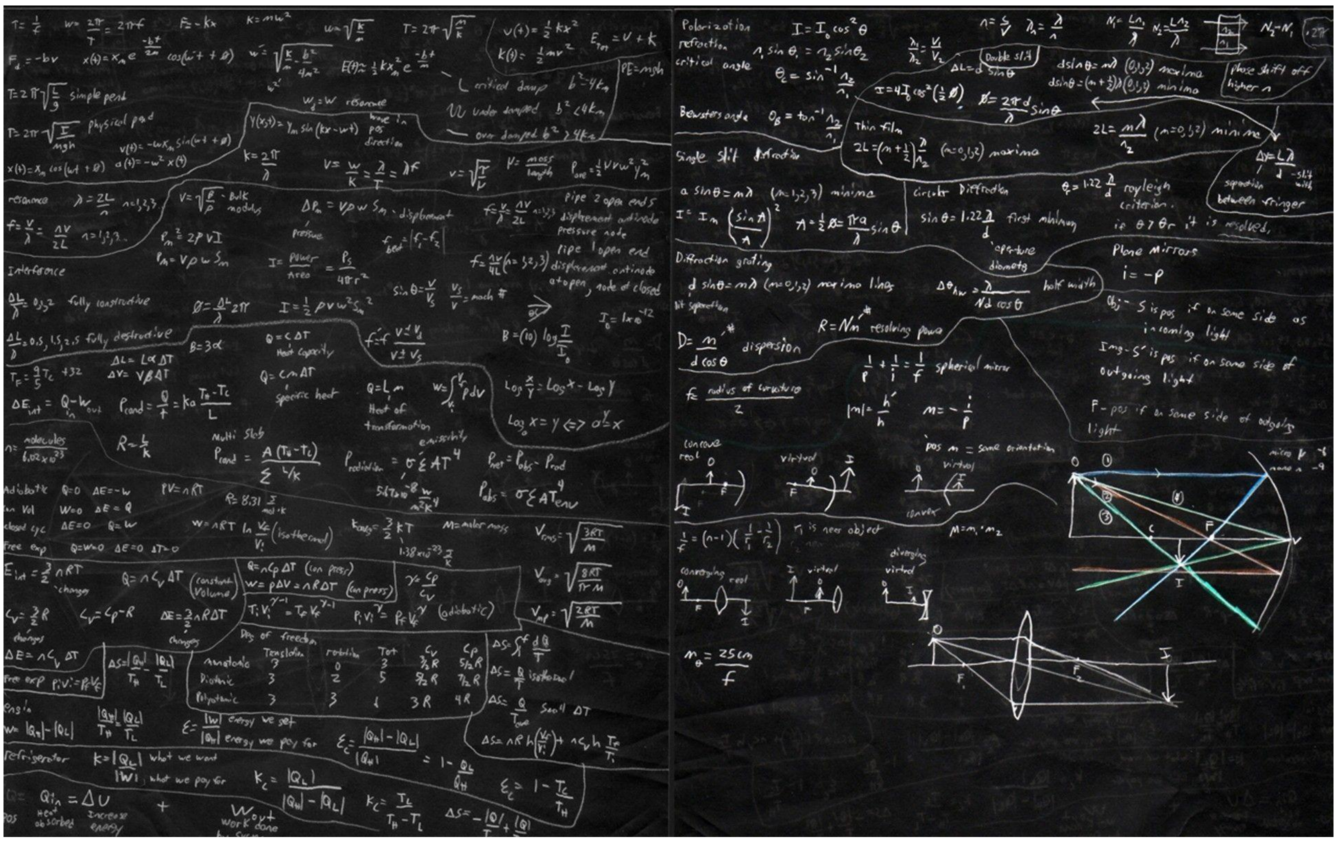
Notas em Computação Quântica

Ricardo Alvarenga

2024



Sumário

Lista de Figuras

1 Álgebra Linear

1.1 Vetores

Vetores são seguimentos orientados (início em 0, 0) que estão sempre no plano cartesiano. Vetores são usados para representar grandezas escalares (massa, pressão, etc.) e grandezas físicas vetoriais (velocidade, força e deslocamento).

