos Simpléticos	1208
21.9.1	O Subgrupo Simplético Real Ortogonal	1209
21.9.2	Grupos Simpléticos. Álgebras de Lie e Parametrização de Cayley	1213
21.9.3	O Teorema de Williamson	1216
21.10	Operadores Diferenciais como Geradores Infinitesimais sobre Funções	1217
21.11	Exercícios Adicionais	1223
	APÊNDICES	1225
21.A	Extensão do Lema 21.3 e do Teorema 21.7 ao Caso Complexo	1225
21.B	Prova do Teorema 21.11	1227
22	Grupos de Lie e Álgebras de Lie. Uma Breve Introdução	1238
22.1	Variedades e Grupos de Lie	1238
22.2	Breves Considerações sobre Grupos Topológicos	1240
22.3	Grupos de Lie Matriciais	1242
22.3.1	Uma Topologia Métrica em $GL(n, \mathbb{C})$	1243
22.3.2	O Grupo de Lie $GL(n, \mathbb{C})$	1243
22.3.3	Subgrupos Uniparamétricos e seus Geradores Infinitesimais	1246
22.3.4	Subgrupos Uniparamétricos e Álgebras de Lie	1249
22.3.5	Subgrupos Fechados de $GL(n, \mathbb{C})$	1253
22.4	A Relação entre Grupos de Lie Matriciais e suas Álgebras de Lie	1256
22.4.1	Álgebras de Lie Nilpotentes, Solúveis, Simples e Semissimples	1257
22.4.2	Questões sobre a Exponenciação de Álgebras de Lie	1260
22.4.3	Alguns Exemplos Especiais	1262
23	Uma Breve Introdução à Teoria das Representações de Grupos	1268
23.1	Representações de Grupos	1268
23.2	Médias Invariantes. A Medida de Haar	1274
23.3	Representações de Grupos Compactos	1276
23.3.1	Representações de Grupos Compactos em Espaços de Hilbert Separáveis	1277
23.4	O Teorema de Peter-Weyl	1283
23.5	Representações Irredutíveis de Dimensão Finita de $SU(2)$	1292
23.6	Representações Irredutíveis de Dimensão Finita de \mathcal{L}_+^\uparrow	1297
23.7	Exercícios Adicionais	1300

VI Topologia Geral, Teoria da Medida e Integração 1302

24 Espaços Métricos	1303
24.1 Métricas e Espaços Métricos	1304
24.1.1 Completeza e o Completamento Canônico	1315
24.1.2 Conjuntos de Sequências	1322
24.2 Pseudométricas	1323
24.3 A Noção de Topologia de Espaços Métricos ou Pseudométricos	1325
24.4 Espaços de Funções Limitadas e Completeza	1329
24.5 Espaços de Banach e de Hilbert	1333
24.5.1 Espaços de Banach em Espaços de Sequências	1335
24.5.1.1 Decrescimento das Normas dos Espaços $\ell_p(\mathbb{N})$	1345
24.6 Teorema do Melhor Aproximante em Espaços Normados Uniformemente Convexos	1347
24.7 Exercícios Adicionais	1353
APÊNDICES	1356
24.A Números Reais e p -ádicos	1356
24.A.1 A Construção de Cantor dos Números Reais	1356
24.A.2 Outros Completamentos dos Racionais. Números p -ádicos	1359
24.B Aproximações para π	1362
25 O Teorema do Ponto Fixo de Banach e Algumas de Suas Consequências	1368
25.1 O Teorema de Ponto Fixo de Banach	1369
25.1.1 Generalizações do Teorema de Ponto Fixo de Banach	1371
25.2 Diversas Aplicações do Teorema de Ponto Fixo de Banach	1374
25.2.1 Aplicação a Equações Numéricas. O Método de Newton	1374
25.2.2 Aplicação a Sistemas Lineares. O Método de Jacobi	1377
25.2.3 Aplicação às Equações Integrais de Fredholm e de Volterra	1379
25.2.4 Aplicações à Teoria das Equações Diferenciais Ordinárias	1385
25.2.4.1 O Teorema de Picard-Lindelöf	1385
25.2.4.2 Generalizando o Teorema de Picard-Lindelöf. Soluções Globais	1389
25.2.4.3 Um Teorema de Comparação de Soluções de EDO's	1390
25.3 O Teorema da Função Implícita e o Teorema da Função Inversa	1392
25.3.1 O Teorema da Função Implícita	1393
25.3.2 O Teorema da Função Inversa	1397
APÊNDICES	1398
25.A O Lema de Grönwall	1398
26 A Métrica de Hilbert e o Teorema de Perron-Frobenius	1399
26.1 A Métrica de Hilbert em Conjuntos Convexos Abertos Limitados	1400
26.2 Cones. Definições, Conceitos e Alguns Exemplos Ilustrativos	1406
26.2.1 Métricas Projetivas	1410
26.3 A Métrica Projetiva de Hilbert em Cones Apontados	1411
26.3.1 Estendendo a Métrica de Hilbert para Cones Apontados	1411
26.3.2 A Métrica Projetiva de Hilbert, ou Métrica de Birkhoff	1415
26.4 O Teorema de Perron-Frobenius	1417
27 Espaços Topológicos e Espaços Mensuráveis. Definições e Propriedades Básicas	1418
27.1 Definições, Propriedades Elementares e Exemplos	1418
27.2 Algumas Construções Especiais e Exemplos	1424
27.2.1 Topologias Geradas por Famílias de Conjuntos	1424

27.2.1.1	A Topologia de Sorgenfrey	1425
27.2.2	σ -Álgebras Geradas por Famílias de Conjuntos	1427
27.2.3	Bases de Espaços Topológicos	1428
27.2.4	Topologias e σ -Álgebras Induzidas	1430
27.2.5	Topologias e σ -Álgebras Produto	1432
27.3	Interior e Fecho de Conjuntos em Espaços Topológicos	1432
27.3.1	Fecho de Conjuntos em Espaços Métricos	1439
27.4	Espaços Topológicos Separáveis e Segundo-Contáveis	1440
27.4.1	A Segundo-Contabilidade como Propriedade Herdada	1443
28	Medidas	1445
28.1	O Problema da Teoria da Medida	1445
28.2	Medidas de Conjuntos. Definição, Exemplos e Propriedades Básicas	1448
28.3	Construindo Medidas. A Medida Exterior e o Teorema de Carathéodory	1451
28.3.1	Medidas Exteriores Métricas e Conjuntos Borelianos	1458
28.4	Um Esquema de Construção de Medidas Exteriores	1461
28.5	Medidas sobre Anéis e suas Extensões	1464
28.6	Espaços de Medida como Espaços Pseudométricos	1467
28.6.1	O Espaço Quociente como uma Álgebra Booleana	1469
	APÊNDICES	1471
28.A	Prova das Fórmulas de Inclusão-Exclusão	1471
29	A Medida de Lebesgue e a Medida de Hausdorff	1473
29.1	A Construção da Medida de Lebesgue em \mathbb{R}^n	1473
29.1.1	A σ -álgebra de Borel em \mathbb{R}^n e a Medida de Borel-Lebesgue	1476
29.2	As Medidas de Hausdorff	1478
29.3	Conjuntos de Cantor	1482
29.3.1	O Conjunto de Cantor Ternário	1482
29.3.2	Mais Exemplos de Conjuntos de Cantor	1486
29.4	Exemplos de Conjuntos Mensuráveis por Lebesgue mas não Borelianos	1491
29.4.1	A Função de Cantor e um Exemplo dela Derivado	1492
29.4.2	Bases de Hamel e a Medida de Lebesgue	1496
29.5	Exercícios Adicionais	1499
30	Continuidade e Convergência em Espaços Topológicos	1504
30.1	Primeiras Definições	1504
30.2	Espaços Hausdorff	1506
30.3	Redes e o Caso de Espaços Topológicos Gerais	1507
30.3.1	Redes em Espaços Métricos	1510
30.4	O Limite do Ínfimo e o Limite do Supremo	1511
30.5	Continuidade de Funções em Espaços Topológicos	1514
30.5.1	Outras Noções Associadas à de Continuidade	1516
30.5.1.1	Homeomorfismos e Mergulhos Topológicos	1517
30.5.2	Outras Caracterizações do Conceito de Continuidade em Espaços Topológicos	1518
30.5.3	Continuidade e Convergência	1520
31	Elementos da Teoria da Integração	1522
31.1	Comentários Preliminares	1523
31.2	A Integração no Sentido de Riemann	1524
31.2.1	A Integral de Riemann Imprópria	1532