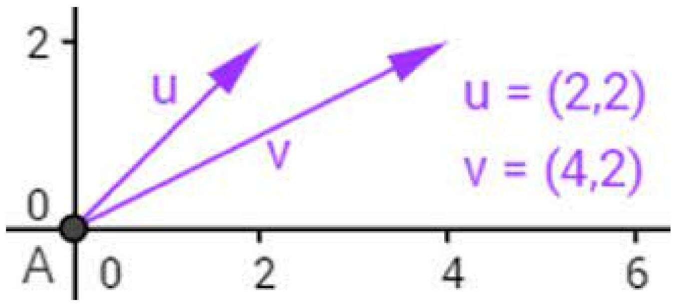


Figura 1: Exemplos de Vetores, **u** e **v**

1.1.1 Vetores com duas dimensões - $\mathbf{R}^2$

x, y podem assumir qualquer valor *Real*.

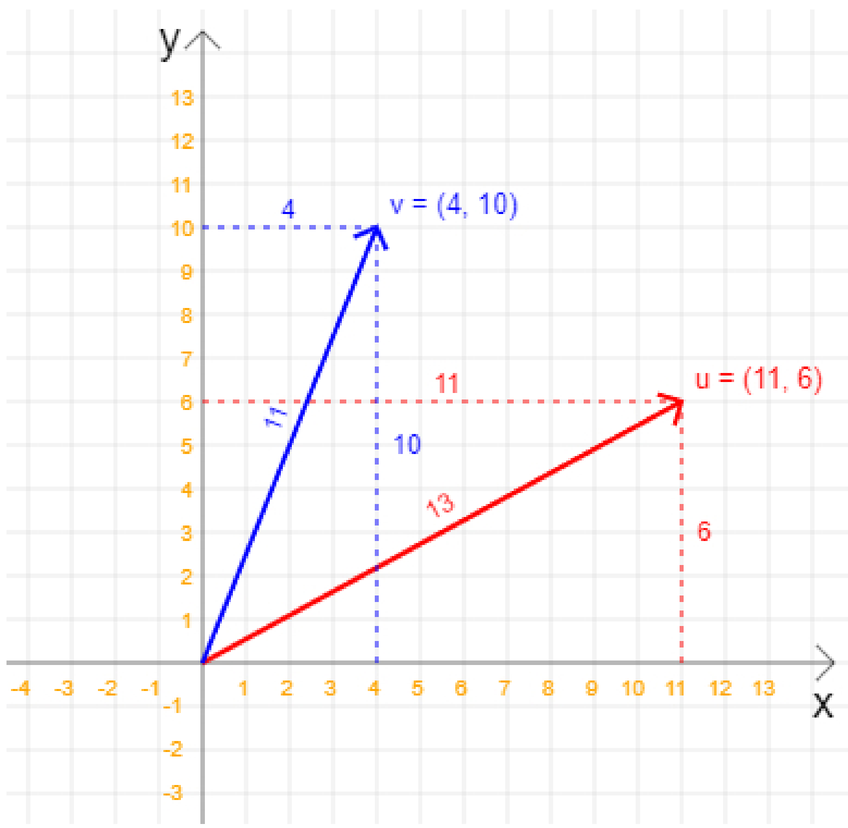


Figura 2: Vetores em $\mathbf{R}^2(x, y)$

1.1.2 Vetores com três dimensões - $\mathbf{R}^3$

x, y, z podem assumir qualquer valor *Real*.