31.2.2	Diferenciação e Integração em Espaços de Banach	1534
31.3	A Integração no Sentido de Lebesgue	1538
31.3.1	Funções Mensuráveis e Funções Simples	1538
31.3.2	A Integral de Lebesgue. Integração em Espaços Mensuráveis	1543
31.3.3	A Integral de Lebesgue e sua Relação com a de Riemann	1550
31.3.4	Teoremas Básicos sobre Integração e Convergência	1553
31.3.4.1	O Teorema da Convergência Monótona	1554
31.3.4.2	O Lema de Fatou	1555
31.3.4.3	O Teorema da Convergência Dominada	1556
31.3.5	Alguns Resultados de Interesse	1557
31.4	Os Espaços \mathcal{L}_p e L_p	1559
31.4.1	As Desigualdades de Hölder e de Minkowski	1561
31.4.2	O Teorema de Riesz-Fischer. Completeza	1564
	APÊNDICES	1566
31.A	Mais sobre a Integral de Darboux	1566
31.A.1	Equivalência das Definições II e III da Integrabilidade de Riemann	1567
31.B	Caracterizações e Propriedades de Funções Mensuráveis	1568
31.C	Prova do Lema 31.3	1573
31.D	Demonstração de (31.26)	1574
31.E	A Equivalência das Definições (31.27) e (31.28)	1574
31.F	Prova do Teorema da Convergência Monótona	1577
31.G	Prova do Lema de Fatou	1577
31.H	Prova do Teorema da Convergência Dominada	1578
31.I	Prova dos Teoremas 31.2 e 31.3	1579
31.J	Prova das Desigualdades de Hölder e Minkowski	1581
31.K	Prova do Teorema de Riesz-Fischer	1583
32	Alguns Tópicos Especiais em Topologia e Análise	1585
32.1	Uma Coletânea de Definições	1586
32.1.1	Conjuntos Densos em Espaços Topológicos	1586
32.1.2	A Noção de Conjunto Conexo em Espaços Topológicos	1587
32.2	Axiomas de Separabilidade	1591
32.2.1	Algumas Propriedades de Separação em Espaços Métricos	1591
32.2.2	Postulados de Separabilidade em Espaços Topológicos	1592
32.2.3	O Lema de Urysohn	1600
32.2.3.1	O Teorema de Extensão de Tietze	1605
32.2.4	A Propriedade de Hausdorff como Propriedade Herdada	1608
32.3	Compacidade, Compacidade Local e Paracompacidade	1609
32.3.1	Algumas Definições Gerais	1609
32.3.2	Espaços de Lindelöf. Um Mínimo	1611
32.3.3	Compacidade. Definições e Propriedades em Espaços Topológicos Gerais	1612
32.3.3.1	Compacidade em Espaços Hausdorff	1615
32.3.3.2	Compacidade em Espaços Métricos	1619
32.3.3.3	Compacidade em \mathbb{R}^n	1626
32.3.3.4	Compacidade na Reta de Sorgenfrey	1627
32.3.4	Os Teoremas de Ascoli e de Arzelà	1629
32.3.4.1	Equilimitação e Equicontinuidade de Famílias de Funções	1629
32.3.4.2	Os Teoremas de Ascoli e de Arzelà para Famílias de Funções de um Compacto sobre um Espaço Métrico	1631
32.3.4.3	O Teorema de Peano	1633

32.3.5	Espaços Compactos Hausdorff e Partições da Unidade	1637
32.3.5.1	Uma Excursão pelas Variedades Topológicas Compactas Hausdorff	1638
32.3.6	Compacidade Local	1641
32.3.6.1	Espaços Localmente Compactos Hausdorff	1642
32.3.7	Paracompacidade	1644
32.3.7.1	Espaços Paracompactos Hausdorff	1644
32.4	As Noções de Topologia Inicial e de Topologia Final	1649
32.4.1	A Topologia Inicial de uma Coleção de Funções	1649
32.4.2	A Topologia Final de uma Coleção de Funções	1651
32.4.3	A Topologia Quociente	1652
32.5	Somas de Espaços Topológicos	1653
32.6	A Topologia Produto de Espaços Topológicos	1654
32.6.1	Alguns Resultados Envolvendo Compacidade e Topologia Produto	1656
32.6.2	O Cubo de Hilbert	1657
32.7	Teoremas de Metrizabilidade	1660
32.7.1	O Teorema de Metrização de Urysohn e Tikhonov	1661
32.8	O Teorema da Categoria de Baire	1664
32.9	A Métrica de Hausdorff	1665
32.9.1	Continuidade do Conjunto de Raízes de Polinômios	1668
	APÊNDICES	1673
32.A	Prova da Proposição 32.35	1673

VII Geometria Diferencial e Topologia Diferencial

1676

33	Variedades	1677
33.1	Variedades Topológicas	1678
33.1.1	Construindo Variedades Topológicas	1683
33.2	Variedades Diferenciáveis	1685
33.2.1	Partições da Unidade Diferenciáveis	1690
33.2.2	A Noção de Espaço Tangente	1692
33.2.2.1	O Espaço Cotangente	1698
33.2.3	Tensores em Variedades	1700
33.2.3.1	Traços de Tensores. Contração de Índices	1702
33.2.3.2	Transposição de Tensores	1704
33.2.4	Aplicações Entre Variedades Diferenciáveis	1705
33.2.4.1	A Diferencial de Uma Aplicação Entre Variedades. “Pullback” e “Pushforward”	1705
33.2.4.2	Imersões, Mergulhos e Subvariedades	1709
33.2.4.3	Imersões e Mergulhos. Exemplos e Contraexemplos Simples	1711
33.3	Campos Vetoriais e Tensoriais	1716
33.3.1	A Derivada de Lie	1719
33.4	Exemplos de Variedades Topológicas e Diferenciáveis	1724
33.4.1	Uma Variedade Topológica Paracompacta não Segundo-Contável	1724
33.4.2	O Gráfico de uma Função Real em \mathbb{R}^n	1725
33.4.2.1	Cones. E Um Estudo de Caso	1727
33.4.3	Superfícies Regulares em \mathbb{R}^n	1729
33.4.4	As Esferas S^n	1731
33.4.5	Toros (e Algumas Generalizações)	1734
33.4.6	Espaços Projetivos Reais	1736

33.4.7	Grupos de Lie	1740
33.4.8	Fibrados, Fibrados Vetoriais e Principais	1740
	APÊNDICES	1742
33.A	Derivadas de Lie. Prova das Relações (33.74) e (33.85)	1742
33.B	Derivadas de Lie. Prova da Relação (33.94)	1743
34	Noções Geométricas em Variedades	1746
34.1	Tensores Métricos Riemannianos e Semi-Riemannianos	1747
34.1.1	Transposição em Relação a Tensores Métricos	1757
34.2	Conexões Afins	1760
34.2.1	Conexões Afins em Campos Vetoriais	1761
34.2.1.1	Conexões Afins em Campos Tensoriais	1766
34.2.2	O Tensor de Torção	1769
34.2.3	Tipos Especiais de Conexões Afins	1770
34.2.3.1	Conexões Simétricas (ou Livres de Torção)	1771
34.2.3.2	Conexões Métricas (ou Riemannianas)	1772
34.2.3.3	Conexões de Levi-Civita	1778
34.2.3.4	Conexões de Weyl e a Origem das Transformações de Calibre	1778
34.2.4	Gradiente, Divergente e Laplaciano	1781
34.3	O Tensor de Curvatura	1785
34.3.1	As Identidades de Bianchi e Outras Propriedades	1788
34.3.2	O Tensor de Curvatura em Coordenadas Locais	1790
34.3.3	A Curvatura Seccional	1792
34.3.4	O Tensor de Ricci e a Curvatura Escalar	1795
34.3.5	Comentário Sobre a Segunda Identidade de Bianchi e as Equações de Einstein	1798
34.4	Geodésicas. O Mapa Exponencial Geodésico	1801
34.4.1	Geodésicas. Definição	1801
34.4.2	Geodésicas como Curvas Extremizantes do Comprimento (ou do Tempo Próprio)	1803
34.4.3	O Mapa Exponencial Geodésico	1806
34.4.4	Coordenadas Normais de Riemann e de Fermi. O Princípio de Equivalência	1808
34.4.4.1	Coordenadas Normais de Riemann	1809
34.4.4.2	Coordenadas Normais de Fermi	1810
34.4.4.3	O Princípio de Equivalência	1812
34.4.5	O Lema de Gauss	1816
34.4.6	Pontos Conjugados e a Equação de Jacobi	1820
34.4.6.1	A Equação de Jacobi	1820
34.4.6.2	Pontos Conjugados	1822
34.5	Campos de Killing	1824
34.6	A Estrutura Causal de Variedades Lorentzianas	1828
34.6.1	A Identidade de Raychaudhuri	1830
	APÊNDICES	1840
34.A	Demonstração de Algumas Propriedades do Tensor de Curvatura	1840
34.A.1	Prova da Proposição 34.6	1840
34.A.2	Prova da Primeira Identidade de Bianchi, Proposição 34.8	1841
34.A.3	Prova da Segunda Identidade de Bianchi, Proposição 34.9	1842
34.A.4	Prova da Proposição 34.10	1844
34.A.5	Prova da Proposição 34.12	1845
34.B	Propriedades Básicas de Coordenadas Normais de Riemann. Prova da Proposição 34.18	1846

35 Formas Diferenciais	1849
35.1 Formas Diferenciais	1849
35.1.1 A Derivada Exterior de Formas	1853
35.1.2 Formas Exatas e Formas Fechadas	1855
35.1.2.1 O Lema de Poincaré	1858
35.2 Dualidade de Hodge	1862
35.2.1 O Mapa Dual de Hodge	1862
35.2.2 A Coderivada Exterior	1865
35.2.3 O Operador de Laplace-de Rham	1867
35.2.3.1 Definindo Gradiente, Divergente e Rotacional Via Formas Diferenciais	1867
35.2.4 Formas Harmônicas. O Teorema de Decomposição de Hodge e o Teorema de Hodge	1872
APÊNDICES	1875
35.A Os Símbolos de Levi-Civita	1875
35.B Composição de Mapas de Hodge. Demonstração de (35.39)	1878
35.C Demonstração de (35.41) e (35.42)	1879
35.D Demonstração de (35.50)	1880
36 Capítulo Suplementar: Rudimentos da Geometria de Curvas e Superfícies em \mathbb{R}^3	1881
36.1 Curvas Regulares em \mathbb{R}^3	1882
36.1.1 Torção. Fórmulas de Frenet-Serret	1886
36.1.2 Hélices Circulares e Hélices Gerais	1889
36.1.2.1 Hélices Circulares	1889
36.1.2.2 Hélices Gerais, ou Hélices de Inclinação Constante	1892
36.1.3 Curvatura e Torção em Termos de Outros Parâmetros	1893
36.1.4 Alguns Outros Exemplos	1895
36.2 Superfícies Regulares em \mathbb{R}^3	1899
36.2.1 O Mapa de Gauss	1900
36.2.2 A Primeira e a Segunda Formas Fundamentais	1902
36.2.3 O Mapa de Gauss e sua Diferencial. O Operador de Forma	1905
36.2.3.1 O Operador de Forma e a Segunda Forma Fundamental	1906
36.2.3.2 As Curvaturas Principais. A Curvatura Gaussiana e a Curvatura Média	1907
36.2.4 As Equações Fundamentais da Teoria de Superfícies	1908
36.2.4.1 As Equações de Weingarten	1908
36.2.4.2 As Equações de Gauss	1911
36.2.4.3 Relações de Gauss-Peterson-Mainardi-Codazzi para Superfícies em \mathbb{R}^3	1913
36.2.4.4 Isometrias. O <i>Theorema Egregium</i> de Gauss	1916
36.2.4.5 As Equações Fundamentais em Notação Tensorial. Relação com o Tensor de Curvatura	1918
36.2.5 Derivação Covariante e seu Significado em Superfícies	1921
36.2.5.1 O Transporte Paralelo ao Longo de uma Curva	1927
36.2.5.2 A Conexão em Superfícies é uma Conexão Métrica	1928
36.2.6 A Noção de Curvatura Geodésica. Geodésicas	1929
36.2.6.1 Curvas Geodésicas em Superfícies	1931
APÊNDICES	1933
36.A Demonstração das Relações (36.204) e (36.205)	1933
VIII Análise Funcional I. Séries e Transformadas de Fourier. Distribuições	1935
37 Aproximação de Funções. Aproximações Polinomiais e Séries de Fourier	1936

37.1	Noções de Convergência para Sequências de Funções	1937
37.1.1	Importância da Convergência Uniforme	1938
37.1.1.1	Troca de Ordem entre Limites e Integrais	1939
37.1.1.2	Troca de Ordem entre Limites e Derivadas	1941
37.1.1.3	Troca de Ordem entre Derivadas e Integrais	1941
37.2	Sequências Delta de Dirac	1943
37.3	Aproximação de Funções por Polinômios	1949
37.3.1	O Teorema de Weierstrass	1949
37.3.2	O Teorema de Taylor	1956
37.4	Aproximação de Funções por Polinômios Trigonômétricos	1963
37.4.1	Preliminares	1964
37.4.2	A Série de Fourier de Funções Periódicas de Período T	1967
37.4.3	Polinômios Trigonômétricos e Funções Contínuas e Periódicas	1968
37.4.4	Convergência de Séries de Fourier	1973
37.4.4.1	Séries de Fourier em Senos ou Cossenos para Funções Definidas em Intervalos Compactos	1979
37.4.5	Revisitando a Aproximação Uniforme de Funções Contínuas e Periódicas por Polinômios Trigonômétricos	1982
37.4.6	Somas de Cesàro	1982
37.4.6.1	O Núcleo de Fejér	1984
37.4.7	Séries de Fourier e o Espaço de Hilbert $L^2([-\pi, \pi], dx)$	1986
37.5	O Teorema de Stone-Weierstrass	1987
37.6	Exercícios Adicionais	1992
	APÊNDICES	2000
37.A	Prova do Teorema de Weierstrass Usando Polinômios de Bernstein	2000
37.B	A Demonstração de Weierstrass do Teorema de Weierstrass	2004
38	Introdução às Distribuições e às Transformadas de Fourier	2006
38.1	Funções de Schwartz e Funções de Teste	2007
38.1.1	Funções Gaussianas	2018
38.2	Transformadas de Fourier	2021
38.2.1	Transformadas de Fourier no Espaço de Schwartz	2024
38.2.1.1	As Relações de Weyl e a Fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff	2027
38.2.1.2	A Transformada de Fourier de Funções Gaussianas	2030
38.2.1.3	Invertibilidade da Transformada de Fourier no Espaço de Schwartz	2033
38.2.1.4	Transformadas de Fourier, Produtos de Convolução e Identidade de Plancherel	2036
38.2.1.5	“Relações de Incerteza” para Transformadas de Fourier	2038
38.2.2	A Transformada de Fourier em $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$	2040
38.2.2.1	Mais Algumas Transformadas de Fourier Relevantes em Aplicações	2043
38.2.2.2	A Transformada de Fourier em $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$ e suas Propriedades Espectrais	2045
38.2.3	Transformadas de Fourier: Tópicos Suplementares	2048
38.2.3.1	A Fórmula de Soma de Poisson	2048
38.2.3.2	Usos da Fórmula de Soma de Poisson. A Função θ de Jacobi	2050
38.2.3.3	Transformadas de Fourier e Médias Angulares	2051
38.3	Distribuições e Distribuições Temperadas	2057
38.3.1	Primeiros Exemplos de Distribuições	2059
38.3.2	Outros Exemplos de Distribuições	2064
38.3.2.1	A Distribuição Valor Principal	2064
38.3.2.2	Distribuições do Tipo Parte Finita de Hadamard	2066
38.3.3	Algumas Relações Úteis Envolvendo Distribuições	2069
38.3.4	Derivadas de Distribuições	2073

38.3.4.1	Alguns Exemplos de Derivadas de Distribuições	2076
38.3.4.2	Cálculo da Derivada de Algumas Distribuições de Interesse	2077
38.3.5	Alguns Resultados Estruturais sobre Distribuições	2079
38.3.6	Transformadas de Fourier de Distribuições Temperadas	2080
38.3.6.1	Cálculo de Transformadas de Fourier de Algumas Distribuições Temperadas	2080
38.3.7	Produtos de Distribuições	2084
38.3.7.1	Produto de Convolução de Distribuições	2089
38.4	Equações Diferenciais Distribucionais, Soluções Fundamentais e Funções de Green	2090
38.4.1	Soluções Fundamentais	2093
38.4.1.1	Soluções Fundamentais como Funções Generalizadas	2094
38.4.1.2	O Caso de Operadores Lineares a Coeficientes Constantes	2096
38.4.1.3	Alguns Exemplos Fisicamente Relevantes	2101
38.5	Exercícios Adicionais	2105
	APÊNDICES	2112
38.A	Prova de (38.21)	2112
38.B	Prova da Proposição 38.16	2113
38.C	Prova da Regra de Leibniz (38.6)	2117

IX Análise Funcional II. Espaços de Hilbert e Teoria de Operadores 2120

39	Noções Básicas Sobre Espaços de Hilbert	2121
39.1	Aspectos Topológicos Básicos de Espaços de Hilbert	2123
39.2	Aspectos Geométricos Básicos de Espaços de Hilbert	2125
39.2.1	Fechos e Complementos Ortogonais. Somas Diretas de Subespaços Fechados	2128
39.2.2	Funcionais Lineares e o Dual Topológico de um Espaço de Hilbert	2131
39.2.2.1	O Teorema da Representação de Riesz	2132
39.2.3	Conjuntos Ortonormais Completos em Espaços de Hilbert	2134
39.2.4	Conjuntos Totais	2145
39.2.4.1	Um Exemplo no Espaço $L^2(\mathbb{R}, dx)$	2145
39.3	Somas Diretas e Produtos Tensoriais de Espaços de Hilbert. Espaços de Fock	2149
39.3.1	Somas Diretas de uma Coleção Finita de Espaços de Hilbert	2149
39.3.2	Somas Diretas de uma Coleção Contável de Espaços de Hilbert	2150
39.3.3	Produtos Tensoriais de uma Coleção Finita de Espaços de Hilbert	2154
39.3.4	Os Espaços de Fock	2157
39.4	Coleções de Subespaços Fechados como Reticulados Ortomodulares	2159
39.5	Exercícios Adicionais	2162
	APÊNDICES	2163
39.A	Um Exemplo: os Sistemas de Rademacher e de Walsh	2163
39.B	Exemplo de Subespaços Fechados Cuja Soma não é Fechada	2165
40	Operadores Lineares Limitados em Espaços de Banach e de Hilbert	2167
40.1	Operadores Lineares em Espaços Vetoriais Normados	2169
40.1.1	Espaços de Banach de Operadores	2173
40.1.2	O Dual Topológico de um Espaço de Banach	2177
40.1.3	O Teorema de Hahn-Banach e Algumas Consequências do Mesmo	2181
40.1.4	O Teorema de Banach-Steinhaus ou Princípio de Limitação Uniforme	2186
40.1.5	O Teorema da Aplicação Aberta e o Teorema do Gráfico Fechado	2187
40.2	Operadores Limitados em Espaços de Hilbert	2194

40.2.1	A Noção de Operador Adjunto em Espaços de Hilbert	2195
40.2.2	Operadores Autoadjuntos, Normais, Unitários, Projetores Ortogonais e Isometrias Parciais	2198
40.3	Rudimentos da Teoria das Álgebras de Banach e Álgebras C^*	2207
40.3.1	Álgebras de Banach	2207
40.3.2	Alguns Fatos Estruturais sobre Álgebras C^*	2210
40.3.2.1	Álgebras com Involução e a Unidade	2210
40.3.3	A Inversa de Operadores Limitados	2214
40.3.4	O Espectro de Operadores em Álgebras de Banach	2219
40.3.5	O Operador Resolvente e Propriedades Topológicas do Espectro	2220
40.3.5.1	O Teorema da Aplicação Espectral	2225
40.3.6	O Raio Espectral	2226
40.3.7	O Homomorfismo de Gelfand em Álgebras C^*	2230
40.3.8	Raízes Quadradas de Operadores em Álgebras de Banach	2233
40.3.9	Elementos Positivos de Álgebras C^*	2235
40.3.9.1	Relação de Ordem Decorrente da Positividade em Álgebras C^*	2239
40.3.10	Aproximantes da Unidade em Álgebras C^*	2240
40.3.10.1	Cosets por Bi-Ideais em Álgebras C^*	2243
40.4	Álgebras de von Neumann. Um Mínimo	2247
40.4.1	O Teorema do Bicomutante	2249
40.5	Um Pouco sobre Estados e Representações de Álgebras C^*	2252
40.5.1	Morfismos Entre Álgebras C^*	2252
40.5.2	Representações de Álgebras C^*	2254
40.5.2.1	Estados em Álgebras C^* e a Representação GNS	2256
40.5.2.2	Estados Puros, de Mistura e a Irredutibilidade de Representações GNS	2262
40.5.3	Exemplos em Álgebras de Matrizes. Construção GNS. Estados Puros e a Entropia de von Neumann	2264
40.5.3.1	A Entropia de von Neumann	2268
40.5.3.2	A Construção GNS em $\text{Mat}(\mathbb{C}, n)$	2272
40.6	O Espectro de Operadores em Espaços de Banach	2275
40.6.1	O Espectro de Operadores Limitados em Espaços de Hilbert	2278
40.6.2	Espectro em Espaços de Banach. Alguns Exemplos e Contraexemplos	2280
40.7	O Lema da Raiz Quadrada em Espaços de Hilbert	2284
40.7.1	A Decomposição Polar de Operadores Limitados em Espaços de Hilbert	2289
40.8	Operadores Compactos em Espaços de Banach e de Hilbert	2292
40.8.1	Alguns Fatos Gerais Sobre o Espectro de Operadores Compactos	2301
40.8.1.1	O Teorema da Alternativa de Fredholm	2303
40.8.2	O Teorema Espectral para Operadores Compactos Autoadjuntos	2308
40.9	O Teorema Espectral para Operadores Limitados Autoadjuntos em Espaços de Hilbert	2315
40.9.1	O Cálculo Funcional Contínuo e o Homomorfismo de Gelfand	2315
40.9.2	Generalizando o Cálculo Funcional Contínuo. As Medidas Espectrais	2316
40.9.3	Medidas com Valores em Projeções Ortogonais	2324
40.9.4	Os Projetores Espectrais e o Teorema Espectral	2328
40.10	Operadores Tipo Traço e de Hilbert-Schmidt	2331
40.10.1	Operadores Tipo Traço, ou Traciais	2333
40.10.1.1	O Traço de um Operador Tracial	2337
40.10.2	Operadores de Hilbert-Schmidt	2340
40.10.3	Operadores Traciais e de Hilbert-Schmidt e os Operadores Compactos	2347
40.10.4	Operadores de Hilbert-Schmidt e Operadores Integrais	2349
40.10.5	O Teorema de Lidskii. Traço e Espectro de Operadores Traciais	2352