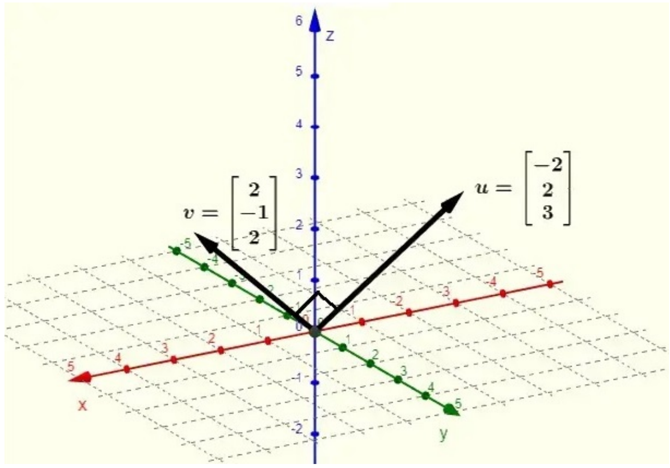


Figura 3: Vetores em $\mathbf{R}^3(x, y, z)$

1.1.3 Vetores com n dimensões - $\mathbf{R}^n$

Os vetores com n dimensões são de difícil (ou impossível) representação gráfica.
Um vetor $\mathbf{R}^4$ é indicado da seguinte forma: $\mathbf{R}^4(x, y, z, w)$

1.1.4 Como colocar um vetor no plano $\mathbf{R}^3$(x, y, z)

Veja na figura 4 o vetor $u = (2, 4, 3)$.

1.1.5 Tipos de vetores

- Vetor Nulo: Todos valores iguais a zero. Ex: $v = (0, 0, 0)$
- Vetor simétrico ou oposto: Ocorre quando dois vetores são opostos e contêm o mesmo módulo e mesma direção. Ex: $v = (x, y), -v = (-x, -y)$
- Vetor unitário: Possui módulo (tamanho) igual a 1. $|v| = 1$
- Vetores colineares ou paralelos: Ocorrem quando dois vetores tiverem a mesma direção, na mesma reta ou retas paralelas.
- Vetores coplanares: Quando dois vetores fazem parte de um mesmo plano.

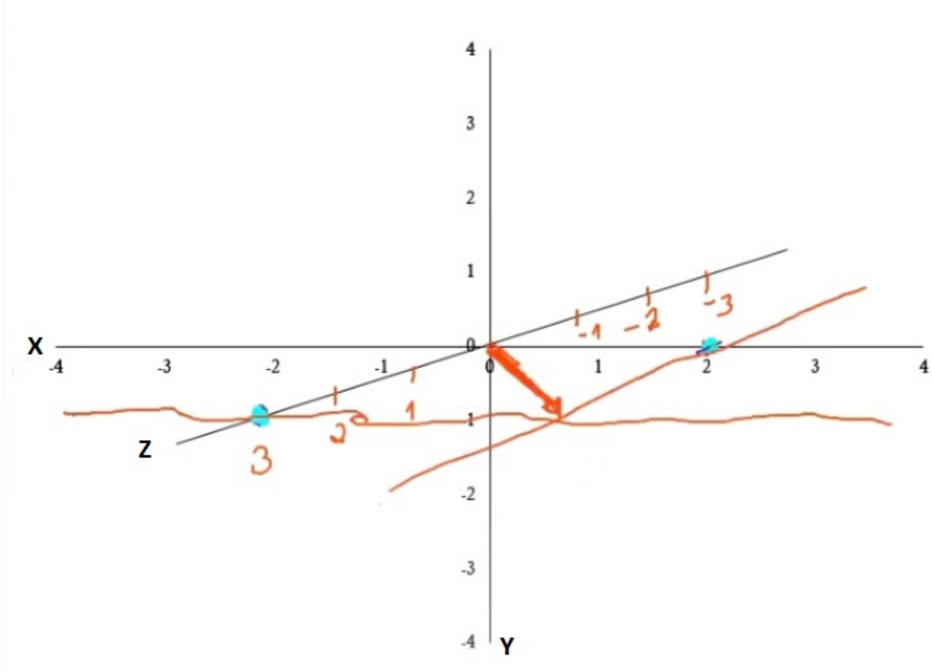


Figura 4: Vetor em $\mathbf{R}^3$

1.1.6 Igualdade de vetores

Dois vetores serão iguais se:

- $x_1 = x_2$
- $y_1 = y_2$
- $z_1 = z_2$ vetores em R^3
- $w_1 = w_2$ vetores em R^4

$u = (3, x + 4)$ $v = (3, 8)$ se $x = 4$ os vetores serão iguais.
Sejam: $u = (x - 1, 3)$, $v = (3, 2y - 1)$. Determine o valor de x e y para que $u = v$.
$x = 4$, $y = 2$

1.1.7 Soma de vetores

Para realizar a soma de dois vetores temos que efetuar a soma de cada elemento com seu correspondente.