40.11	O Traço Parcial	2353
40.12	Exercícios Adicionais	2357
	APÊNDICES	2359
40.A	Prova do Teorema 40.19	2359
40.B	Um Lema Sobre Espaços Normados Devido a F. Riesz	2361
41	Operadores Lineares Não-Limitados em Espaços de Hilbert	2363
41.1	Classificando Operadores Não-Limitados	2364
41.1.1	Operadores Fechados	2365
41.1.2	Operadores Fecháveis	2368
41.1.3	O Adjunto de um Operador Linear	2369
41.1.3.1	Operadores Simétricos, Autoadjuntos e Essencialmente Autoadjuntos	2374
41.2	Espaços de Deficiência e Extensões Autoadjuntas de Operadores Simétricos	2380
41.2.1	Considerações Preliminares	2380
41.2.2	Classificação de Extensões Simétricas Fechadas de Operadores Simétricos Fechados. Extensões Autoadjuntas	2381
41.3	Formas Quadráticas e Alguns de Seus Usos	2386
41.3.1	Alguns Usos de Formas Quadráticas	2393
41.3.1.1	A Forma de Soma	2393
41.3.1.2	A Extensão de Friedrichs	2393
41.4	Bestiário de Exemplos e Contraexemplos	2395
	APÊNDICES	2403
41.A	Prova do Lema 41.6	2403
42	O Limite Indutivo de Álgebras	2404
X	Aplicações e Usos em Física	2413
43	Equações Diferenciais. Problemas Seleccionados de Interesse Físico	2414
43.1	Dedução de Algumas Equações Diferenciais de Interesse	2415
43.1.1	Dedução Informal da Equação de Difusão de Calor	2415
43.1.2	Dedução Informal da Equação da Corda Vibrante	2419
43.2	As Equações de Helmholtz e de Laplace	2425
43.2.1	Problemas em Duas Dimensões em Coordenadas Polares	2427
43.2.2	Problemas em Três Dimensões em Coordenadas Esféricas	2429
43.3	Problemas de Difusão em uma Dimensão	2432
43.3.1	A Evolução da Temperatura de uma Barra Finita	2432
43.3.2	A Evolução da Temperatura de uma Barra Infinita	2436
43.3.3	A Evolução da Temperatura de uma Barra Semi-Infinita	2441
43.4	A Equação de Ondas	2446
43.4.1	A Equação de Ondas em $1 + 1$ Dimensões	2447
43.4.2	Interlúdio: Ondas Caminhantes e a Equação do Telégrafo	2450
43.4.3	Outro Interlúdio: Sólitons	2452
43.4.3.1	Sólitons na Equação de Korteweg-de Vries	2453
43.4.3.2	Sólitons na Equação de Sine-Gordon	2455
43.4.3.3	Sólitons no Modelo de Poço-Duplo	2456
43.4.3.4	Sólitons na Equação de Schrödinger Não-Linear	2458
43.4.4	A Equação de Ondas e Transformadas de Fourier	2462
43.4.4.1	A Equação de Ondas em $3 + 1$ Dimensões. A Solução de Kirchhoff	2465
43.4.4.2	A Equação de Ondas em $2 + 1$ Dimensões	2466

43.5	O Problema da Corda Vibrante	2468
43.5.1	Corda Vibrante Homogênea	2468
43.5.2	O Problema da Corda Homogênea Pendurada	2471
43.5.3	Corda Vibrante Não-Homogênea	2474
43.5.4	O Problema da Membrana Retangular Homogênea	2477
43.6	O Problema da Membrana Circular Homogênea	2478
43.7	O Oscilador Harmônico na Mecânica Quântica e a Equação de Hermite	2480
43.8	O Átomo de Hidrogênio e a Equação de Laguerre Associada	2483
43.9	Propagação de Ondas em Tanques Cilíndricos	2485
43.10	Equações Hiperbólicas Lineares em 1+1 Dimensões e Equações Integrais	2493
43.11	Aplicações do Método da Função de Green	2500
43.11.1	A Equação de Poisson em Três Dimensões	2501
43.11.2	A Equação de Difusão Não-Homogênea	2502
43.11.3	A Equação de Ondas Não-Homogênea em $n + 1$ -Dimensões	2504
43.11.3.1	A Equação de Ondas Não-Homogênea em 3 + 1-Dimensões	2508
43.11.3.2	Aplicações à Eletrodinâmica. Potenciais Retardados e Equações de Jefimenko	2511
43.11.3.3	A Equação de Ondas Não-Homogênea em 2 + 1-Dimensões	2516
43.11.3.4	A Equação de Ondas Não-Homogênea em 1 + 1-Dimensões	2518
43.12	Exercícios Adicionais	2520
43.12.1	Problemas Seleccionados de Eletrostática	2520
43.12.2	Equação de Difusão em uma Dimensão	2523
43.12.3	Equação de Ondas em uma Dimensão	2525
43.12.4	Modos de Vibração de Membranas	2531
43.12.5	Problemas sobre Ondas e Difusão em Três Dimensões Espaciais	2534
43.12.6	Problemas Envolvendo Funções de Green	2536
	APÊNDICES	2538
43.A	Duas Transformadas de Laplace	2538
44	Rudimentos da Teoria do Potencial	2540
44.1	A Equação de Poisson em Três Dimensões	2540
44.1.1	A Equação de Laplace em Domínios Limitados de \mathbb{R}^3 . O Problema de Dirichlet	2544
44.1.2	A Equação de Poisson em \mathbb{R}^3	2544
44.1.3	A Equação de Poisson Domínios Limitados de \mathbb{R}^3	2545
44.1.3.1	O Caso de Condições de Dirichlet	2545
44.1.3.2	O Caso de Condições de Neumann	2546
44.1.3.3	Existência de Solução	2546
44.1.4	Aplicações à Eletrostática: Capacitância	2546
44.2	O Teorema de Decomposição de Helmholtz	2546
44.2.1	Aplicações ao Eletromagnetismo	2550
44.3	Propriedades Básicas de Funções Harmônicas em \mathbb{R}^3	2551
45	Notas Sobre Mecânica Clássica. I	2553
45.1	Sistemas de Referência e suas Transformações na Mecânica Clássica. Acelerações Inerciais	2554
45.2	Mecânica de Pontos Materiais	2566
45.3	Interlúdio. Aceleração de Coriolis e a Rotação Diurna da Terra	2574
45.3.1	Experimentos de Queda Livre e Mensuração de seu Desvio	2576
45.3.2	O Experimento do Pêndulo de Foucault sob Pequenas Oscilações	2579
45.4	Mecânica de Corpos Rígidos	2586
45.4.1	Propriedades do Tensor Momento de Inércia	2588

45.4.2	As Equações Dinâmicas para Corpos Rígidos	2590
45.4.2.1	Estabilidade de Rotações em Torno dos Eixos Principais. O Teorema do Eixo Intermediário	2594
45.4.3	Movimento de Piões. Algumas Soluções	2597
45.5	O Formalismo Lagrangiano. Fundamentos	2603
45.5.1	O Princípio de Hamilton e as Equações de Euler-Lagrange em Sistemas sem Vínculos	2605
45.5.2	Invariância das Equações de Euler-Lagrange por Mudanças de Coordenadas e de Sistemas de Referência	2610
45.5.3	Sistemas com Vínculos Holonômicos	2612
45.5.4	O Princípio de D'Alembert e o Tratamento de Forças não Conservativas	2613
45.5.4.1	Partícula Carregada em um Campo Eletromagnético. A Força de Lorentz	2619
45.5.5	Sistemas de Coordenadas Não Inerciais no Formalismo Lagrangiano	2621
45.5.5.1	Uma Constante de Movimento	2623
45.5.6	O Formalismo Lagrangiano em Sistemas Não Autônomos	2624
45.6	O Formalismo Lagrangiano. Simetrias Contínuas e Leis de Conservação. O Teorema de Noether	2626
45.6.1	A Noção de Transformação de Simetria	2628
45.6.2	Simetrias Contínuas com $\gamma = 0$ e Leis de Conservação	2629
45.6.3	Similitude Mecânica	2633
45.6.4	Simetrias Contínuas com $\gamma \neq 0$	2634
45.7	O Formalismo Hamiltoniano	2635
45.7.1	Derivação Variacional das Equações de Hamilton	2638
45.7.2	Colchetes de Poisson	2639
45.7.3	Transformações Canônicas	2646
45.8	Exercícios Adicionais	2657
	APÊNDICES	2659
45.A	Mais Algumas Consequências da Proposição 45.1	2659
45.B	Um Lema Útil Sobre Funções Contínuas	2660
46	Notas Sobre Mecânica Clássica. II. Problemas e Aplicações	2662
46.1	As Curvas Tautócrona, Cicloide e Braquistócrona	2662
46.2	Movimento em Potenciais Centrais e o Problema de Kepler	2669
46.2.1	O Problema de Um Corpo sob Forças Centrais	2669
46.2.2	O Problema de Dois Corpos sob Forças Centrais	2672
46.2.3	O Problema de Kepler. Determinação das Órbitas	2672
46.2.4	O Problema de Kepler. Determinação das Trajetórias. A Equação de Kepler	2676
46.3	O Problema de Três Corpos e os Pontos de Lagrange	2681
46.3.1	Os Pontos de Lagrange	2682
46.3.1.1	As Soluções das Equações de Equilíbrio (46.77). O Caso Equilátero	2684
46.3.1.2	As Soluções das Equações de Equilíbrio (46.77). O Caso Não Equilátero	2686
46.3.1.3	Os Pontos de Lagrange L_1 , L_2 e L_3 quando $m_1 \gg m_2 \gg m_3$	2690
46.3.2	Generalizações das Soluções Periódicas de Lagrange	2692
46.3.3	O Problema de Três Corpos Restrito e a Integral de Jacobi	2695
46.4	Modos Normais de Oscilação	2700
46.4.1	Modos Normais e a Energia Mecânica	2707
46.5	Ângulos de Euler na Mecânica de Corpos Rígidos	2709
46.5.1	Usos dos Ângulos de Euler. O Pião de Lagrange	2711
46.6	Exercícios Adicionais	2718
	APÊNDICES	2723
46.A	Seções Cônicas	2723
46.A.1	Elipses e Círculos	2723
46.A.2	Hipérboles	2724

46.A.3	Parábolas	2726
46.A.4	Parametrização Polar de Seções Cônicas	2726
46.B	Soluções Colineares para Pontos de Lagrange	2730
46.C	Cálculo dos Pontos de Lagrange L_1 , L_2 e L_3 quando $m_1 \gg m_2 \gg m_3$	2732
47	Spinores e o Grupo de Lorentz	2736
47.1	$SL(2, \mathbb{C})$ e o Grupo de Lorentz	2736
47.1.1	Ações de $SL(2, \mathbb{C})$ e o Grupo de Lorentz	2739
	APÊNDICES	2744
47.A	Um Isomorfismo entre $PSL(2, \mathbb{C})$ e \mathcal{L}_+^\uparrow	2744
48	Operadores e a Física Quântica	2751
48.1	Algumas Considerações Gerais Sobre Teorias Físicas	2751
48.2	O Modelo da Mecânica Clássica	2754
48.3	O Quadro da Física Quântica e a Relevância do Teorema Espectral	2756
48.4	As Relações de Incerteza	2758
48.4.1	A Relação de Incerteza de Heisenberg	2761
48.4.2	A Relação de Incerteza de Schrödinger	2762
48.4.3	As Relações de Incerteza para Operadores Não Limitados	2766
48.4.3.1	As Relações de Incerteza e Transformações Simpléticas	2768
48.4.4	Discussão Adicional	2769
48.5	As Desigualdades de Bell	2772
48.5.1	O Problema das Variáveis Escondidas	2772
48.5.2	Obtendo as Desigualdades de Bell	2778
48.5.3	Alguns Resultados Matemáticos sobre as Desigualdades de Bell	2783
48.6	Fidelidade e Purificação	2787
48.6.1	Purificação	2790
48.7	O Teorema de Wigner. Simetrias	2793
48.8	Lógica e a Física Quântica	2795
48.8.1	Origem, Motivação e Extensões	2795
48.8.2	O Trabalho de Birkhoff-von Neumann	2797
48.8.3	Prova de uma Versão Parcial do Teorema de Kochen-Specker	2797
	Bibliografia	2803
	Índice Remissivo	2824

Prefácio



intenção básica deste livro é fornecer a estudantes de Física noções matemáticas necessárias a uma melhor compreensão de desenvolvimentos modernos da Física Teórica e da Matemática. Longe vai o tempo em que o conhecimento matemático requerido a um físico teórico restringia-se a certos métodos de resolução de equações diferenciais ordinárias e parciais. Essa visão, porém, infelizmente impregna até o presente a concepção de certas disciplinas ditas de Física-Matemática (ou de Métodos Matemáticos da Física Teórica) e de certos maus livros sobre o tema. Em contraste, noções sobre Estruturas Algébricas, Topologia Geral, Teoria da Medida e da Integração, Geometria Diferencial, Teoria de Grupos, Teoria de Distribuições, Análise Funcional e Álgebras de Operadores são hoje imprescindíveis ao trabalho de um físico teórico.

Este livro cresceu a partir de notas de aula escritas pelo autor em diversas disciplinas de graduação e pós-graduação ministradas no IFUSP. Diversos de seus capítulos podem ser empregados em disciplinas de graduação ou pós-graduação, mas o mesmo foi concebido primordialmente para servir ao autoestudo de estudantes e docentes. De modo geral, o nível varia entre intermediário e avançado. Também de modo geral, o texto é de leitura autossuficiente, mas vez por outra algum estudo complementar é sugerido. A melhor maneira de um estudante conduzir-se no estudo de assuntos matemáticos é munindo-se de uma boa coleção de exemplos e contraexemplos de várias situações específicas, patologias, casos especiais etc. Além de servirem de auxílio à memória, exemplos ajudam a melhor entender a motivação de certas definições e a compreender restrições mencionadas em enunciados de teoremas. Dessa forma, procuramos sempre que possível apresentar (muitas vezes em exercícios!) um bom número de exemplos e contraexemplos para as várias situações tratadas.

Este texto, porém, não é substituto à leitura dos bons livros especializados nos diversos assuntos aqui tratados. Parte do material aqui apresentado pode ser encontrado em diversas fontes, citadas na bibliografia (página 2804), mas a apresentação e sua ordem são próprias. Há também neste texto demonstrações do próprio autor de resultados conhecidos que são, por alguma razão, dificilmente encontradas na literatura. Mas como comenta o autor de [290] em seu prefácio, *“qualquer livro-texto deve mais aos livros e notas de outros do que a seu autor nominal”*.

Fazemos notar que este livro está ainda sendo trabalhado e alguns capítulos e seções podem vir a ser alterados, corrigidos, eliminados ou acrescidos de material. Além disso, novos capítulos serão escritos. O material já presente é, porém, útil a todos aqueles que queiram iniciar-se nos assuntos aqui expostos. Versões atualizadas serão colocadas na “rede” (no endereço acima indicado) sempre que possível.

O autor agradece a todos os que apresentarem sugestões. Fabulosas somas em dinheiro são oferecidas a todos aqueles que encontrarem erros no texto. Entre os já aquinhoados encontram-se Prof. Matheus Grasselli, Prof. Alexandre T. Baraviera, Prof. Marcos V. Travaglia, Daniel Augusto Cortez, Djogo F. C. Patrão, Cléber de Mico Muramoto, Profa. Katiúscia Nadyne Cassemiro, Urbano Lopes França Junior, Gustavo Barbagallo de Oliveira, Priscila Vieira Franco Gondeck, Darielder Jesus Ribeiro, Henrique Scemes Xavier, Prof. Daniel Augusto Turolla Vanzella, Leonardo Fernandes Dias da Motta, Krishnamurti José de Andrade, Prof. Pedro Tavares Paes Lopes, Diego Cortegoso Assêncio, Fleury José de Oliveira Filho, Paulo Henrique Reimberg, Fabíola Diacenco Xavier, Márcio André Prieto Aparício Lopez, Dorival Gonçalves Netto, Célia Santos Jordão Alves, Bruno Lima de Souza, Leandro Saccoletto, João Pedro Jericó de Andrade, Ronaldo da Silva Alves Batista, Carolina Dias Alexiou, Arão Benjamin Garcea, Cláudio Mayrink Verdun, Leonardo Hanao Gabriel, Felipe Contatto, Victor Bernando Chabu, Bruno Hideki Kimura, Fabrizio Fogaça Bernardi, Alessandro Takeshi Morita Gagliardi, Cedrick Miranda Mello, Thiago Costa Raszeja, Pedro Rangel Caetano, Anderson Seigo Misobuchi, Leandro Silva Pimenta, Alexandre Homrich, Prof. Edélcio Gonçalves de Souza, Lissa de Souza Campos, Ricardo Correa da Silva, Leonardo Almeida Lessa, Marcos Carvalho Brum de Oliveira, Victor Luccas Ramalho Moura, Felipe Dilho Alves, Caio Lopes Junqueira Reis, Bernardo Leal de Oliveira, Jose Eduardo Rodrigues Martins Peres y Peres, Henrique Ay Casa Grande, Ana Camila Costa Esteves, e Rafael Grossi e Fonseca, aos quais somos muito gratos por correções e sugestões. Estas Notas foram escritas durante um intervalo longo de tempo, de sorte que alguns dos seus usuários são hoje colegas professores e fizemos menção a isso na lista acima, quando soubemos. Pedimos desculpas por eventuais omissões.

As Seções 47.A, página 2744, e 25.2.4.1, página 1385, foram originalmente escritas por Daniel Augusto Cortez. A Seção 43.9, página 2485, foi originalmente escrita por André M. Timpanaro, Fleury J. Oliveira e Paulo H. Reimberg. A eles dedicamos agradecimentos especiais.

João Carlos Alves Barata

São Paulo, 4 de abril de 2024

Departamento de Física Matemática do IFUSP

Bons Mots

“All my life, I have worked as a scientist looking for situations where a little elegant mathematics can help us to understand nature. I found problems that I could solve with a teaspoonful of elegant mathematics, in physics and engineering and astronomy and biology. I never worried whether the problems were important or unimportant. So long as the mathematics was beautiful, I was happy”.