Exemplo:
$u = (2, 3)$, $v = (5, 6)$
$u + v = (7, 9)$

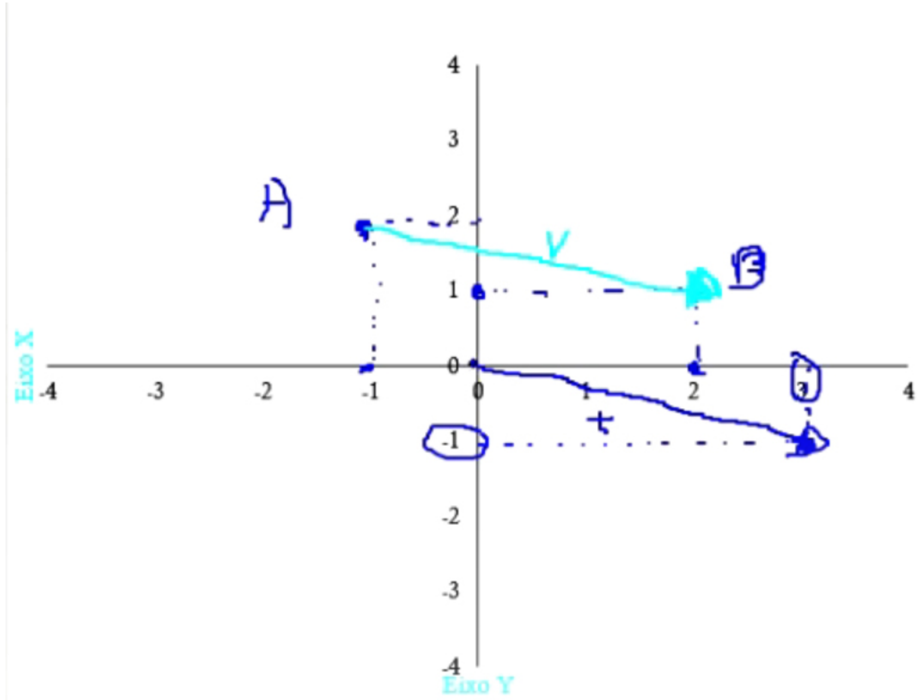


Figura 5: Subtração de Vetores

1.1.8 Subtração de vetores

$A = (-1, 2)$ $B = (2, 1)$. $v = \overrightarrow{AB}$ o vetor está "perdido"no plano cartesiano. Para corrigir isso, realizamos a subtração:

$B - A = (2, 1) - (-1, 2) = (3, -1)$. Que resulta no vetor $t = (3, -1)$, conforme figura 5.

Outro exemplo: Dois vetores $u = (-1, 3)$ e $v = (10, 20)$, a subtração $u - v$ resulta em $(-11, -17)$.

Sejam u e v vetores no $\mathbf{R}^n$[1]: $u = (a_1, a_2, ..., a_n)$ e $v = (b_1, b_2, ..., b_n)$

$u - v = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, ..., a_n - b_n)$.

1.1.9 Multiplicação de dois vetores (Produto Escalar)

Assim como na soma e subtração de vetores, podemos multiplicar vetores. O nome correto deste tipo de operação é *Produto Escalar*.

Sejam u e v vetores no $\mathbf{R}^n$: $u = (a_1, a_2, ..., a_n)$ e $v = (b_1, b_2, ..., b_n)$

$u * v = (a_1 * a_2 + b_1 * b_2, ..., +a_n * b_n)$.

Exemplo: $u = (1, 2)$, $v = (5, 3)$ Então: $u * v = (1, 2, 3, 4) * (5, 3, 1, 4) = (5 + 6 + 3 + 16) = 30$

1.1.10 Multiplicação por um escalar

Multipliacação por um escalar é multiplicar um número por um vetor.