Freeman J. Dyson (1923–2020), in “Playing with Numbers”, published in “One Hundred Reasons to be a Scientist”, Copyright 2004 by the Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics (ICTP).

“O comportamento de um físico em relação à Matemática é similar a de um ladrão inteligente em relação ao código penal: ele estuda apenas o suficiente para evitar punições”.

I. M. Gelfand (1913–2009).

“The greatest enemy of knowledge is not ignorance, it is the illusion of knowledge”.

Daniel J. Boorstin (1914–2004), também atribuído a Stephen W. Hawking (1942–2018).

“A mente não é um vaso a ser repleto, mas uma tocha a ser acesa”.

Plutarco (46?–120).

“Mathematical proofs really aren't there to convince you that something is true – they're there to show you why it is true”.

Andrew M. Gleason (1921–2008).

“It can be said with complete confidence that any scientist of any age who wants to make important discoveries must study important problems. Dull or piffling problems yield duff or piffling answers. It is not enough that a problem should be 'interesting' - almost any problem is interesting if it is studied in sufficient depth. ... No, the problem must be such that it matters what the answer is - whether to science generally or to mankind”.

Peter Brian Medawar (1915–1987), 'Advice to a Young Scientist' (1979).

“The public has a distorted view of science, because children are taught in school that science is a collection of firmly established truths. In fact, science is not a collection of truths. It is a continuing exploration of mysteries”.

Freeman Dyson (1923–2020), in *How We Know*, The New York Review of Books, March 10, 2011.

“When a theoretical physicist can not solve a problem he goes for the next more difficult one”.

Sir Michael Francis Atiyah (1929–2019).

“Mathematics is not a deductive science – that's a cliché. When you try to prove a theorem, you don't just list the hypotheses, and then start to reason. What you do is trial and error, experimentation, guesswork”.

Paul R. Halmos, in [208].

“The source of all great mathematics is the special case, the concrete example. It is frequent in mathematics that every instance of a concept of seemingly great generality is in essence the same as a small and concrete special case”.

Paul R. Halmos, in [208].

“Mathematics is a subarea of Applied Mathematics”.

Peter Lax (1926–).

“Mathematics is a part of physics. Physics is an experimental science, a part of natural science. Mathematics is the part of physics where experiments are cheap”.

Vladimir I. Arnold (1937–2010). In “On teaching mathematics”. Address at the discussion on teaching of mathematics in Palais de Découverte in Paris on 7 March 1997.

“In science, self-satisfaction is death. Personal self-satisfaction is the death of the scientist. Collective self-satisfaction is the death of the research. It is restlessness, anxiety, dissatisfaction, agony of mind that nourish science”.

Jacques Lucien Monod (1910–1976), in *New Scientist*, 1976.

“Não existe nenhuma categoria da Ciência à qual se possa dar o nome de Ciência Aplicada. O que existe são a Ciência e as aplicações da Ciência, intimamente ligadas, como frutos à árvore que os gerou”.

Louis Pasteur (1822–1895), in “Pourquoi la France n'a pas trouvé d'hommes supérieurs au moment du péril”, Revue Scientifique (Paris, 1871).

“Disse Kant¹: ‘Eu afirmo que em cada Ciência Natural específica pode-se atingir somente tanto Conhecimento verdadeiro quanto nela houver de Matemática’. De fato, somente dominamos uma teoria das ciências naturais quando expomos seu núcleo matemático e o desvendamos completamente”.

David Hilbert (1862–1943) em “Naturerkennen und Logik”, palestra apresentada em setembro de 1930, em Königsberg, em Congresso da Associação Alemã de Cientistas Naturais e Médicos.

“Não podemos nos permitir acreditar naqueles que em nossos dias, com cenho filosófico e em tom de superiodidade, profetizam a decadência cultural e apologizam o Ignorabimus. Para nós não existe o Ignorabimus e, em minha opinião, também não para as Ciências Naturais. Em lugar do tolo Ignorabimus nosso lema é ‘Nós devemos saber, nós iremos saber’”.

David Hilbert. ibidem.

“A geometry implies the heterogeneity of locus, namely that there is a locus of the Other. Regarding this locus of the Other, of one sex as Other, as absolute Other, what do the most recent developments in topology allow us to posit? I will posit here the term compactness. Nothing is more compact than a fault, assuming that the intersection of everything that is enclosed therein is accepted as existing over an infinite number of sets, the result being that the intersection implies this infinite number. That is the very definition of compactness”.

Jacques Lacan (1901–1981), em *Le Séminaire Jacques Lacan*, Livre XX: Encore, 1972–1973. Texto organizado por Jacques-Alain Miller. Paris: Éditions du Seuil. Traduzido e citado por Alan Sokal e Paul Bricmont in *Intellectual Impostures*.

Para a definição de compacidade, vide Seção 32.3, página 1609.

“Um pesquisador não ‘crê’, ele simplesmente pesquisa. [...] Por deformação profissional, talvez. Em todo caso, como se fosse um jogo”.

Georges Dumézil (1898–1986), filólogo, em entrevista a Laurence Gilbert, do “Le Point”, 1983.

“There is no such thing as a unique scientific vision, any more than there is a unique poetic vision. Science is a mosaic of partial and conflicting visions”.

Freeman J. Dyson (1923–2020), [132], cap. I.

* * * * *

“Unprovided with original learning, unformed in the habits of thinking, unskilled in the arts of composition, I resolved to write a book”.

Edward Gibbon (1737–1794).

“Talvez eu não tenha tido êxito em fazer as coisas difíceis tornarem-se fáceis, mas pelo menos eu nunca fiz um assunto fácil tornar-se difícil”.

F. G. Tricomi (1897–1978).

“... E costumava dizer que nenhum livro é tão ruim a ponto de nada conter de valor...”.

Plínio, o Novo (61–114), a respeito de seu tio, Plínio, o Velho (23–79).

“Would I had phrases that are not known, utterances that are strange, in new language that has not been used, free from repetition, not an utterance that has grown stale, which men of old have spoken”.

Khakheperresenb (ci. 1900 AC), escriba egípcio. Citado em “The Burden of the Past and the English Poet” de Walter Jackson Bate.

“Tudo que deveria ter sido dito já o foi, mas como ninguém ouvia, tudo tem de ser dito novamente”.

André Paul Guillaume Gide (1869–1951).

“Uma obra nunca é terminada, ela é apenas abandonada”.

Atribuído a Paul Valéry (1871–1945).

¹Immanuel Kant (1724–1804).

Como Ler Este Livro

“Reading made Don Quixote a gentleman. Believing what he read made him mad”.

George Bernard Shaw (1856–1950).

O leitor deste livro não deve possuir o temor de que o mesmo deva (nem a expectativa de que o mesmo possa) ser lido linearmente, ou seja, na sequência numérica crescente dos capítulos e seções. Ele não foi concebido dessa forma e tal concepção não seria exequível devido à variedade de assuntos, às diferenças de nível de abordagem e à complexidade das conexões entre os diferentes temas. O *Conhecimento* não é um conjunto totalmente ordenado pela relação de complexidade conceitual ou pela relação de motivação (para a definição da noção de ordem total em conjuntos, vide página 76).

Fizemos um esforço para tornar autosuficientes as diversas seções e os diversos capítulos, incluindo sempre que possível, por vezes de forma repetida, todas as definições localmente necessárias. Como é natural, porém, nem sempre é possível manter essa linha de organização, de modo que ocorrem também muitas referências cruzadas entre seções e capítulos.

Os diversos capítulos não foram escritos em ordem crescente de complexidade. Por vezes, a motivação para um determinado tema é apresentada em um capítulo anterior, mas por vezes essa motivação surge em um capítulo posterior. Nos capítulos sobre equações diferenciais, por exemplo, a discussão de aplicações em Física é postergada para o Capítulo 43, página 2415, e o leitor interessado na motivação para certos tratamentos pode sem perdas consultar esse capítulo antes ou durante o estudo de capítulos que lhe antecedem.

Um problema semelhante ocorre com temas ligados à Topologia e à Análise. Os capítulos dedicados a esses assuntos servem a capítulos que lhes sucedem, mas também, em parte, a capítulos que lhes antecedem. Cabe ao leitor perceber suas necessidades formativas, avançando ou retrocedendo na leitura conforme lhe aprouver. A consulta ao Índice Remissivo (página 2824) ou à lista de Capítulos e Seções que compõem o texto (página 6) deve ser de valia para tal.

Notação e Advertências

Para facilitar a consulta e a leitura, listamos aqui sem muitos comentários um pouco da notação que empregaremos nestas Notas.

- Se z é um número complexo denotaremos seu complexo conjugado por \bar{z} . A notação z^* (mais comum em textos de Física) pode ocorrer mais raramente.
- O símbolo $A := B$ ou $B =: A$ denota que A é definido pela expressão B . O símbolo $A \equiv B$ indica que A e B são duas notações distintas para o mesmo objeto.
- Sejam A e B conjuntos. Se A é um subconjunto de B , denotamos esse fato por $A \subset B$ ou por $B \supset A$. Por $A \subsetneq B$ ou $B \supsetneq A$ denotamos o fato de A ser um subconjunto próprio de B , ou seja, $A \subset B$, mas $A \neq B$.
- Se $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ são vetores reais com n componentes (ou seja, elementos de \mathbb{R}^n), então

$$\langle x, y \rangle_{\mathbb{R}} := x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

define o chamado *produto escalar usual em \mathbb{R}^n* .

- Se $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ são vetores complexos com n componentes (ou seja, elementos de \mathbb{C}^n), então

$$\langle x, y \rangle_{\mathbb{C}} := \bar{x}_1 y_1 + \dots + \bar{x}_n y_n$$

define o chamado *produto escalar usual em \mathbb{C}^n* .

- Se $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ são vetores complexos com n componentes (ou seja, elementos de \mathbb{C}^n), então

$$\beta(x, y) := x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

define a chamada *forma bilinear usual em \mathbb{C}^n* .

- $\text{Mat}(\mathbb{R}, m, n)$ ou $\text{Mat}(m, n, \mathbb{R})$ designa o conjunto de todas as matrizes reais $m \times n$ (m linhas e n colunas). Analogamente, $\text{Mat}(\mathbb{C}, m, n)$ ou $\text{Mat}(m, n, \mathbb{C})$ designa o conjunto de todas as matrizes complexas $m \times n$. O conjunto de todas as matrizes quadradas $n \times n$ com entradas reais (complexas) será denotado simplesmente por $\text{Mat}(\mathbb{R}, n)$ (por $\text{Mat}(\mathbb{C}, n)$).
- Se A é um elemento de $\text{Mat}(\mathbb{R}, n)$ ou de $\text{Mat}(\mathbb{C}, n)$, então A^T designa a matriz transposta de A , ou seja, a matriz cujos elementos de matriz ij são $(A^T)_{ij} = A_{ji}$.
- Se A é um operador linear em um espaço vetorial complexo (com um certo produto escalar), seu adjunto é denotado por A^* . Em textos de Física é mais comum denotá-lo por A^\dagger , mas não usaremos isso aqui.
Assim, se $A \in \text{Mat}(\mathbb{C}, n)$, então A^* será a adjunta de A (em relação ao produto escalar usual, acima). O elemento de matriz ij de A^* será $(A^*)_{ij} = \overline{A_{ji}}$.
- Denotaremos o operador identidade agindo em um espaço vetorial (a matriz identidade, agindo em um espaço vetorial de dimensão finita) pelo símbolo $\mathbb{1}$. Esse símbolo também representará a unidade de uma álgebra.
- Designaremos um produto escalar entre dois vetores u e v sempre por $\langle u, v \rangle$ e nunca por (u, v) , para não causar confusão com a notação para par ordenado. Outra notação possível é aquela empregada frequentemente em textos de Mecânica Quântica: $\langle u | v \rangle$, mas faremos raramente uso da mesma.
- Ainda sobre produtos escalares, seguiremos sempre a convenção dos textos de Física: um produto escalar em um espaço vetorial sobre os complexos é linear em relação ao segundo argumento e antilinear em relação ao primeiro. Assim, se α e β são números complexos, teremos $\langle \alpha u, \beta v \rangle = \bar{\alpha} \beta \langle u, v \rangle$. Textos de Matemática adotam por vezes a convenção oposta (ou mesmo ambas!).
- Sobre o emprego das palavras *função*, *aplicação*, *mapeamento*, *mapa*, *funcional*, *operador*, *operação*, *produto* e *forma*, que por vezes causam perplexidade em estudantes, remetemos ao comentário à página 58.

- Dado um conjunto $X \neq \emptyset$, denota-se por $\mathbb{P}(X)$ a coleção de todos os subconjuntos de X . $\mathbb{P}(X)$ é denominado o *conjunto das partes* de X .
- A topologia usual da reta real \mathbb{R} será denotada aqui por $\tau_{\mathbb{R}}$.
- A σ -álgebra de Borel de \mathbb{R} será (quase sempre) denotada aqui por $\mathcal{M}[\tau_{\mathbb{R}}]$.
- A σ -álgebra dos subconjuntos de \mathbb{R} mensuráveis por Lebesgue será (quase sempre) denotada aqui por \mathcal{M}_{μ_L} .
- Por \mathbb{N} denotamos o conjunto dos números naturais: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Por \mathbb{N}_0 denotamos o conjunto dos números naturais, incluindo o zero: $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. O leitor deve ser advertido, porém, que essa convenção não é universal. O padrão ISO 31-11 (dedicado a sinais e símbolos matemáticos) recomenda a convenção $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ e $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$. O leitor deve ter cuidado, portanto, ao comparar textos diferentes.
- Para $x \in \mathbb{R}$, o símbolo $\lfloor x \rfloor$ designa o maior inteiro menor ou igual a x . O símbolo $\lceil x \rceil$ designa o menor inteiro maior ou igual a x .

Em particular, para $n \in \mathbb{Z}$ valem

$$\lfloor n/2 \rfloor = \begin{cases} n/2, & n \text{ par}, \\ (n-1)/2, & n \text{ ímpar}, \end{cases} \quad \lceil n/2 \rceil = \begin{cases} n/2, & n \text{ par}, \\ (n+1)/2, & n \text{ ímpar}. \end{cases}$$

- O símbolo \square indica o fim de um enunciado. O símbolo \blacksquare indica o fim de uma demonstração. O símbolo \spadesuit indica o fim do enunciado de um exercício. O símbolo \boxtimes indica o fim do enunciado de um exemplo. O símbolo \clubsuit indica o fim de uma observação, nota ou comentário. O símbolo \spadesuit indica o fim de uma definição.
- $\mathcal{B}(X)$ designa o conjunto de operadores limitados agindo em um espaço de Banach X . $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ designa o conjunto de operadores limitados agindo em um espaço de Hilbert \mathcal{H} .
- $C(L)$ designa o conjunto de todas as funções contínuas (reais ou complexas, dependendo do caso), definidas em L (na topologia que se estiver considerando em L).
- $\mathfrak{B}(L)$ designa a coleção de todos os conjuntos Borelianos de L (em relação à topologia que se estiver considerando em L). $B_l(L)$ designa a coleção de todas as funções Borelianas (reais ou complexas, dependendo do caso), definidas em L .
- O domínio de um operador T (agindo em um espaço de Banach ou de Hilbert) será denotado por $D(T)$ ou por $\text{Dom}(T)$. A imagem (“range”) de T será denotada por $R(T)$ ou por $\text{Ran}(T)$ ou, mais raramente, por $\text{Im}(T)$, mas essa última notação pode causar confusão com a da parte imaginária de um número complexo ou mesmo com a da parte imaginária de um operador agindo em um espaço de Hilbert: $\text{Im}(T) := \frac{1}{2i}(T - T^*)$.
- A noção de *propriedade válida quase em toda parte* é definida na página 1451.

• Intervalos

Ainda não introduzimos os números reais nem a relação de ordem entre eles mas, como essas noções são conhecidas, vamos colocar aqui uma palavra sobre a nomenclatura usada para descrever intervalos da reta real. Para $a < b \in \mathbb{R}$ o conjunto

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}, \text{ com } a < x < b\}$$

é dito ser um intervalo aberto. Para $a \leq b \in \mathbb{R}$ o conjunto

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, \text{ com } a \leq x \leq b\}$$

é dito ser um intervalo fechado. Para $a < b \in \mathbb{R}$ os conjuntos

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R}, \text{ com } a \leq x < b\}$$

e

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R}, \text{ com } a < x \leq b\}$$

são ditos ser intervalos semiabertos (ou semifechados).

É importante dizer que a nomenclatura “aberto” ou “fechado” acima é usada independentemente da topologia usada em \mathbb{R} (a noção de topologia será introduzida adiante).

Salvo menção em contrário, empregaremos por vezes as notações

$$\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R}, x > 0\} = (0, \infty)$$

e

$$\mathbb{R}_{0+} := \{x \in \mathbb{R}, x \geq 0\} = [0, \infty).$$

• Delta de Krönecker

De i e j pertencem a um conjunto contável C , definimos o chamado *delta de Krönecker* por

$$\delta_{ij} \equiv \delta^{ij} \equiv \delta_i^j \equiv \delta_j^i := \begin{cases} 1, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

para todos $i, j \in C$. As diferentes notações δ_{ij} , δ^{ij} , δ_i^j e δ_j^i ocorrem, por exemplo, na Geometria Diferencial e na Teoria da Relatividade.

• A esfera unitária

Para $n \in \mathbb{N}_0$, denotaremos por \mathbb{S}^n a chamada *esfera unitária* em \mathbb{R}^{n+1} : o lugar geométrico de todos os pontos de \mathbb{R}^{n+1} situados a uma distância Euclidiana igual a 1 da origem:

$$\mathbb{S}^n := \left\{ (y^1, \dots, y^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sqrt{(y^1)^2 + \dots + (y^{n+1})^2} = 1 \right\}.$$

Note-se que $\mathbb{S}^0 = \{-1, 1\}$.

• Classes C^k

Por $C(\mathbb{R})$ denotaremos a coleção de todas as funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que sejam contínuas. Por $C_0(\mathbb{R})$ denotaremos a coleção de todas as funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que sejam contínuas e de suporte compacto.

Denotamos por $C^1(\mathbb{R})$ a coleção de todas as funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas, diferenciáveis e com derivada contínua. Tais funções são ditas *funções continuamente diferenciáveis*, ou de *classe C^1* . Denotamos por $C^k(\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{N}$ a coleção de todas as funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas e cujas k primeiras derivadas f' , f'' , \dots , $f^{(k)}$ existam e sejam igualmente contínuas. Tais funções são ditas ser de *classe C^k* . Por $C^\infty(\mathbb{R})$ denotamos as funções infinitamente diferenciáveis (as quais serão, ocasionalmente, denominadas *funções suaves*). Por $C_0(\mathbb{R})$ denotaremos a coleção de todas as funções contínuas e de suporte compacto. Por $C_0^\infty(\mathbb{R})$ denotaremos a coleção de todas as funções infinitamente diferenciáveis e de suporte compacto.

As diversas notações acima estendem-se de forma natural a funções definidas em subconjuntos de \mathbb{R} , como intervalos abertos ou fechados, compactos ou não. Aqui, o estudante deve tomar certos cuidados. Por exemplo, $C((0, 1))$ contém, entre outras, funções contínuas que divergem em 0 e/ou em 1, mas $C([0, 1])$ só contém funções limitadas.

Por Que Precisamos de Demonstrações?

“My friend G. H. Hardy², who was professor of pure mathematics, enjoyed this pleasure [in mathematical demonstrations] in a very high degree. He told me once that if he could find a proof that I was going to die in five minutes he would of course be sorry to lose me, but this sorrow would be quite outweighed by pleasure in the proof”.
Bertrand Russell (1872–1970).