Sejam: $t = (x_1, x_2, ..., x_n)$ e um número a

Temos: $at = a(x_1, x_2, ..., x_n) = (a * x_1, a * x_2, ..., a * x_n)$

Exemplo:

$u = (4,5)$ e $a = 2$, $au = 2(4,5) = (8,10)$

1.1.11 Módulo/Norma (Norm) de um vetor

A norma ou módulo de um vetor é o comprimento desse vetor, que pode ser calculado por meio da distância de seu ponto final até a origem.

A norma de u é denotada por $\|u\|$.

Considerando o vetor $u = (a_1, a_2, ..., a_n)$, calculamos sua norma, ou módulo, da seguinte forma[1, 2]: $\|u\| = \sqrt{u * u} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}$

Exemplo: $v = (5,6)$, $\|v\| = \sqrt{(v * v)} = \sqrt{(5,6) * (5,6)} = \sqrt{61}$

ou de forma direta:

$\|v\| = \sqrt{(5^2 + 6^2)} = \sqrt{61}$

Se $\|u\| = 1$, temos um vetor unitário.

1.1.12 Ângulo entre dois vetores (Ângulo Θ de dois vetores)

Considerando dois vetores que partem do mesmo ponto, o ângulo entre eles é representado por Θ. O ângulo Θ é dado por:

$cos\Theta = \frac{u*v}{\|u\|*\|v\|}$

Exemplo:

Sendo os vetores $u = (2,2)$ e $v = (0,-2)$, encontre o ângulo Θ:

$cos\Theta = \frac{u*v}{\|u\|*\|v\|} = \frac{-4}{\sqrt{(8)*2}} = \frac{-2}{\sqrt{8}} = \frac{-2}{\sqrt{2}*\sqrt{4}} = \frac{\frac{-2}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} * \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2} = 135°$

1.1.13 Vetores colineares

Dois vetores são colineares (paralelos), quando:

$v = (x_1, y_1)$ e $t = (x_2, y_2)$

$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = a$

Exemplo: Verifique se u e v são colineares, sendo $u = (-3,2)$ e $v = (6,-4)$

$\frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$ então: $a = -\frac{1}{2}$

1.1.14 Ortogonalidade de dois vetores

Considerando dois vetores coplanares (em R^2), eles serão ortogonais se o Θ, entre eles, for 90°.

Matematicamente: $u * v = 0$

Exemplo: Verifique se os vetores $u = (1,2)$ e $v = (-2,1)$, são ortogonais:

$u * v = (1 * -2 + 2 * 1) = (-2 + 2) = 0$

1.1.15 Vetores perpendiculares

Dois vetores, em R^n com $n \geq 3$, são perpendiculares entre si, se o seu produto escalar for igual a zero.

1.1.16 Projeção ortogonal entre dois vetores

A projeção ortogonal de um vetor v sobre outro vetor u é a componente de v na direção de u. Essa projeção é chamada de "ortogonal"porque é perpendicular ao vetor de referência u.

A projeção ortogonal de v sobre u, denotada por $proj_u(v)$, é calculada usando a seguinte fórmula: $proj_u(v) = \left(\frac{u \cdot v}{\|u\|^2}\right) u$

Onde:$u * v$ é o produto escalar entre os vetores u e v. - $\|u\|$ é a norma (ou magnitude) do vetor u.

Essa fórmula nos diz que a projeção ortogonal de v sobre u é obtida multiplicando o vetor u pela fração $\frac{u*v}{\|u\|^2}$, que é a magnitude da projeção de v na direção de u.

2 Teste

O estado quântico $|\psi\rangle$ é representado como um ket vector.

$|0\rangle$, $|1\rangle$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

$\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$

O conjunto dos números reais é denotado por $\mathbb{R}$.

Referências

[1] Seymour Lipschutz. *Álgebra linear - 2ª Edição*. McGraw-Hill, 1972.

[2] Howard Anton and Chris Rorres. *Álgebra Linear com Aplicações - 10ª Edição*. Bookman Editora, 2012.