Segundo os dicionários, *demonstrar*, ou *provar*, significa estabelecer que algo é correto ou verdadeiro por meio de raciocínio lógico e conclusivo, ou seja, livre de exceções ou de contradições. Uma dúvida que estranhamente acomete alguns estudantes iniciantes no estudo mais avançado de Matemática e Física é: por que é necessário demonstrar afirmações e resultados? Na resposta a essa questão podem ser listadas, naturalmente, razões ligadas à honestidade intelectual e mesmo razões ligadas à estética, mas o fato pragmático é que é muito fácil elaborar conjecturas que, à primeira vista, parecem plausíveis, mas que se revelam falaciosas. Apresentamos a seguir uma pequena, mas significativa, lista delas, algumas com relevância histórica.

Desejamos que essa pequena lista faça os estudantes refletir melhor antes de aceitar resultados não demonstrados.

- Considere a seguinte lista de números inteiros positivos³:

31	é um número primo,
331	é um número primo,
3331	é um número primo,
33331	é um número primo,
333331	é um número primo,
3333331	é um número primo,
33333331	é um número primo.

Isso parece sugerir um padrão: todo número da forma

$$\underbrace{3 \cdots 3}_m 1 \text{ para } m \in \mathbb{N},$$

m vezes

seria primo. Sucede, porém, que o número seguinte da lista (que corresponde a $m = 8$), ou seja, 333333331, não é um número primo, pois

$$333333331 = 17 \times 19.607.843.$$

- Outro exemplo similar, mas de certa forma oposto, provém da contemplação da seguinte lista de números:

12	não é um número primo,
121	não é um número primo,
1211	não é um número primo,
12111	não é um número primo,
121111	não é um número primo,
1211111	não é um número primo,
12111111	não é um número primo,
121111111	não é um número primo,
1211111111	não é um número primo.

Ela sugere que nenhum número da forma

$$12 \underbrace{1 \cdots 1}_m, \quad m \in \mathbb{N},$$

m vezes

²Godfrey Harold Hardy (1877–1947).

³Todos os números que aqui apresentamos são representados na base decimal.

é primo. Essa conjectura é verdadeira até $m = 135$ (!), porém, ela falha, infelizmente, para $m = 136$, onde o número em questão revelou-se como primo! Esse número é da ordem de 10^{138} ! Isso é particularmente notável, pois os números primos vão se tornando mais e mais escassos quando crescem.

Comentário. Uma observação sobre os dois últimos exemplos. Um leitor experiente pode desconfiar que as conjecturas apresentadas acima não podem ser sempre corretas, se observar que a regularidade em números como $\underbrace{3 \cdots 3}_m 1$ ou $12 \underbrace{1 \cdots 1}_m$, ou seja, a repetição sucessiva do dígito 3 ou do dígito 1, só ocorre na representação na base decimal, não existindo em outras bases. O fato de um número ser ou não primo não pode depender da base que é usada em sua representação. ♣

- *Números de Fermat.* Considere-se a sequência $F_n := 2^{2^n} + 1$, com $n = 0, 1, 2, \dots$. Os números F_n são conhecidos como *números de Fermat*⁴. É fácil constatar que eles são primos para $n = 0, 1, 2, 3, 4$. De fato, $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$, $F_4 = 65.537$, todos primos.

Isso levou Fermat a conjecturar em 1650 que todo F_n seria primo. Porém, Euler verificou em 1732 que $F_5 = 4.294.967.297 = 641 \times 6.700.417$ e, portanto, F_5 não é primo!

Como os números F_n crescem muito violentamente com n , a verificação de suas propriedades é extremamente difícil, mesmo com os computadores atuais. Até a data presente (2024) os únicos F_n conhecidos por serem primos são justamente os listados acima: F_0, F_1, F_2, F_3 e F_4 . Mais de três centenas de números de Fermat puderam ser fatorizados e, portanto, sabe-se que não são primos.

É uma questão ainda em aberto se há infinitos números primos dentre os números de Fermat.

E. 0.1 Exercício. Resolva essa questão. *

- *Números de Eisenstein.* Eisenstein⁵ conjecturou que todos os números da sequência $2^2 + 1, 2^{2^2} + 1, 2^{2^{2^2}} + 1, 2^{2^{2^{2^2}}} + 1$ seriam primos. Eles são definidos iterativamente por $E_{n+1} = 2^{E_n} + 1$, $n \in \mathbb{N}$, com $E_1 = 2^2 + 1$. Os três primeiros números dessa lista são 5, 17, 65537, os quais, de fato, são primos.

Infelizmente, Selfridge⁶ verificou em 1953, usando um computador, que $E_4 = 2^{2^{2^{2^2}}} + 1$ não é primo, pois é divisível por 825.753.601. É uma questão ainda em aberto saber se há infinitos números primos na lista proposta por Eisenstein.

E. 0.2 Exercício. Resolva essa questão. *

- *Números de Mersenne.* Os *números de Mersenne*⁷ são números da forma $M_n := 2^n - 1$, $n \in \mathbb{N}$. Por diversas razões, é uma questão relevante encontrar números primos dentre eles. Uma coisa que facilmente se vê é que se n não é primo, então M_n também não pode ser primo. De fato, se $n = rs$ com r e s naturais e maiores que 1, então é elementar constatar que

$$M_{rs} = 2^{rs} - 1 = (2^r - 1)(1 + 2^r + 2^{2r} + 2^{3r} + \cdots + 2^{(s-1)r}).$$

Verifique! Isso claramente diz que M_{rs} não é primo. Assim, cabe perguntar quais números da forma $M_p = 2^p - 1$ com p primo são eles também primos. Tais números primos são denominados *primos de Mersenne*. Cabe conjecturar, então, se todos os números da forma M_p com p primo são primos de Mersenne. Um primeiro contraexemplo surge com $p = 11$, pois $M_{11} = 2^{11} - 1 = 2047 = 23 \times 89$, que, assim, não é primo.

É uma questão ainda aberta (2024) saber se há infinitos primos de Mersenne. Essa questão é relevante pois é relativamente simples algoritmicamente gerar números de Mersenne e gerar números primos “grandes” é importante em Criptografia. Atualmente (2024) são conhecidos 51 primos de Mersenne, maior deles sendo $M_{82.589.833}$, que é um número da ordem de $10^{24.862.048}$.

E. 0.3 Exercício. Resolva essa questão. *

⁴Pierre de Fermat (1607–1665).

⁵Ferdinand Gotthold Max Eisenstein (1823–1852).

⁶John Lewis Selfridge (1927–2010).

⁷Marin Mersenne (1588–1648).

- É fácil verificar que $3^2 + 4^2 = 5^2$ e que $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$. Isso parece sugerir um padrão, mas infelizmente tem-se $3^4 + 4^4 + 5^4 + 6^4 \neq 7^4$.

Inspirado na possibilidade sugerida pelos dois primeiros casos, Euler⁸ lançou em 1769 uma conjectura: se existirem números n naturais a_1, \dots, a_n tais que para algum $k \in \mathbb{N}$ e algum $b \in \mathbb{N}$ valer

$$(a_1)^k + \dots + (a_n)^k = b^k,$$

então deve sempre valer que $n \geq k$. Como exemplo, tomemos

$$30^4 + 120^4 + 272^4 + 315^4 = 353^4,$$

onde $n = k = 4$.

Um contraexemplo à conjectura de Euler foi encontrado apenas em 1966. Com auxílio de um dos primeiros supercomputadores, L. J. Lander and T. R. Parkin puderam constatar⁹ que

$$27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5 = 144^5,$$

onde $n = 4$ mas $k = 5$ e, portanto, $n < k$.

Outro contraexemplo com $n = 3$ e $k = 4$ é

$$2682440^4 + 15365639^4 + 18796760^4 = 20615673^4,$$

encontrado por Elkies¹⁰ junto a infinitos outros contraexemplos¹¹.

A conjectura acima foi conhecida como *conjectura de Euler para soma de potências*, e é relacionada à célebre *última conjectura de Fermat*.

Os exemplos de conjecturas falhas, acima, são todos provenientes da Aritmética, mas há também conjecturas plausíveis, e erradas, em outras áreas. Seguem alguns exemplos.

- Considere-se a conjectura que sugere que para todo $n \in \mathbb{N}$ valha

$$\int_0^\infty \left(\prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{x}{k}\right) \right) \frac{\text{sen}(4x)}{x} dx = \frac{\pi}{2} \approx 1,57079632679\dots$$

Essa conjectura está correta para todo n entre 1 e 30. Porém, para $n = 31$ tem-se

$$\int_0^\infty \left(\prod_{k=1}^{31} \cos\left(\frac{x}{k}\right) \right) \frac{\text{sen}(4x)}{x} dx = 1,57079632533\dots \neq \frac{\pi}{2}.$$

Observe que a diferença entre os resultados inicia nos três últimos dígitos, ou seja, é da ordem de 10^{-9} !

- A fórmula

$$\int_0^\infty \left(\prod_{k=1}^n \frac{\text{sen}(x/(2k-1))}{x/(2k-1)} \right) dx = \frac{\pi}{2}$$

vale para todo $n = 1, 2, \dots, 7$. Porém, para $n = 8$ tem-se

$$\int_0^\infty \left(\prod_{k=1}^8 \frac{\text{sen}(x/(2k-1))}{x/(2k-1)} \right) dx = \left(\frac{467.807.924.713.440.738.696.537.864.469}{935.615.849.440.640.907.310.521.750.000} \right) \pi.$$

O fator entre parenteses na última expressão difere de $1/2$ por cerca de $7,35 \times 10^{-12}$.

⁸Leonhard Euler (1707–1783).

⁹L. J. Lander and T. T. Parkin, “Counterexample to Euler’s conjecture on sums of like powers”. Bull. Amer. Math. Soc. **72** (6): 1079 (1966). doi:10.1090/S0002-9904-1966-11654-3.

¹⁰Noam David Elkies (1966–).

¹¹N. Elkies, “On $A^4 + B^4 + C^4 = D^4$ ”. Mathematics of Computation. **51**, 184: 825-835 (1988). doi:10.1090/S0025-5718-1988-0930224-9.

Parte I

Capítulos Introdutórios